TOISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTION GRAAFINEN TARKASTELU LUKION MATEMATIIKASSA

Alli Majala

Pro gradu -tutkielma
Joulukuu 2017

MATEMAATTISET TIETEET
LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
OULUN YLIOPISTO

Alkusanat

Oulun yliopistossa aloitettiin vuoden 2015 lopulla projekti Avoimen oppikirjan tuottamiseksi MAA2- kurssille Polynomifunktiot ja -yhtälöt, johon myös tässä tutkielmassa esitelty kirjan osa liitetään. Graduryhmässä tehty työ oli mukavaa ja oli antoisaa keskustella tehtäviin ja kirjan yleisiin tavoitteisiin liittyvistä asioista yhdessä. Kiitoksia graduryhmää johtaneelle Professori Peter Hästölle sekä Marko Leinoselle ja Pekka Salmelle Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitokselta arvokkaista neuvoista ja korjauksista sekä kärsivällisyydestä. Kiitoksia myös Markus Harjulle Latex-ohjelman kanssa avustamisesta. Lisäksi kiitoksia koko Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitoksen henkilökunnalle opetuksesta, avusta ja neuvoista kuluneiden vuosien ja matematiikan opintojeni aikana. Kiitoksia myös perheelleni ja vanhemmille/lasten isovanhemmille avusta ja tuesta.

Sisältö

Luku 1

Toisen asteen polynomifunktio

1.1 Johdanto

Tämä tutkielma on osa projektia, jossa tuotetaan lukion uuden opetussuunnitelman 2016 mukainen avoin oppikirja kurssille Polynomifunktiot ja -yhtälöt (MAA2). Tässä kirjan osassa käsitellään toisen asteen polynomifunktiota dynaamisten kuvaajien avulla. Oppilaita johdatetaan heille uuteen asiaan kuvaajatarkastelulla, jonka avulla he päättelevät funktion yhtälön parametrien merkitystä sekä juurien ja niiden lukumäärän yhteyttä. Opetusvälineeksi tähän osaa oli ehdotettu ja siihen hyvin sopii internetissä vapaasti käytettävissä oleva ohjelma Geogebra. Geogebra on myös yksi ohjelmista, joka on sallittu käytettäväksi tulevissa sähköisissä YO-kirjoituksissa.

Oppilaat tutustuvat 2. asteen polynomifunktioon ensimmäistä kertaa aloittamalla käsittelyn sen kuvaajasta. On tarkoituksena, että oppilaat hahmottavat miten polynomifunktion kuvaaja eri muodoissaan käyttäytyy ja mitä siitä voi nähdä sekä miten funktion yhtälöä voi muuntaa muodosta toiseen.

Lukion syksyllä 2016 käyttöön otetun opetussuunnitelman perusteiden mukaan matematiikan "opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä...opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen [15]". Toisen asteen polynomifuktion käsittely kirjan tässä osassa tukee hyvin juuri näitä opetussuunnitelman tavoitteita.

Koska osa on yhteinen lyhyen ja pitkän matematiikan opintokokonaisuuksille on tärkeää olla myös eriyttäviä tehtäviä. Kaikkea opetusmateriaalissa olevaa ei tarvitse käydä läpi jokaisen oppilaan kanssa ja toisaalta tarjolla on myös hieman haastavampia *tehtäviä, joiden avulla ne, jotka selviytyvät yhteisestä osasta nopeasti, voivat löytää kyseisen asian sisältä lisää yhteyksiä ja loogisuutta.

1.2 Opetussuunnitelma

Lukion 2016 käyttöön otetussa opetussuunnitelmassa toiselle pakolliselle pitkän matematiikan kurssille Polynomifunktiot ja -yhtälöt on asetettu tavoitteiksi, että opiskelija [15]:

- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- osaa ratkaista toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkia ratkaisujen lukumäärää
- osaa ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- osaa ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin ja polynomiepäyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

Kirjan tässä osassa tavoitteista toteutuvat etenkin opiskelijan oppiminen käyttämään teknistä apuvälinettä GeoGebraa polynomifunktion tutkimisessa ja polynomifunktioihin liittyvien sovellusogelmien ratkaisussa. Opiskelija myös harjaantuu käsittelemään 2. asteen polynomifunktioita piirtämällä sekä GeoGebralla että vihkoon. Polynomifunktion ratkaisemista ja ratkaisumenetelmiä sivutaan, ja ratkaisujen lukumäärää hahmotetaan kuvaajatarkastelun avulla.

Kurssille asetetut keskeiset sisällöt ovat [15]:

- polynomien tulo ja muotoa $(a+b)^n, n < 3, n \in \mathbb{N}$ olevat binomikaavat
- 2. asteen yhtälö ja ratkaisukaava sekä juurten lukumäärän tutkiminen
- 2. asteen polynomin jakaminen tekijöihin
- polynomifunktio
- polynomiyhtälöitä
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen.

Kirjan tässä osassa näistä käsitellään polynomifunktiota ja polynomiyhtälöitä sekä johdatellaan 2. asteen polynomin jakamiseen tekijöihin. Myös juurten lukumäärää tutkitaan kuvaajien sekä 2. asteen funktion yhtälön eri esitysmuotojen: yleinen muoto, huippumuoto ja tekijämuoto kaavojen parametrien kautta.

Kuten jo johdantokappaleessa mainittiin, kirjan tämän osan antia kuvaavat LOPSin sanat: "Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä . Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin. Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen [15]".

Kirjan tässä osassa oppilaat havainnoivat uutta käsitettä toisen asteen polynomifunktio tutustumalla sen kuvaajaan Geogebralla. He tutustuvat funktion yhtälön eri muotoihin kuvaajien avulla muuttamalla joka muodossa parametreja liukusäätimellä ja päättelemällä itse, mikä merkitys niillä on. Näin oppilaita ohjataan hahmottamaan kuinka yhtälö liittyy kuvaajaan ja kuvaaja yhtälöön. Oppilaita ohjataan päättelemään yhtälöstä kuvaajan avulla sen huippu ja juuret eli nollakohdat. 2. asteen polynomifunktion eri esitysmuotojen välille rakennetaan yhteyksiä ja *tehtävien avulla oppilaita ohjataan hahmottamaan miten funktiot liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin.

"Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja...Tärkeää on myös arvioida apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta[15]". Oppilaat käsittelevät Geogebran avulla 2. asteen polynomifunktion dynaamisia kuvaajia ja myös piirtävät kuvaajia vihkoonsa, sekä opettelevat päättelemään funktioiden kaavojen parametrien merkitystä ja yhteyttä myös ilman GeoGebraa.

"Opiskelija harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita. Opiskelija osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä [15]". Tehtäviin on jo kirjan tässä osassa liitetty muutama ongelmatehtävä, joita opiskelijat voivat oppimansa perusteella ratkoa käyttäen oppimiansa strategioita. Funktion yhtälön käsittely dynaamisen kuvaajan avulla Geogebralla ohjaa oppilasta kohti tarkoituksenmukaista matemaattista menetelmää. Oppilaat oppivat käyttämään kolmea 2. asteen funktion esitysmuotoa ja muuntamaan funktio muodosta toiseen.

1.3 Habits of mind

Inspiraationa kirjan tekemiseen ja uudenlaiseen matematiikan opettamiseen toimii artikkeli "Habits of mind: an organizing principle for mathematics curricula"[3]. Artikkelin kirjoittajat ovat havainneet, että matematiikan opetusta kouluissa tulisi uudistaa siten, että oppilaat oppisivat enemmänkin ajattelemaan kuten matemaatikot sen sijaan, että heille opetetaan matemaatikkojen valmiiksi muokkaamia tuloksia tai kaavoja. Kaavojen opetteleminen on työlästä ja perustuu asioiden muistamiseen, joka on Bloomin taksonomian alin taso [1]. Oppilaiden voi myös olla vaikeaa hahmottaa, miksi he näitä kaavoja käyttävät ja mitä he oikeastaan tekevät. Jos oppilaille annetaan ratkaistavaksi tehtäviä, joiden avulla he itse johtavat matemaattisia tuloksia tai ainakin ymmärtävät mihin niitä tarvitaan, voi oppiminen olla mielekkäämpää eikä se ole enää pelkän muistamisen varassa. Kirjan tässä osassa oppilaat tutustuvat 2. asteen funktioon kuvaajien avulla ja hahmottavat niistä itse kaavojen parametrien merkityksen.

Artikkelissa "Habits of mind"on kerrottu periaatteista, joita matematiikan opiskelun ja opettamisen tulisi sisältää. Valitsimme artikkelista viisi periaatetta, joihin kaikissa kirjan osioissa ja niihin tehdyissä tehtävissä tulisi pyrkiä. 1. "Students should be pattern sniffers": oppilaita tulisi opettaa etsimään matemaattisia säännönmukaisuuksia, jotka auttavat heitä tehtävien ratkaisemisessa. 2. "Students should be experimenters": oppilaiden tulisi kokeilla matemaattisten tehtävien ratkaisemista eri tavoin. Tämä käsittää kuvaajan piirtämisen, erilaiset ratkaisutavat, mallinnusohjelmien käytön jne. 3. "Students should be describers": oppilaita tulisi ohjata kertomaan sanallisesti, mitä he ovat tehneet tehtävää ratkaistessaan. Tämä auttaa myös tehtävän ymmärtämistä. 4. "Students should be visualizers": oppilaita tulisi rohkaista muuttamaan matemaattiset tehtävät jollakin tavoin kuvamuotoon. 5. "Students should be conjecturers": oppilaita tulisi opettaa itse muodostamaan kaavoja havaitsemilleen säännönmukaisuuksille.

Kirjan tässä osassa selkeimmin toteutuvat periaatteet 2 ja 4. Oppilaat aloittavat 2. asteen funktion tarkastelun "puhtaalta pöydältä"tutustumalla sen kuvaajaan GeoGebralla kirjan Pohdintatehtävissä. Yleisen, huippu- ja tekijämuodon kaavat annetaan oppilaille määritelminä, mutta niissä esiintyvien parametrien merkityksen oppilaat päättelevät itse tekemänsä GeoGebratarkastelun avulla. He kokeilevat GeoGebralla, miten 2. asteen polynomifunktion kaavojen parametrit sen eri esitysmuodoissa (yleinen muoto, huippumuoto ja tekijämuoto) vaikuttavat funktion kuvaajaan, miten 2. asteen funktiota voi muuttaa muodosta toiseen ja mitä siitä eri muodoissa saa selville. Kirjassa 2.asteen funktion jokaiseen muotoon liittyy GeoGebralla tehtävän Pohdintaosan jälkeen vielä Pohdintaosassa tehtyjä havaintoja täydentävät tehtävät, joissa oppilaat pääsevät piirtämään funktioiden kuvaajia vihkoon, päättelemään valmiista kuvaajista niiden yhtälöt ja rakentamaan yhteyksiä funktion eri muotojen välille.

Periatteita 1 ja 5 sivutaan, kun oppilaat itse päättelevät 2. asteen funktion kaavojen parametrien merkityksen. Periaate 1 tulee myös vastaan, kun oppilaat pikku hiljaa hahmottavat säännömukaisuuksia, kuten binomin neliökaava, ratkaistessaan tehtäviä. Tätä kaavaa ei vielä kirjan tässä osassa kuitenkaan oppilaille esitellä. Periaate 5 toteutuu erityisesti oppilaiden ratkaistessa *tehtäviä (varsinkin tehtävä 3*). Periaate 3 toteutuu, kun kun oppilaat pohtivat kuvaajatarkastelua ennen ja sen jälkeen pohdintatehtävien kysymyksiä.

1.4 Geogebra ja muut ohjelmistot

Abstraktien matemaattisten käsitteiden esittäminen matemaattisten tietokoneohjelmien (CAS=computer algebra systems) avulla voi auttaa oppilaita hahmottamaan ja ymmärtämään näitä käsitteitä [17]. Viimeisimmät edistysaskeleet dynaamisen geometrian ohjemistoissa antavat opettajille mahdollisuuden tutkia matemaattisia esitysmuotoja tavoilla, joihin liitutaulu tai dokumenttikameraesitys eivät pysty[14]. Teknologia itsessään suorittaa vaaditut laskutoimitukset ja opiskelijat voivat kokeilla eri vaihtoehtoja ja tarkastella, mitä siitä seuraa. Kun saman matemaattisen konseptin voi esittää monin tavoin ja linkittää tavat toisiinsa, tämä voi auttaa luomaan yhteyksiä käsitteiden välille ja ymmärtämään asiaa paremmin. Käsitteitä voidaan myös tutkia syvällisemmin, ongelmatehtävää voi lähestyä useammasta näkökulmasta, sekä muodostaa ja testata hypoteeseja [12]. Toisaalta, opiskelijat voivat passivoitua, koska heidän ei itse tarvitse laskea [14]. He voivat myös saada liikaa informaatiota aiheesta, eivätkä ymmärrä mitä ovat tekemässä. Opettajan onkin tärkeää osata esittää opiskelijoille oikeanlaisia kysymyksiä heidän tarkastellessaan matemaattisia käsitteitä dynaamisten ohjelmistojen avulla, jotta opiskelijat pysyisivät prosessissa aktiivisina oppijoina.

Ohjelmistoja ovat esimerkiksi Geogebra, Cabri, Geometers Sketchpad ja graafiset laskimet. Polynomifunktiot ja yhtälöt -kurssin avoimessa oppikirjassa harjoituksissa käytettäväksi ohjelmistoksi on valittu Geogebra, koska se on vapaasti internetissä käytettävissä oleva ohjelmisto, jonka voi myös halutessaan ladata ilmaiseksi omalle tietokoneelleen. Geogebra on myös yksi ohjelmista, joita uudessa sähköisessä ylioppilaskokeessa tullaan käyttämään [9]. Geogebra yhdistää algebraa, geometriaa ja laskentaa, on ohjelmistona helppokäyttöinen ja ohjaa hyvin käyttäjää löytämään haluamansa [2].

Internetistä löytyy runsaasti Geogebran opetuskäyttöä tukevaa materiaalia opettajille. Tämän kirjan opettajan opas antaa vinkkejä Geogebran käyttöön tehtävissä, joissa tehdään muutakin, kuin syötetään GeoGebraan yhtälö ja tarkastellaan muodostuvaa kuvaajaa. Tunti on hyvä valmistella etukäteen niin, että tarvittavat asiat Geogebrasta löytyvät ja on mahdollista vastata oppilaiden mahdollisiin kysymyksiin. Oppikirjan tämän osan Geogebralla tehtävissä harjoituksissa opettajan on hyvä aluksi ohjata oppilaita aukaisemalla omalta koneeltaan Geogebra taululle ja näyttämällä samalla miten tarvittavat asiat siitä löytyvät. Kun oppilaat ovat muutaman kerran opettajan opastuksella muodostaneet esimerkiksi funktion kuvaajan Geogebralla ja valinneet jonkin parametrin siitä liukutoiminnolla vaihtuvaksi, voivat he soveltaa tätä taitoa myös itse seuraavaan tehtäävään. Samalla kun oppilaat oppivat 2. asteen funktiosta, he oppivat myös käyttämään Geogebraa ja tämä varmasti auttaa heitä heidän tulevassa matematiikan opiskelussaan. Geogebralla oppilaat voivat opintojensa edetessä esimerkiksi tutkia ja mallintaa matemaattisesti ilmiöitä ja ongelmatehtäviä sekä testata omia ideoitaan [2].

1.5 Oppikirjavertailu

Olen vertaillut kirjojen Pitkä matematiikka 2, polynomifunktiot [10] ja Laudatur 2, polynomifunktiot [7] 2. asteen polynomifunktion käsittelyn aloittavia kappaleita tekemääni Avoimen oppikirjan kappaleeseen Toisen asteen polynomifunktio - Luku 1. Nämä kirjat ovat aiemman Lukion opetussuunnitelman 2003 mukaisia kirjoja. Kun aloitimme graduprojektin Avoimen oppikirjan tekemiseksi kurssille Polynomifunktiot ja -yhtälöt (MAA2) lukuvuoden 2015-2016 aikana, ei uuden opetussuunnitelman 2016 mukaisia kirjoja vielä ollut. Avoimen oppikirjan ja siihen tekemäni kappaleen kehitystyö lähti siis liikkeelle lukion uuden LOPS 2016 ja silloin olemassa olevien kirjojen pohjalta. Pitkä matematiikka 2 -kirja ei ole muuttunut ollenkaan uuden LOPS 2016 myötä, siitä on otettu vain uusi painos [11]. Laudatur 2 -kirjan uuteen painokseen en ole tutustunut.

Kirjan Laudatur 2 lähestymistapa 2. asteen polynomifunktioon on erilainen verrattuna Avoimessa oppikirjassa valittuun siten, että 2. asteen yhtälön ratkaiseminen ja ratkaisukaava käsitellään ennen polynomifunktion kuvaajatarkastelua [7]. Pitkä matematiikka 2 siirtyy 2. asteen yhtälöön polynomifunktioon kuvaajatarkastelun kautta. Summan ja erotuksen tulo sekä neliö on kuitenkin käsitelty Pitkä matematiikka 2 - kirjassa 2. asteen polynomifunktiota edeltävässä kappaleessa [10].

Pitkä matematiikka 2, Polynomifunktiot [10] aloittaa 2. asteen funktion käsittelyn yleisessä muodossa siten, että oppilaat ensin piirtävät funktioiden x^2 ja $-x^2$ kuvaajat vihkoon ja päättelevät, miten 2. asteen kertoimen merkin vaihtuminen vaikuttaa funktion kuvaajaan. Oppilaat piirtävät sitten 2. asteen funktioiden ($2x^2 - 4x + 1$ ja $-3x^2 + 6x + 4$) kuvaajat graafisella laskimella, tai vihkoon laskemalla funktioiden arvot pisteissä $-1, 0, 1, 2$ ja 3. He pohtivat tämän jälkeen kuvaajien symmetriaa ja 2. asteen kertoimen merkin vaikutusta.

Kirja Laudatur 2 esittelee 2. asteen funktion määritelmän samoin kuin Pitkä matematiikka 2 [7]. Kirjassa on tämän jälkeen esimerkkikuva funktion $f(x) = x^2$ kuvaajasta piirrettynä sille laskettujen pisteiden avulla. Paraabelin symmetrisyydestä Laudatur 2 toteaa samoin, kuin Pitkä matematiikka 2. Laudatur 2 esittelee vielä esimerkkikuvien ja määritelmän avulla sen, että x^2:n kerroin vaikuttaa sekä paraabelin leveyteen että aukeamissuuntaan. Tämän jälkeen Laudatur 2:ta on vaikea verrata Avoimeen oppikirjaan, koska 2. asteen yhtälön ratkaiseminen on opeteltu jo aiemmin ja kuvaajatarkastelun jälkeen kirja etenee nollakohtien ratkaisemiseen yhtälön ja kuvaajan avulla.

Avoimen oppikirjan kappale Toisen asteen polynomifunktio - Luku 1 aloittaa 2. asteen polynomifunktion käsittelyn myös polynomifunktion yleisen muodon kautta. Pohdinnassa 3.1.3 tarkastellaan funktiota GeoGebralla yksinkertaisimmassa muodossaan $f(x) = x^2$. Avoimen oppikirjan GeoGebratarkastelussa pohditaan paraabelin aukeamissuunnan lisäksi myös parametrin a vaikutusta funktion kuvaajan muotoon, mikä Pitkä matematiikka 2 -kirjassa sivuutetaan. Avoimen oppikirjan Pohdinnassa 3.1.6 tarkastellaan GeoGebralla funktion kuvaajan muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ja tehtävässä 1 piirretään kuvaajia vihkoon.

Pitkä matematiikka 2 määrittelee 2. asteen funktion kaavan yleisessä muodossa sekä perehtyy paraabelin symmetriaan: "Toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on paraabeli. Paraabelilla on huippu ja paraabeli on symmetrinen huipun kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran suhteen. Paraabelin aukeamissuunnan määrää funktion lausekkeen toisen asteen termin kertoimen merkki. Funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaajaparaabeli aukeaa ylöspäin, jos kerroin a on positiivinen ($a > 0$) ja alaspäin, jos a on negatiivinen ($a < 0$) [10]."Tässä ovat lisänä vielä kuvaajat kyseisistä tilanteista. Avoin oppikirja esittää määritelmän 2. asteen funktiolle kappaleessa Yleinen muoto (3.1), mutta oppilaat päättelevät itse GeoGebratarkastelun avulla kuvaajan aukeamissuunnan eikä tätä enää erikseen esitetä määritelmänä.

Pitkä matematiikka 2 esittelee määritelmän jälkeen esimerkit 2. ja 3. asteen funktioista ($f(x) = -x^2 + 6x - 1$, $g(x) = -x^3 - 9x + 4$ ja $h(x) = -x(1 - 3x)$) kysyen ovatko niiden kuvaajat paraabeleja ja jos ovat, aukeavatko ne ylös- vai alaspäin [10]. Kirja ratkaisee nämä kysymykset ja jatkaa esimerkillä 2. asteen funktioista ($f(x) = x^2 + 2x - 4$) kysyen mitkä ovat funktion juurten likiarvot ja millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia ja millä positiivisia. Kirja sitten laskee funktiolle useamman pisteen ja piirtää kuvaajan näiden perusteella. Kuvaajasta pätellään nollakohtien likiarvot ja se, milloin funktion arvot ovat negatiivisia/positiivisia y-koordinaatin negatiivisuuden/positiivisuuden avulla. Avoimessa oppikirjassa tarkastellaan funktion juurten lukumäärää ja kuvaajan sijaintia koordinaatistossa Pohdinnoissa 3.1.5 ja 3.1.6 GeoGebran avulla.

Pitkä matematiikka jatkaa määritelmällä "Yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon $ax^2+bx+c = 0$, missä $a \neq 0$, on toisen asteen yhtälö. Toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c = 0$ juuret ovat toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$ nollakohtia. Koska funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaaja on ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli, yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$

on joko kaksi, yksi tai ei yhtään juurta [10]."Kirja tämän jälkeen esittelee havainnollistavat kuvat jokaisesta näistä tilanteesta. Seuraavaksi kirja palauttaa vielä mieleen vaillinaisen 2. asteen yhtälön ($ax^2 + c = 0$) ratkaisemisen, johon oppilaat ovat tutustuneet edellisessä kurssissa. Avoimessa oppikirjassa ei tässä kohdassa vielä keskitytä 2. asteen yhtälöiden ratkaisemiseen, vaan määritellään 2. asteen funktiolle nollakohdat, huippu ja symmetria-akseli kappaleessa Yleinen muoto (3.1), sekä esitellään Esimerkki 3.1.4 toisen asteen funktion huipusta ja symmetria-akselista.

Pitkä matematiikka 2:n perustehtävissä oppilaat päättelevät funktioiden yhtälöiden perusteella, ovatko niiden kuvaajat paraabeleja ja aukeavatko ne ylös- vai alaspäin, sekä piirtävät 2. asteen funktioiden kuvaajia ja päättelevät niistä nollakohtien likiarvot ja paraabelin huipun koordinaatit [10]. Oppilaat myös ratkaisevat vaillinaisia 2. asteen yhtälöitä. Haastavammissa tehtävissä oppilaat päättelevät milloin funktioiden arvot ovat positiivisia/negatiivisia ja milloin funktioilla (esim. $x^2 + k = 4$) on kaksi, yksi tai ei yhtään juurta. Seuraavassa kappaleessa Pitkä matematiikka 2 menee jo 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaan opettaen sen perinteisesti neliöön täydentämällä, ja tämän jälkeen kirjassa ratkaistaan 2. asteen yhtälöitä ratkaisukaavaa käyttäen.

Kirjoissa Pitkä matematiikka 2 ja Laudatur 2 jää kokonaan väliin kuvaajatarkastelun ulottaminen 2. asteen funktion yleisestä muodosta huippu- ja tekijämuotoon. Myös näiden muotojen yhteys ja funktion muuttaminen muodosta toiseen jää puuttuumaan. Yhtälön huippumuotoa, joka on oleellinen myös neliöön täydentämisen kannalta, ei kirjoissa käsitellä ollenkaan. 2. asteen kertoimen merkin merkitys paraabelin aukeamissuuntaan käsitellään molemmissa kirjoissa ja Laudatur 2 käsittelee myös 2. asteen kertoimen merkitystä paraabelin leveyteen. Paraabelin paraabelin huipun kautta kulkeva symmetria-akseli määritellään, mutta sen yhtälöä ei mainita.

Kaiken kaikkiaan kirjojen Pitkä matematiikka 2 ja Laudatur 2 toisen asteen polynomifunktion aloitusosuus jää kuvaajatarkastelun osalta suppeaksi ja kirjoissa keskitytäänkin enemmän yhtälön algebralliseen ratkaisemiseen. Avoimen oppikirjassa 2. asteen funktio esitellään oppilaille kuvaajan kautta oppilaiden ja oppilaat päättelevät itse kaavojen merkityksen funktion kuvaajaan. 2. asteen funktion algebralliseen ratkaisemiseen siirrytään vasta tämän jälkeen.

Luku 2

Oppimateriaalin pohdinta

2.1 Miksi tämä kirja on tehty

Matematiikan opettamisessa on tärkeää se, mitä oppilaat tekevät ja sen, mitä opettaja tekee, täytyy olla taka-alalla[19]. Opettajan tulisi kuunnella, kysyä kysymyksiä ja antaa juuri oikea määrä apua, jotta oppilaat pääsevät asiassa eteenpäin ja heidän ymmärryksensä kehittyy. Oppilaat oppivat parhaiten, kun heille annetaan ongelma ja he saavat itse hahmotella sen ratkaisun.

Funktio on matematiikan opetuksessa keskeisessä asemassa. Oppilailla voi olla vaikeuksia funktion käsitteen hahmottamisessa, sillä kuten muutkin matemaattiset käsitteet, funktioiden yhtälöt eivät ole fyysisiä objekteja [13]. Ymmärtämisen kannalta on tärkeää, että matemaattinen käsite voidaan yhdistää sen erilaisiin esitysmuotoihin. Funktioille näitä esitysmuotoja ovat niiden yhtälöiden lisäksi kuvaajat, taulukot ja yhteys käytännön elämään. Kuvaajan avulla oppilaat saavat merkityksen yhtälölle. Kuvaajasta voidaan päätellä, kuinka riippuva muuttuja y vaihtelee riippumattoman muuttujan x vaihdellessa: onko funktion kuvaaja symmetrinen, milloin funktio on kasvava ja vähenevä, mitkä ovat funktion ääriarvot ja miten se käyttäytyy lähestyessään ääretöntä.

Ongelmanratkaisussa kuvan piirtäminen on yksi ensimmäisistä askelista: sen perusteella voi ymmärtää ongelmatilanteen paremmin ja arvoida ratkaisupolkujen sekä itse ratkaisujen oikeellisuutta [13]. Funktioita opetettaessa piirtotyökalut, kuten graafiset laskimet tai matemaattiset tietokoneohjelmat, ovat suositeltavia. Piirtotyökalujen avulla ongelmat, jotka ennen olivat hyvinkin vaikeita ratkaista, voidaan hahmottaa helposti. On kuitenkin hyvä opetella piirtämään funktioiden kuvaajia myös kynällä paperille, koska näin funktion algebrallisen ja graafisen esityksen yhteys voi hahmottua paremmin.

Kirjan tässä osassa oppilaat tutustuvat 2. asteen polynomifunktioon ensimmäistä kertaa sen kuvaajien avulla. He piirtävät kuvaajia Geogebralla ja kynällä paperille opetellen tätä kautta 2. asteen polynomifunktion algebrallisen ja graafisen esityksen yhteyttä. Kirjan seuraavissa osissa oppilaat tutustuvat 2. asteen polynomifunktion algebralliseen ratkaisemiseen. Funktion algebrallinen esitys korostaa sitä prosessin välineenä, kun taas graafinen esitys hahmottaa sitä enemmän kokonaisuutena [13]. Molemmat esitysmuodot ja niiden yhteyksien näkeminen ovat oleellisia funktion käsitteen oppimisen ja soveltamisen kannalta.

Oppilaille tulisi opettaa funktion ja muiden matemaattisten käsitteiden yhteydessä "symbolitajua"eli kykyä lukea matemattinen esitys tai esimerkiksi funktion yhtälö ja nähdä se kokonaisuutena eikä vain epämääräisenä kirjainrykelmänä [13]. Symbolitaju auttaa oppilaita arvoimaan yhtälön käyttäytymistä, kun muuttujalle annetaan lukuarvoja tai siitä piirretään kuvaaja. Tämä yhdistyy myös moneen "Habits of mind- periaatteeseen. Tähän kuuluu myös kyky hajoittaa yhtälö merkityksellisiksi osiksi, joista sen käyttäytymistä ja esimerkiksi sen ratkaisuja on helpompi arvoida [13]. Kirjan tässä osiossa pyritään kuvaajien avulla havainnollistamaan, mihin muotoon 2. asteen polynomifunktion kuvaaja olisi järkevää sen käsittelyn helpottamiseksi yleisestä muodosta muuttaa. Huippu- ja tekijämuodossa 2. asteen yhtälö on yleensä helpompi ratkaista.

Tutkimuksissa 2. asteen funktion käsitteeseen liittyvistä oppimisvaikeuksista on todettu, että oppilailla on vaikeuksia muodostaa yhteyksiä 2. asteen funktion eri esitystapojen välille (graafinen, algebrallinen ja taulukoitu) sekä nähdä funktioiden kuvaajat kokonaisina objekteina. Funktion kaavassa esiintyvien parametrien merkitystä on vaikea hahmottaa, 1. ja 2. asteen funktiota ei aina eroiteta toisistaan ja funktion kuvaajan siirtäminen ja kääntäminen on vaikeaa [12]. Kirjan tämä osa keskittyy 2. asteen funktion parametrien merkityksen hahmottamiseen oppilaiden säätäessä niitä Geogebralla liukusäätimellä, jolloin myös funktion kuvaaja liikkuu. Tästä oppilaat päättelevät itse funktion parametrien merkityksen.

2.2 Oppimateriaalin johdanto

2. asteen funktion aloitusosuus Avoimessa oppikirjassa on tehty sillä ajatuksella, että oppilaat itse päättelevät GeoGebralla tekemänsä kuvaajatarkastelun avulla 2. asteen funktion yhtälön parametrien merkityksen yhtälön eri muodoissa. Tarkoitus on myös että he pystyisivät muokkaaman yhtälöä sen eri esitysmuotojen: yleinen muoto, huippumuoto ja tekijämuoto, välillä. Oppilaiden tulisi kirjan tämän osan perusteella hahmottaa, että 2. asteen funktion käsittely sen yleisessä muodossa antaa sen käyttäytymisestä vain vähän informaatiota ja sen muokkaaminen huippu- tai tekijämuotoon parantaa sen käsittelyn joustavuutta. Koska tämän kirjan seuraavissa osissa esitellään neliöön täydentäminen varteen otettavana vaihtoehtona 2. asteen funktion ratkaisukaavan käytölle, on suotavaa ohjata oppilaita 2. asteen funktion muokkaamiseen sen yleisestä muodosta huippumuotoon.

Kirjan tämä osa eroaa selvimmin kirjojen Laudatur 2 [7] ja Pitkä matematiikka 2 [10] vastaavasta osasta siinä, että opiskelijoille ei ole ennen kirjan tätä osaa esitelty tapoja ratkaista 2. asteen yhtälöitä, eikä myöskään binomikaavoja. Osa tehtävistä johdattelee oppilaita tähän suuntaan, mutta ratkaisutavat ja binomin neliökaavat tulevat kirjassa vasta tämän osan jälkeen. Kirjan tässä osassa oppilaat saavat todellakin päätellä itse, mistä 2. asteen funktion parametrit tulevat eikä tätä kerrota heille valmiiksi. Opiskelijoista tulee hyviä ongelmanratkaisijoita, kun he oppivat matematiikka heuristisesti [8]. Opiskelijat pystyvät myös kehittämään taitojaan sopeutua ja vaihtaa ratkaisutapaa kun niin vaaditaan.

Kirjan tämän osan tehtävistä tärkeimpiä ovat Pohdintatehtävät, jotka tehdään pääsääntöisesti Geogebralla. Opettajan oppaassa kerrotaan, mihin Pohdintatehtävien päättelyissä tulisi kiinnittää huomiota ja opettaja voi myös ohjata oppilaita oikeaan suuntaan ohjeiden avulla ja mahdollisen ajan puutteen yllättäessä. Pohdintaosuuden jälkeen tulevista tehtävistä opettaja voi valita tarkoituksenmukaisimmat. Tehtäväosuudessa on myös aina mukana lisää tietoa ja haastavuutta tarjoava *tehtävä. Pohdintatehtävien GeoGebratarkastelut voi tehdä pareittain samalla tietokoneella, tai jos opiskelijoilla on käytössä omat koneet tai Ipadit, on suotavaa, että he pystyvät keskustelemaan kuvaajissa tapahtuvista muutoksista keskenään. Opettajan tulisi lopuksi koota aina jokaisessa Pohdinnassa tehdyt päätelmät yhteen.

2.3 Yleinen muoto

2. asteen polynomifunktioon tutustuminen alkaa johdannolla tennispallon tekemästä paraabelin kaaren muotoisesta matkasta, jota kuvaa yhtälö pallon etäisyydestä maan pinnasta ajan funktiona [6]. Tehtävä ratkaistaan vasta tämän kirjan osan lopussa kirjan osassa saavutetuilla tiedoilla. Johdannon tarkoituksena on esitellä ilmiö, jota voi kuvata 2. asteen polynomifunktiolla ja lisätä oppilaiden mielenkiintoa 2. asteen funktiota kohtaan.

Oppilaat aloittavat tutustumisen 2. asteen polynomifunktioon sen yleisen muodon kautta tarkastelemalla kuvaajaa GeoGebralla Pohdintatehtävissä 3.1.3, 3.1.5 ja 3.1.6. Oppilaat tarkastelevat funktion kuvaajaa säätämällä sen yhtälön parametreja liukusäätimellä ja päättelevät, miten ne kuvaajaan vaikuttavat. Lisäksi joka Pohdinnassa on vielä kohta, jossa oppilaat asettavat funktion kulkemaan sille annettujen ehtojen mukaan. Ehtoja ovat tietyn pisteen koordinaatit, x- tai y-akselin leikkauskohta tai suurin arvo. Tämän jälkeen oppilaat vielä laskevat tämän funktion yhtälön sijoittamalla annetut ehdot funktion yhtälöön.

Pohdinnassa 3.1.3 funktiota tutkitaan GeoGebralla muodossa $f(x) = ax^2$ ja tarkastellaan parametrin a vaikutusta paraabelin muotoon ja aukeamissuuntaan sekä huomataan funktion saavan arvon nolla aina origossa. Funktio asetetaan Geogebrassa kulkemaan pisteen $(\frac{1}{2}, 1)$ kautta. Yhtälö tässä muodossa nähdään GeoGebrasta. Laskemalla tämän funktion yhtälön saa selville sijoittamalla pisteen $(\frac{1}{2}, 1)$ muodon $f(x) = ax^2$ yhtälöön.

Pohdinnassa 3.1.5 funktio on muodossa $f(x) = ax^2 + c$. Oppilaat voivat huomata parametrin c vaikuttavan paraabelin paikkaan koordinaatistossa ja parametrin a vaikutuksen olevan sama kuin Pohdinnassa 3.1.3. Kun $c = 0$, funktiolla on kaksinkertainen nollakohta. Kun a ja c ovat samanmerkkisiä, funktiolla ei ole nollakohtia ja kun vastakkaismerkkisiä, funktiolla on aina kaksi nollakohtaa. Muodoissa $f(x) = ax^2$ ja $f(x) = ax^2 + c$ funktion on symmetria-akseli on y-akseli. Asetaan funktio kulkemaan y-akselin leikkauskohdan $(0, -3)$ ja pisteen $(4, 1)$ kautta ja lasketaan funktiolle yhtälö näillä ehdoilla.

Pohdinnassa 3.1.6 tutkitaan funktiota muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ja huomataan, että parametri a edelleen vaikuttaa paraabelin muotoon, mutta myös paraabelin huipun paikkaan koordinaatistossa, parametrit b ja c taas vaikuttavat vain paraabelin paikkaan koordinaatistossa. Nyt voidaan jo päätellä, että parametri c on paraabelin ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti. Kohdassa 5 oppilaat asettavat GeoGegrassa liukusäätimen avulla parametrit a, b ja c siten, että saavat näkyviin funktion, jonka suurin arvo on 2 ja joka leikkaa x-akselin pisteessä $(-1, 0)$. Nyt oppilaiden on katsottava toinen nollakohta kuvaajasta. Määrittelyehdoilla tulokseksi voi saada useamman funktion. Kohdassa 6 funktiolle yhtälöä laskettaessa on annettujen ehtojen lisäksi käytettävä GeoGebrasta selviävää toista nollakohtaa tai parametria c apuna.

Tehtävässä 1 harjoitellaan funktioiden piirtoa vihkoon pisteitä taulukoimalla ja tehtävässä 2 päätellään funktion yhtälö kuvaajasta. Tehtävässä 3 laajennetaan pohdintatehtävissä tutkittua funktion kuvaajan käyttäytymisen tulkintaa. Tutkimuksessa on tarkoitus muodostaa graafisesti Geogebralla yhteys 2. asteen polynomifunktion kahden esitysmuodon, yleisen muodon $f(x) = ax^2 + bx + c$ ja huippumuodon $f(x) = a(x - h)^2 + k$ parametrien a, b, c sekä h ja k (huipun koordinaatit) välille. Tutkimuksen on pohjana käytetty artikkelia "An unexpected influence on a quadratic. Using a tehcnology to explore the coefficients of a quadratic equation leads to an unexpected result [4].", jossa opettaja Davis kertoo oppilaillaan CAS-laskimella teettämästään vastaavanlaisesta harjoituksesta. a) kohdassa oppilaat jäljittävät funktion kuvaajan huipun liikkeen kun he vaihtavat parametrin a arvoa liukusäätimellä ja pitävät parametrien b ja c arvot vakioina, toistaen tämän 3-4 kertaa parametrien b ja c eri arvoilla. He voivat nyt itse päätellä 2. asteen funktion huipun liikkeen jäljen piirtämän suoran yhtälön ja 2. asteen funktion parametrien välillä: suoran yhtälö on $g(x) = \frac{1}{2}bx + c$. b) kohdassa oppilaat jäljittävät 2. asteen funktion kuvaajan huipun paraabelimaisen liikkeen, kun he vaihtavat parametrin b arvoa liukusäätimellä ja pitävät parametrien a ja c arvot vakioina toistaen myös tämän 3-4 kertaa parametrien a ja c eri arvoilla. Yhteys 2. asteen funktion kuvaajan ja huipun jäljen muodostaman paraabelin parametrien välillä on $h(x) = -ax^2 + c$. Davis perustelee harjoituksen hyötyä sillä, että oppilaat oppivat yhteyksiä matemaattisten kaavojen välillä. Tutkimusta jatketaan kirjan osassa "Huippumuoto"tehtävässä 14.

2.4 Huippumuoto

Kirjan Huippumuoto -osassa Pohdintatehtävät noudattavat samaa logiikkaa kuin Yleinen muoto -osassa. Pohdinnassa 3.2.3 oppilaat tutustuvat 2. asteen funktion kuvaajaan Geogebralla ensin muodossa $f(x) = a(x - h)^2$. Funktion huippu on tässä muodossa aina x-akselilla ja sillä on vain yksi (kaksinkertainen) nollakohta. Oppilaat asettavat funktion kulkemaan pisteen $(-2, 0)$ kautta ja huomaavat että funktiota ei voi nyt saada kulkemaan pisteen $(-2, 1)$ kautta.

Pohdinnassa 3.2.4 oppilaat tutkivat funktiota muodossa $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ja päättelevät parametrien h ja k olevan kuvaajan huipun koordinaatit. Oppilaat myös asettavat funktion kulkemaan GeoGebrassa siten, että sen pienin arvo on -2 ja se leikkaan x-akselin kohdissa $(0, 0)$ ja $(2, 0)$. Nyt funktion yhtälön muodostaminen laskemalla on helppoa huipun koordinaattien ja yhden nollakohdan avulla.

Tehtäväosion alussa oppilaat piirtävät vihkoonsa funktioiden kuvaajia yhtälöstä huipun koordinaatit katsomalla ja pisteitä taulukoimalla ja päättelevät funktion kuvaajan huipun koordinaattien ja nollakohdan avulla funktion yhtälön. Tehtävässä 6 palataan tehtävän 2 funktion kuvaajan ja muodostetaan sille yhtälö huippumuodossa. Oppilaat voivat nyt pohtia, onko yhtälö sama kuin aiemmin, tämän saa selville esimerkiksi kertomalla auki huippumuodon yhtälön ja vertaamalla sitä yleisen muodon yhtälöön. Näin voi hahmottaa yhteyttä 2. asteen funktion kahden esitysmuodon välillä.

Tehtävä 7 tuo esille oppilaiden tekemiä yleisiä virheitä, kun funktion yleisen ja huippumuodon yhtälöt ovat tiedossa [16]. On tarkoitus, että oppilaat keskustelevat tehtävää tehdessään parin kanssa ja tekevät tehtävän käyttämättä Geogebraa. Kun tehtävää tehdessä keskustellaan parin kanssa, on asia usein helpompi hahmottaa ja se jää myös paremmin mieleen. Oppilaat voivat ajatella a) kohdan yhtälöstä $f(x) = (x-3)^2$, että kuvaajan huipun x-koordinaatiksi tulee -3, koska edessä on $-$merkki. a)- kohdassa oppilaiden tulisi hahmottaa funktion kuvaajan huipun koordinaatin h olevan 3 ja että näin ollen kuvaajaa siirretään oikealle. b) -kohdassa oppilaat ymmärtävät todennäköisesti Pohdintatehtävien jälkeen, että yhtälöt $(x+3)^2$ ja x^2+9 ovat eri asia. On kuitenkin havaittu oppilaiden tekevän usein virheen siinä että he ajattelevat näiden yhtälöiden tarkoittavan samaa [16]. Sen, että $(x+3)^2 \neq x^2+9$ voi osoittaa esimerkiksi kuvaajien huippujen koordinaattien erisuuruudella ($(-3,0) \neq (0,9)$) tai piirtämällä funktioiden kuvaajat. Muita tapoja ovat esimerkiksi kaavan $(x+3)^2$ kertominen auki ja luvun sijoittaminen x:n paikalle. Kun oppilaat käyttävät perustelemiseen useampia tapoja, voivat he helpommin välttää tekemästä tällaista virhettä vastaisuudessa [16].

Tehtävässä 8 on tarkoitus johdatella oppilaita muuttujanvaihtoon, joka on myös eräs tapa ratkaista 2. asteen yhtälöitä, ja joka esitellään oppilaille yhtenä ratkaisutapana kirjan myöhemmissä osissa. Tehtävässä 5 kuvaajan kautta päätellyn funktion $f(x) = x^2+4x-5$ yhtälöä muutetaan GeoGebratarkastelussa siirtämällä funktio ensin niin, että sen symmetria-akseli on y-akseli. Tämän jälkeen verrataan alkuperäistä ja saatua yhtälöä toisiinsa ja nähdään, että x on muuttunut termiksi $x-2$. Yhteys yhtälöiden $f(x) = x^2+4x-5$ ja $f(x) = x^2-9$ nollakohtien $x = -5$ ja $x = 1$ sekä $x = -3$ ja $x = 3$ on kahden x-yksikön lisäys ja tässä 2. asteen funktion kuvaajan saattamiseksi symmetriseksi y-akselin suhteen tehtävä muuttujanvaihto olisi $t = x+2$. Tämän jälkeen yhtälö olisi helppo ratkaista vaillinaisena 2. asteen yhtälönä ja saada alkuperäisen yhtälön ratkaisu selville takaisinsijoittamalla $x = t-2$. Myös 2. asteen yhtälön ratkaiseminen neliöön täydentämällä perustuu tähän samaan logiikkaan: kun yhtälö $x^2+4x-5 = 0$ täydennetään neliöön, saadaan yhtälö $(x+2)^2 = 9$. Oppilaat voivat vielä lopuksi havainnollistaa 2. asteen funktion yleisen muodon ja huippumuodon yhteyttä syöttämällä tässä tehtävässä tarkastellut funktiot samaan GeoGebratiedostoon muodossa $f(x) = (x-a)^2+4(x-a)-5$ ja $g(x) = (x-h)^2-9$.

2.5 Yleisen muodon ja huippumuodon yhteys

Osa "Yleisen muodon ja huippumuodon yhteys"aloitetaan Pohdintatehtävässä 3.3.1 johtamalla yleisen muodon ja huippumuodon kaavojen avulla parametrit h ja k ilmaistuna parametrien a ja b ja c avulla. Kerrotaan auki huippumuodon kaava $f(x) = a(x-h)^2+k$ ja verrataan sitä yleisen muodon kaavaan $f(x) = ax^2+bx+c$, josta voidaan päätellä, että $h = -\frac{b}{2a}$ ja $k = -ah^2+c$.

Tehtäväosiossa tehtävässä 9 on esitetty vaillinainen 2. asteen yleisen muodon kaava, josta on helppo muodostaa myös kyseisen funktion huippumuodon kaava ja päätellä funktion kuvaajan huipun koordinaatit. Tehtävän 10 kohdan a) funktio on jo piirretty vihkoon tehtävässä 1 d) ja tehtävässä 4 a), joten näistä saa sekä huippumuodon että huipun koordinaatit. Tässä johdatellaan hiljalleen oppilaita myös binomikaavan neliön huomaamiseen sekä sen avulla neliöön täydentämiseen. Tehtävän 10 b) ja c) kohdissa on tarkoitus käyttää apuna Pohdinnassa 3.3.1 johdettuja yhteyksiä yleisen muodon ja huippumuodon parametrien välillä ja muodostaa niiden avulla yleisen muodon yhtälöistä huippumuodon yhtälöitä. Kohdassa c) voi käyttää apuna kohtaa b).

Tehtävässä 11 voidaan hyödyntää ja yhdistää sekä 2. asteen yhtälön yleistä muotoa että huippumuotoa [18]. Oppilaat sijoittavat tehtävänannossa annetut kolme pistettä 2. asteen polynomifunktion yleisen muodon yhtälöön ja laskevat yhtälön parametrit a, b ja c niiden avulla. Siihen, kuinka alukselle käy, tarvitaan funktion kuvaajan huipun koordinaatit. Nämä saadaan joko syöttämällä saatu yhtälö GeoGebraan ja katsomalla huipun koordinaatit kuvaajasta tai ratkaisemalla huipun koordinaatit Pohdinnassa 3.3.1 päätellyn parametrien a, b, c, h ja k välisen yhteyden avulla. Huippumuoto on $f(x) = 5(x - 12)^2 + 30$ ja huipun koordinaatit ovat siis $(12, 30)$.

Tehtävä 12 muistuttaa tehtävää 7. Tehtävä on artikkelista The notion of reducing abstraction in quadratic functions [5]. Opettaja voi tämän jälkeen käydä läpi oppilaiden sanallisen perustelun sille, miksi kuvaajat eroavat toisistaan.

Tehtävässä 13* Oppilaiden olisi tarkoitus löytää yhteys Tehtävän 3* Geogebratarkastelun ja Pohdintatehtävän 3.3.1 kaavan johdon välille. Pohdintatehtävässä paramerien a, b, c, h ja k välille johdettu yhteys nähdään myös tässä: paraabelin yhtälö on $k = -ah^2 + c$ ja se kuvaa siis huipun y-koordinaatin k riippuvuutta x-koordinaatista h kun parametrit a ja c ovat vakioita. Parametri h riippuu parametrista a ja b kaavan $h = -\frac{b}{2a}$ mukaisesti ja tämä tulee esiin riippuen siitä, kumpi pidetään vakiona. Saadun suoran yhteys voi olla vaikeampi hahmottaa suorilta käsin, mutta se kuvaa huipun y-koordinaatin k riippuvuutta huipun x-koordinaatista h kun parametrit b ja c ovat vakioita. On tarkoitus, että oppilaat muodostavat tehtävien 3* ja 14* avulla yhteyksiä funktion yhtälön ja kuvaajan eri esitysmuotojen välille.

2.6 Tekijämuoto

2. asteen funktion käsittely tekijämuodossa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ alkaa GeoGebralla Pohdinnassa 3.4.2 oppilaiden päätellessä tekijöiden x_1 ja x_2 olevan funktion nollakohdat. Oppilaat asettavat funktion vielä GeoGebran avulla kulkemaan sille annettujen pisteiden $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$ kautta sen pienimmän arvon ollessa -9 ja saavat funktioksi $f(x) = (x + 3)(x - 3)$ eli huippumuodossa jo ennestään tuttu $f(x) = x^2 - 9$.

Tehtäväosuudessa päätellään funktioiden nollakohtia niiden tekijämuotoisista yhtälöistä ja piirretään vihkoon niiden kuvaajia. Tehtävässä 15 katsotaan funktion kuvaajasta sen nollakohdat ja päätellään yhtälö sijoittamalla ne tekijämuodon yhtälöön. Parametrin a voi ratkaista sijoittamalla toinen nollakohta sekä funktion arvo tässä pisteessä näin saatuun yhtälöön. Tehtävässä 16 yhdistetään yleistä-, huippu- ja tekijämuotoa, kun tehtävien 2 ja 5 kuvien avulla muodostetaan 2. asteen polynomifunktiolle yhtälö nyt tekijämuodon kautta ja verrataan niitä aiemmin muodostettuihin yleisen- ja tekijämuodon yhtälöihin.

Tehtävässä 17* kerrotaan keskenään 1. asteen funktioita ja saadaan tuloksena korkeamman asteen funktioita. Tehtävän idea on M. Weller Weinholdin artikkelista Designer functions: power tools for teaching mathematics [19]. Tämä tehtävä tarjoaa mahdollisuuden esitellä 2. asteen funktion kahden 1. asteen eli lineaarisen funktion tuotteena. Kun oppilaat kertovat keskenään 1. asteen funktioita tai tekijöitä, he voivat itse suunnitella funktioita, jotka ovat helposti kontrolloitavissa. Kun oppilaat huomaavat, että tekijät ja nollakohdat vaikuttavat niin paljon funktion kulkuun, saa tämä heidät ehkä myös haluamaan oppia tekijöihin jakoa. Tämä tehtävä johdattelee oppilaita myös kirjan myöhemmissä osissa vastaan tulevien funktion merkkikaavion, epäyhtälöiden ja korkeamman asteen funktion käsittelyyn.

Tehtävässä 17* kerrotaan keskenään funktiot $f(x) = x + 2$ ja $f(x) = x - 3$ ja saadaan tuloksena 2. asteen funktio tekijämuodossa $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ tai yleisessä muodossa $f(x) = x^2 - x - 6$, eli oppilaat voivat päätellä nyt, että 1. asteen funktiot ovat 2. asteen funktion tekijöitä. Tekijämuodon funktiossa nollakohdat ovat näkyvillä. 2. asteen funktion nollakohdat ovat myös keskenään kerrottujen 1. asteen funktioiden nollakohtia. Kun suorat ja paraabeli piirretään GeoGebralla, käy tämä päättely vielä paremmin ilmi. Oppilaat voivat nyt päätellä tai nähdä Geogebran kuvasta, että kun molempien 1. asteen yhtälöiden arvot ovat samanmerkkisiä on 2. asteen funktion arvo positiivinen ja kun funktioiden arvot ovat erimerkkisiä on arvo negatiivinen. Oppilaat voivat vielä testata Geogebralla useamman 1. asteen funktion yhtälön eli tekijän kertomista keskenään ja todeta, että sama päättely toimii edelleen.

2.7 Toisen asteen polynomifunktion esitysmuotojen yhteys

Tämän kirjan osan viimeisessä osassa "2. asteen polynomifunktion esitysmuotojen yhteys"yhdistetään aiemmin tehdyt päätelmät. Pohdinnassa 3.5.1 tarkastellaan 2.asteen funktioita huippumuodossa ja päätellään, millä parametrien a ja k arvoilla funktiolla $f(x) = a(x - h)^2 + k$ on nollakohdat. Huomataan, että joko parametrin a tai parametrin k täytyy aina olla positiivinen ja jommankumman negatiivinen. Jos sekä a että k ovat molemmat samanmerkkisiä, funktiolla ei ole nollakohtia. Oppilaat selvittävät vielä GeoGebratarkastelun avulla funktion nollakohtien ja huipun x-koordinaatin h välisen yhteyden. Oppilaat voivat nyt nähdä GeoGebrasta funktion nollakohtien ja huipun koordinaattien arvot ja ratkaista niiden väliseksi yhteydeksi $h = \frac{x_1+x_2}{2}$. Tämä seuraa tietysti myös siitä, että funktion huippu on symmetrisesti nollakohtien välissä ja huipun kautta kulkee funktion symmetria-akseli. Nyt kohdassa 3. oppilaat voivat ratkaista myös Pohdinnan 3.4.2 kohdan 4. funktion ilman GeoGebraa, koska he pystyvät ratkaisemaan funktion huipun x-koordinaatin. Kohdassa 4. vielä syvennetään kohdan 1. päättelyä ratkaistaessa nollakohtia yhtälön $f(x) = a(x - h)^2 + k$ avulla. Kun asetetaan, että $a(x - h)^2 + k = 0$ eli $a(x - h)^2 = -k$ ja $x - h = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$, tulee vastaan juuren ottaminen negatiivisesta termistä $-\frac{k}{a}$ mutta kohdassa 1. pohditun perusteella huomataan, että juuren sisällä tulee olemaan nollakohtien ollessa olemassa aina positiivinen luku ja kun juuren sisälle tulee negatiivinen luku, ei nollakohtia ole olemassa. Nollakohdiksi tulevat $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$. *Etäisyys funktion kuvaajan keskikohdasta on $\pm\sqrt{\frac{k}{a}}$ (Ks. kohta 3).

Tehtävässä 18 päätellään huippumuotoisten funktioiden nollakohtia ja muutetaan niitä tekijämuotoon. a) ja b) kohtien funktiot ovat jo tekijämuodossa, ja näin myös huipun x-koordinaatti on funktion nollakohta. c)-kohdassa voi käyttää Pohdinnassa 3.5.1 johdettua kaavaa $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$ nollakohtien laskemiseen huippumuodon yhtälöstä. Oppilaat voivat vielä tarkistaa lopuksi GeoGebralla, onko nollakohdat laskettu oikein. Tehtävässä 19 oppilaiden on tarkoitus huomata kaikkien kirjan esimerkkien funktioiden olevan sama funktio.

Tehtävässä 20 sijoitetaan annetut nollakohdat $x = -1$ ja $x = 3$ tekijöinä tekijämuodon yhtälöön ja huipun koordinaatit huippumuodon yhtälöön. Huipun x-koordinaatin eli parametrin h selvittämisessä käytetään apuna Pohdinnassa 3.5.1 johdettua tietoa $h = \frac{x_1+x_2}{2}$. Ratkaistaan parametrin a arvo ja yhtälö yleisessä muodossa. Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ kuvaaja voidaan nyt hahmotella funktion nollakohtien ja huipun koordinaattien avulla vihkoon.

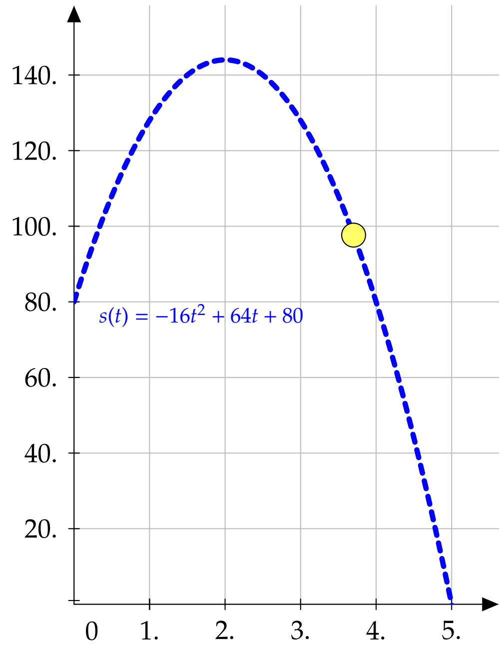
Lopuksi ratkaistaan johdantona ollut tehtävä 21 ilman GeoGebraa. Tehtävä kokoaa yhteen kaikki kirjan tässä osassa käsitellyt 2. asteen funktion esitysmuodot. Oppilaat voivat jo nähdä vinkkiä ja tarkistaa saamiaan vastauksia johdannossa tehtävään liittyneestä GeoGebrakuvasta. a) -kohdassa tornin korkeus ajanhetkellä t=0 saadaan sijoittamalla tämä funktion yhtälöön tai nähdään siitä suoraan. Voidaan käyttää myös hyväksi päättelyä että parametri c on funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti, ja y-akselillahan nyt on etäisyys maan pinnasta. b) -kohdassa pallon saavuttaman maksimikorkeuden ratkaiseminen vaatii funktion $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$ kuvaajan huipun koordinaattien y-koordinaatin k selvittämistä. Tämä olisi tarkoitus tehdä käyttämällä kaavoja $h = -\frac{b}{2a}$ ja $k = -ah^2 + c$. c) -kohdassa pallon lennon keston ratkaisemiseksi on ratkaistava funktion nollakohdat. Nyt voidaan muodostaa huipun koordinaattien h ja k avulla yhtälö huippumuodossa ($s(t) = -16(t-2)^2+144$) ja ratkaista tästä nollakohdat kaavalla $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$. Ratkaisuina saadaan $x = -1$ ja $x = 5$ ja nyt voidaan pohtia kumpi ratkaisu on mahdollinen.

Lopuksi on lisätietona vielä kerrattu tässä osassa läpikäydyt 2. asteen polynomifunktion esitysmuodot ja parametrien h, k, x_1 ja x_2 merkitys.

Luku 3

Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli, ja sillä voidaan mallintaa esimerkiksi heittoliikettä: Tennispallo lyödään ylöspäin tornista ja sen etäisyyttä maan pinnasta ajan funktiona kuvaa yhtälö $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$. Ratkaise tornin korkeus, pallon saavuttama maksimikorkeus ja pallon lentomatkan kesto! Palataan tähän tehtävään hieman myöhemmin kun olemme käsitelleet keinoja sen ratkaisemiseksi.



3.1 Yleinen muoto

Määritelmä: Toisen asteen polynomi on funktio joka voidaan esittää muodossa

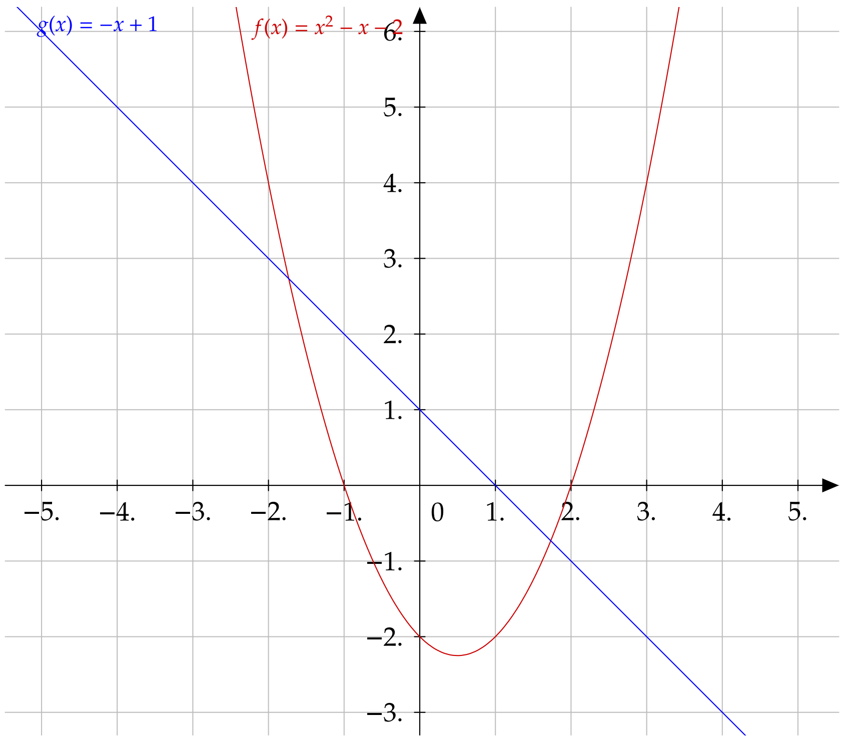
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$.

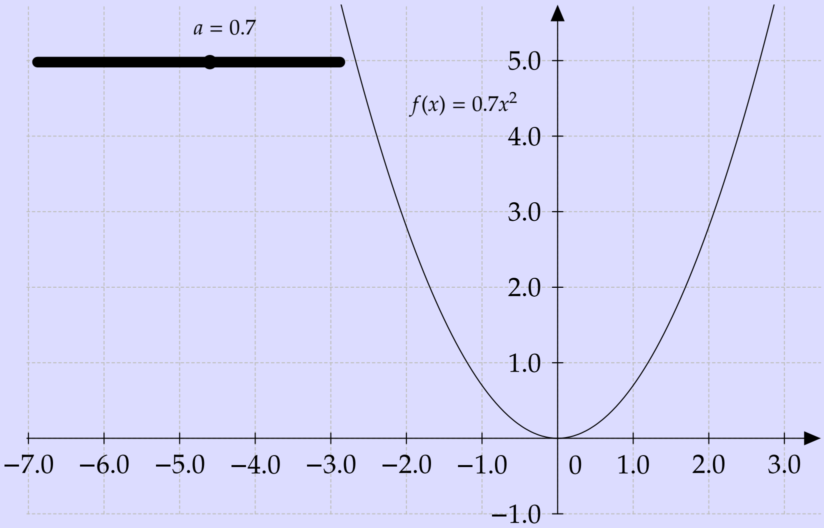
Esimerkki 3.1.1 Funktio $f(x) = x^2 - x - 2$ on toisen asteen polynomifunktio.

Määritelmä: Funktion *nollakohta* on muuttujan arvo, jolla funktio saa arvon nolla.

Esimerkki 3.1.2 Funktion $f(x) = x^2 - x - 2$ nollakohtia ovat -1 ja 2, koska $f(-1) = f(2) = 0$ ja funktion $g(x) = -x + 1$ nollakohta on 1, koska $g(1) = 0$.



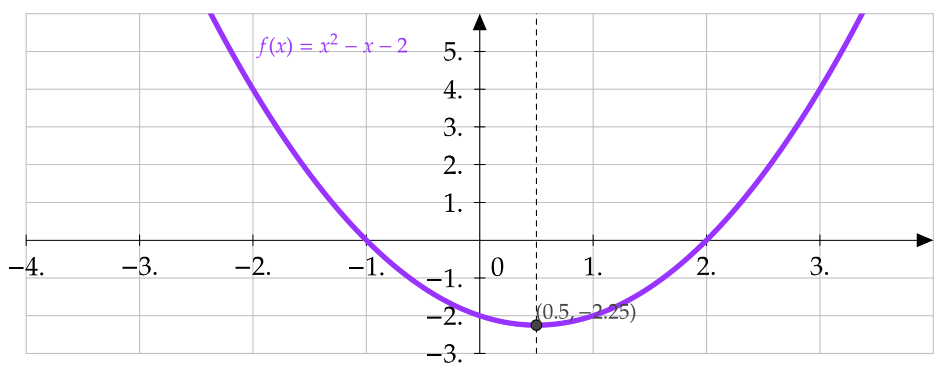
Pohdinta 3.1.3 Tutki toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2$ kuvaajaa GeoGebralla. Valitse parametri a liukusäätimellä vaihtuvaksi.



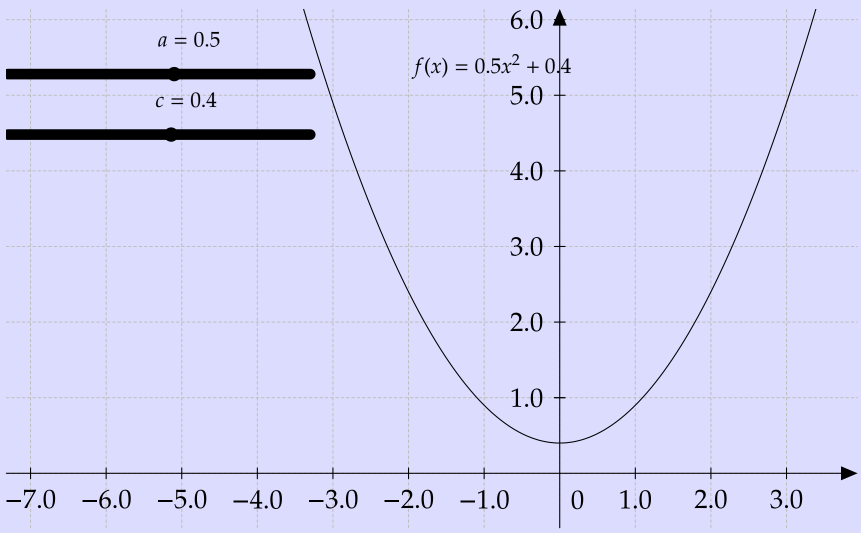
1. Miten kuvaaja muuttuu, kun valitset parametrille a arvoja välillä $0-5$?
2. Mitä arvelisit kuvaajalle tapahtuvan, kun parametri a saa negatiivisia arvoja?
3. Miten kuvaaja muuttuu, kun valitset parametrille a arvoja välillä $-5-0$?
4. Milloin funktio $f(x)=ax^2$ saa arvon nolla?
5. Muodosta funktio $f(x)=ax^2$ siten, että sen kuvaaja kulkee pisteen $(\frac{1}{2},1)$ kautta. Mikä on muodostamasi funktio?
6. *Miten päättelisit äskeisen kohdan funktion ilman GeoGebraa?

Määritelmä: *T*oisen asteen polynomifunktion kuvaajalla on *huippu* ja se on symmetrinen huipun kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran (*symmetria-akseli*) suhteen.

Esimerkki 3.1.4 Funktion $f(x)=x^2-x-2$ kuvaajan huipun koordinaatit ovat $(\frac{1}{2},-2\frac{1}{4})$ ja symmetria-akseli on $x=\frac{1}{2}$.

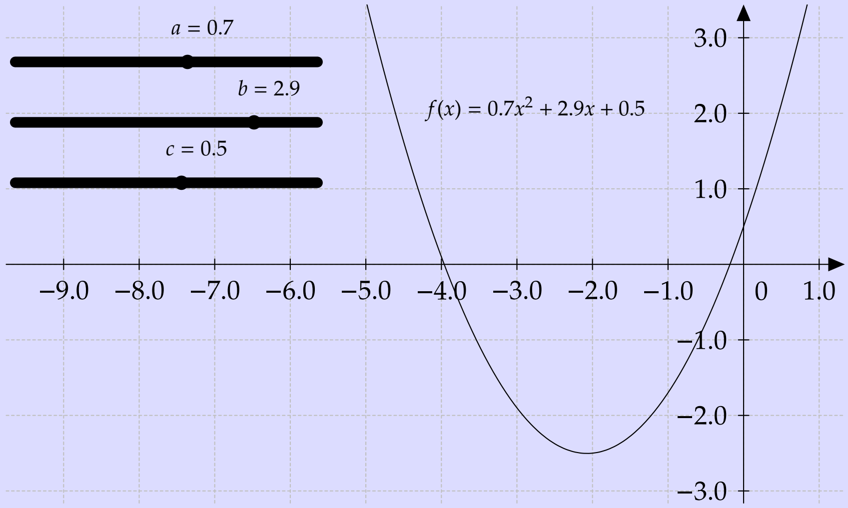


Pohdinta 3.1.5 Tutki nyt funktion kuvaajaa GeoGebralla muodossa $f(x) = ax^2 + c$. Valitse parametrit a ja c liukusäätimellä vaihtuviksi.



1. Miten arvelet parametrin a arvon muuttamisen vaikuttavan tässä tapauksessa?
2. Miten arvelet parametrin c arvon muuttamisen vaikuttavan?
3. Testaa GeoGebralla ovatko hypoteesisi tosia.
4. Milloin funktiolla $f(x) = ax^2 + c$ on nollakohta/nollakohdat?
5. Milloin funktiolla $f(x) = ax^2 + c$ ei ole nollakohtia?
6. Mikä on tämän kohdan funktion ja kohdan 3.1.3 funktion symmetria-akseli?
7. Muodosta funktio $f(x) = ax^2 + c$ siten, että sen kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $(0, -3)$ ja kulkee pisteen $(4, 1)$ kautta. Mikä on muodostamasi funktio?
8. *Miten päättelisit äskeisen kohdan funktion ilman GeoGebraa?

Pohdinta 3.1.6 Tutki nyt funktion kuvaajaa GeoGebralla muodossa $f(x) = ax^2+bx+c$. Vaihtele parametreja a, b ja c liukusäätimellä.



1. Miten arvelet parametrien a, b ja c arvon muuttamisen vaikuttavan funktion kuvaajaan?
2. Miten parametrien a, b ja c arvon muuttaminen vaikuttaa kuvaajan muotoon?
3. Miten parametrien a, b ja c arvon muuttaminen vaikuttaa kuvaajan sijaintiin?
4. Mikä parametri c on?
5. Muodosta funktio $f(x) = ax^2 + bx + c$ siten, että sen sen suurin arvo on 2 ja se leikkaa x-akselin pisteessä $(-1, 0)$. Mikä on muodostamasi funktio? Mikä on funktion toinen x-akselin leikkauspiste?
6. *Miten päättelisit äskeisen kohdan funktion ilman GeoGebraa? Onko äskeisen kohdan funktio yksikäsitteinen?

Tehtävät

1. Piirrä vihkoosi seuraavien funktioiden kuvaajat:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

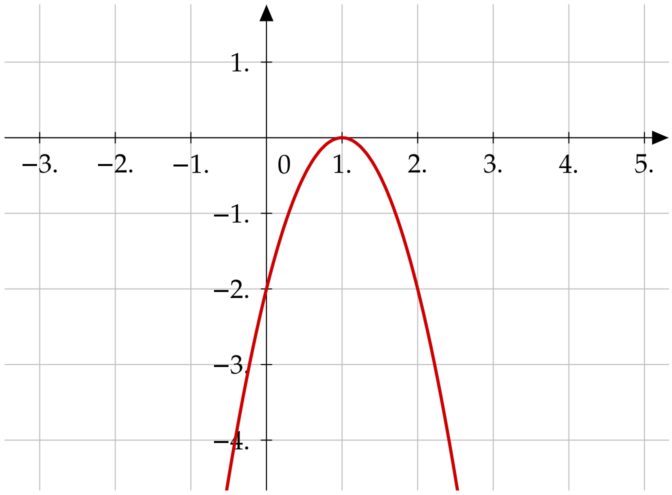
b) $f(x) = -2x^2$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

e) $f(x) = -x^2 - x + 2$

2. Alla on esitetty 2. asteen polynomifunktion kuvaaja. Mikä funktio on kyseessä?



3. *Tutkimus GeoGebralla: Avaa tiedostosi, jossa tutkit 2. asteen polynomifunktion kuvaajaa muodossa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Jäljitä kuvaajan huipun liike, kun vaihdat parametrin a arvoa liukusäätimellä: pidä parametrien b ja c arvo samana ja muuta parametrin a arvoa. Toista parametrien b ja c eri arvoilla 3-4 kertaa. Taulukoi tulokset.

b) Jäljitä kuvaajan huipun liike, kun vaihdat parametrin b arvoa liukusäätimellä: pidä parametrien a ja c arvo samana ja muuta parametrin b arvoa. Toista parametrien a ja c eri arvoilla 3-4 kertaa. Taulukoi tulokset.

c) Mitkä ovat saamasi suoran (a)-kohta) ja paraabelin (b)-kohta) yhtälöt? Mikä on niiden yhteys funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ yhtälöön?

3.2 Huippumuoto

Määritelmä: *Toisen asteen polynomifunktio voidaan esittää myös huippumuodossa*

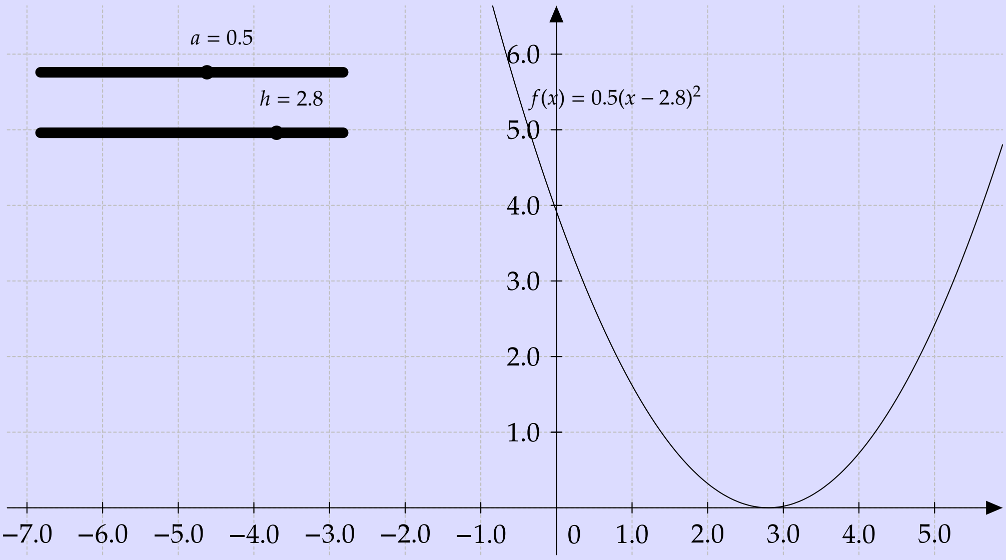
$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

missä a, h ja k ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$.

Esimerkki 3.2.1 Funktio $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ on huippumuodossa oleva toisen asteen polynomifunktio.

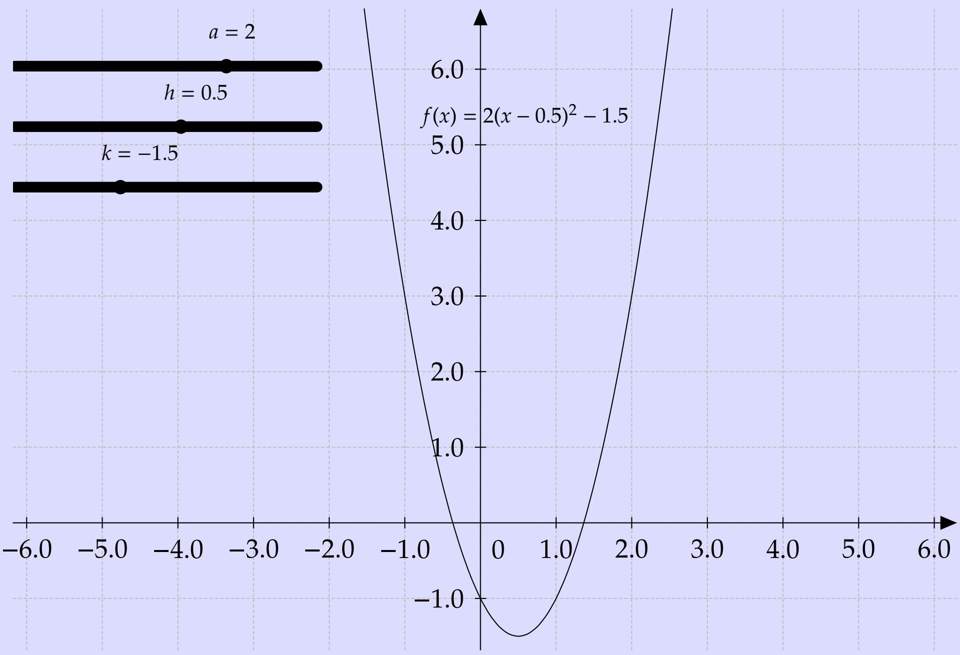
Esimerkki 3.2.2 Funktio $f(x) = 2(x+3)^2 - x$ ei ole huippumuodossa.

Pohdinta 3.2.3 Tutki 2. asteen polynomifunktion kuvaajaa GeoGebralla muodossa $f(x) = a(x-h)^2$. Valitse parametrit a ja h liukusäätimellä vaihtuviksi.



1. Miten kuvailisit parametrin h arvon vaikutusta kuvaajan sijaintiin?
2. Milloin funktio $f(x) = a(x-h)^2$ saa arvon nolla?
3. Muodosta funktio $f(x) = a(x-h)^2$ siten, että sen kuvaaja kulkee pisteen (-2,0) kautta. Mikä on muodostamasi funktio? Mikä on funktion symmetria-akselin yhtälö?
4. Voitko muodostaa funktion $f(x) = a(x-h)^2$ siten, että sen huippu on pisteessä (-2,1)?

Pohdinta 3.2.4 Tarkastele nyt funktion kuvaajaa muodossa $f(x) = a(x-h)^2+k$. Valitse parametrit a, h ja k liukusäätimellä vaihtuviksi.



1. Miten arvelet parametrien a, h ja k arvon vaikuttavan kuvajaan nyt?
2. Miten kuvailisit parametrin h arvon vaikutusta kuvaajan sijaintiin?
3. Miten kuvailisit parametrin k arvon vaikutusta kuvaajan sijaintiin?
4. Mitä parametrit h ja k ovat?
5. Muodosta funktio $f(x) = a(x - h)^2 + k$ siten, että sen huippu on pisteessä $(3, 2)$. Onko funktio yksikäsitteinen?
6. Muodosta funktio $f(x) = a(x - h)^2 + k$ siten, että sen pienin arvo on -2 ja se leikkaa x-akselin kohdissa $(0, 0)$ ja $(2, 0)$. Mikä on muodostamasi funktio? Mikä on funktion symmetria-akselin yhtälö?
7. *Miten päättelisit äskeisen kohdan funktion ilman GeoGebraa?

Tehtävät

4. Piirrä vihkoosi seuraavien funktioiden kuvaajat. Mitkä ovat funktioiden huippujen koordinaatit?

a) $f(x) = (x + 2)^2$ (Vertaa tehtävään 1 d))

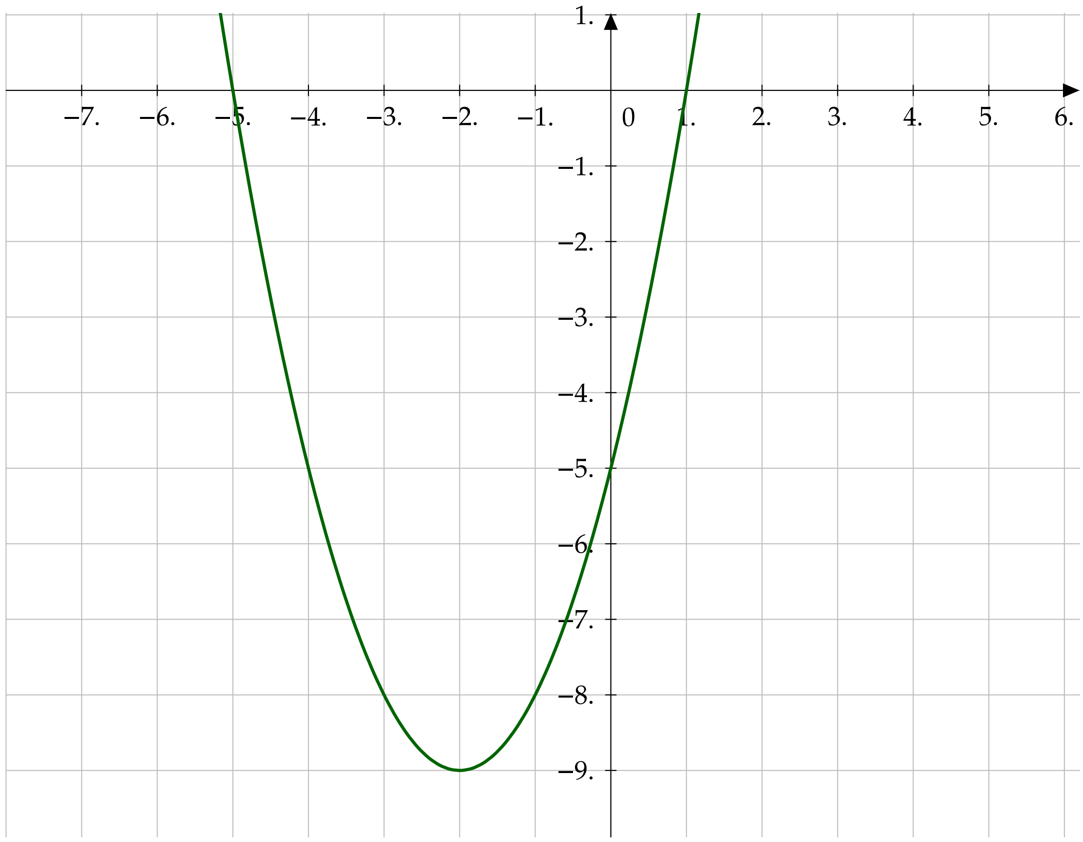
b) $f(x) = (x - 5)^2 + 2$

c) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$

5. Alla on esitetty 2. asteen polynomifunktion kuvaaja.

a) Mitkä ovat funktion huipun koordinaatit?

b) Mikä funktio on kyseessä?



6. Muodosta tehtävän 2 polynomifunktion kuvaajalle yhtälö huippumuodon kautta. Onko saamasi yhtälö sama kuin tehtävässä 2 saamasi yhtälö?

7. Paritehtävä:

a) Saimi alkoi piirtää funktion $f(x) = (x-3)^2$ kuvaajaa. Hän päätti siirtää funktion $f(x) = x^2$ kuvaajaa kolme yksikköä vasemmalle. Kerro Saimille miksi hänen tapansa on väärä.

b) Osoita kolmella eri tavalla, että $(x+3)^2$ ei ole $x^2 + 9$.

8. *Piirrä tehtävän 5 funktion kuvaaja nyt GeoGebralla. Syötä Geogebraan yhtälö yleisessä muodossa. Kirjoita ylös funktion nollakohdat.

a) Siirrä kuvaajaa niin, että sen symmetria-akseliksi tulee on y-akseli (tee siirto niin, että vain huipun x-koordinaatti muuttuu ja y-koordinaatti pysyy samana). Mitä huomaat tapahtuvan muuttujalle x? Kirjoita tämä ylös.

b) Mitkä ovat 2. asteen yhtälön nollakohdat nyt?

c) Mikä yhteys on näiden nollakohtien ja alkuperäisten nollakohtien välillä?

d) Piirrä nyt kuvaaja GeoGebralla niin, että vaihdat kaavassa näkyvän muuttujasta x vähennettävän termin arvoa liukukytkimellä. Kirjoita vielä samaan GeoGebratiedostoon funktion yhtälö huippumuodossa ja vaihda muuttujasta x vähennettävän termin h arvoa liukukytkimellä. Mitä huomaat?

3.3 Yleisen muodon ja huippumuodon yhteys

Pohdinta 3.3.1 Johda nyt yhteys 2. asteen polynomifunktion

Yleisen muodon $f(x) = ax^2 + bx + c$ ja

Huippumuodon $f(x) = a(x - h)^2 + k$ kaavojen välille:

1. Miten voit kirjoittaa parametrin h ilmaistuna parametrien a ja b avulla?
2. Miten voit kirjoittaa parametrin k ilmaistuna parametrien a, c ja h avulla?

Tehtävät

9. Mitkä ovat funktion $f(x) = x^2 - 9$ kuvaajan huipun koordinaatit?

10. Muuta yleisestä muodosta huippumuotoon yhtälöt 1, 2 ja 3. Mitkä ovat kuvaajien huippujen koordinaatit?

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$ (Katso myös 1 d) ja 4 a))

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

11. Avaruusalus lähestyy tähteä ja joutuu sen gravitaatiokenttään. Kun aluksen moottorit käynnistyvät, sen vauhti hidastuu ja pysähtyy hetkeksi, jonka jälkeen se toivottavasti saa lisää vauhtia ja pääsee irti tähden gravitaatiokentästä. Moottorit käynnistettiin, kun alus oli 750 tuhannen kilometrin etäisyydellä tähdestä. Minuutin jälkeen alus oli 635 tuhannen kilometrin ja kahden minuutin jälkeen 530 tuhannen kilometrin etäisyydellä tähdestä.

a) Etsi tehtävänannosta kolme pistettä, joissa x-koordinaatti on aika siitä kun aluksen moottorit käynnistyivät ja y-koodinaatti on etäisyys tähdestä.

b) Muodosta löytämiisi kolmeen pisteeseen sopiva 2. asteen polynomifunktion yhtälö.

c) Jos alus joutuu 50 tuhannen kilometrin etäisyydelle tähdestä, sen suojakuori pettää ja se palaa. Käytä muodostamaasi yhtälöä ratkaistaksesi, miten avaruusalukselle käy.

12. Piirrä vihkoosi funktioiden $f(x) = x^2$, $f(x) = (x + 2)^2$ ja $f(x) = x^2 + 2$ kuvaajat. Kerro sanallisesti, miten ne eroavat toisistaan.

13. *Yhdistä Tehtävässä 3* tekemäsi päätelmät Pohdintatehtävässä 4.3.1 johtamiisi yhtälöihin:

a) Jos kuvaajan huipun koordinaatit ovat (h,k), miten voit ilmoittaa nämä Tehtävässä 3 saamiesi yhtälöiden avulla?

b) Vertaa nyt saamiasi yhtälöitä Pohdintatehtävässä 4.3.1 saamiisi yhtälöihin. Mitä riippuvuutta tehtävässä 3* saamasi suora ja paraabeli kuvaavat?

3.4 Tekijämuoto

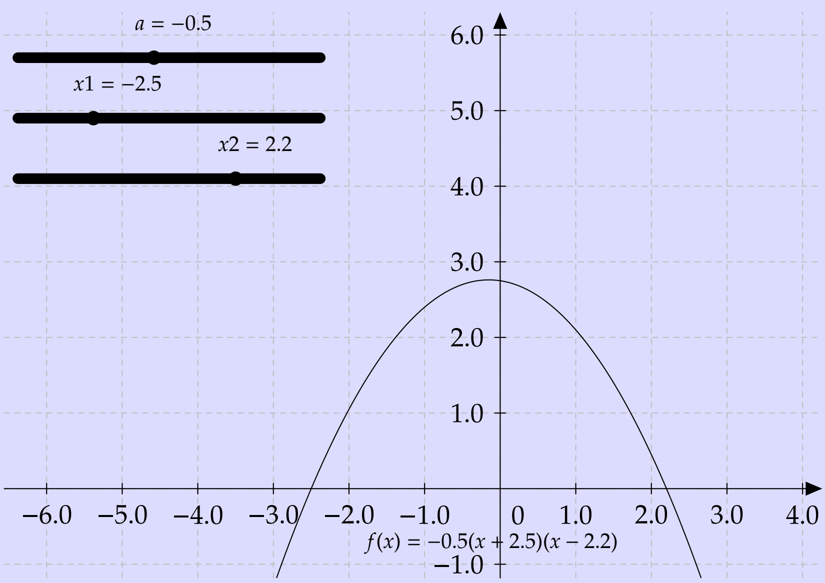
Määritelmä: *T*oisen asteen polynomifunktio, jolla on tekijät $(x-x_1)$ ja $(x-x_2)$ voidaan esittää myös *tekijämuodossa*

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

missä a, x_1 ja x_2 kuuluvat reaalilukuihin ja $a \neq 0$.

Esimerkki 3.4.1 Funktio $f(x) = (x + 1)(x - 2)$ on toisen asteen polynomifunktio.

Pohdinta 3.4.2 Tutki nyt 2. asteen polynomifunktion kuvaajaa GeoGebralla tekijämuodossa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.



1. Anna parametreille x_1 ja x_2 jotkin reaalilukuarvot ja vaihtele parametrin a arvoa liukusäätimellä. Missä kuvaaja leikkaa x-akselin?
2. Jos muutat myös parametreja x_1 ja x_2 liukusäätimellä, missä arvelet nyt kuvaajan leikkaavan x-akselin? Tutki!
3. Mitä parametrit x_1 ja x_2 ovat?
4. Muodosta funktio $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ siten, että se kulkee pisteiden $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$ kautta ja sen pienin arvo on -9. Mikä on muodostamasi funktio? Mikä on funktion huippumuoto?

Tehtävät

14. Päättele seuraavien funktioiden nollakohdat käyttämättä laskinta ja taulukoimatta arvoja. Hahmottele vihkoosi funktioiden kuvaajat:

a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

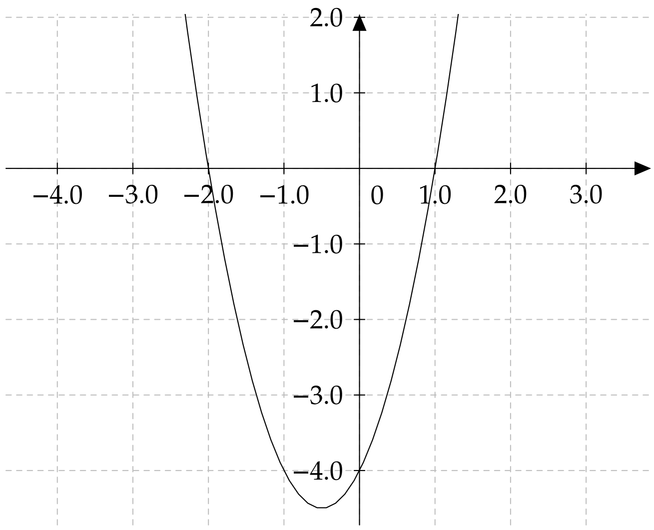
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$

c) $f(x) = -2(x + 2)(x + 4)$

15. Alla on esitetty 2. asteen polynomifunktion kuvaaja.

a) Mitkä ovat funktion nollakohdat?

b) Mikä funktio on kyseessä?



16. Muodosta Tehtävän 2 ja Tehtävän 5 polynomifunktioiden kuvaajille yhtälöt tekijämuodon kautta. Ovatko muodostamasi yhtälöt samoja kuin Tehtävässä 2 ja Tehtävässä 5 muodostamasi yhtälöt?

17. *Kerro keskenään funktiot $f(x) = x + 2$ ja $g(x) = x - 3$.

a) Minkä funktion saat?

b) Piirrä nyt 1. asteen funktiot ja saamasi 2. asteen funktio GeoGebralla. Miten voit ennustaa 2. asteen funktion arvon tai nollakohdat kertomiesi 1. asteen funktioiden avulla?

c) Toimisiko sama jos kerrot useamman 1. asteen funktion keskenään? Minkälaisia kuvaajia muodostuu? (testaa GeoGebralla)

3.5 Toisen asteen polynomifunktion esitysmuotojen yhteys

Pohdinta 3.5.1 Huippumuodon ja funktion nollakohtien yhteys

Avaa GeoGebrasta tarkastelusi 2. asteen polynomifunktion kuvaajasta muodossa $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

1. Minkälaisilla parametrien a ja k arvoilla funktiolla $f(x) = a(x - h)^2 + k$ on nollakohdat? Milloin funktiolla ei ole nollakohtia?

2. Pysäytä tarkastelusi kohtaan, jossa parametreilla a, h ja k on jokin kokonaislukuarvo ja funktiolla on nollakohdat. Mikä on huipun sijainti suhteessa nollakohtiin? Miten voit ilmaista parametrin h nollakohtien x_1 ja x_2 avulla?

3. Miten nyt päättelisit Pohdinnan 4.4.2 kohdan 4. funktion ilman GeoGebraa?

4. Miten voit laskea polynomifunktion nollakohdat sen huippumuodon yhtälöstä $f(x) = a(x - h)^2 + k$? Miksi termin $\frac{k}{a}$ on oltava negatiivinen (Katso kohta 1.)?

5. *Miten voit ilmaista etäisyyden funktion kuvaajan keskikohdasta parametrien k ja a avulla?

Tehtävät

18. Mitkä ovat Tehtävän 10 funktioiden nollakohdat? Muuta funktiot tekijämuotoon. Tarkista lopuksi GeoGebralla.

19. Onko Esimerkkien 3.1.1, 3.2.1 ja 3.4.1 funktioilla jotain yhteistä?

20. Olkoon 2. asteen polynomifunktion nollakohdat $x = -1$ ja $x = 3$ ja suurin arvo 2. Päättele funktio yleisessä muodossa tekijämuodon ja huippumuodon yhtälöiden avulla. Hahmottele funktion kuvaaja vihkoosi.

21. Tennispallo lyödään ylöspäin tornista ja sen etäisyyttä maan pinnasta ajan funktiona kuvaa yhtälö $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$. Tässä korkeuden yksikkö on metri ja ajan sekunti. Mikä on

a) tornin korkeus?

b) pallon saavuttama maksimikorkeus?

c) pallon lentomatkan kesto?

Lisätietoa: Toisen asteen polynomifunktion esitysmuodot:

1. Yleinen muoto:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

2. Huippumuoto:
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

3. Tekijämuoto:
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Parametrit h ja k ovat funktion kuvaajan huipun x- ja y-koordinaatit ja x_1 ja x_2 nollakohdat.

Luku 4

Opettajan opas

Kirjan tämän osan tehtävistä tärkeimpiä ovat Pohdintatehtävät. Tärkeimmät asiat, joita Pohdintatehtävistä tulisi käydä ilmi, on kerrottu tässä oppaassa. Opettaja voi myös ohjata oppilaita tehtävissä oikeaan suuntaan niin halutessaan. Pohdintaosuuden jälkeen tulevista tehtävistä voidaan valita tarkoituksenmukaisimmat. Tehtäväosuudessa on myös aina mukana lisää tietoa ja haastavuutta tarjoava *tehtävä. *Tehtävä voidaan tehdä jos on aikaa, tai sen voivat tehdä ne oppilaat, jotka ovat edenneet osuudessa nopeasti.

Pohdintatehtävien GeoGebratarkastelut voi tehdä pareittain samalla tietokoneella, tai jos opiskelijoilla on käytössä omat koneet tai Ipadit, olisi hyvä, että he pystyisivät keskustelemaan tehtävien kohdista keskenään. Opettajan on hyvä lopuksi koota Pohdinnassa tehdyt päätelmät yhteen.

4.1 Yleinen muoto

Pohdinta 3.1.3

Parametrin a positiivisilla arvoilla paraabeli aukeaa ylöspäin ja negatiivisilla arvoilla alaspäin. Mitä suurempi parametrin a arvo on, sitä kapeampi funktion kuvaaja on ja mitä pienempi, sitä leveämpi. Parametrin a ollessa nolla funktion kuvaaja on x-akseli. 5: $f(x) = 4x^2$. 6: Lasketaan funktio annetun pisteen perusteella.

Pohdinta 3.1.5

Käydään läpi minkälaisilla parametrien a ja c arvoilla funktiolla on kaksinkertainen nollakohta, kaksi nollakohtaa tai ei ollenkaan nollakohtia. Kiinnitetään huomiota paraabelin symmetriaan ja huipun kautta kulkevaan symmetria-akseliin (y-akseli): kaikilla a:n arvoilla paraabeli pysyy symmetrisenä. 6: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$. 7: Lasketaan funktio kahden annetun pisteen perusteella, tai huomioidaan, että $c = -3$.

Pohdinta 3.1.6

Huomataan, että parametrien a ja b vaikutusta kuvaajan on vaikeaa ennustaa: parametrin a lukuarvon muuttaminen vaikuttaa kuvaajan muotoon sekä kuvaajan huipun paikkaan koordinaatistossa. Parametrien b ja c lukuarvon muuttaminen ei vaikuta kuvaajaan muotoon vaan ainoastaan kuvaajan paikkaan koordinaatistossa. Parametri b:n lukuarvon muuttaminen saa kuvajaan huipun liikkumaan koordinaatistossa paraabelimaisesti. (*Tehtävissä 3 ja 14 tutustutaan tarkemmin siihen, miksi näin käy.) Parametri c:n lukuarvon muuttaminen saa paraabelin liikkumaan pystysuunnassa ja parametri c on kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti. 5. Nyt oppilaat voivat saada erilaisia funktioita vastauksena (helpoimmin funktion saa asettamalla liukusäätimellä $a = -2$, $b = 0$ ja $c = 2$. GeoGebrasta saa tarkat nollakohdat komennolla **nollakohdat** ja huipun koordinaatit komennolla **max**. Molempiin komentoihin pitää valita haluttu funktio ja syöttää väli millä funktiota tarkastellaan muodossa **x:n alkuarvo** ja **x:n loppuarvo**. 6. Funktion voi laskea edellisessä kohdassa saatujen nollakohtien ja huipun koordinaattien perusteella sijoittamalla ne 2. asteen funktion yleisen muodon kaavaan ja muodostamalla yhtälöryhmän. Kohdan 5 määrittelyehdoilla saatu funktio ei ole yksikäsitteinen.

Tehtävät

1. Pisteiden taulukointi, huomioidaan paraabelin symmetria. (Voidaan valita useasta funktiosta muutama, jotka oppilaat piirtävät.)

2. Parametri c nähdään kuvasta ja sijoittamalla kaksi (tai kolme) selvästi havaittavissa olevaa kokonaislukupistettä 2. asteen funktion yleisen muodon yhtälöön voidaan ratkaista parametrit a ja b.

3. *Tutkimus GeoGebralla. Tutkitaan, miksi paraabelin huippu liikkui äsken parametria a muutettaessa muodostaen suoran ja parametria b muutettaessa muodostaen paraabelin. Valitaan GeoGebrasta komento **Max** (tai **Min**) ja valitaan tälle pisteelle **jälki käyttöön**. Nyt saadaan näkyviin parametria a muutettaessa huippujen pisteiden muodostama suora ja parametria b muutettaessa huippujen pisteiden muodostama paraabeli.

a) Suora piirretään valitsemalla GeoGebrasta **suoran kahden pisteen kautta**, joiksi valitaan paraabelin huippupiste ja siitä mahdollisimman etäällä oleva piste. Suoran yhtälö näkyy nyt Algebra-alueella. Toistetaan tämä 3-4 kertaa polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ parametrien b ja c eri arvoilla muuttaen aina parametrin a arvoa liukusäätimellä ja taulukoidaan tulokset. Taulukointi on tärkeää 2. asteen funktion ja suoran parametrien yhteyden huomaamiseksi.

b) Parametrin b arvoa muutettaessa syntyvän paraabelin yhtälö on itse pääteltävä saadun jäljen avulla (Vinkki: a:n ja c:n arvoiksi kannattaa valita ensiksi 1, niin b:n arvoa liukusäätimellä muutettaessa syntyvän paraabelin yhtälö on helppo päätellä). Kun paraabelin yhtälön on saanut selville, sen voi testata se syöttämällä GeoGebraan ja tarkistamalla sopiiko se huipun pisteiden muodostaman jälkeen. Toistetaan tämä 3-4 kertaa eri a:n ja c:n arvoilla ja taulukoidaan tulokset. Taulukointi on tärkeää 2. asteen funktion ja paraabelin parametrien yhteyden huomaamiseksi.

c) Päätellään, miten 2. asteen polynomifunktion parametrit ja suoran sekä paraabelin yhtälön parametrit ovat suhteessa toisiinsa. Tuloksena tulisi saada yhtälöt:

Suora:

$$g(x) = \frac{1}{2}bx + c$$

Paraabeli:

$$h(x) = -ax^2 + c$$

Tässä tehtävässä tehtyjä päätelmiä jatketaan kun on ensin Pohdintatehtävässä 3.3.1 johdettu 2. asteen polynomifunktion yleisen muodon kaavan ja huippumuodon kaavan välinen yhteys.

4.2 Huippumuoto

Pohdinta 3.2.3

Parametrin h arvon muuttaminen saa funktion kuvaajan huipun liikkumaan pitkin x-akselia. 2: Funktiolla on aina yksi nollakohta (kaksinkertainen nollakohta). 3: $f(x) = x^2 + 4x + 4$ tai $f(x) = -x^2 - 4x - 4$. Kiinnitetään huomio myös huipun kautta kulkevaan symmetria-akseliin (yhtälö $x = -2$). 4: Funktion huippua ei voi tässä muodossa saada pisteeseen $(-2, 1)$, koska huippu sijoittuu aina x-akselille.

Pohdinta 3.2.4

Parametrit h j k ovat paraabelin huipun x ja y-koordinaatit. 5: Funktio ei ole yksikäsitteinen. 6: $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$ ($f(x) = 2x^2 - 4x$). Tarkkojen huipun koordinaattien ja nollakohtien etsimiseen pätee sama ohje, kuin kohdassa Pohdinta 4.1.5.5. Symmeria-akseli on x=1. 7: Nyt tiedetään funktion symmetrian perusteella ja symmeria-akselin yhtälöstä, että huipun x-koordinaatti on 1. Sijoitetaan parametrit h ja k sekä yksi nollakohta huippumuodon yhtälöön ja ratkaistaan parametrin a arvo.

Tehtävät

4. Pisteiden taulukointi, huomioidaan paraabelin symmetria ja huipun koordinaatit. a) kohta on sama kuin Tehtävässä 1 d).

5. a) Kuvaajasta huipun koordinaatit.

b) Yhtälö muodostetaan huipun koordinaattien avulla ja päätellään parametri a jommankumman x-akselin leikkauspisteen avulla.

7. Tehtävä tehdään ilman GeoGebraa. b) Voidaan osoittaa esim. kuvaajan avulla, kertomalla kaava $(x + 3)^2$ auki ja sijoittamalla luku x:n paikalle.

8.* a) Jos oppilaat eivät saa paraabelia liikkumaan, heidän pitää näpäyttää funktiota hiiren oikeanpuoleisella näppäimellä, mennä kohtaan "Ominaisuudet"ja poistaa merkki kohdasta "Kiinnitä objekti". Kun yhtälöä siirretään niin, että sen on symmetria-akseli on y-akseli, tulee Geogebrasta näkyviin yhtälö $f(x) = (x-2)^2 + 4(x-2) - 5$. On tärkeää, että vain kuvaajan huipun x-koordinaatti muuttuu ja y-koordinaatti pysyy samana (eli että yhtälön vakiotermi on edelleen 5).

b) Nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 3$. Yhtälö on $f(x) = x^2 - 9$.

c) Yhteys yhtälön $f(x) = x^2+4x-5$ ja saadun yhtälön $f(x) = x^2-9$ nollakohtien $x = -5$ ja $x = 1$ sekä $x = -3$ ja $x = 3$ välillä on kahden x-yksikön lisäys ja tässä 2. asteen funktion kuvaajan saattamiseksi symmetriseksi y-akselin suhteen tehtävä muuttujanvaihto olisi $t = x+2$ (tästä alkuperäisen yhtälön nollakohdat saataisiin takisinsijoittamalla $x = t-2$)

d) Havainnollistetaan vielä yhtälöä GeoGebralla muodossa $f(x) = (x-a)^2 + 4(x-a) - 5$ ja $g(x) = (x-h)^2 - 9$ samassa GeoGebratiedostossa.

4.3 Yleisen muodon ja huippumuodon yhteys

Pohdinta 3.3.1.

Kerrotaan auki huippumuodon kaava $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ja verrataan sitä yleisen muodon kaavaan $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. $h = -\frac{b}{2a}$ 2.$k = -ah^2 + c$

Tehtävät

9. Päätellään ilman Geogebraa.

10. Ilman GeoGebraa Pohdinnassa 3.3.1 johdettujen yhteyksien avulla. (a) -kohdan yhtälö on tullut vastaan jo tehtävissä 1 d) ja 4 a) ja voidaan päätellä myös käyttäen apuna niitä. (Johdatellaan neliöksi täydentämiseen helppojen yhtälöiden avulla.)

11. Voidaan tehdä GeoGebralla tai ilman.

a) Etsitään tehtävänannosta pisteet $(0, 750)$, $(1, 635)$ ja $(2, 530)$.

b) Muodostetaan 2. asteen polynomifunktion yhtälö annetun kolmen pisteen avulla sijoittamalla pisteet yleisen muodon yhtälöön. Nyt kuvaaja voidaan piirtää GeoGebralla.

c) Siihen, kuinka alukselle käy tarvitaan funktion kuvaajan huipun koordinaatit. Nämä saadaan joko funktion Pohdinnassa 4.3.1 johdetun yleisen muodon ja huippumuodon parametrien yhteyden avulla tai syöttämällä kuvaaja GeoGebraan ja katsomalla huipun koordinaatit kuvaajasta. Huipun koordinaatit $(12, 30)$, yhtälön huippumuoto: $f(x) = 5(x-12)^2 + 30$.

13. Oppilaiden olisi tarkoitus löytää yhteys Tehtävän 3.* GeoGebratarkastelun ja Pohdintatehtävän 1.3.1 kaavan johdon välille.

a) Tehtävässä 3.* on saatu yhtälöt

Suora:

$$g(x) = \frac{1}{2}bx + c$$

Paraabeli:

$$h(x) = -ax^2 + c$$

Sijoitetaan nyt näihin yhtälöihin paraabelin huipun koordinaatit (h, k) ja saadaan yhtälöt muotoon

Suora:

$$g(h) = k = \frac{1}{2}bh + c$$

Paraabeli:

$$h(h) = k = -ah^2 + c$$

b) Yhtälö

$$g(h) = k = \frac{1}{2}bh + c$$

kuvaa paraabelin huipun y-koordinaatin k riippuvuutta huipun x-koordinaatista h, kun parametrit b ja c ovat vakioita. Parametri h taas riippuu tässä parametrista a kaavan $h = -\frac{b}{2a}$ (b on vakio) mukaisesti. Paraabelin yhtälö on sama kuin Pohdinnassa 4.3.1 parametrille k johdettu yhtälö

$$k = -ah^2 + c$$

ja se kuvaa paraabelin huipun y-koordinaatin k riippuvuutta huipun x-koordinaatista h, kun parametrit a ja c ovat vakioita. Parametri h riippuu parametrista b kaavan $h = -\frac{b}{2a}$ (a on vakio) mukaisesti.

4.4 Tekijämuoto

Pohdinta 3.4.2

Tekijöissä x_1 ja x_2 ovat funktion nollakohdat. 4: $f(x) = (x-3)(x+3)$ eli huippumuodossa $f(x) = x^2 - 9$.

Tehtävät

14. b) funktio on sekä tekijä-että huippumuodossa. c) funktio on sama kuin Harjoituksen 4. kohdan 3. funktio. (Johdatellaan oppilaita huomaamaan huippu- ja tekijämuodon yhteyttä.)

15. b) Sijoitetaan kuvaajasta katsotut nollakohdat tekijämuodon yhtälöön ja ratkaistaan parametri a sijoittamalla toinen nollakohta sekä funktion arvo tässä pisteessä näin saatuun yhtälöön.

16. Muodostetaan Tehtävien 2 ja 5 funktioille yhtälöt tekijämuodon kautta. (Tehtävä johdattelee huomaamaan muotojen yhteyksiä ja yhtälön muuntamista muodosta toiseen.)

17. *GeoGebralla: suorat ja paraabeli samaan koordinaatistoon.

a) Kerrotaan keskenään 1. asteen polynomifunktioita. Saadaan 2. asteen polynomifunktio.

b) Geogebran kuvasta nähdään, että kun molempien 1. asteen yhtälöiden arvot ovat samanmerkkisiä on 2. asteen funktion arvo positiivinen ja kun funktioiden arvot ovat erimerkkisiä negatiivinen. 1. asteen yhtälöiden nollakohdat ovat myös paraabelin nollakohtia. 1. asteen funktioiden yhtälöt ovat 2. asteen funktion tekijöitä.

c) Nyt voidaan testata Geogebralla useamman 1. asteen funktion yhtälön eli tekijän kertomista keskenään ja todeta, että kohdan 2. päättely toimii edelleen. (Tehtävä johdattelee funktion merkkikaavion, epäyhtälöiden ja korkeamman asteen funktion käsittelyyn.)

4.5 Toisen asteen polynomifunktion esitysmuotojen yhteys

Pohdinta 3.5.1

1. Tarkastellaan millä parametrien a ja k arvoilla funktiolla $f(x) = a(x-h)^2 + k$ on nollakohdat ja huomataan, että jommankumman täytyy aina olla positiivinen ja jommankumman negatiivinen. Jos sekä a että k ovat molemmat samanmerkkisiä funktiolla ei ole nollakohtia. 2. Funktion nollakohtien ja huipun x-koordinaatin h välinen yhteys on $h = \frac{x_1+x_2}{2}$. 3. Käytetään hyväksi äskeisen kohdan tietoa $h = \frac{x_1+x_2}{2}$ ratkaistaessa parametria huipun x-koordinaattia h, jonka jälkeen voidaan ratkaista parametri a. 4. Tässä tulee vastaan juuren ottaminen negatiivisesta termistä $-\frac{k}{a}$ mutta kohdassa 1. pohditun perusteella huomataan, että juuren sisällä tulee olemaan nollakohtien ollessa olemassa aina positiivinen luku. Nollakohdat ovat $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$ 5. *Etäisyys funktion kuvaajan keskikohdasta on $\pm\sqrt{\frac{k}{a}}$ (Ks. kohta 3).

Tehtävät

18. a) ja b) -kohtien funktiot ovat jo tekijämuodossa. Käytetään Pohdinnassa 4.5.1 johdettua kaavaa $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$ c) -kohdan nollakohtien päättelyyn.

19. Sama funktio.

20. Tehtävä tehdään ilman GeoGebraa. Sijoitetaan annetut tiedot huippu- ja tekijämuodon yhtälöihin. Parametrin h selvittämisessä käytetään apuna tietoa $h = \frac{x_1+x_2}{2}$ (Ks. Pohdinta 1.5.1). Ratkaistaan parametrin a arvo ja yhtälö yleisessä muodossa.

21. Ratkaistaan ilman Geogebraa. Voidaan tarkistaa johdannon kuvasta. a) Tornin korkeus ajanhetkellä t=0 ratkaistaan tai nähdään funktion yhtälöstä.

b) Pallon saavuttaman maksimikorkeuden ratkaiseminen vaatii funktion $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$ kuvaajan huipun koordinaattien y-koordinaatin k selvittämistä. Tämä olisi tarkoitus tehdä käyttämällä kaavoja $h = -\frac{b}{2a}$ ja $k = -ah^2 + c$.

c) Pallon lennon keston ratkaisemiseksi on ratkaistava funktion nollakohdat. Nyt voidaan muodostaa huipun koordinaattien h ja k avulla yhtälö huippumuodossa ($s(t) = -16(t-2)^2 + 144$) ja ratkaista tästä nollakohdat kaavalla $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$. (Koska ratkaisut ovat $x = -1$ ja $x = 5$ voidaan pohtia kumpi ratkaisu on mahdollinen.)

Luku 5

Tehtävien ratkaisut

2. $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

3.

Suora:

$$g(x) = \frac{1}{2}bx + c$$

Paraabeli:

$$h(x) = -ax^2 + c$$

4. a) $(-2, 0)$ b) $(5, 2)$ c) $(-3, 2)$

5. a) $(-2, -9)$ b) $f(x) = (x + 2)^2 - 9$

6. $f(x) = -2(x - 1)^2$. Funktio on sama.

7. b) Nollakohdat ovat $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$

9. Huipun koordinaatit ovat $(0, 9)$

10. a) $f(x) = (x + 2)^2$. Huipun koordinaatit ovat $(-2, 0)$ b) $f(x) = (x - 1)^2$. Huipun koordinaatit ovat $(1, 0)$ c) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Huipun koordinaatit ovat $(1, -4)$

11. a) $(0, 750)$,$(1, 635)$ ja $(2, 530)$ b) $f(x) = 5x^2 - 120x + 750$ c) Avaruusalus palaa.

13. a) Suora:

$$g(h) = k = \frac{1}{2}bh + c$$

Paraabeli:

$$h(h) = k = -ah^2 + c$$

14. Nollakohdat ovat a) $x = -2$ ja $x = 1$ b) $x = 3$ c) $x = -2$ ja $x = -4$

15. a) $x = -2$ ja $x = 1$ b) $f(x) = 2(x + 2)(x - 1)$

16. $f(x) = -2(x - 1)^2$ ja $f(x) = (x - 1)(x + 5)$

17. a) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ tai $f(x) = x^2 - x - 6$

18. a) $x = -2$ ja $f(x) = (x + 2)^2$ b) $x = 1$ ja $f(x) = (x - 1)^2$ c) $x = -1$ ja $x = 3$ ja $f(x) = (x - 3)(x + 1)$

19. Funktiot ovat samoja.

20. Funktio on $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

21. a) 80 metriä b) 144 metriä c) 5 sekuntia

Kirjallisuutta

[1] Bloom, B. S.; Ebgelhart, M.D.; Furst, E. J.; Hill, W. H.; Kratwohl, D. R. 1956. Taxonomy on educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: congnitive domain. New York: David McKay Company.

[2] Budinski, N. and Subramaniam, S. 2013. The first derivative of an exponential function with the "whitebox/black box"didactical principle and observations with geogebra. European Journal of Contemporary Education, Vol 4. No 2:81-87.

[3] Cuoco, A., Goldenberg, E. P. and Mark, J. 1996. Habits of mind: an organizing principle for mathematics curricula. Journal of Mathematical Behavior 15:375-402.

[4] Davis, J.D. 2013. An unexpected influence on a quadratic. Using a tehcnology to explore the coefficients of a quadratic equation leads to an unexpected result. Mathematics Teacher. Vol. 107. No 3:212-218.

[5] Eraslan, A.2008. The notion of reducing abstraction in quadratic functions. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 39. No. 8:1051-1060.

[6] Freda, A. 2008. CAS or not to CAS. Sound off. Mathematics Teacher. Vol 102. No. 1:8-9.

[7] Hautajärvi, T.; Ottelin, J. and Wallin-Jaakkola, L. 2004. Laudatur 2, Polynomifunktiot. Otava. Ensimmäinen painos.

[8] Ha Roh, K. 2003. Problem-based learning in mathematics. Eric: Digest. Clearinghouse for science, mathematics and environmental education.

[9] Hietakymi, E. 2014. Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe ja GeoGebra sen työvälineenä. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

[10] Kangasaho, J.; Mäkinen, J.; Oikkonen, J.; Paasonen, J.; Salmela, M. and Tahvanainen, J. 2004. Pitkä matematiikka 2, Polynomifuktiot. WSOY. First edition.

[11] Kangasaho, J.; Mäkinen, J.; Oikkonen, J.; Paasonen, J.; Salmela, M. and Tahvanainen, J. 2012. Pitkä matematiikka 2, Polynomifuktiot. WSOY. 1st-6th edition.

[12] Koklu, O. and Topcu, A.2012. Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students' misconceptions about graphs of quadratic functions. International

Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 43. No. 8:999-1011.

[13] Kop, P.; Janssen, F.; Drijvers P.; Veenman, M. and Driel, J. 2015. Identifying a framework for graphing formulas from expert strategies. The Jounal of Mathematical Behavior. 39:121-134.

[14] Ozgun-Koca, S. and Edwards, T. 2008. The new generation of handheld calculators. Can your students "Bend it like Beckham"? Mathematics Teacher. Vol 102. No. 1:70-73.

[15] Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2015. Opetushallitus.

[16] Sanchez, W.B. 2013. Open-ended questions and the process standards. Mathematics Teacher. Vol. 107. No. 3:206-211.

[17] Takaci, D. and Budinski, N. 2009. Learning and teaching mathematics trough real life models. The international journal for technology in mathematics education 18. No 1:33-38.

[18] Thomas Vazquez, L. 2008. A, E, I, O, U and always Y, a simple technique for improving communication and assessment in mathematics classroom. Mathematics Teacher. Vol 102. No 1:16-23.

[19] Weller Weinhold, M. 2008. Designer functions: power tools for teaching mathematics. Mathematics Teacher. Vol 102. No 1:28-33.