Suorakulmaisen kolmion trigonometria lukion matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Henna-Riitta Huotari
1656848
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2017

Sisältö

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa ryhmämuotoisesti toteutettua verkko-oppimateriaalia. Avoin oppikirjamateriaali koostuu lukion matematiikan geometrian oppisisällöistä. Materiaalin toteutuksessa huomioidaan sekä lyhyen matematiikan kurssille MAB3 että pitkän matematiikan kurssille MAA3 suunnatut lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaiset tavoitteet eriyttäen tehtäviä tarkoituksenmukaisesti. Lähtökohtana tutkielman toteutuksessa ovat lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaiset geometrian kurssien tavoitteet ja sisällöt.

Oppikirjan ja tehtävien suunnittelun lähtökohdat ja lähestymistavat pohjautuvat Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula -artikkeliin (Cuoco, Goldenberg & Mark; 1996), josta poimimme seuraavat työskentelyämme ohjaavat käsitteet: tutkiminen ja kokeilu (experiment), "kaavan haistelu" (pattern sniffing) ja kuvailu (describing). Opetusmateriaalin suunnittelua ohjasi myös Collaborative Learning in Mathematics -artikkeli (Swan, 2006), josta valitsimme ryhmämme yhteisellä päätöksellä työstettäviksi tehtävätyypeiksi luokittelua, arviointia sekä analysointia ja perustelua painottavat tehtävät.

Tutkielma koostuu kolmesta osiosta:

- aiheen teoreettisesta tarkastelusta ja oppimateriaalin perusteluista,
- opiskelijalle suunnatusta oppimateriaalista sekä
- oppimateriaaliin liittyvästä opettajan oppaasta.

Teoriaosiossa tarkastellaan lukion opetussuunnitelman perusteiden asettamia vaatimuksia geometrian opiskelumateriaalille sekä perustellaan teoriaan nojautuen valittuja tehtäviä ja oppikirjassa esitettyjä opiskelijalle suunnattuja teoriaosioita. Opiskelijan oppimateriaali koostuu opetussuunnitelman tavoitteita tukevista teoriaosioista, pohdintatehtävistä sekä perustehtävistä. Opettajan oppaassa esitetään suuntaa-antava ajankäytönmalli sekä esitellään oppimateriaalin pohdintatehtävien tavoitteita; lisäksi annetaan vinkkejä lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden opetuksen eriyttämiseen.

Tutkielman teoreettinen tausta muodostuu edellä mainituista, koko tutkimusryhmämme työskentelyä ohjaavista artikkeleista sekä omaa aihealuettani spesifisti käsittelevistä artikkeleista. Tämän tutkielman aihealueeksi rajautuivat (lyhyen ja pitkän matematiikan) geometrian kurssien alkuosien asiat:

- suorat ja kulmat,
- suorakulmaisen kolmion trigonometria,
- Pythagoraan lause sekä
- koordinaatisto.

Lisäksi oppimateriaalissa esitellään piste ja jana.

2 Opetusmateriaalin tavoitteet

Opetusmateriaalin sisällöt perustuvat sekä lukion opetussuunnitelmassa esitettyihin geometrian kurssien tavoitteisiin että projektiryhmän asettamiin yleisiin tavoitteisiin matemaattisen ajattelun taitojen vahvistamiseen liittyen.

2.1 Opetussuunnitelmalähtöiset tavoitteet

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 esittää yleiseksi matematiikan opiskelun tavoitteeksi esimerkiksi matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin tutustumisen, puhutun ja kirjoitetun matematiikan kielen käytön hallitsemisen sekä laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitojen kehittämisen. Opetussuunnitelmassa kehotetaan valitsemaan opetuksen lähtökohdat opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, käyttäen vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Opetustilanteiden tavoitteena on herättää opiskelijaa tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. (Lukion opetussuunnitelman perusteet, 2015, s. 129.)

Opetussuunnitelmassa painotetaan matemaattisten käsitteiden merkitysten hahmottamista ja opiskelijan ohjaamista tunnistamaan käsitteiden liittymisen laajempiin kokonaisuuksiin. Opetussuunnitelman mukaan opiskelijaa tulisi rohkaista käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä kannustaa kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opetussuunnitelma kehottaa hyödyntämään matematiikan opiskelussa teknisiä apuvälineitä arvioiden kuitenkin apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta. (Lukion opetussuunnitelman perusteet, 2015, s. 129.)

Tässä tutkielmassa, ja etenkin opiskelijalle suunnatussa oppimateriaalissa, on huomioitu erityisesti käsitteiden merkitysten hahmottamista ja niiden liittymistä laajempiin kokonaisuuksiin, sekä havaintoihin liittyvien kysymysten, oletusten ja päätelmien herättelemistä sekä niiden perustelemista, kunnioittaen opetussuunnitelman asettamia tavoitteita myös kokonaisuudessaan.

Erityisesti geometrian kursseille asetetuista tavoitteista opetussuunnitelmassa mainitaan seuraavaa:

- Pitkä matematiikka MAA3: ”Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
  - harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
  - harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita
  - osaa ratkaista geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa
  - osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.”

- Lyhyt matematiikka MAB3: ”Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
  - harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
  - vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan
  - osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen
  - osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.”

(Lukion opetussuunnitelman perusteet, 2015, s. 132, 137.)

Edellä mainitut tavoitteet saivat tässä tutkielmassa vaihtelevasti painotusta, liittyen tutkielman aihealueisiin.

2.2 Matemaattinen ajattelu

Koko projektiryhmän yhdessä asettamat yleiset tavoitteet verkko-oppikirjalle perustuvat Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula –artikkelissa (Cuoco, Goldenberg & Mark; 1996) esiteltyihin menetelmiin, joiden tavoitteena on kehittää ja tukea opiskelijoiden matemaattista ajattelua kohti teknologian ymmärtämistä, hallitsemista ja kehittämistä. Oppikirjan tehtävillä on tarkoitus rohkaista opiskelijoita monipuoliseen kokeilemiseen (experiment), säännönmukaisuuksien ja kaavojen etsimiseen (pattern sniffing) sekä havaintojen kuvailuun (describing). Tehtävätyypeissä sovimme painotettavan luokittelua, arviointia sekä perusteluihin liittyvien virheiden analysointia ja korjausta. Edellä mainitut tehtävätyypit poimimme Collaborative Learning in Mathematics –artikkelista (Swan, 2006).

2.2.1 Kokeileminen – experiment

Cuocon, Goldenbergin ja Markin (1996, s. 378) mukaan matemaattiselle tutkimukselle keskeinen kokeileminen on harvinaista kouluopiskelussa. Esimerkiksi tulosten kirjaaminen, yhden muuttujan vaihtaminen sekä hyvin suurien ja hyvin pienien lukujen kokeileminen olisivat Cuocon, Goldenbergin ja Markin (1996, s. 378) mielestä yksinkertaisia kokeilumenetelmiä, joita opiskelijat eivät kuitenkaan kouluopetuksessa omaksu.

Kohdatessaan matemaattisia ongelmia opiskelijoiden tulisi osata käyttää aiemmin opittuja menetelmiä kokeillessaan erilaisia ratkaisuja. Myös ajatusmallien käyttäminen ratkaisujen etsimisessä olisi tärkeä osata, jotta vastausten löytyminen ja arviointi sekä niiden perusteleminen onnistuisi ilman apuvälineitä. Toisaalta kokeilemalla ja tutkimalla löydettyihin tuloksiin pitäisi osata suhtautua kriittisesti; empiirisesti saavutetut tulokset ovat usein hyviä arvauksia ja silloin tällöin voivat johdattaa teoreettisiin perusteluihin, mutta kokeilumenetelmien rajoitteet tulee myös tiedostaa. (Cuoco, Goldenberg & Mark; 1996; s. 378–379.)

Tähän tutkielmaa liittyvässä oppimateriaalissa kokeilumenetelmää voi soveltaa esimerkiksi tehtävissä 11 ja 12, joiden tavoitteena on syventää ymmärrystä suorakulmaisen kolmion trigonometriaa koskien.

2.2.2 Kaavan etsiminen – pattern sniffing

Matematiikan kontekstissa opiskelijoita tulisi ohjata huomaamaan piilossa olevien kaavojen löytämisen ilo. Opiskelijoiden pitäisi osata etsiä laskukaavojen avulla löytyviä ”oikoteitä”. Kaavojen etsiminen pitäisi olla automaatio, kun opiskelijoille annetaan ratkaistavaksi ongelmia, kuten ”Mitkä alkuluvut muodostavat kahden neliön summan?”. Säännönmukaisuuksien etsimisen tulisi ulottua koskemaan myös opiskelijan arkielämää ja opiskelijan itsellensä esittämiä ongelmia. (Cuoco, Goldenberg & Mark; 1996; s. 378.)

Tämän tutkielman oppimateriaalissa säännönmukaisuuden etsiminen esiintyy esimerkiksi suorakulmaisen kolmion trigonometriaan johdattelevassa pohdintatehtävässä B.8, jossa opiskelija mittaa annettujen yhdenmuotoisten kolmioiden kateettien ja hypotenuusan pituudet ja laskee pituuksien suhteita. Tavoitteena on, että opiskelija löytää säännönmukaisuudet ja ymmärtää siten syvällisemmin sivujen pituuksien suhteiden trigonometriset nimitykset.

2.2.3 Kuvaileminen – describing

Matematiikan väitetään olevan kieli. Näin ollen se on erityisiä konstruktioita ja symboleja sisältävä kieli, jonka avulla voidaan luoda uusia ilmaisuja ja kuvauksia. Cuocon, Goldenbergin ja Markin (1996, s. 378) mukaan opiskelijoiden tulisi hallita

- ongelmanratkaisun prosessin etenemisen täsmällinen kuvaileminen – oman toiminnan kuvaileminen on tärkeä osa ymmärtämistä,
- merkintätapoja ymmärtäminen – matemaattisten merkintöjen hyödyllisyyden ja tehokkuuden huomaaminen tavalliselle kielelle mahdottoman ilmiön kuvailemisessa,
- osoittaminen/todistaminen – tietyn tuloksen osoittaminen todeksi tai mahdolliseksi kuvailemalla todistuksen tai yleistävän laskelman täsmällisesti, sekä
- kirjoittaminen – matematiikkaan liittyvien ajatusten, tulosten, arvioiden, perustelujen, todistusten jne. kirjoittaminen ja niiden esittäminen myös muille.

Kirjoitettujen ja suullisten kuvailujen muodostamista omista aikaansaannoksistaan tarvitaan työskenneltäessä ryhmässä, jossa ideoita ja ajatuksia jaetaan keskenään. Luokkahengen tulisi tukea avointa keskustelua ja rohkaista opiskelijoita kysymään kysymyksiä ja kommentoimaan toistensa työtä. (Cuoco, Goldenberg & Mark; 1996; s. 379.)

Kuvaileminen on tärkeässä roolissa useassa tutkielmaan liittyvän oppimateriaalin tehtävässä. Esimerkiksi pohdintatehtävässä B.1, jossa työskentelymuotona on pari- tai ryhmäkeskustelu, pohditaan matemaattisten kuvioiden ominaisuuksia ja perustellaan niihin liittyviä käsitteitä juuri kuvailemalla. Tehtävässä 17 puolestaan pohditaan esitetyn ratkaisumenetelmän toimivuutta ja haetaan vaihtoehtoisia menetelmiä ongelman ratkaisuun.

3 Tehtävätyypit ja niiden perustelut

Tehtävätyypit on valittu projektiryhmän puolesta ajatellen juuri matemaattisen ajattelun taitojen tukemista.

3.1 Tehtävätyypit

Seuraavaksi esiteltävien opetusmenetelmien ja tehtävätyyppien tavoitteena on edesauttaa syvällisen ja sovellettavissa olevan tiedon omaksumisessa perinteisten behavioristisempien menetelmien sijaan. Päinvastoin kuin tavanomaisessa opetuksessa, tässä käsiteltävät opetusmenetelmät ja uudenlaiset tehtävätyypit mahdollistavat opiskelijoille ongelmien pohtimisen omatoimisesti kannustaen heitä käyttämään aiemmin opittua tietoa uuden tiedon muodostamisessa. (Swan, 2006, s. 162–163.)

3.1.1 Luokittelu – classifying

Opiskelijat saavat itse suunnitella annettujen matemaattisten objektien luokittelun tai soveltaa muiden opiskelijoiden tekemää luokittelua. Näin ollen opiskelijan on mahdollista oppia löytämään eroavaisuuksia objektien välillä ja tunnistamaan niiden ominaisuuksia. Luokittelutaitojen myötä kehittyvät myös matemaattisen kielen käyttäminen sekä taito muodostaa matemaattisia määritelmiä. (Swan, 2006, s. 163-164.)

Matemaattisilla objekteilla voidaan tarkoittaa mitä tahansa tasokuvioista toisen asteen yhtälöihin. Yksinkertaisimmillaan luokittelutehtävä on tutkimustehtävä, jossa kolmen objektin joukosta, jokainen objekti vuorollaan määritetään, miksi kukin niistä voisi olla joukkoon kuulumaton. Vastausten perustelujen myötä opiskelijat oppivat tunnistamaan objektien erilaisia ominaisuuksia. Luokittelutehtävänä voi olla myös matemaattisten objektien lajittelua opiskelijan itse valitsemien kriteerien mukaisesti. Luokittelua voidaan jatkaa muodostuneiden luokkien alaluokkiin ja niin edelleen. Tällaiset luokittelutehtävät edistävät matemaattisen kielen sekä määritelmien muodostamisen kehittymistä. (Swan, 2006, s. 163-164.)

Oppimateriaalissa kulmaan tutustuttaessa luokittelua ja nimeämistä sisältävinä tehtävinä ovat pohdintatehtävät B.2 ja B.3, joista ensimmäisessä opiskelija sijoittaa kulmaan liittyviä käsitteitä kuvaan. Jälkimmäisessä opiskelijan tehtävänä on yhdistää kulman nimitys, suuruus ja kuvaesimerkki annetuista joukoista. Tarkoitus on jälleen tukea syvällisen ymmärryksen kehittymistä sekä auttaa tunnistamaan ja perustelemaan matemaattisten objektien nimityksiä.

3.1.2 Arviointi – evaluating

Opiskelijoiden tehtävänä on esimerkiksi päätellä, ovatko annetut väittämät aina, joskus vai ei koskaan totta. Opiskelijoita kannustetaan muodostamaan matemaattisia väittämiä ja perusteluita sekä keksimään esimerkkejä ja vastaesimerkkejä perustelujensa tueksi. Esimerkiksi: ”Onko väittämä aina, joskus vai ei koskaan totta? Jos joskus, niin milloin?" Väittämät voidaan muotoilla siten, että opiskelija kohtaa väistämättä yleisesti esiintyviä haasteita ja väärinkäsityksiä. Väittämiä voi olla eri vaikeusasteisia. (Swan, 2006, s. 163–168.)

Opiskelijoita kannustetaan yhteistyöhön ja keskusteluun koskien väittämien arviointia. Opettajan rooli edellä mainitussa prosessissa on rohkaista opiskelijoita syvällisempään ajatteluun lisäkysymysten avulla ja haastaa opiskelijoita vakuuttavampiin perusteluihin vasta-argumenteilla. (Swan, 2006, s. 163–168.)

Esimerkiksi Pythagoraan lauseeseen liittyvässä oppimateriaalin tehtävässä 12 opiskelija käyttää arviointiin perustuvaa menetelmää havainnoidessaan suorakulmaisia kolmioita ja yhdistäessään esitettyä väittämiä ja niiden perusteluja annettuihin kuvioihin.

3.1.3 Perustelujen analysointi ja virheiden korjaus – analysing and correcting mistakes in reasoning

Opiskelijat oppivat vertailemaan erilaisia ongelmien muodostamisen metodeja, muodostamaan ratkaisuja ja määrittämään ratkaisuissa esiintyvien virheiden syitä. Opiskelijoille havainnollistuu se, että ongelman ratkaisemiseksi on olemassa vaihtoehtoisia polkuja, ja että he voivat muodostaa itse omia päättelyketjuja. Tavoitteena on muuttaa hallitsevia painotuksia "vastausten saamisesta" tilanteeseen, jossa opiskelijat kykenisivät arvioimaan ja vertailemaan erilaisia päättelymenetelmiä. (Swan, 2006, s. 164–171.)

Ongelmanratkaisun perusteluissa esiintyvien virheiden tunnistaminen ja korjaaminen edellyttää opiskelijaa tutkimaan ratkaisua kokonaisuudessaan. Opiskelijoita voidaan myös kehottaa neuvomaan virheen tekijää ratkaisun löytämisessä. Esiintyvät virheet ovat usein yleisesti esiintyviä; virheenkorjausmetodi edistää opiskelijoiden vaihtoehtoisen ajattelun kehittymistä. (Swan, 2006, s. 164–171.)

Opiskelijoita haastetaan etsimään ja korjaamaan virheitä oppimateriaalin tehtävässä 17, jossa esitetään suunnikkaan pinta-alan laskeminen virheellisellä tavalla. Matemaattisten kuvioiden tulkintaan liittyvässä tehtävässä 2 opiskelijan tehtävänä on korjata esitettyjen väitteiden väärinkäsityksiä ja analysoida niiden syitä.

3.2 Ongelmalähtöisestä oppimisesta

Ongelmalähtöisessä oppimisessa opiskelijan oppimista sekä opetuksen sisältöä ja opetusmateriaalia rakennetaan käsitellen asiayhteyteen sopivaa luokittelematonta ongelmaa käytännön ja kokemuksen kautta keskusteluun pohjautuvassa luokkaopetuksessa. Opettajan tulee viestittää opiskelijoille riskien ottamisen ja intuition sekä opiskelijan oman äänen, kokemuksien ja ennakkotietojen arvostamista. Ongelmalähtöisessä oppimisessa "kotitehtäväongelmat" muodostetaan siten, että ne motivoivat luokkakeskusteluihin, eivätkä välttämättä vaadi täydellisen oikeita vastauksia. Tämän tyyppisten kotitehtävien etuna on muun muassa se, että aiempien kurssien materiaalien kertaus mahdollistuu, aiemmin opittu liittyy uuteen ongelmaan ja uuden tiedon omaksuminen helpottuu. "Kotitehtäväongelmien" avulla voi myös esitellä uutta terminologiaa ja harjoituttaa opiskelijoilla uusia taitoja; edistyneemmät opiskelijat saavat tarvitsemaansa haastetta. (Schettino, 2012, s. 347–348.)

Luokkakeskustelun aiheeksi kotitehtäväongelman pohjalta sopivat esimerkiksi kulman käsitteeseen ja kulman mittaamiseen liittyvät oppimateriaalin tehtävät 2 ja 3, joita voidaan käyttää keskusteluun johdattelijoina. Pythagoraan lauseeseen liittyvä tehtävä 12 on herättää keskustelua matemaattisesta perustelusta. Pinta-alaan liittyvä tehtävä 17 motivoi pohtimaan erilaisia menetelmiä ongelman ratkaisuun.

3.3 Geometrisen ymmärryksen ja loogisen päättelykyvyn yhteydestä

Poonin ja Leungin (2016, s. 10) tutkimuksen mukaan vaikeudet geometrian opiskelussa liittyvät opiskelijoiden heikkoon ymmärrykseen matemaattisten käsitteiden määritelmiä ja ominaisuuksia koskien sekä puutteelliseen kykyyn muodostaa todistuksia; jälkimmäiseen liittyvät heikot perustelutaidot, annettujen tietojen väärät tulkinnat sekä teoreemojen virheellinen käyttö. Poon ja Leung (2016, s. 10–11) ehdottavatkin, että geometrian opiskelussa käytettäisiin enemmän aikaa perustietojen opiskeluun sekä kehitettäisiin enemmän opetusmalleja, jotta opiskelijoiden ymmärrystä helpotettaisiin ja he oppisivat käyttämään geometrisia ominaisuuksia oikein.

Käsitteiden opettamiseen tulisi paneutua monipuolisin metodein: suullisesti, symbolein ja visuaalisesti. Esimerkkejä ja yhteyksiä geometrian käsitteille tulisi etsiä reaalimaailmasta; esimerkkejä sekä oikein että väärin sovelletusta käsitteiden käytöstä. Geometristen käsitteiden olennaisimmat elementit tulisi selittää huomioiden opiskelijoiden ennakkotietämys sekä konteksti. Poonin ja Leungin tutkimuksen mukaan opiskelijoiden loogisen päättelyn taidoilla ja geometrisella osaamisella on vahva yhteys. Loogisen päättelyn testeillä voitaisiinkin kartoittaa geometria osaamistasoa ennen opetuksen alkamista ja kohdentaa opetusmenetelmiä opiskelijoiden lähtötason mukaisesti. (Poon & Leung, 2016, s. 10–11.)

Tämän tutkielman aihealueista etenkin kulmaan liittyvät ominaisuudet sekä trigonometrian teoria ja käsitteet saavat painoarvoa monenlaisten lähestymistapojen kautta. Määritelmiin paneudutaan ja opiskelijoita haastetaan ymmärtämään syvällisesti käsitteitä ja esittämään aiheisiin liittyviä käsityksiä sekä keskustelujen myötä että esimerkiksi kuvioiden tutkimisen kautta. Opiskelijoiden lähtötaso ja tavoitteet huomioidaan eriyttämällä tehtäviä lyhyen ja pitkän matematiikan geometrian kurssien tavoitteiden mukaisesti.

3.4 Teorianmuodostaminen geometrian opetuksessa

Weissin ja Herbstin (2015, s. 205) mukaan matematiikan käytänteet on perinteisesti jaettu kahdentyyppiseen matemaattiseen työskentelymenetelmään: teorianmuodostamiseen ja ongelmanratkaisuun. Luokkaopetuksessa on suosittu pääsääntöisesti jälkimmäistä. Matemaattista rakennetta järjestettäessä ja runkoa rakennettaessa teorianmuodostuksella on kuitenkin suuri painoarvo. Teorianmuodostuksesta voidaan puhua esimerkiksi silloin, kun joukko tunnettuja tuloksia (uudelleen) järjestetään teoriaksi; tämä voi tarkoittaa vaikkapa määritelmien esittämistä tehokkaammalla tavalla. Annetun tuloksen yhteys toisiin tuloksiin voidaan osoittaa teorianmuodostuksen avulla, sen sijaan tulosten todistamiseen käytetyn menetelmän yhteys muihin todistusmenetelmiin osoitetaan ongelmanratkaisun kautta. (Weiss & Herbst, 2015, s. 205–208.)

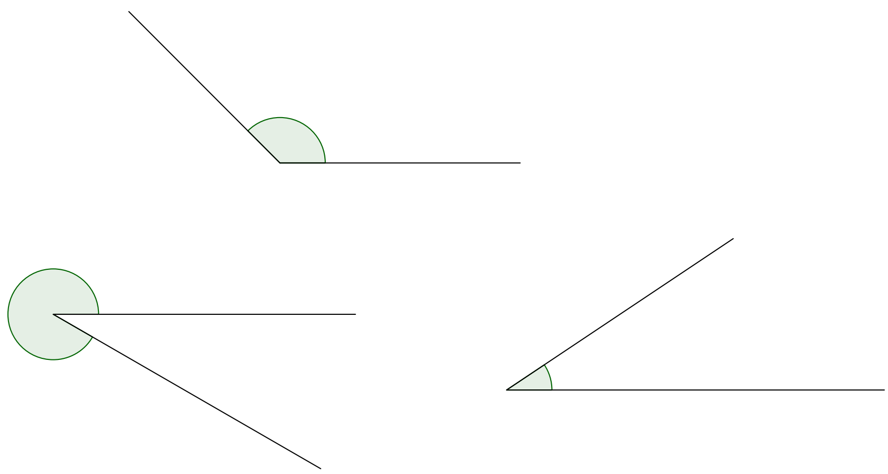
Lukion geometrian kurssiin liittyviin lauseen muodostuksiin lukeutuu esimerkiksi Pythagoraan lause, johon tutkielman oppimateriaalissa syvennytään aluksi neliöiden pinta-aloihin perustuvien kuvioiden avulla ja lisäksi suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia skaalaamalla.

4 Oppimateriaalin aihealueet

Seuraavaksi esitellään oppimateriaaliin liittyvät aihealueet ja perustellaan lähestymistavat niihin teoriaan perustuen.

4.1 Kulma

Käsite kulma voidaan tulkita ja määritellä monella eri tavalla. Bremigan, Bremigan ja Lorch (2011, s. 103) määrittelevät kulman epäformaalisti ”liikkeen näkökulmasta”: tasossa oleva kulma, jonka kärkipiste on pisteessä P, on pisteeseen P keskittynyttä kiertoliikettä. Edelleen, kulma on positiivinen, kun kierto suuntautuu vastapäivään, negatiivinen tapahtuessaan myötäpäivään ja nolla, kun liikettä ei tapahdu lainkaan. Staattisia kuvioita käyttäen kulmaan liittyvää kiertoliikettä voidaan kuvata nuolen avulla. Matematiikassa kulman merkitys täytyy usein päätellä kontekstin perusteella, sillä se voi tarkoittaa kiertoliikettä, esitystapaa tai mittaa/suuruutta. (Bremigan, Bremigan & Lorch, 2011, s. 103–104.)



Kulman suuruus voidaan ilmoittaa asteina tai radiaaneina. Yksi aste saadaan, kun ympyrä jaetaan 360 yhtä suureen osaan eli kaareen.

Devichi ja Munier (2013) käsittelevät artikkelissaan About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequenses koululuokassa toteutettua tutkimusta kulmakäsitteen opettamisesta. Devichin ja Munierin mukaan kulma voidaan määritellä ainakin kolmella tavalla: kiertokulmana (kääntyvänä kulmana), sektorikulmana sekä kahden puolisuoran muodostamana parina, joilla on yhteinen alkupiste (aukeama tai kaltevuus). (Devichi & Munier, 2013, s. 2.)

Edelleen Devichi ja Munier määrittävät kolme metodia kulmakäsitteen opettamiseen. Van Hieleä (1986) lainaten, he kuvailevat kulman opettamisen olevan mahdollista vain konkreettisiin toimintoihin perustuen; siten, että oppilaat saavat aktiivisesti käsitellä ja kokeilla geometrisia objekteja merkityksellisessä ja sopivassa kontekstissa, jossa myös mahdollistetaan rakentava keskustelu ja ajattelu. (Devichi & Munier, 2013, s. 2.)

Toinen tapa opettaa kulmakäsitettä on Devichin ja Munierin lainaamien useiden tutkijoiden (mm. Berthelot ja Salin, 1998; Brousseau, 1997; Merle ja Munier, 2003) mukaan mesotason toimintoihin perustuva, jolloin ongelmanratkaisua harjoitetaan ajatuksen tasolla, eikä paperin koko rajoita tehtävän suorittamista. Mesotason ajatteluun perustuva lähestymistapa kulmakäsitteen opettamiseen on osoittautunut tehokkaaksi. (Devichi & Munier, 2013, s. 2.)

Viimeisenä metodina Devichi ja Munier esittelevät dynaamisiin tilanteisiin pohjautuvan opetusmenetelmän, jossa hyödynnetään paitsi teknologiaa myös reaalimaailman objekteja, joiden avulla kulman avautumista ja sulkeutumista voidaan havainnollistaa (sakset, pillit, käsivarret). Wilsonia ja Adamsia (1992) sekä Fyhniä (2006, 2008) lainaten, he kehottavat "matematisoimaan" fyysisiä toimintoja, joissa kulma esiintyy (luistelu, lumilautailu, kiipeily). (Devichi & Munier, 2013, s. 2-3.)

Tähän tutkielmaan liittyvässä oppimateriaalissa kulma esitellään kahden puolisuoran muodostamana aukeamana. Oletuksena on, että opiskelija tuntee kulmaan liittyvät peruskäsitteet ja kulman ominaisuudet aiempien opintojensa perusteella. Tehtävissä sovelletaan edellä mainituista opetusmetodeista mesotasolla tapahtuvaa ongelmanratkaisua sekä dynaamisempia ja osallistavampia menetelmiä.

4.2 Suorakulmaisen kolmion trigonometria

Sana trigon viittaa kolmisivuiseen kuvioon ja metria mittaamiseen, trigonometria on siis kolmioiden mittaamista tarkoittaen kolmioiden sivujen pituuksien ja kulmien suuruuksien mittaamista ja niiden suhteiden määrittämistä. Trigonometria on osoittanut hyödyllisyytensä monessa yhteydessä. Ihmiset ovat käyttäneet kolmioita mittaamisen apuna tuhansia vuosia. Esimerkiksi Mount Everestin korkeus, maapallon ympärysmitta sekä maan ja auringon etäisyys on määritetty trigonometriaa hyödyntäen. Trigonometria on olennainen apuväline myös jaksottaisia ilmiöitä tutkittaessa, kuten värähtelevää jännettä, kimmoisaa jousta tai pyörivää hyrrää. Trigonometria ei kuitenkaan ole yksinkertaista; kulmien suuruuksien ja sivujen pituuksien suhteiden ymmärtäminen ja hahmottaminen on trigonometria opiskelun keskeinen tavoite. (Bremigan, Bremigan & Lorch, 2011, s. 105.)

Trigonometriaa lähestytään tutkielman oppimateriaalissa tutkimustehtävän avulla haastaen opiskelijoita etsimään säännönmukaisuuksia suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituuksien suhteissa tavoitteena juuri opiskelijan syvällinen ymmärrys trigonometriaan liittyen. Trigonometrian soveltamisen mahdollisuudet käytännön ongelmanratkaisuun käyvät ilmi aiheeseen liittyvissä tehtävissä.

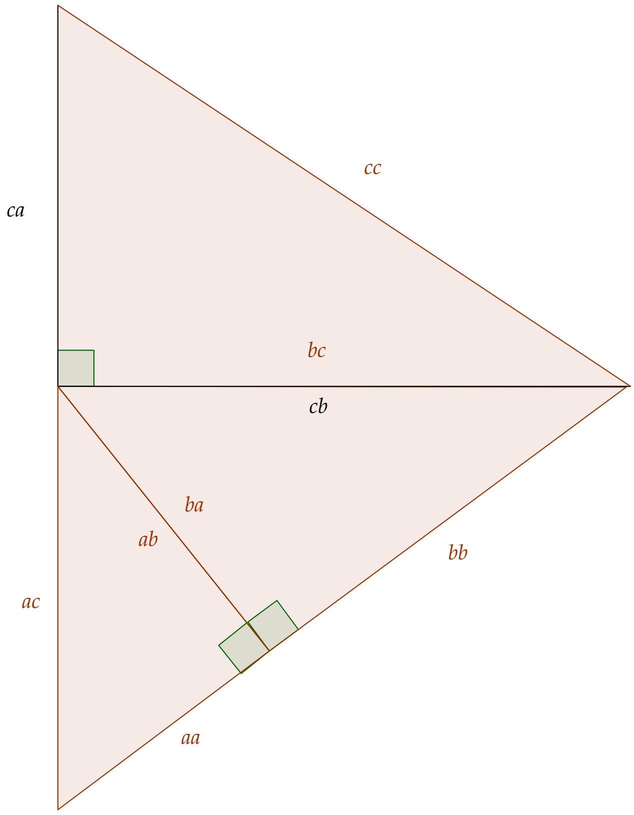
4.3 Pythagoraan lause

Ericksenin, Stasiukin ja Frankin (1995, s. 744) mukaan yliopisto-opiskelijat tuntevat Pythagoraan lauseen nimeltä ja osaavat viitata kaavaan, mutta lauseen soveltamistaidot jopa yksinkertaisiin laskutoimituksiin on heikolla tasolla. Ericksen, Stasiuk ja

Frank (1995, s. 744) ovatkin sitä mieltä, että lukio-opetuksessa kokemuksia Pythagoraan lauseen käyttämisestä tulee laajentaa peruskaavasta geometristen muotojen ja erityisten suorakulmaisten kolmioiden sovelluksiin.

Roscoe (2014) puolestaan on sitä mieltä, että Pythagoraan lauseen todistamiseen yleisesti käytetyt visuaalisen apukeinot, jotka perustuvat suorakulmaisten kolmioiden ja neliöiden pinta-aloihin, ovat havainnollisia, mutta ne eivät edesauta teoreeman syvällisen ymmärryksen kehittymistä, eivätkä ne kannusta matemaattisen todistamisen käytänteiden harjoitteluun. Tähän liittyy pedagoginen huoli siitä, että suorakulmaisen kolmioiden sivujen pituuksia koskevissa todistuksissa opiskelija on riippuvainen pinta-alatiedoista. Kun opiskelijat haastetaan ratkaisemaan kaksiulotteisia mittoja koskevan väitteen avulla teoreemaa, jonka väite koskee yksiulotteisia mittoja, saattaa tilanne aiheuttaa hämmennystä. Tämän kaltainen rinnastus herättää epätietoisuutta, mistä lauseessa on oikeastaan kyse; neliöiden pinta-aloista vai suorakulmaisten kolmioiden sivujen pituuksista? Toisaalta kuviin perustuvat lähestymistavat eivät myöskään tue ymmärrystä todistuksen yleisyydestä, ja ne saattavat myös estää todistamisen taitojen kehittymistä matemaattisena normina. (Roscoe, 2014, s. 177–178.)

Vaihtoehtoista Pythagoraan lauseen todistamisen menetelmää edustaa Burkin (1996) lähestymistapa, jossa käytetään suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien a, b ja c skaalaamista kolmeen kertaan. Yksi kolmio skaalataan pituudella a, toinen pituudella b ja kolmas pituudella c. Nämä kolme alkuperäisestä kolmiosta skaalattua kolmiota sovitetaan sitten yhteen uudeksi kolmioksi (ks. kuva alla). Skaalattujen kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella uuden ”yhdistelmäkolmion” kantakulmat ovat yhtenevät, joten muodostettu kolmio on tasakylkinen. Näin ollen kantakulmien vastinsivut ovat yhtenevät ja yhtä pitkät. Koska toinen sivu on pituudeltaan $a^2 + b^2$ ja toinen c^2, on Pythagoraan lause todistettu. (Roscoe, 2014, s. 178–179.)



Tämän tutkielman oppimateriaalissa Pythagoraan lause on todistettu sekä perinteisemmällä ja havainnollisella neliöiden pinta-aloihin perustuvalla menetelmällä että Burkin esittelemällä tavalla.

4.4 Koordinaatisto

Saraman, Clementsin, Swaminathanin, McMillenin ja Gonzalez Gomezin (2003) tutkimuksessa selvisi, että opiskelijoiden avaruudellista tilaa ja numeerisia järjestelmiä koskeva hahmottamiskyky on merkittävässä roolissa koordinaatistokäsitettä koskevan ymmärryksen kehittymisessä. Opiskelijoiden strategiat pisteiden paikantamiseen ja nimeämiseen yksinkertaisissa tilanteissa oli vakaata eikä sidoksissa heidän tietoihinsa ruudukoista ja koordinaatistoista. Monimutkaisemmissa koordinaatistotehtävissä, kuten interpoloinnissa (jossa lasketaan uusia arvoja tunnettujen arvojen väliin jollakin menetelmällä) ja koordinaattiparien välisen yhteyden huomaamisessa, opiskelijoiden on kehitettävä kompetenssiaan kolmella tavalla. Ensinnäkin tarvitaan numeerisen ymmärryksen hyödyntämistä (mukaan lukien verrannollisuuteen liittyvää perustelua) ruudukon jäsentämiseen ja koordinaattien määrittämiseen. Toisaalta omaksuakseen ja ymmärtääkseen koordinaatistoihin liittyvät laskutoimitukset ja määrälliset ilmaisutavat, opiskelijoiden täytyy kyetä ilmaisemaan määrällisesti, mitä ruudukon merkinnät tarkoittavat ja myös ymmärtää laskutoimituksiensa yhteys suureisiin ja merkintätapoihin sekä sisällyttää nämä ajatukset osaksi kokonaisuutta, joka on yhteydessä sekä koordinaatistoruudukkoon että laskutoimituksiin. Lisäksi opiskelijoiden tulee ymmärtää ja soveltaa edellä mainittuja asioita nollan ja negatiivisten lukujen suhteen. (Sarama, Clements, Swaminathan, McMillen & Gonzalez Gomez, 2003, s. 320-321.)

Tutkielman oppimateriaalissa koordinaatistoa käsitellään lyhyen matematiikan geometrian kurssin tavoitteisiin pohjautuen siten, että opiskelijan tasokuvioiden piirtämisen taidot vahvistuvat ja opiskelija oppii hyödyntämään geometriaa käytännön ongelmia ratkaistessaan sekä soveltamaan koordinaatistoa laaja-alaisesti aiemmin opittuun.

5 Lähteet

Bremigan, E. G., Bremigan, R. J., & Lorch, J. D. (2011). Mathematics for secondary school teachers. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Cuoco, A., Goldenberg; E. P. & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. The Journal of Mathematical Behavior, 15, 375–402.

Devichi, C. & Munier, V. (2013). About the Concept of Angle in Elementary School: Misconceptions and Teaching Sequences. Journal of Mathematical Behavior, 32(1), 1-19.

Ericksen, D., Stasiuk, J. & Frank, M. (1995). Bringing Pythagoras to life. The Mathematics Teacher, 88(9), 744. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/204603686?accountid=1303

Lukion opetussuunnitelman perusteet. (2015). Helsinki: Opetushallitus.

Poon, K.-K. & Leung, C.-K. (2016). A Study of Geometric Understanding via Logical Reasoning in Hong Kong. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17(3).

Roscoe, M. B. (2014). Reasoning and sense making with Pythagoras. Mathematics Teacher, 108(3), 176-182. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/1651842250?accountid=13031

Sarama, J., Clements, D. H., Swaminathan, S., McMillen, S., & Gonzalez Gomez, R. M. (2003). Development of mathematical concepts of two-dimensional space in grid environments: An exploratory study. Cognition and Instruction, 21(3), 285-324. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/62175387?accountid=13031

Schettino, C. (2012). Teaching Geometry through Problem-Based Learning. Mathematics Teacher, 105(5), 346-351.

Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices. London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).

Weiss, M. & Herbst, P. (2015). Erratum to: The role of theory building in the teaching of secondary geometry. Educational Studies in Mathematics, 89(2), p. 231.

A Opettajan opas

Opettajan oppaassa esitetään suuntaa-antava ajankäytön malli sekä esitellään oppimateriaalin pohdintatehtävien tavoitteita. Pohdintatehtävät toimivat johdattelijoina käsiteltävään aiheeseen tai syventävät jo opiskeltua asiaa. Pohdintatehtävät on tarkoitus käydä yhteisesti läpi opiskelijoiden tutustuttua niihin ensin itsenäisesti. Oppaassa annetaan vinkkejä opetuksen eriyttämiseen lyhyen matematiikan ja pitkän matematiikan opetussuunnitelmapohjaisiin tavoitteisiin perustuen.

A.1 Tuntijako

Tässä esitetty tuntijako on ohjeellinen.

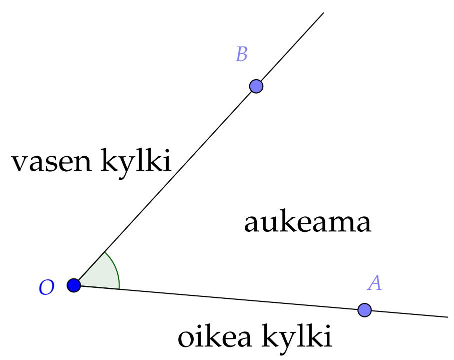
- 1×75 min Suorat, kulmat (piste, jana)
- 1×75 min Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa
- 1×75 min Pythagoras ja Koordinaatisto

A.2 Suorat ja kulmat

Pohdintatehtävässä B.1 opiskelija pohtii ryhmässä kulmiin liittyviä ominaisuuksia. Tavoitteena on herättää keskustelua ja rakentaa yhteistä ymmärrystä kulman käsitteestä. Kuvat johdattelevat opiskelijoita pohtimaan kulman "suuntaa" ja suuruutta sekä sen mittaamista. Opettaja voi auttaa opiskelijoita pohdinnassa kysymällä apukysymyksiä, esimerkiksi: "Milloin kulman suuruus muuttuu?"; "Vaikuttavatko kylkien pituudet kulman suuruuteen? Miksi/miksi ei?".

Pohdintatehtävä B.2 auttaa opiskelijaa sisäistämään kulmaan liittyviä käsitteitä. Piste A merkitään johonkin kohtaan oikealle kyljelle ja piste B johonkin kohtaan vasemmalle kyljelle; kuvassa esimerkki.

Ratkaisu:



Pohdintatehtävä B.3 on kertausta aiemmin opitusta. Tehtävä havainnollistaa opiskelijalle kulman koon yhteyden sekä numeeriseen että kuvalliseen merkintätapaan. Nimeämistehtävänä pohdintatehtävä B.3 haastaa opiskelijaa huomaamaan eroavaisuuksia erilaisten kulmien välillä ja tunnistamaan niiden ominaisuuksia.

Pohdintatehtävä B.5 kokoaa yhteen suoriin ja kulmiin liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia. Opiskelija harjoittelee kuvaan perustuvan väitteensä perustelua matemaattisin merkinnöin.

Ratkaisu: Merkitään 116 asteen kulman vieruskulmaa α:lla.

Kulman α suuruus on $180° - 116° = 64°$.

Kulma α ja 63 asteen kulma ovat samankohtaiset kulmat.

Koska $\alpha \neq 63°$, niin suorat i ja j eivät ole yhdensuuntaiset.

Pohdintatehtävässä B.7 opiskelija harjoittelee matemaattista todistamista esitettyä kuviota sekä annettuja kuvaan liittyviä tietoja apunaan käyttäen. Tehtävä vaatii opiskelijalta kuvallisen ilmaisun hahmottamista sekä aiemmin omaksumiensa tietojen hyödyntämistä.

Ratkaisu:

$\alpha' = \alpha$	| toistensa ristikulmat
$\beta' = \beta$ ja $\gamma' = \gamma$	| yhdensuuntaisia suoria leikkavan suoran muodostamia samankohtaisia kulmia
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$	| muodostavat oikokulman
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$	| $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ja $\gamma = \gamma'$

Näin ollen kolmion kulmien summa on 180°.

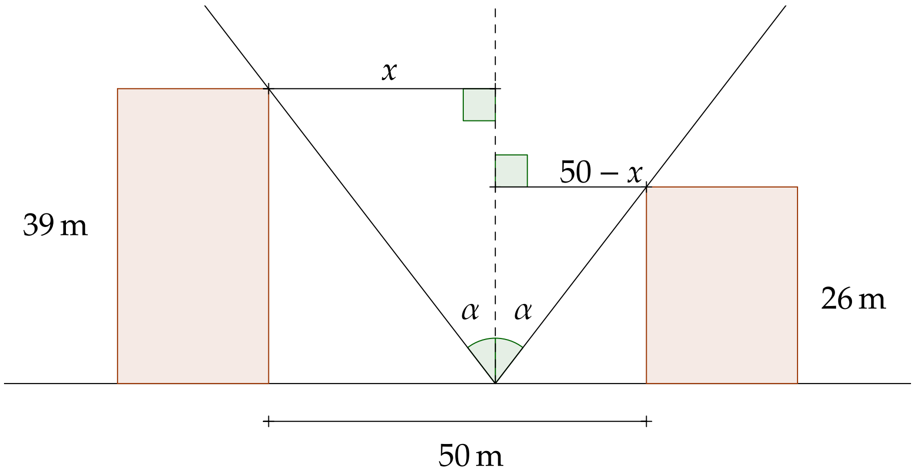
Suorat ja kulmat -kappaleen tehtävä 1 on suunnattu erityisesti lyhyen matematiikan opiskelijoille ja tehtävä 6 pitkän matematiikan opiskelijoille.

A.3 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

Pohdintatehtävän B.8 tarkoitus on johdatella opiskelijaa havaitsemaan oman tutkimuksensa kautta suorakulmaisten kolmioiden kulmien suuruuksien ja sivujen pituuksien suhteiden säännönmukaisuus, ja näin ollen edesauttaa trigonometristen funktioiden ymmärtämistä.

Pohdintatehtävässä B.9 opiskelija soveltaa trigonometristen funktioiden osaamistaan. Yhtälön muodostus on kertausta aiemmin opitusta. Jos opiskelija ratkaisee tehtävän kolmioiden yhdenmuotoisuutta käyttäen, on hyvä perehtyä myös tangentin avulla muodostettavaan ratkaisuun.

Ratkaisu: Talojen välinen etäisyys on 50 m. Olkoon x kysytty etäisyys korkeampaan taloon. Etäisyys matalampaan taloon on tällöin $50 - x$.



Vasemmanpuoleinen kolmio

$\tan \alpha = \dfrac{x}{39}$

Oikeanpuoleinen kolmio

$\tan \alpha = \dfrac{50 - x}{26}$

Saadaan yhtälö

$$\frac{x}{39} = \frac{50 - x}{26} \qquad \| \text{ kerrotaan ristiin}$$

$$26x = 1950 - 39x$$

$$x = 30$$

Vastaus: 30 m:n päästä.

Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa -kappaleessa tehtävä 7 on suunnattu erityisesti lyhyen matematiikan opiskelijoille ja tehtävä 10 pitkän matematiikan opiskelijoille.

A.4 Pythagoraan lause

Pohdintatehtävä B.10 vaatii opiskelijalta kuvan hahmottamisen taitoja ja kykyä nimetä esitettyjen kuvioiden osia. Opiskelija soveltaa annettuja tietoja ja aiemmin oppimaansa yhdistäessään yksiulotteisia käsitteitä kaksiulotteiseen käsitteeseen. Pohdintatehtävän B.10 on tarkoitus toimia pohjana Pythagoraan lauseen todistamisessa; tavoitteena on, että opiskelija huomaa ratkaisun yhteyden lauseeseen.

Ratkaisu:

1. Tummemman alueen pinta-ala $A_1 = c^2$.
2. Tummemman alueen pinta-ala $A_2 = a^2 + b^2$.

Molemmat kuviot ovat yhtä suuret; molemmissa kuvioissa kolmiot ovat yhtä suuret ja niitä on yhtä monta. Näin ollen tummemmat alueet ovat yhtä suuret, eli

$A_1 = A_2$, joten $c^2 = a^2 + b^2$.

Oppimateriaalissa esitellyt Pythagoraan lauseen kaksi todistusta ovat tarkoitettu läpikäytäväksi sekä lyhyen että pitkän matematiikan opiskelijoiden kanssa, mutta lyhyen matematiikan opiskelijat voivat perehtyä aiheeseen opettajan johdolla erityisesti pohdintatehtävän B.10 avulla ja pitkän matematiikan opiskelijat puolestaan syventyvät jälkimmäiseen, suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien skaalaamiseen perustuvaan todistukseen.

Tehtävässä 12 kolmio A ei ole suorakulmainen; voidaan perustella Pythagoraan lauseen avulla. Kolmiot B ja C ovat suorakulmaisia; voidaan perustella Pythagoraan lauseen käänteislauseen avulla.

A.5 Koordinaatisto

Koordinaatistokappale on suunnattu lyhyen oppimäärän opiskelijoille. Koordinaatistoa sovelletaan paitsi aiemmin opitun kanssa, myös johdatellen tulevaan monikulmioita käsitelevään kappaleeseen kerraten piirin ja pinta-alan käsitteitä.

Pohdintatehtävässä B.12 kertautuvat koordinaatiston peruselementit. Opiskelija hyödyntää koordinaatistoa suorien ominaisuuksia tutkiessaan.

Ratkaisu: Suorat l ja k ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Suorat l ja j ovat yhdensuuntaiset.

Pohdintatehtävän B.13 tavoitteena on, että opiskelija huomaa hyödyntää apukuvioita ja Pythagoraan lausetta kolmion sivujen pituuksia määrittäessään.

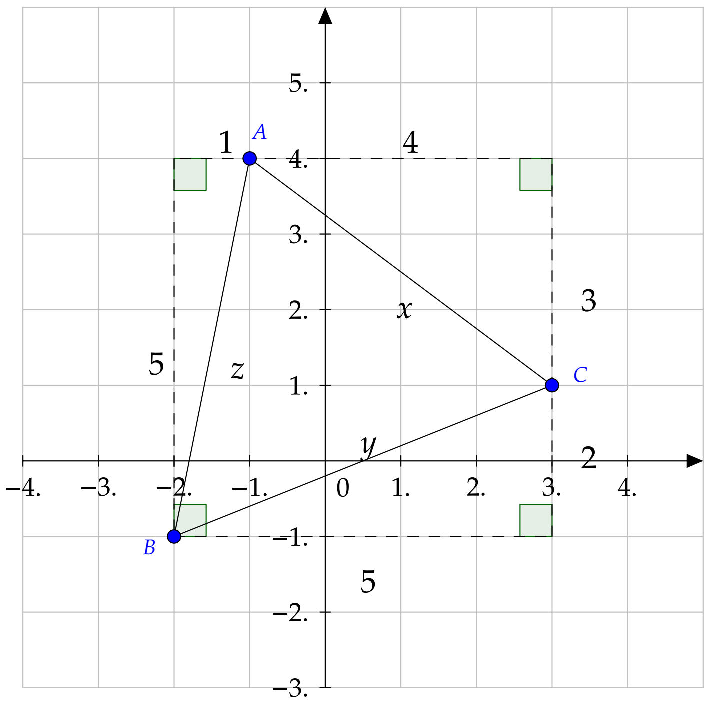
Ratkaisu: Merkitään kolmion sivuja kirjaimilla x, y ja z. Sivujen pituuksien määrittämiseksi muodostetaan apukuvioiksi suorakulmaisia kolmioita piirtämällä kolmion ympärille suorakulmio siten, että kolmion kärkipisteet ovat suorakulmion sivuilla. Lasketaan muodostuneiden suorakulmaisten kolmioiden avulla alkuperäisen kolmion piiri Pythagoraan lausetta käyttäen.

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$

$y^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{29}$

$z^2 = 5^2 + 1^2 \Rightarrow z = \sqrt{26}$

$x + y + z = 5 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$



Vastaus: Kolmion piiri on $5 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$.

Tehtävässä 17 on tarkoitus, että opiskelija huomaa muodostaa pinta-alan laskemiseen apukuvioiksi kolmioita.

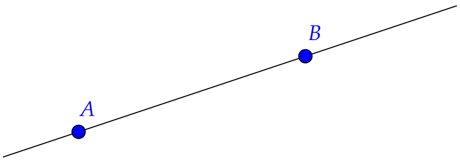
B Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

B.1 Suorat ja kulmat

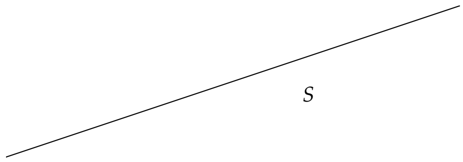
Piste on paikka tasossa; piste on yksinkertaisin geometrinen objekti. Jokainen geometrinen kuvio tai kappale muodostuu pisteistä.

Suora jatkuu rajattomasti molempiin suuntiin. Kahden eri pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suora.

Kaksi merkintätapaa:

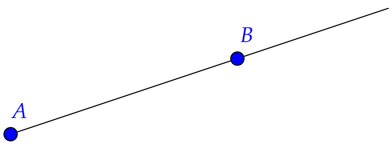


suora AB; kulkee pisteiden A ja B kautta



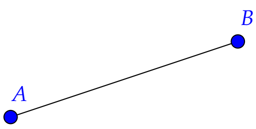
suora s

Puolisuora alkaa tietystä pisteestä ja jatkuu rajattomasti.

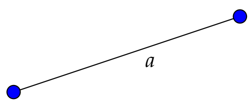


puolisuora AB

Jana on kahden pisteen erottama osa suorasta.



jana AB

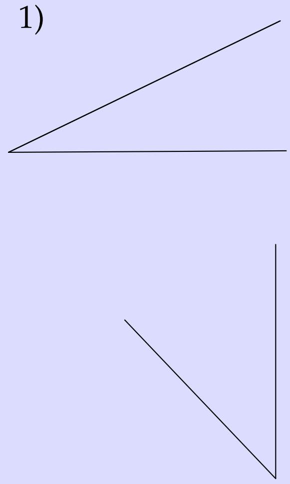


jana a

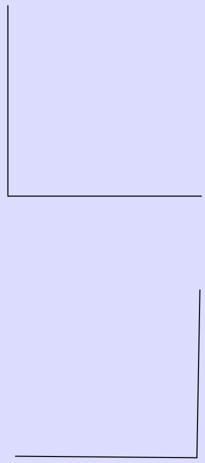
Janan AB pituus voidaan merkitä $|AB|$.

Pohdinta B.1 Tarkastele kuvissa olevia kulmapareja:

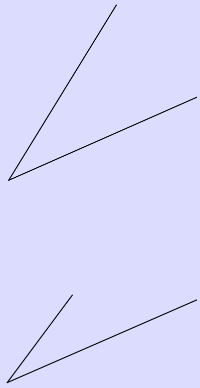
1)



2)



3)

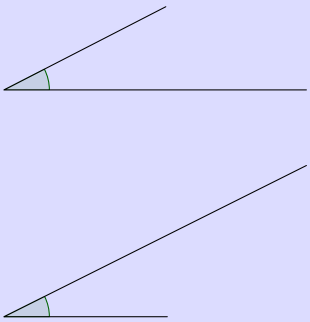


a) Keskustele parin kanssa/ryhmässä kulmien yhtäläisyyksistä ja eroista.

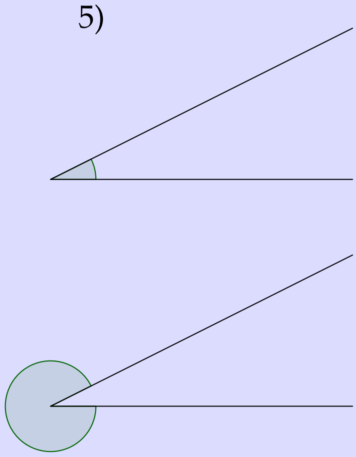
b) Miten määrittelisit kulman edellisten havaintojen perusteella?

Tarkastele sitten seuraavia kulmapareja:

4)



5)



a) Keskustelkaa jälkimmäisten parien yhtäläisyyksistä ja eroista.

b) Muuttavatko uudet havainnot määritelmääsi?

Kulma on kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittama tason osa.

Kulmaa voidaan merkitä esimerkiksi

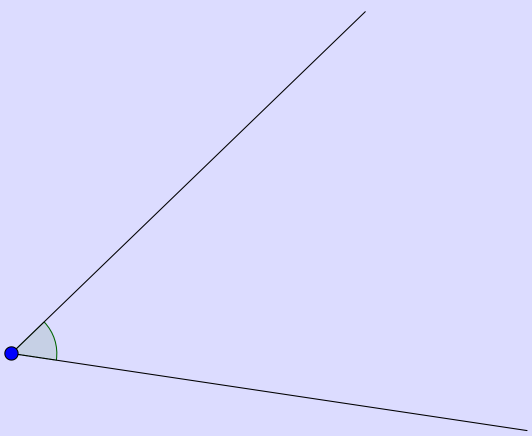
- kreikkalaisella kirjaimella α, β, γ, jne.;
- kärkipisteen mukaan, esimerkiksi $\angle O$;
- oikealla kyljellä olevan pisteen, kärkipisteen ja vasemmalla kyljellä olevan pisteen mukaan, esimerkiksi $\angle AOB$.

Tässä oppimateriaalissa kulman merkitsemiseen käytetään kreikkalaisia kirjaimia.

Kulman suuruuden yksikkö on *aste* $= 1°$, joka saadaan, kun *täysikulma* eli koko ympyrä jaetaan 360 yhtä suureen osaan.

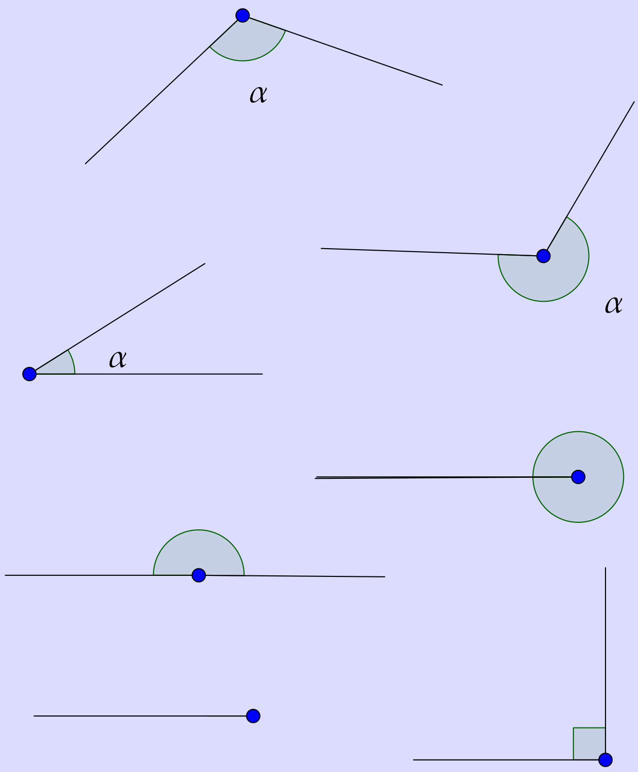
Pohdinta B.2 Sijoita kulmaan AOB liittyvät käsitteet kuvaan

- kulman kärki O
- oikea kylki
- vasen kylki
- piste A
- piste B
- aukeama



Pohdinta B.3 Yhdistä kulman nimi, suuruus ja esimerkkikuva.

Esimerkkikuva:



Suuruus:

0°

90°

180°

360°

$0° < \alpha < 90°$

$90° < \alpha < 180°$

$180° < \alpha < 360°$

Nimi:

tylppä kulma

terävä kulma

suorakulma

oikokulma

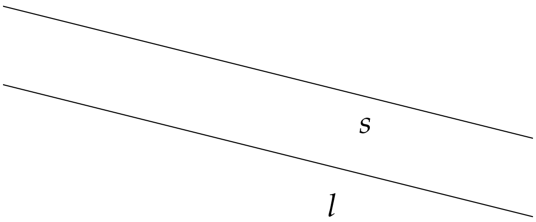
nollakulma

täysikulma

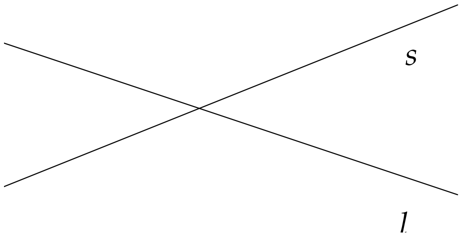
kovera kulma

kupera kulma

Suorat ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä tai niiden kaikki pisteet ovat yhteiset; merkitään $s \parallel l$. Muussa tapauksessa suorat *leikkaavat*; merkitään $s \nparallel l$. Tässä oppimateriaalissa käsitellään tapauksia, joissa leikkaavilla suorilla on tasan yksi yhteinen piste.

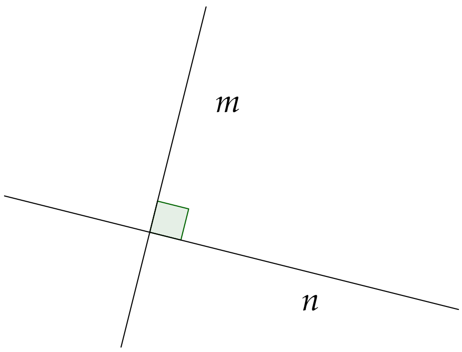


$s \parallel l$



$s \nparallel l$

Kohtisuorassa, eli 90 asteen kulmassa, toisiaan vastaan olevat suorat ovat toistensa *normaalit*; merkitään $m \perp n$.



$m \perp n$

Määritelmä: *Vieruskulmat.*

Leikkaavat suorat muodostavat neljä kulmaa. Suorien leikkauspisteessä vierekkäin olevat kulmat ovat *vieruskulmat*.

Vieruskulmat muodostavat oikokulman, joten vieruskulmien summa on aina 180°.

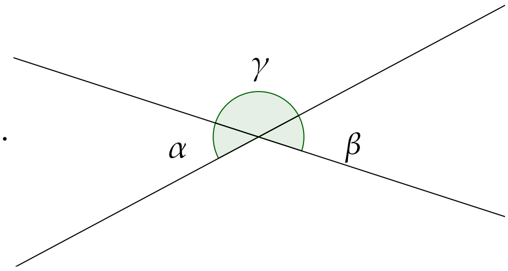
Määritelmä: *Ristikulmat.*

Suorien leikkauspisteessä vastakkain olevat kulmat ovat toistensa *ristikulmat*.

Lause B.4 Ristikulmat ovat aina keskenään yhtäsuuret.

Todistus. Merkitään toista ristikulmien α ja β väliin jäävistä kulmista kirjaimella γ. Kulmat α ja β voidaan ilmaista kulman γ avulla.

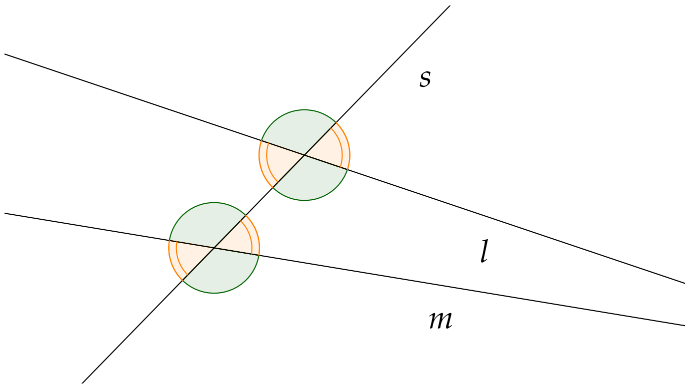
Kulmien α ja γ summa on oikokulma.
$\alpha + \gamma = 180°$, joten $\alpha = 180° - \gamma$.
Myös kulmien β ja γ summa on oikokulma.
$\beta + \gamma = 180°$, joten $\beta = 180° - \gamma$.
Siis $\alpha = \beta$.



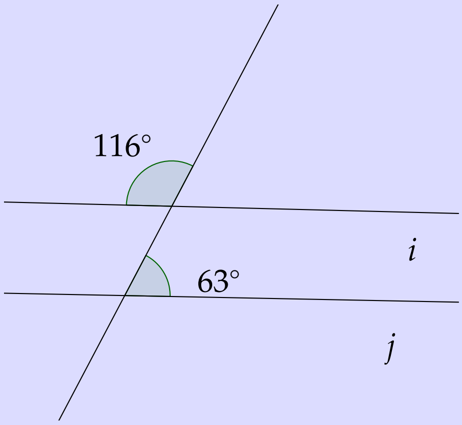
□

Määritelmä: *Samankohtaiset kulmat.*

Kun suora s leikkaa kahta muuta suoraa l ja m, muodostuu kahdeksan kulmaa. Kulmat, joiden samanniminen kylki (oikea/vasen kylki) on suoralla s, ovat keskenään *samankohtaiset*.



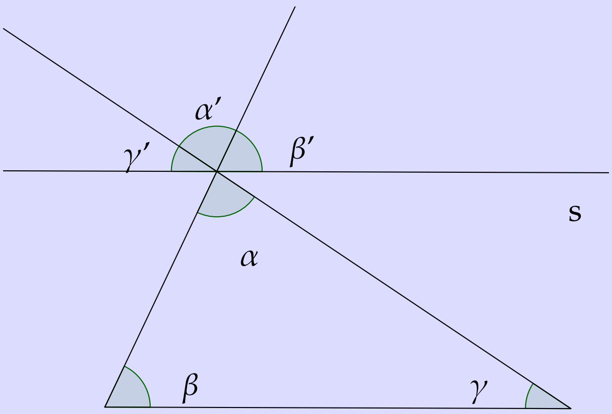
Pohdinta B.5 Ovatko suorat i ja j yhdensuuntaiset?



Seuraava lause on intuitiivisesti selvä euklidisen geometrian perusominaisuus, jota ei voida tässä yhteydessä todistaa.

Lause B.6 Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos kolmannen suoran leikatessa niitä molempia, muodostuvat samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Pohdinta B.7 Osoita, että kolmion kulmien summa on 180°.

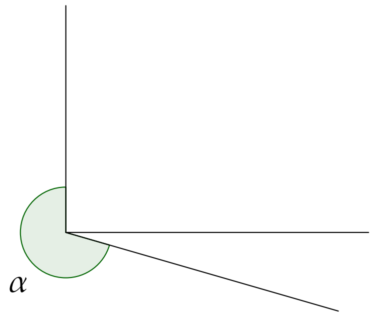


- Suora s on yhdensuuntainen kolmion kannan kanssa.
- Kolmion kyljille on piirretty jatkeet.

Tehtäviä.

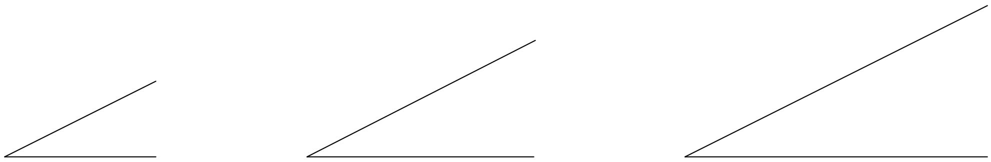
1. Mikä seuraavista kuvaa kulmaa α?

1. Tylppä kulma
2. Kupera kulma
3. Terävä kulma
4. Oikokulma

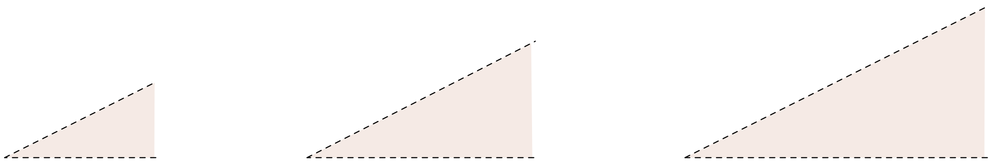


2. Mitä väärinkäsityksiä oheisten kuvien tulkintaan liittyy ja mistä ne mahtavat johtua?

a) "Vasemmanpuoleisin kulma on pienin ja oikeanpuoleisin suurin."



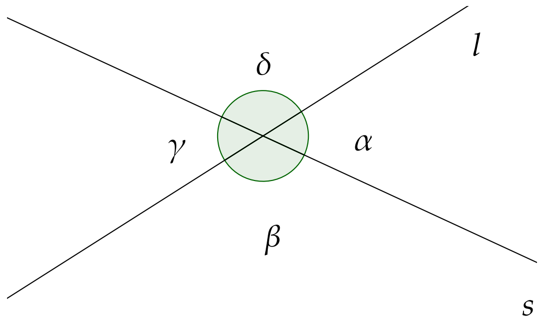
b) "Kulman suuruus määritetään kylkien väliin jäävän alueen perusteella, joten vasemmanpuoleisin on pienin ja oikeanpuoleisin suurin."



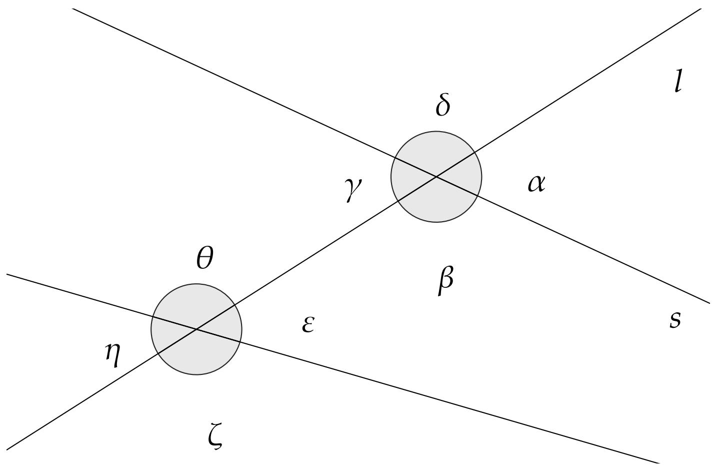
3. Kun mittaamme kulman, mitä oikeastaan mittaamme?

4. Nimeä kuvasta

- vieruskulmat,
- ristikulmat.

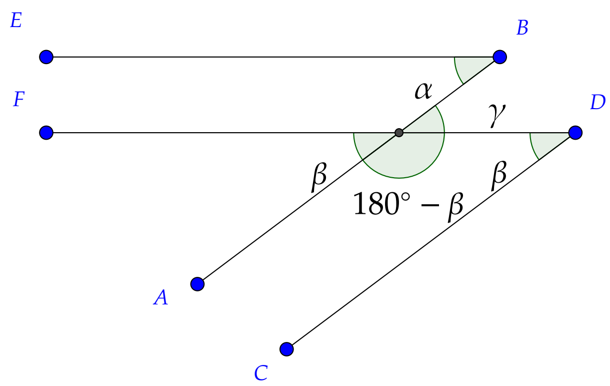


5. Nimeä kuvasta samankohtaiset kulmat.



6. Mitkä seuraavista väittämistä perusteluineen ovat totta? ($EB \parallel FD$)

1. $\alpha = \gamma$. Perustelu: Koska $EB \parallel FD$, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.
2. $AB \parallel CD$. Perustelu: Koska ristikulmat ovat yhtä suuret.
3. $\alpha = \gamma$. Perustelu: Koska ristikulmat ovat yhtä suuret.
4. $AB \parallel CD$. Perustelu: Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

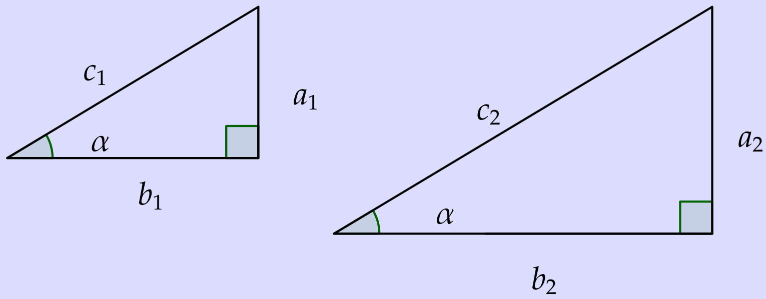


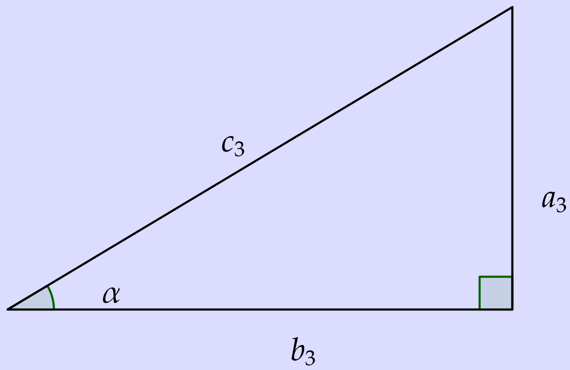
B.2 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on 90°. Suoran kulman vastainen sivu on *hypotenuusa* ja muut sivut ovat *kateetteja*.

Trigonometria -sana tulee kreikan kielestä ja tarkoittaa kolmion mittaamista.

Pohdinta B.8 Mittaa kolmioista kulman α suuruus sekä kulman α *vastaisen* kateetin a_n ja hypotenuusan c_n pituudet.





Laske jokaiselle kolmiolle kulman α vastaisen kateetin pituuden ja hypotenuusan pituuden suhde

$(\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \frac{a_3}{c_3})$, mitä havaitset?

Kulman α *viereisen* kateetin b_n pituuden ja hypotenuusan c_n pituuden suhde

$(\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \frac{b_3}{c_3})$

sekä kulman α vastaisen kateetin a_n ja viereisen kateetin b_n pituuksien suhde

$(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3})$ tuottavat vastaavan havainnon.

Jos kahdessa suorakulmaisessa kolmiossa on yhtä suuri terävä kulma, kolmioiden vastaavien sivujen pituuksien suhde on yhtä suuri.

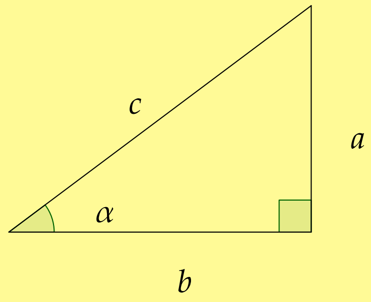
Määritelmä:

- Kulman α vastaisen kateetin a pituuden suhde hypotenuusaan pituuteen c on *sini*;

  $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- Kulman α viereisen kateetin b pituuden suhde hypotenuusaan pituuteen c on *kosini*;

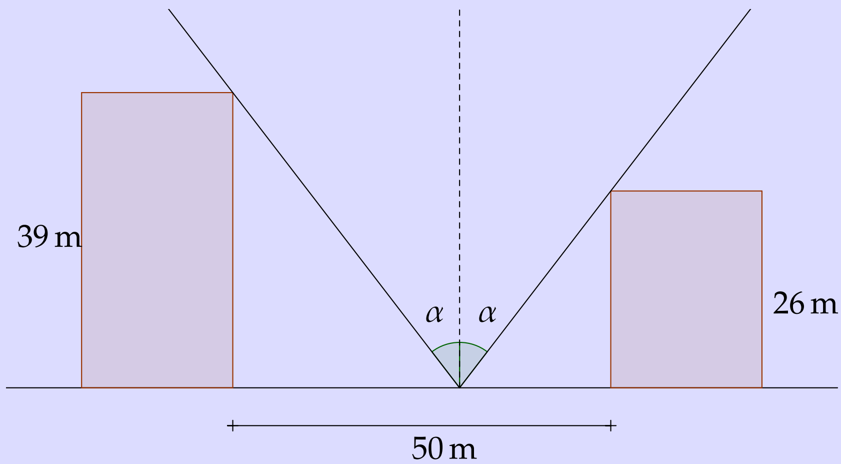
  $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- Kulman α vastaisen kateetin a pituuden suhde viereisen kateetin pituuteen b on *tangentti*;

  $\tan\alpha = \frac{a}{b}$



Huomautus: Kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella edelliset määritelmät sinille, kosinille ja tangentille ovat hyvin perusteltuja.

Pohdinta B.9 Tähtiharrastaja katselee yöllisiä tähdenlentoja pihalla, joka sijaitsee kahden kerrostalon välissä kuvan mukaisesti. Talojen korkeudet ovat 39 m ja 26 m. Kuinka kaukana korkeammasta talosta molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma α maanpinnan tasosta katsottuna? [k13/5]



Huomautus: Laskimen toiminnolla $\sin^{-1}$ voidaan ratkaista kulma α:

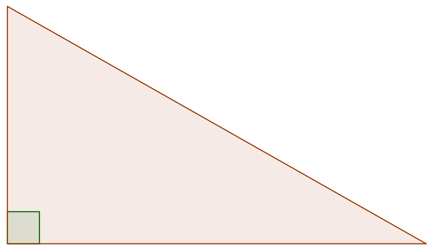
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

Huomioi, että laskin on DEG-tilassa, kun lasketaan asteilla.

Tehtäviä.

7. Sijoita kuvaan

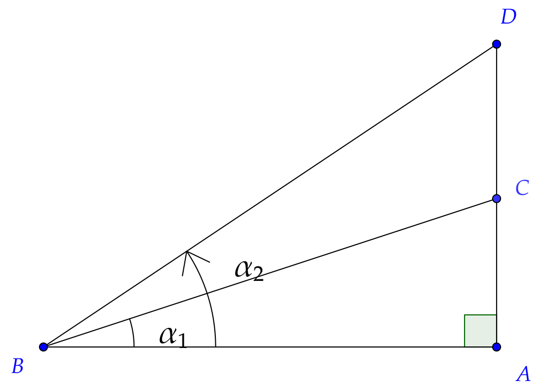
- kateetit a ja b, kun $\mid a \mid < \mid b \mid$, sekä hypotenuusa c,
- kulma α, kun sen vastainen kateetti on a, sekä
- kulma β, kun sen vastainen kateetti on b.



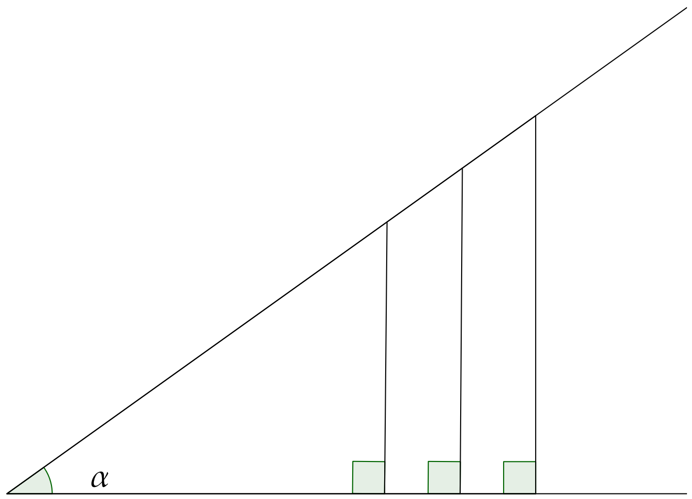
8. Lipputangon pituus on 10 m ja sen varjo yltää 15 m :n päähään. Missä kulmassa aurinko paistaa?

9. Salama kaatoi puun niin, että se katkesi 1,6 m:n korkeudelta. Kaatuneen puun ja maan pinnan väliseksi kulmaksi mitattiin 6°. Laske puun alkuperäinen korkeus.

10. Tarkastele oheista kuvaa. Jos $\alpha_2 = 2\alpha_1$, niin onko sivun AD pituus kaksi kertaa sivun AC pituus, eli $|\,AD\,| = 2\,|\,AC\,|$? Perustele väitteesi.



11. Tarkastele oheista kuvaa. Olkoon $0° < \alpha < 90°$. Kulman α avulla voidaan muodostaa äärettömän monta erilaista suorakulmaista kolmiota. Riippuvatko kulman α trigonometristen funktioiden arvot valitusta kolmiosta? Miksi/miksi eivät?

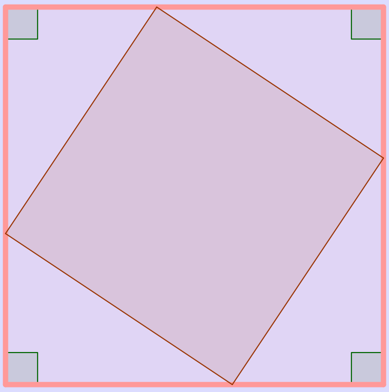


B.3 Pythagoraan lause

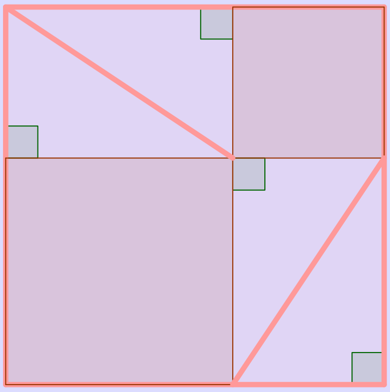
Kreikkalainen matemaatikko ja filosofi Pythagoras (n. 570-500 eaa.) tunnetaan parhaiten lauseesta, jonka mukaan suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan pituuden neliö on yhtä suuri kuin kateettien pituuksien neliöiden summa.

Pohdinta B.10 Molemmissa kuvioissa kaikki suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään samanlaisia. Laske tummemmalla väritetyn osan ala kuvioissa. Kolmioissa kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus c.

1)



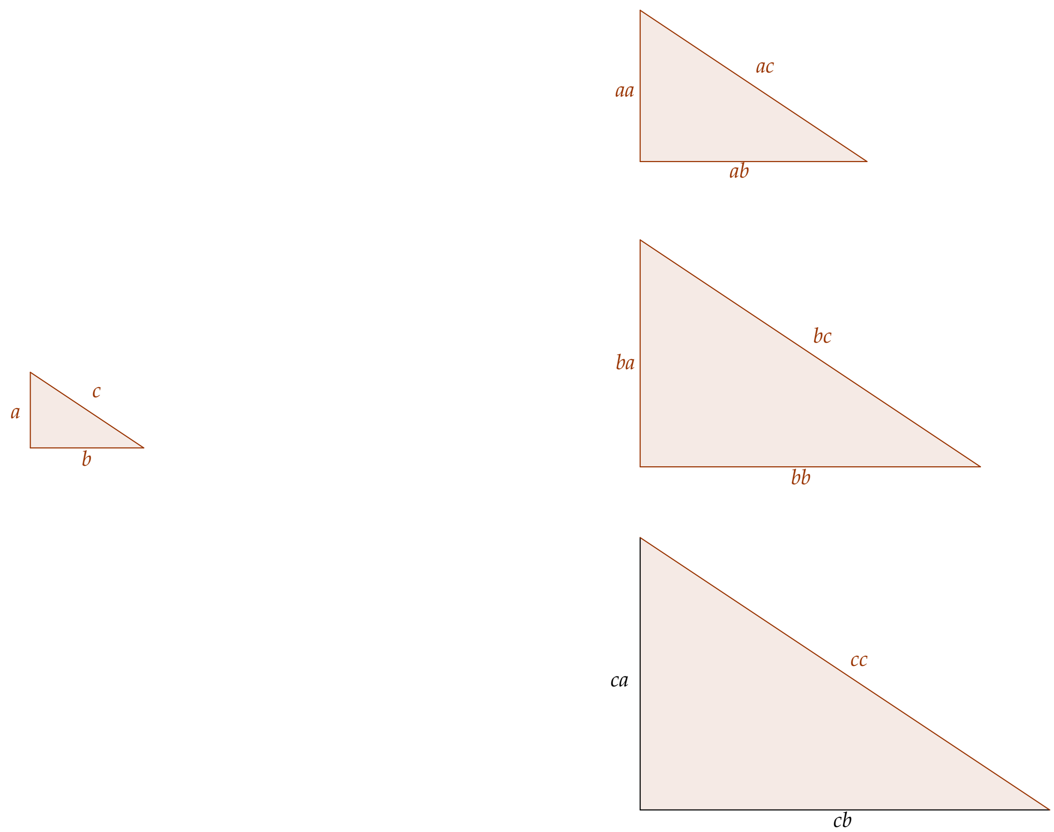
2)



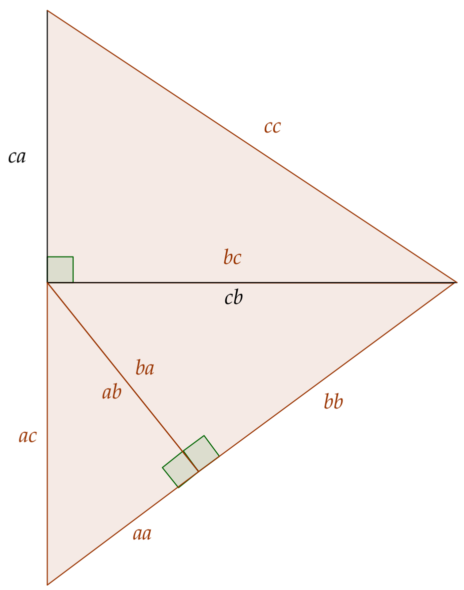
Lause B.11 Pythagoraan lause. Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö, eli

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

Todistus. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b, ja hypotenuusan pituus on c. Muodostetaan kolme uutta kolmiota skaalaamalla annettu suorakulmainen sen sivujen pituuksilla. Yksi kolmio skaalataan pituudella a, toinen pituudella b ja kolmas pituudella c.



Skaalaamalla muodostetut kolmiot sovitetaan yhteen uudeksi kolmioksi. Skaalattujen kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella uuden ”yhdistelmäkolmion” kantakulmat ovat yhtenevät, joten muodostettu kolmio on tasakylkinen.

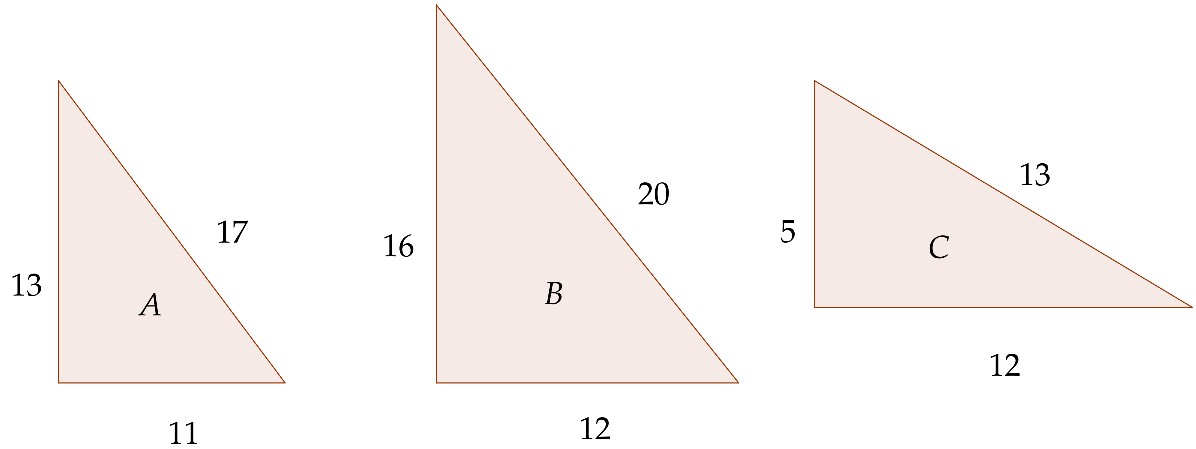


Näin ollen kantakulmien vastinsivut ovat yhtenevät ja yhtä pitkät, joten

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad \square$$

Tehtäviä.

12. Mikä seuraavista oheisiin kolmioihin liittyvistä väittämän ja perustelun yhdistelmästä on totta?



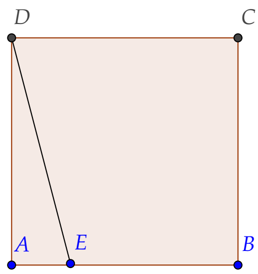
1. Vain kolmiot A ja B ovat suorakulmaisia kolmioita. Perustelu: Pythagoraan lause.
2. Vain kolmiot A ja B ovat suorakulmaisia kolmioita. Perustelu: Pythagoraan lauseen käänteislause; eli "Jos kolmion kahden lyhyemmän sivun neliöiden summa on yhtä suuri kuin pisimmän sivun neliö, on kolmio suorakulmainen."
3. Vain kolmiot B ja C ovat suorakulmaisia kolmioita. Perustelu: Pythagoraan lause.

13. Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E, että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön

a) sivun pituus,

b) pinta-ala ja

c) lävistäjän pituus.



Anna vastaukset tarkkoina arvoina. [k06/3]

14. Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna. [s14/6]

a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liitää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.

b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liitää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

B.4 Koordinaatisto

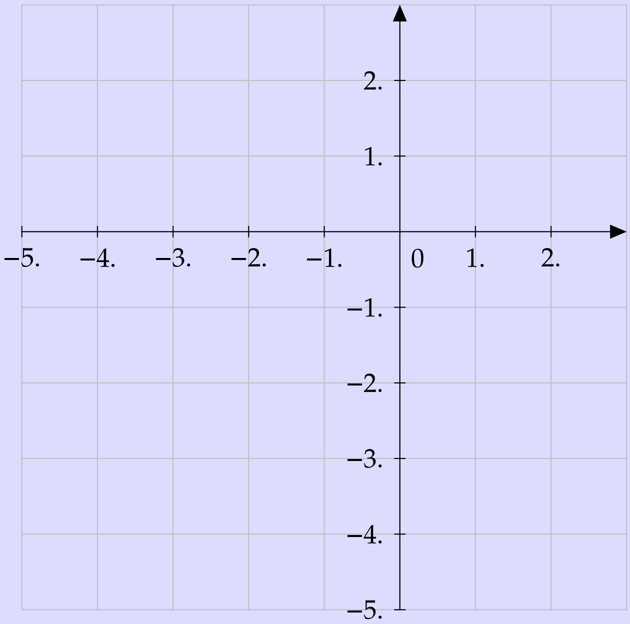
Pohdinta B.12 Merkitse koordinaatistoon pisteet

$A = (-3, 2)$,

$B = (-3, -4)$,

$C = (2, 2)$ ja

$D = (2, 0)$.



- Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora l ja pisteiden A ja C kautta kulkeva suora k. Miten kuvailisit suoria l ja k?
- Piirrä pisteiden C ja D kautta kulkeva suora j. Miten kuvailisit suoria l ja j?

Pohdinta B.13 Määritä kolmion ABC piiri, kun sen kärkipisteet sijaitsevat pisteissä

$A = (-1, 4)$,

$B = (-2, -1)$ ja

$C = (3, 1)$.

Tehtäviä.

15. Merkitse koordinaatistoon pisteet

$A = (-3, 4)$,

$B = (-3, 0)$,

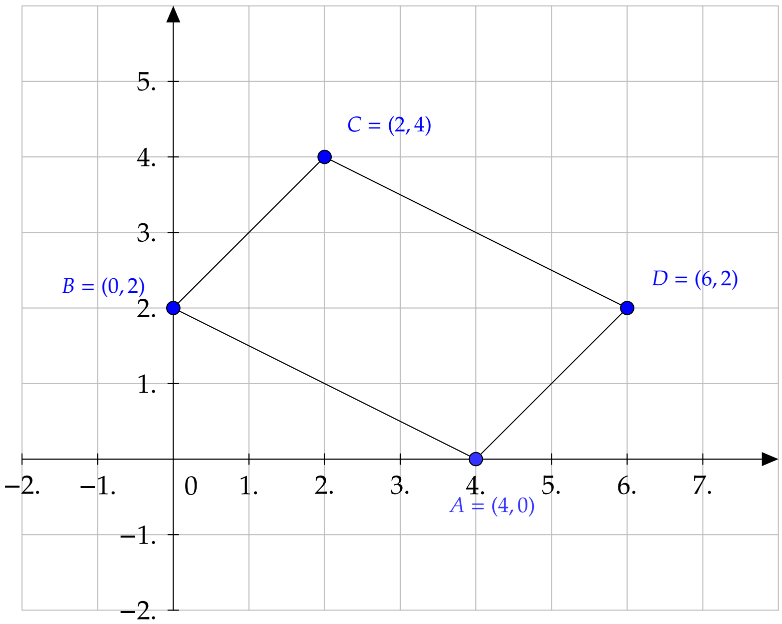
$C = (3, 1)$ ja

$D = (3, -2)$.

Piirrä suora h pisteiden A ja B kautta, suora i pisteiden C ja D kautta sekä suora j pisteiden A ja C kautta. Muodostuu kahdeksan kulmaa. Määritä kulmien suuruudet.

16. Määritä pohdintatehtävän B.12 kolmion ABC kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

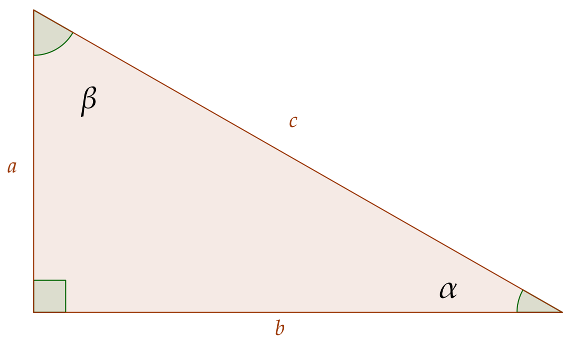
17. Mikon tehtävänä oli laskea annetun kuvion pinta-ala. Mikko kertoo: "Laskin kuvion pinta-alan kuten nelikulmion, kanta kertaa korkeus. Kannan pituudeksi mittasin janan AB ja korkeudeksi AD. Sitten kerroin pituudet keskenään."



Toimiiko Mikon menetelmä? Miksi/miksi ei? Jos ei, niin miten hänen tulisi edetä tehtävässä?

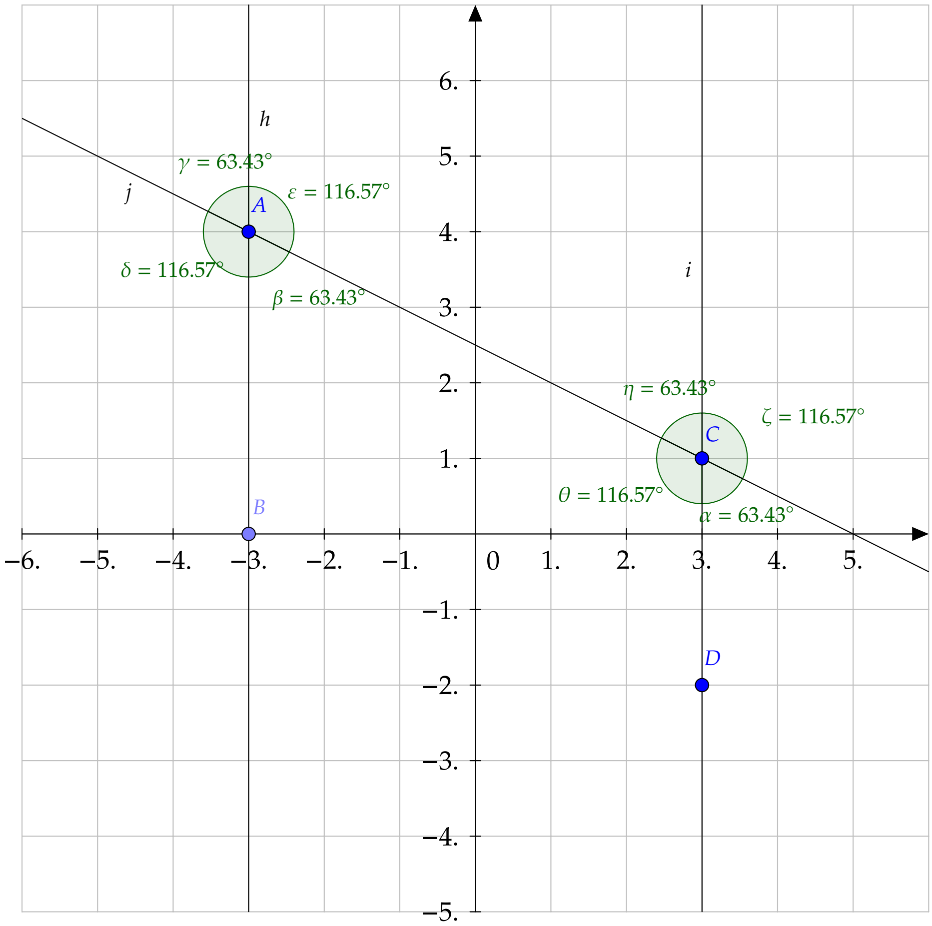
Vastaukset

1. Kupera kulma.
2. Keskustelutehtävä.
3. Keskustelutehtävä.
4. Vieruskulmat: α ja β, β ja γ, γ ja δ sekä δ ja α;
   ristikulmat: α ja γ sekä β ja δ.
5. α , γ , ε ja η sekä β , δ , ζ ja θ.
6. 1. ja 4.
7.

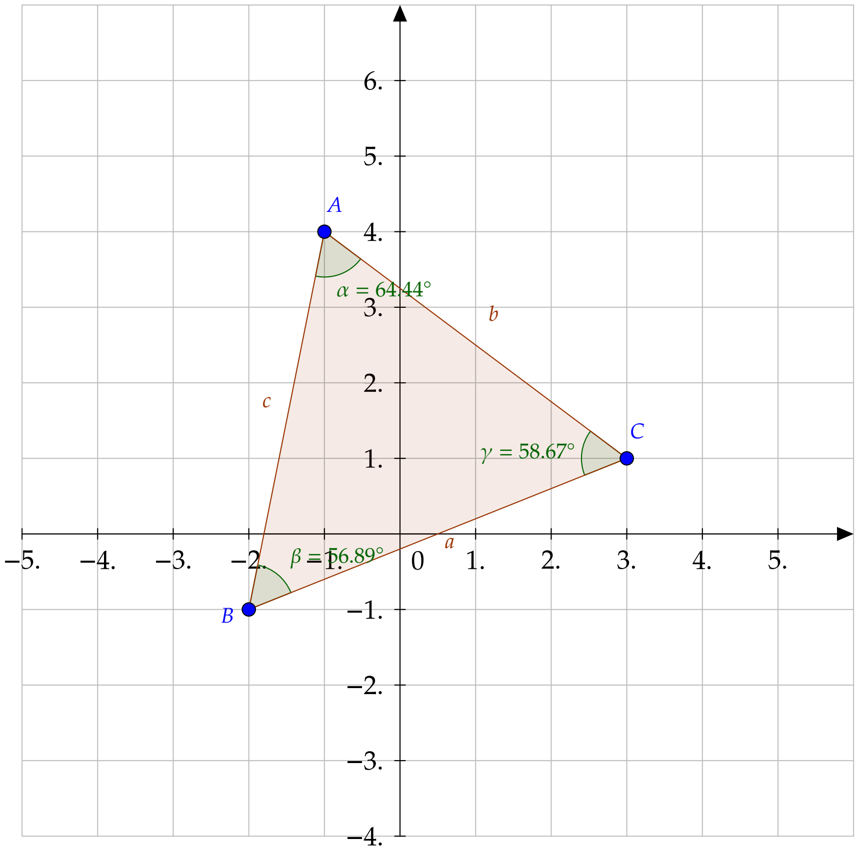


8. $33,69°$.
9. $16,9$ m.
10. Ei. Perustelu esimerkiksi Geogebran avulla.
11. Eivät. Sivujen pituuksien suhde säilyy.
12. Kaikki epätosia.
13. a) $2\sqrt{2}$.
    b) 8.
    c) 4.
14. a) 19 m:n korkeudelta.
    b) 17° alaviistoon.

15.


h
j
i
A
B
C
D
γ = 63.43°
ε = 116.57°
δ = 116.57°
β = 63.43°
η = 63.43°
ζ = 116.57°
θ = 116.57°
α = 63.43°
6.
5.
4.
3.
2.
1.
−1.
−2.
−3.
−4.
−5.
−6.
−5.
−4.
−3.
−2.
−1.
0
1.
2.
3.
4.
5.

16.



17. Pohdinta/keskustelutehtävä.