Polynomiepäyhtälöt ja niiden ratkaisu lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Jenna Joki-Erkkilä
2318033
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto

Kevät 2017

Sisältö

Johdanto

Viimeisen sadan vuoden aikana työn luonne on muuttunut. Vielä 1900-luvulla moneltakaan työntekijältä ei vaadittu erityisiä taitoja, vaan riitti, että työntekijä osasi suorittaa yksinkertaisia tehtäviä. Nykypäivän työpaikat vaativat erikoistunutta tietoa ja taitoa. Työntekijöiden on kyettävä tekemään yhteistyötä ja kommunikoimaan erilaisten ihmisten kanssa sekä tutkimaan ideoita ja keräämään, yhdistelemään ja analysoimaan monenlaista tietoa. Lisäksi heidän tulee kehittää uusia tuotteita sekä soveltaa eri alojen tietoa uusiin ongelmiin ja haasteisiin. Emme voi vielä edes aavistaa, millaisia työpaikkoja on tarjolla esimerkiksi sadan vuoden päästä. [2]

Koska työn luonne on muuttunut, täytyy opetuksenkin muuttua. Opiskelijoille ei kannata enää vain siirtää tietoa, jonka he painavat mieleensä ja varastoivat tulevaisuutta varten, vaan heille tulee opettaa, kuinka oppia. Tällä tavoin opiskelijat voivat selviytyä muuttuvan tiedon sekä teknologian ja työn asettamista vaatimuksista. [2]

Koska opetuksen on muututtava, on myös oppikirjojen luonnetta päivitettävä. Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektissa tarkoituksena olikin tehdä hieman erilainen, oppilaslähtöinen, verkossa julkaistava sähköinen oppimateriaali lukion matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän kursseille MAB2 ja MAA2. Oppikirja perustuu uuteen 1.8.2016 käyttöönotettuun opetussuunnitelmaan. Tässä ongelmalähtöisessä oppikirjassa opiskelijat kehittävät itse toimivat ratkaisumenetelmät lukuisien pohdintatehtävien avulla.

Oppikirjaa tehdessä se jaettiin kolmeen osaan: lyhyen matematiikan osaan, lyhyen ja pitkän matematiikan yhteiseen osaan sekä pitkän matematiikan osaan. Tämän tutkielman oppimateriaali, ”Polynomiepäyhtälöt”, kuuluu pitkän matematiikan osioon, eli se on osa kurssia MAA2, *Polynomifunktiot ja -yhtälöt*. Tekemäni oppimateriaaliosa päättää oppikirjan, eli on sen viimeinen kappale. Oppikirjan osa koostuu epäyhtälöiden perusteista, kuten epäyhtälömerkeistä ja epäyhtälöiden ominaisuuksista sekä ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen polynomiepäyhtälöistä. Oppimateriaaliosaan on ajateltu käytettävän viisi 45 minuutin oppituntia. Oppimateriaali on tutkielman lopussa liitteenä, joka sisältää myös vastaukset oppikirjassa esiintyviin tehtäviin.

Tämä tutkielma sisältää oppimateriaaliosan lisäksi perusteluosion, jossa esitellään oppikirjan tavoitteet ja perustellaan oppimateriaaliin liittyvät valinnat. Oppikirjan tavoitteet on määritetty uuden opetussuunnitelman sekä oppikirjan tekijöiden kanssa yhdessä päättämiemme yleisien tavoitteiden perusteella. Yhdessä sovitut yleiset tavoitteet perustuvat osin artikkelista *Habits of mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [8] poimittuihin tavoitteisiin. Oppimateriaaliin liittyvät valinnat perustellaan tieteellisillä tutkimuksilla ja artikkeleilla.

Tämän tutkielman oppimateriaaliosassa kiinnitetään erityisesti huomiota artikkeleista löydettyjen ongelmakohtien eliminoimiseen. Esimerkiksi hyvin yleinen harhakäsitys opiskelijoilla on, että epäyhtälöitä voidaan ratkoa samalla tavalla kuin vastaavia yhtälöitä [12], [31]. Tämä on otettu huomioon muun muassa kehittämällä kappaleeseen ”Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö” kaksi pohdintatehtävää, joiden avulla opiskelijat miettivät, mitkä ovat epäyhtälöiden ratkaisussa sallittuja toimenpiteitä.

Tutkielma sisältää myös Opettajan oppaan, joka on tutkielman lopussa liitteenä. Siinä esitellään ajankäyttösuunnitelma, kunkin kappaleen tärkeimmät tavoitteet sekä vinkkejä pohdintatehtäviin liittyen. Opettajan oppaassa on kerrottu kunkin pohdintatehtävän tarkoitus, mahdolliset eriyttämiskeinot ja niiden ratkaisut.

1 Oppikirjan tavoitteet

Tässä tutkielman luvussa tarkastellaan oppikirjan tavoitteita, jotka määräytyvät uuden opetussuunnitelman ja projektiryhmän asettamien tavoitteiden perusteella. Tarkastellaan ensin opetushallituksen laatimia tavoitteita kurssille *Polynomifunktiot ja -yhtälöt* sekä opetushallituksen koko pitkälle oppimäärälle ja yleisesti matematiikan opetukselle asettamia tavoitteita. Esitellään sen jälkeen projektiryhmän päättämät yleiset tavoitteet oppikirjalle, jotka pohjautuvat osin artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [8] esiteltyihin tavoitteisiin.

1.1 Opetussuunnitelma

Uudessa, 1.8.2016 käyttöönotetussa, lukion opetussuunnitelman perusteissa on asetettu MAA2 *Polynomifunktiot ja -yhtälöt* -kurssin tavoitteiksi, että opiskelija:

- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- osaa ratkaista toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkia ratkaisujen lukumäärää
- osaa ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- osaa ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin ja polynomiepäyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. [23, s. 131]

Tähän oppikirjan ”Polynomiepäyhtälöt”-osaan, tavoitteista liittyy eniten tietysti polynomiepäyhtälöiden ratkaiseminen. Niiden ohella harjaantuu myös polynomifunktioiden käsittely sekä toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ratkaiseminen. Tehtävien ratkaisemisessa käytetään apuna myös teknisiä apuvälineitä. Esimerkiksi GeoGebran käyttöä epäyhtälöiden ratkaisussa opetellaan pohdintatehtävässä B.2.4, ja myöhemmin sitä käytetään muun muassa tarkistettaessa algebrallisesti tehtyjä tehtäviä.

Näiden kurssikohtaisten tavoitteiden lisäksi opetussuunnitelmassa on asetettu matematiikan yleiset tavoitteet, joiden mukaan matematiikan opetuksen tulee ”kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja” [23, s.129]. Nämä tavoitteet täyttyvät luonnollisesti sekä kirjan lukuisissa pohdintatehtävissä että harjoitustehtävissä, joihin otin mukaan niin sanallisia kuin mekaanisiakin laskutehtäviä. Yleisten tavoitteiden perusteella matematiikan opetuksen tehtävänä on myös yhdistää arkielämä matematiikkaan. Lisäksi matematiikan opetus tulisi rakentaa opiskelijoille mielenkiintoisista aiheista. Nämä tavoitteet otin huomioon laatiessani sanallisia tehtäviä, jotka yritin sitoa mahdollisimman läheisesti opiskelijoiden arkielämään laatimalla tehtäviä muun muassa jäätelön ja auton myyntiin liittyen. [23]

Lukion opetussuunnitelman perusteissa on määritelty tavoitteet erikseen myös pitkään ja lyhyeen matematiikkaan. Pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa matemaattinen yleissivistys sekä matemaattiset taidot, joita jatko-opinnot edellyttävät. Pitkän matematiikan opetuksen tavoitteena on myös kannustaa opiskelijaa kokeilevaan ja tutkivaan työskentelyyn sekä kehittää opiskelijan kykyä toimia ongelmanratkaisijana ja johtopäätösten tekijänä. Nämä toteutuvat pohdintalähtöisen oppikirjan osan useissa pohdintatehtävissä. Pohdintatehtävät opettavat opiskelijoita myös kirjoittamaan perusteluita sekä tarkastelemaan saatuja ratkaisuja kriittisesti, mitkä ovat opetussuunnitelman pitkän matematiikan opetukselle asetettuja tavoitteita. Lisäksi oppimateriaalin tavoitteena on antaa opiskelijoille positiivisia oppimiskokemuksia ja lisätä heidän luottamusta omiin matemaattisiin taitoihinsa, mitkä ovat myös eräitä opetushallituksen pitkälle oppimäärälle asettamia tavoitteita. [23]

1.2 Yleiset tavoitteet

Yhtenäisen kokonaisuuden luomiseksi, sovimme oppikirjan tekijöiden kanssa muutamia yleisiä tavoitteita oppikirjalle. Päätimme yhdessä projektiryhmän kanssa, että oppikirjan tulee olla tutkimuslähtöinen ja graafisuuden tulee olla siinä suuressa roolissa. Lisäksi poimimme oppikirjalle muutamia tavoitteita artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [8]. Artikkelissa esitettyjen tavoitteiden tarkoituksena on tuoda matematiikan opetukseen tutkivaa luonnetta. Projektiryhmän kanssa sovimme myös muutamista tehtävätyypeistä, joita tulee sisällyttää oppikirjaan.

1.2.1 Tutkimuksellisuus

Projektiryhmän kanssa sovittiin, että tutkimuksellisuutta toteutetaan tässä oppikirjassa pohdintatehtävillä, joista suurin osa on tarkoitettu tehtäväksi parin kanssa. Opiskelijoille ei anneta valmista teoriaa tai valmiita ratkaisumenetelmiä, vaan opiskelijat toimivat ongelmanratkojina ja pyrkivät kehittämään itse toimivat ratkaisumenetelmät johdattelevien pohdintojen avulla. Tällaiset pohdintaa vaativat tehtävät mahdollistavat opitun ymmärtämisen [7]. Tehtävissä esiintyvä tutkivan oppimisen malli tarkoittaa, ettei tietoa vain ”sulauteta aikaisempaan vaan sitä puretaan ja rakennetaan ratkaisemalla ymmärtämiseen liittyviä ongelmia” [14, s. 30]. Tutkivassa oppimisessa korostetaan myös oppijan aktiivisuutta sekä yhteistyön vaikutusta [14], jonka takia suurin osa tehtävistä on tarkoitettu parin kanssa tehtäviksi. Parin kanssa tekeminen on oivallinen työskentelymuoto oppitunnilla, sillä yksittäisen opiskelijan on helpompi kertoa näkemyksiään parilleen kuin koko luokalle [18]. Myös toiminta tehostuu, kun koko luokka keskustelee muutaman opiskelijan sijaan [18]. Parin kanssa työskennellessä opitaan myös hyödyllisiä työyhteisöissä tarvittavia taitoja.

Oppikirjan luonteen takia opettajan rooli on hyvin tärkeä. Hänen tulee ohjata opiskelijat tekemään pohdintatehtävät siten, että opiskelijat ymmärtävät niistä kaiken oleellisen, eikä heille jää vääriä käsityksiä. Opettajan oppaaseen onkin koottu useaan pohdintatehtävään liittyen eriyttäviä kysymyksiä opettajan toiminnan helpottamiseksi. Kaikki pohdintatehtävät olisi myös hyvä käydä vielä yhteisesti läpi opiskelijoiden kanssa, jotta kaikki varmasti ymmärtävät tehtävän tarkoituksen. Tehtävien läpikäyminen yhdessä mahdollistaa myös erilaisten ratkaisustrategioiden esille tuomisen, sillä opiskelijat ratkovat tehtäviä eri tavalla [7]. Yhdessä keskustelemalla voidaan myös oikaista yleisiä väärinymmärryksiä, minkä on tutkittu parantavan oppimistuloksia [1].

1.2.2 Graafisuus

Graafisuus näkyy tämän oppikirjan osan kaikissa kappaleissa. Jokaista aihetta lähestytään ensin graafisesti eli kuvaajien avulla ja vasta sitten algebrallisesti eli laskennallisesti. Myös harjoitustehtävät sisältävät graafisesti ratkaistavia tehtäviä (Tehtävät 5, 6, 16 ja 18). Graafisuus on oppikirjassa näin merkittävässä roolissa, koska sen on tutkittu auttavan ymmärtämään funktioita ja konkretisoimaan abstrakteja matemaattisia käsitteitä [21]. Graafisuus on myös osa visualisointia, joka on tehokas työkalu matemaattisten ongelmien ratkaisussa [28].

Uudessa opetussuunnitelmassa korostettu tietokoneohjelmistojen käyttö matemaattisten ongelmien ratkaisun apuna [23] otettiin huomioon yleisissä tavoitteissa, sillä graafisiin tehtäviin valittiin käytettäväksi apuvälineeksi GeoGebra. GeoGebra on monipuolinen, kaikkien saatavilla oleva ilmainen dynaaminen matematiikkaohjelmisto [16]. Se tuo opiskelijoille geometrian, algebran, analyysin ja taulukkolaskennan samassa ohjelmassa [16]. Valitsimme GeoGebran, koska se on yksi vuodesta 2019 lähtien sähköistyvissä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa käytettävistä ohjelmistoista [9], minkä takia opiskelijoiden on tärkeää oppia käyttämään sitä.

Aloittaessani tekemään oppikirjan osaa, pohdin, piirränkö pohdintatehtävissä tarvittavat kuvaajat valmiiksi oppikirjaan vai tulisiko opiskelijoiden itse piirtää ne GeoGebralla. Päädyin siihen, että piirrän ne valmiiksi, sillä näin säästetään aikaa. GeoGebran käyttö epäyhtälöiden ratkaisussa opetellaan kyllä pohdintatehtävässä B.2.4, ja sitä käytetään esimerkiksi harjoitustehtävissä 6 ja 18. GeoGebran avulla on myös kätevä tarkistaa laskettuja tehtäviä.

1.2.3 *Habits of Minds* –tavoitteet

Yleisten tavoitteiden lisäksi poimittiin muutamia tavoitteita artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Artikkelissa pohditaan, millaista opetettavan matematiikan tulisi olla, sillä tämän päivän ensimmäistä luokkaa käyvät oppilaat valmistuvat lukiosta kohdaten ongelmia, joita ei vielä ole edes olemassa. Artikkelin mukaan matematiikan opetuksessa tulisi keskittyä eri matematiikan osa-alueiden sijaan opiskelijoiden ongelmanratkaisukyvyn kehittämiseen. Opiskelijoille tulisi opettaa matemaatikoiden tapa ratkoa ongelmia, ja antaa heille työkalut, joiden avulla he voivat luoda täysin uutta matematiikkaa. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi artikkelissa esitellään ”Habits of Minds” -opetussuunnitelma, joka sisältää tavoitteita, joiden tarkoituksena on tuoda matematiikan opetukseen tutkivaa luonnetta. Näistä tavoitteista viisi on valittu mukaan oppikirjaan: opiskelijoiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä (”pattern sniffers”), kokeilijoita (”experimenters”), kuvailijoita (”describers”), visualisoijia (”visualizers”) ja konjektuurien muodostajia (”conjecturers”). Tässä oppikirjan osassa eniten esiintyy säännönmukaisuuksien etsimistä, kuvailemista ja visualisointia, joista kerrotaan lisää seuraavaksi. [8]

Säännönmukaisuuksien etsiminen

Yhdeksi oppikirjan tavoitteeksi valittiin artikkelissa esiintyvä tavoite ”opiskelijoiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä”, jolla tarkoitetaan toistuvien kuvioiden etsimistä matemaattisista laskuista ja ongelmista [8]. Tässä oppikirjan osassa opiskelijoiden tulee myös osata tehdä päätelmiä havaitsemistaan säännönmukaisuuksista ja hyödyntää niitä.

Tämä tavoite on otettu huomioon varsinkin ensimmäisen ja toisen asteen polynomiepäyhtälöissä. Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälöiden toisessa pohdintatehtävässä B.2.2 opiskelijoiden tulee tutkia, mitä epäyhtälöiden totuusarvoille tapahtuu, kun epäyhtälöille suoritetaan erilaisia laskutoimituksia sekä negatiivisilla että positiivisilla luvuilla. Tässä heidän tulisi löytää sellainen toistuva kuvio, että jaettaessa tai kerrottaessa negatiivisella luvulla epäyhtälön totuusarvo muuttuu. Toisen asteen epäyhtälöiden tapauksessa opiskelijat ratkaisevat pohdintatehtävässä B.3.1 toisen asteen polynomiepäyhtälöitä graafisesti. Graafisesti ratkaistavien tehtävien perusteella opiskelijoiden tulisi löytää ratkaisuista säännönmukaisuus, eli huomata, että toisen asteen polynomiepäyhtälöiden ratkaisussa nollakohdat ja kuvaajat ovat merkityksellisiä. Tätä havaittua säännönmukaisuutta hyödyntämällä opiskelijoiden tulisi kyetä ratkaisemaan pohdintatehtävässä B.3.2 annettu epäyhtälö.

Kuvailu

Oppikirjan tavoitteeksi valittiin myös artikkelissa esiintyvä tavoite ”opiskelijoiden tulisi olla kuvailijoita”. Tämä tarkoittaa sitä, että opiskelijoiden tulisi pystyä kuvailemaan tekemäänsä, eli heidän tulisi osata selittää, mitä ovat tehneet missäkin vaiheessa. Artikkelin mukaan opiskelijoiden tulisi myös kehittää taitoa kirjoittaa omia ajatuksia, väitteitä, todistuksia ja mielipiteitä tekemästään matematiikasta. Koska matematiikka koostuu pitkälti käsitteistä ja symboleista, tehtävän sanoma ei aina ole itsestään selvä, ja siksi kuvailu onkin hyvin olennainen osa matematiikkaa. [8]

Tämä tavoite näkyy oppikirjan pohdinta- ja harjoitustehtävissä, joissa pyydetään perusteluja. Perusteluiden ansiosta tehty ajatustyö tulee prosessoitua kunnolla ja asia ymmärrettyä syvällisemmin. Oikein laskettu tehtävä ei kerro, että opiskelija olisi ymmärtänyt tekemäänsä. Kun opiskelija joutuu perustelemaan tekemänsä joko vieruskaverilleen, kirjoittamalla vihkoon tai kertomalla opettajalle, hän joutuu ajattelemaan tekemäänsä ja ymmärtää asian paremmin [35]. Myös Tsamirin ja Bazzinin tutkimuksessa havaittiin epäyhtälön vastauksen olevan useimmin oikein opiskelijoilla, jotka olivat antaneet sanallisen perustelun verrattuna opiskelijoihin, jotka olivat antaneet pelkän algebrallisen vastauksen [32]. Oppikirjan harjoitustehtävissä esiintyvissä sanallisissa tehtävissä esiintyy myös kuvailua, sillä kirjoitettaessa erillistä sanallista vastausta tehtävään tulee matemaattinen ratkaisu kuvailtua sanallisesti. Miltei joka kappaleen harjoitustehtävissä on mukana myös todistustehtäviä, jotta opiskelijoiden taito kirjoittaa todistuksia ja ymmärtää niiden luonnetta paranisi.

Visualisointi

Oppikirjan tavoitteeksi valittiin myös artikkelissa esiintyvä tavoite ”opiskelijoiden tulisi olla visualisoijia” [8]. Artikkelin mukaan opiskelijoiden tulisi muun muassa kehittää kykyä muodostaa visuaalisia kuvia asioista, jotka eivät luonnostaan ole visuaalisia [8]. Esimerkiksi tässä oppikirjan osassa epäyhtälöitä lähestytään jokaisessa kappaleessa ensin graafisesti, minkä tarkoituksena on visualisoida epäyhtälöiden ratkaisuja opiskelijoille.

Visualisointi on tehokas työkalu matemaattisten ongelmien ratkaisussa, sillä sen avulla voidaan muun muassa havainnollistaa matemaattisia käsitteitä [28]. Näkemisen on myös arvioitu lisäävän 30 % asioiden omaksumista [26]. Kuvat voidaan kokea myös oppimista innostavina tekijöinä [26]. Tässä oppikirjan osassa esitellään reaalilukuvälit ja negatiivisella luvulla kertominen sekä jakaminen visuaalisesti lukusuorien avulla. Harjoitustehtävissä opiskelijat pääsevät myös itse ratkaisemaan epäyhtälöitä graafisesti teknisiä apuvälineitä käyttäen sekä mallintamaan sanallisia tehtäviä niiden ymmärtämisen helpottamiseksi.

1.2.4 Tehtävätyypit

Oppikirja sisältää sekä pohdintatehtäviä, joita tehdään tunnilla että harjoitustehtäviä, joita on tarkoitus tehdä kotitehtävänä. Yhdessä oppikirjan tekijöiden kanssa päätimme, että oppikirjaan tulee sisällyttää muun muassa tehtäviä, joissa opiskelijoiden tulee itse keksiä tehtäviä toisilleen ratkaistavaksi ja tehtäviä, joissa tulee etsiä virhe esitetystä ratkaisusta ja korjata se. Tämän tutkielman oppikirjaosassa nämä tehtävätyypit on sisällytetty pohdintatehtäviin.

Opiskelijat pääsevät itse keksimään tehtäviä parilleen sekä toisen että korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden tapauksessa. Tämän tyyppiset tehtävät mahdollistavat opiskelijoiden ongelmanratkaisukyvyn monipuolisen kehittymisen. Lisäksi toisten ratkaisuja tarkistaessa opiskelijat pääsevät arvioimaan ratkaisuja kriittisesti ja toimimaan neuvojan roolissa [30]. ”Etsi virhe ja korjaa” -tyyppinen tehtävä esiintyy tässä oppimateriaalissa toisen asteen polynomiepäyhtälöissä. ”Etsi virhe ja korjaa” -tyyppisten tehtävien avulla on kätevä tuoda kirjaan ratkaisujen analysointia ja kriittistä arviointia, mitkä ovat opetushallituksen asettamat tavoitteet pitkälle matematiikalle [23].

Näissä molemmissa esitellyissä tehtävätyypeissä esiintyy myös edeltävässä alaluvussa käsiteltyä kuvailua. Kun opiskelijat toimivat tarkistajina, he pääsevät kuvailemaan ratkaisun vaiheita parilleen. Kun opiskelijat etsivät virheitä valmiista ratkaisuista, heidän tulee perustella, miksi jokin kohta on mahdollisesti väärin.

Näiden tehtävätyyppien lisäksi pohdintatehtävissä esiintyy muita tehtävätyyppejä. Esimerkiksi graafisesti ratkaistavat tehtävät ovat yksi tehtävätyyppi. Tämän oppikirjaosan pohdintatehtävien tyypeistä ja niiden valinnasta kerrotaan lisää tämän tutkielman seuraavassa luvussa 2. Myös tämän oppikirjaosan harjoitustehtävistä ja niiden tehtävätyypeistä on kerrottu tarkemmin luvussa 2.5.

2 Oppimateriaalin perustelu

Tämän tutkielman oppimateriaali sisältää neljä suurempaa kappaletta: Epäyhtälöiden peruskäsitteitä, Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö, Toisen asteen polynomiepäyhtälö ja Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö. Tässä luvussa perustellaan oppimateriaalin sisältö kappalekohtaisesti. Oppimateriaali on liitteenä tutkielman lopussa (B). Perusteluissa käytetään suurimmaksi osaksi epäyhtälöihin ja niihin liittyviin harhakäsityksiin perustuvia tieteellisiä tutkimuksia ja artikkeleita. Yksityiskohtaisemmat pohdintatehtävien kuvaukset, niiden tavoitteet ja ratkaisut löytyvät Opettajan oppaasta, joka on myös liitteenä tutkielman lopussa (A).

2.1 Epäyhtälöiden peruskäsitteitä

Epäyhtälöt on yksi algebran osa-alue. Niitä tarvitaan muun muassa trigonometrian ja analyyttisen geometrian ymmärtämisessä. Ne liittyvät myös olennaisesti yhtäsuuruuden ja yhtälöiden ymmärtämiseen, sillä epäyhtälöt täydentävät yhtälön käsitettä [31]. Epäyhtälöt koetaan kuitenkin usein vaikeina verrattuna yhtälöihin. Esimerkiksi Vaiyavutjamain ja Clementsin tekemässä tutkimuksessa *Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equation and Linear Inequalities* lukio-opiskelijoista 81 % osasi ratkaista yksinkertaisen ensimmäisen asteen yhtälön, mutta vain 49 % osasi ratkaista yksinkertaisen ensimmäistä astetta olevan epäyhtälön. Epäyhtälön hieman hankaloituessa siten, että vakioita ja muuttujia esiintyi molemmilla puolilla epäyhtälömerkkiä, sen oikein ratkaisseiden määrä väheni entisestään. [34]

Koska epäyhtälöt koetaan usein vaikeina, lähdetään oppikirjassa liikkeelle epäyhtälöihin liittyvistä peruskäsitteistä. Kappaleessa "Epäyhtälöiden peruskäsitteitä" käydään läpi epäyhtälöihin liittyvät merkinnät ja ominaisuudet, kuten epäyhtälömerkit, ratkaisujoukko ja reaalilukuvälit. Tässä kappaleessa ratkaistaan myös ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälöitä graafisesti. Vaikka epäyhtälön tulisi olla opiskelijoille tuttu käsite jo peruskoulun puolelta [24], aloitetaan silti kertauksen vuoksi perusteista.

2.1.1 Epäyhtälöihin liittyvät merkinnät

Epäyhtälöihin liittyvä materiaali alkaa epäyhtälön määritelmällä, johon on lisäksi taulukoitu epäyhtälömerkit ja niiden merkitykset. Määritelmän konkretisoimiseksi siitä otettiin esimerkkejä B.1.2 ja epäesimerkkejä B.1.3. On huomattu, että matemaattisten käsitteiden opetuksessa esimerkit ja epäesimerkit ovat yhdessä tehokkaampia kuin pelkät esimerkit [1]. Ei-epäyhtälöihin otettiin mukaan eräs haastavampi esimerkki, jossa esiintyy sekä epäyhtälö- että yhtä kuin -merkki. Tarkoituksena on herättää keskustelua siitä, miksi kyseessä ei ole epäyhtälö.

2.1.2 Epäyhtälöiden ominaisuuksia

Opiskelijoiden on tarkoitus tutustua epäyhtälöiden ominaisuuksiin Pohdinnan B.1.4 kautta. Ensimmäisessä kohdassa tarkastellaan transitiivisuutta, joka liittyy lukujen suuruusjärjestykseen ja on tärkeä ominaisuus käsiteltäessä epäyhtälöitä. Toisessa kohdassa on tarkoitus oppia epäyhtälöiden totuusarvoista sekä epäyhtälömerkkien ominaisuuksista, kuten mitä eroa on epäyhtälömerkillä, joka sisältää yhtäsuuruden tai ei sisällä sitä.

Kappaleessa "Epäyhtälöiden peruskäsitteitä" huomautetaan myös, että epäyhtälö voidaan kääntää ympäri merkityksen pysyessä samana. Esimerkiksi $a < b$ voidaan kirjoittaa $b > a$. Tämä voi vaikuttaa itsestään selvältä asialta, mutta Blancon ja Carroten tekemän tutkimuksen mukaan opiskelijoilla on havaittu olevan vaikeuksia lukea epäyhtälöä sekä vasemmalta oikealle että oikealta vasemmalle [5].

Ratkaisujoukko

Opiskelijoilla on huomattu olevan vaikeuksia tulkita epäyhtälöiden ratkaisuja. Esimerkiksi, jos on saatu ratkaisuksi $x \leq 2$, hyvin usein opiskelijat kirjoittavat vastaukseksi luvun 2 [34]. Moni opiskelija myös kuvittelee, että epäyhtälön ratkaistakseen riittää, että etsii muutaman arvon, joilla se pätee [5]. On myös yleistä, että rajoitutaan käsittelemään luonnollisia lukuja, vaikka ollaan reaalilukujen joukossa [5]. Näiden epäyhtälön ratkaisuun liittyvien ongelmien takia otin oman oppikirjaosani alkuun mukaan ratkaisujoukon käsitteen. Ratkaisujoukon käsitteen tarkoituksena on auttaa opiskelijoita ymmärtämään, että epäyhtälöillä voi olla ääretön määrä ratkaisuja. Ratkaisujoukkoa on tarkoitus lähteä pohtimaan ratkaisemalla epäyhtälöitä graafisesti ja tutkimalla niiden ratkaisujen lukumäärää.

Epäyhtälöiden graafiseen ratkaisuun johdatellaan nollakohtien ratkaisemisen kautta. Nollakohtien ratkaisemisen jälkeen opiskelijoiden on helpompi tutkia, milloin funktio saa nollaa pienempiä tai suurempia arvoja eli milloin kuvaaja on x-akselin ala- tai yläpuolella. Ratkaistuaan vaadittavat epäyhtälöt, opiskelijoiden tulee pohtia ratkaisujen lukumäärää, minkä avulla päästään käsiksi ratkaisujoukon käsitteeseen. Tulee huomata, että kaikissa tapauksissa ratkaisuja on ääretön määrä – myös kohdassa, jossa ratkaisuksi saatiin lukujen -7 ja 2 väliset luvut. Ratkaisujoukon merkitystä täsmennetään vielä esimerkin B.1.7 avulla. Esimerkissä on esitetty oikea ratkaisujoukko tehtävän B.1.5 c)-kohtaan. Oikean ratkaisujoukon lisäksi esimerkkiin lisättiin puutteellinen versio, joka ei kuvaa koko ratkaisujoukkoa, sillä epäesimerkkien on todettu tehostavan oppimista [1].

Reaalilukuväli

Koska epäyhtälön ratkaisujoukko on yleensä jokin reaalilukuväli, otettiin myös reaalilukuvälit mukaan tähän oppikirjan osaan. Reaalilukuväleihin liittyvät merkinnät ja käsitteet käydään perusteellisesti läpi. Oppikirjassa opetetaan muun muassa, miten reaalilukuväli merkitään, milloin hakasulku käännetään, mitä tarkoittaa avoin tai puoliavoin väli ja mitä tarkoittaa, jos toinen päätepiste on äärettömyydessä. Reaalilukuvälejä havainnollistetaan myös visuaalisesti lukusuoran avulla, jotta oppikirja palvelisi opiskelijoita mahdollisimman monipuolisesti. Myöskin opiskelijoiden matemaattinen ajattelu tehostuu, kun käytetään useaa käsitteen esitysmuotoa rinnakkain [11]. Epäyhtälön ratkaisun esittäminen lukusuoralla on todettu vaikeaksi [3], minkä takia sitä harjoitellaan harjoitustehtävissä (Tehtävissä 2 ja 6). Kappaleen lopussa on vielä huomautus merkintätavasta, kuinka ilmaistaan luvun kuuluminen tietylle välille. Kyseinen merkintätapa on tärkeä, sillä sitä tarvitaan kirjoitettaessa epäyhtälön ratkaisua.

2.2 Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö

Tämän tutkielman oppikirjaosan toisessa kappaleessa ”Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö” on tarkoitus oppia, miten ratkaistaan ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälöitä algebrallisesti. Kappaleessa täydennetään myös jo edellisessä kappaleessa sivuttua epäyhtälöiden graafista ratkaisutapaa. Lisäksi kappaleessa opitaan epäyhtälöiden totuusarvoista sekä tulkitaan monenlaisia epäyhtälöiden ratkaisuja.

2.2.1 Epäyhtälöiden ratkaisu

Epäyhtälöiden ratkaisussa yleinen virhe on, että epäyhtälömerkki unohdetaan kääntää jaettaessa tai kerrottaessa negatiivisella luvulla, jolloin epäyhtälöitä ratkaistaan kuten vastaavia yhtälöitä [5], [12], [31], [3]. Artikkelin *Errors Analysis of Solving Linear Inequalities Among the Preparatory Year Students at King Saud University* mukaan opetuksessa tulisi kiinnittää tähän enemmän huomiota [12]. Tämän takia oppimateriaalin kappaleen ”Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö” alkuun otettiin kaksi pohdintatehtävää, joissa opiskelijat pääsevät itse hoksaamaan epäyhtälömerkin kääntymisen ja tutkimaan epäyhtälön käyttäytymistä kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla.

Idea toiseen johdantotehtävään B.2.2 tuli Outi Vanhasen Pro Gradu –tutkielman *Yhteistoiminnallinen opetuspaketti lukion pitkän matematiikan Polynomifunktiot –kurssilla käytettäväksi* [36] yhdestä opetuspaketin tehtävästä, joka pohjautui *Pitkä matematiikka* –sarjan Polynomifunktiot-kirjan johdantotehtävään [19, s. 16]. Pohdinnan tarkoituksena on selvittää, mitä operaatioita voidaan suorittaa ratkaistaessa ensimmäisen asteen epäyhtälöitä. Tehtävää on muutettu hieman valitsemalla ensimmäiseen kohtaan tosi ja toiseen kohtaan epätosi epäyhtälö, jotta opiskelijat huomaavat molemmissa tapauksissa negatiivisella luvulla kerrottaessa tai jaettaessa totuusarvon muuttuvan. Tutkittavaksi kohdaksi lisättiin myös nollalla kertominen, koska on tärkeää tietää, että myöskään epäyhtälöitä ei saa kertoa nollalla kuten ei yhtälöitäkään. Kappaleen loppussa on vielä pieni yhteenveto, johon on koottu sallitut toimenpiteet epäyhtälöä muokatessa.

Alun kahden pohdintatehtävän jälkeen epäyhtälömerkin kääntymistä perustellaan vielä lukusuoran avulla havainnollistamalla, mitä lukujen suuruusjärjestykselle tapahtuu, kun lukuja kerrotaan tai jaetaan sekä positiivisilla että negatiivisilla luvuilla. Havainnollistamisessa käytetään lukusuoraa, koska se on tehokas tapa esittää lukujen suuruusjärjestyksiä [13]. Lukusuoraan on lisätty myös tehostevärejä, jotka helpottavat tarvittavan tiedon poimimista lukusuoralta.

Perusteluiden jälkeen opiskelijat pääsevät itse harjoittelemaan ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisua Pohdinnassa B.2.3. Pohdintaan on tarkoituksella valittu sellainen epäyhtälö, jonka voi ratkaista monella eri tavalla. Ratkaistuaan tehtävän opiskelijoiden tulee verrata omaa ratkaisuaan kirjassa esitettyyn valmiiseen ratkaisuun. Kun vertaa omaa ratkaisua jonkun muun tekemään ratkaisuun, oppii huomaamaan, että tehtäviä voi ratkoa monella eri tavalla. Eri ratkaisutapojen näkeminen myös lisää opiskelijoiden intoa yrittää ratkaista hankalalta vaikuttavia tehtäviä sekä kasvattaa opiskelijoiden luottamusta heidän omiin matemaattisiin taitoihinsa [30].

Koska opiskelijoilla on tutkittu olevan vaikeuksia ymmärtää epäyhtälöiden ratkaisuja, jossa ei esiinny enää muuttujia [5], otettiin oppikirjaan pohdintatehtävä B.2.6. Pohdinnassa opiskelijoiden tulee miettiä, mitä tarkoittaa vastaukseksi saatu tosi epäyhtälö tai epätosi epäyhtälö?

Kappale "Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö" sisältää kaksi mallitehtävää. On tärkeää, että oppikirjassa on muutama esimerkkisuoritus, sillä niiden tehtävänä on mallintaa erilaisia toimintatapoja [27]. Ensimmäisessä mallitehtävässä on esitetty polynomiepäyhtälön ratkaisemisen lisäksi graafinen tulkinta sekä paljon murtolukuja ja termien tuloja. Tässä oppikirjan kappaleessa on mallitehtävä ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälön ratkaisusta sekä algebrallisesti että graafisesti, koska niiden välinen yhteys on hyvin tärkeä [21]. Tästä syystä jokaisen opiskelijan tulee tuntea niistä jokin ratkaisutapa. Lisäksi graafinen esitys toimii erinomaisena tarkistuskeinona [11], mikä on myös yksi syy graafisen ratkaisumallin mukaan ottamiseen.

2.2.2 Ratkaisujen tarkistaminen

Kuten edellä mainittiin, graafinen esitys on erinomainen tarkistuskeino [11]. GeoGebran avulla graafinen tarkistus sujuu helposti. Täten otin oppikirjaan pohdintatehtävän B.2.4, jossa opetellaan ratkaisemaan epäyhtälö GeoGebran avulla. Pohdintatehtävän tarkoituksena on näyttää opiskelijoille, että syöttäessä GeoGebraan epäyhtälön sellaisenaan, se antaa epäyhtälön ratkaisujoukon suoraan. Tämän avulla opiskelijat voivat helposti ja nopeasti tarkistaa algebrallisesti lasketut tehtävät.

Kokeilu on matematiikassa hyödyllinen tarkistuskeino, jonka olisi hyvä tulla esille myös epäyhtälöiden tapauksessa. Kokeilun ideaan johdatellaan pohdinnan B.2.7 avulla. Pohdinnassa tulee selvittää, mitkä kaksi ratkaisua annetuista kolmesta ratkaisusta ovat varmasti väärin ratkaisematta annettua epäyhtälöä. Opiskelijoiden on tarkoitus sijoittaa sopivia muuttujan arvoja epäyhtälöön ja päätellä väärät ratkaisut. Sen jälkeen opiskelijoiden tulee vielä miettiä, mitä voivat sanoa jäljelle jääneen ratkaisun oikeellisuudesta. Opiskelijoiden on tarkoitus huomata, että kokeilu ei kerro, onko vastaus välttämättä oikein. Pohdinnan tarkoituksena on opettaa opiskelijoille keino tarkistaa omia ratkaisujaan. Kokeilemalla voi helposti muun muassa tarkistaa, onko vastauksessa epäyhtälömerkin suunta oikein.

Kappaleen "Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö" lopussa huomautetaan vielä, että saatu vastaus kannattaa aina tarkistaa joko GeoGebraa hyväksi käyttäen tai kokeilemalla eri muuttujan arvoilla, jotta opiskelijoilla syntyisi rutiini tarkistaa laskemansa tehtävät. GeoGebran avulla on kätevä tarkistaa algebrallisesti lasketut tehtävät [6], ja kokeilemalla saa nopeasti viitteitä siitä, onko epäyhtälö ratkaistu oikein.

2.2.3 Kaksoisepäyhtälö

Toisessa tämän kappaleen mallitehtävässä B.2.8 on esimerkki kaksoisepäyhtälön ratkaisusta, jotta se tulisi tutuksi opiskelijoille. Tässä mallitehtävässä kaksoisepäyhtälö jaetaan kahdeksi epäyhtälöksi, jotka ratkaistaan erikseen, ja lopuksi tutkitaan, milloin epäyhtälöt ovat voimassa yhtä aikaa. Kaksoisepäyhtälön voi yksinkertaisessa tapauksessa ratkaista myös hajottamatta sitä osiin. Tätä tapaa ei kuitenkaan käydä omana mallitehtävänään, sillä sitä ei voi käyttää kaikissa tapauksissa. Kaksoisepäyhtälön ratkaiseminen kahdessa osassa on myös turvallisempaa, sillä tutkimuksen mukaan opiskelijoilla on hankaluuksia kirjoittaa kaksoisepäyhtälöitä oikein [5]. Kaksoisepäyhtälön ratkaiseminen operoimalla koko epäyhtälöä kerralla voi myös helposti sekoittaa, sillä siinä käsitellään montaa lauseketta yhtä aikaa. Harjoitustehtävissä on sanallinen yksinkertainen kaksoisepäyhtälötehtävä 8, jonka opiskelijat voivat ratkaista mallitehtävän esittämällä tavalla. Toki opettaja voi halutessaan ottaa tämän tehtävän yhteydessä myös toisen tavan esille, jos kokee sen tarpeelliseksi.

2.3 Toisen asteen polynomiepäyhtälö

Oppikirjan kappaleessa ”Toisen asteen polynomiepäyhtälö” opitaan ratkaisemaan toisen asteen polynomiepäyhtälöitä, analysoimaan valmiita ratkaisuja ja kehittämään itse epäyhtälöitä parille ratkaistavaksi. Toisen asteen polynomiepäyhtälöihin johdattelu aloitetaan graafisella pohdintatehtävällä B.3.1, jossa opiskelijoiden tulee etsiä funktioiden nollakohdat ja päätellä epäyhtälöiden ratkaisut piirretyistä kuvaajista. Koska opiskelijoiden on tutkittu ymmärtävän epäyhtälöiden ratkaisuja huonosti, otettiin mukaan mahdollisimman monipuolisesti erityyppisiä ratkaisuja [5]. Erityisesti c)-kohtaan valittiin sellainen epäyhtälö, jonka ratkaisuna on vain yksi piste, sillä opiskelijoilla on todettu olevan vaikeuksia tätä muotoa olevien epäyhtälöiden ratkaisussa. Esimerkiksi Tsamirin ja Bazzinin tekemässä tutkimuksessa *Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities* puolet tutkimukseen osallistuneista oli sitä mieltä, ettei yksi piste voi olla epäyhtälön ratkaisu. Osallistujat perustelivat vastaustaan väittämällä, että epäyhtälön ratkaisun täytyy olla joukko tai epäyhtälö. Tutkimuksesta kävi myös ilmi, että opiskelijat luulivat ainoastaan nollan voivan olla epäyhtälön ainoa yksittäisratkaisu, eli esimerkiksi ratkaisu $x = 3$ ei voisi olla epäyhtälön ratkaisu. Tämän takia valitsin harjoitustehtäviin ratkaistavaksi epäyhtälön, jonka ratkaisuksi tulee $x = -5$. [32]

Kappaleen toisessa pohdintatehtävässä B.3.2 opiskelijoiden tulee miettiä toisen asteen epäyhtälön ratkaisua käyttäen hyväksi edellistä pohdintaa. Tämä on hyvin avoin pohdintatehtävä, mutta avoimien tutkimustehtävien on todettu kehittävän opiskelijoiden oppimista ja heidän ongelmanratkaisukykyään paremmin kuin mekaanisten tehtävien [4].

”Etsi virhe ja korjaa” -tehtävä B.3.3 näyttää opiskelijoille virheellisen sekä oikeaoppisen toisen asteen polynomiepäyhtälön ratkaisun. Ensimmäisessä kohdassa on esitetty tavallinen virhe ratkaistaessa epäyhtälöitä [31]. Epäyhtälö yritetään usein ratkaista samalla tavalla kuin yhtälö – ottamalla neliöjuuri puolittain [31]. Toisessa kohdassa epäyhtälö on ratkaistu oikein, ja se toimiikin mallitehtävänä, jota tässä kappaleessa ei erikseen ole. Jotta toisen asteen ratkaisuvaiheet on varmasti ymmärretty, tulee opiskelijoiden koota ne vielä itselleen muistiin pohdintatehtävässä B.3.4.

Tämän kappaleen viimeisessä pohdinnassa opiskelijat keksivät toisilleen toistensa asteen epäyhtälöt ratkaistavaksi. Lopuksi opiskelijat myös tarkistavat toisten laskemat tehtävät. Tässä tehtävässä opiskelijat pääsevät miettimään epäyhtälön ratkaisua ikään kuin käänteisesti: millainen epäyhtälön tulee olla, kun sillä on yksi tai useampi ratkaisu. Tämä tehtävä kehittää opiskelijoiden vaikeaksi kokemaa epäyhtälöiden ratkaisujen ymmärtämistä [5].

2.4 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

Kappaleessa ”Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö” opitaan ratkaisemaan korkeamman asteen epäyhtälöitä graafisesti ja merkkikaavion avulla käyttämällä hyväksi tekijöitä ja testipisteitä. Jotta tämä oppikirjan osio olisi yhtenäinen, lähdetään myös korkeamman asteen polynomiepäyhtälöissä liikkeelle graafisesti – vastaavalla tehtävällä kuin edellisessä kappaleessa. Tehtävän loppuun lisättiin vielä kysymys: ”Muuttuuko antamasi vastaukset, jos polynomifunktiolla voi olla nollakohtia myös kuvien ulkopuolella?”. Kysymyksellä pyritään ohjaamaan opiskelijoiden ajattelua korkeamman asteen polynomifunktioiden käyttäytymiseen.

2.4.1 Merkkikaaviomenetelmä tekijöiden avulla

Graafisen pohdinnan jälkeen lähestytään korkeamman asteen epäyhtälöiden ratkaisua ja ratkaisussa apuna käytettävää merkkikaaviota, tutkimalla ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajia. Tähän menetelmään johdateltiin jo hieman edellisen kappaleen viimeisessä harjoitustehtävässä 16. Menetelmän idea on Weinholdin artikkelista *Power Tools for Teaching Mathematics*. Artikkelin kirjoittaja, Weinhold, on ollut 17 vuotta matematiikan opettajana lukiossa ja tutkinut kuinka oppilaat oppivat matematiikkaa. [37]

Artikkelissaan Weinhold kertoo erään havainnollisen tavan lähestyä korkeamman asteen polynomeja kertomalla suoria keskenään. Menetelmää testanneiden tulevien matematiikan opettajien mukaan koordinaatistoon piirrettyjen suorien avulla on hyvin helppo päätellä, missä tulofunktio saa positiivisia tai negatiivisia arvoja. Tästä sainkin idean käyttää tätä menetelmää johdatellessa opiskelijoita merkkikaavion tekemiseen korkeamman asteen epäyhtälöiden tapauksessa. Weinhold toteaakin artikkelin lopussa, että tämän tyyppistä menetelmää käyttämällä voidaan saavuttaa syvä ymmärrys myös epäyhtälöistä. Tutkimalla suorien kuvaajien merkkejä ja päättelemällä niiden avulla tulofunktion kulku suoritetaan käytännössä sama asia kuin merkkikaaviota tehdessä. Tämän takia tämä menetelmä sopiikin erinomaisesti merkkikaavion yhteyteen. [37]

Pohdintatehtävässä B.4.2 on tarkasteltavana kolme suoraa. Opiskelijat ovat jo edellisen osion harjoitustehtävässä pohtineet, milloin suorista muodostuva tulofunktio saa arvon nolla. Nyt opiskelijoiden tehtävänä on tutkia suorien ja suorista muodostuvan tulofunktion saamien arvojen merkkejä nollakohtien ympäristöissä ja täydentää taulukko, joka on merkkikaavio. Tämän pohdintatehtävän avulla opiskelijat oppivat melkein huomaamattaan merkkikaavion idean. Seuraavan pohdinnan B.4.3 avulla harjoitellaan vielä lisää merkkikaavion muodostamista. Oppikirjassa on mukana myös mallitehtävä havainnollistamassa tekijöiden avulla muodostettavan merkkikaavion käyttöä korkeamman asteen polynomiepäyhtälön ratkaisussa. Kappaleen lopussa on paritehtävä B.4.9, jossa molempien pitää kehitellä tehtävänannon mukainen korkeamman asteen epäyhtälö ja antaa se parille tarkistettavaksi. Tässä voi käyttää samaa periaatetta kuin ensimmäisissä pohdintatehtävissä, mutta käänteisesti: hahmotellaan ensin sellainen käyrä, jolla on tarvittavat nollakohdat, ja mietitään sen jälkeen, millaisia tulee käyrän tekijöiden olla. Näin saadaan muodostettua tarvittava epäyhtälö.

Tähän oppikirjaan korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden ratkaisumenetelmäksi valikoitui juuri tekijöiden avulla muodostettava merkkikaavio, sillä se on hyödyllinen tekniikka epäyhtälöiden ratkaisussa [10]. Se tarjoaa yhdenmukaisen ja helpon menetelmän jopa vaativampienkin epäyhtälöiden ratkaisuun [10]. Muita oppikirjoja tarkastelemalla selvisi myös, että tekijöiden avulla muodostettava merkkikaavio on yleisimmin käytetty menetelmä korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden yhteydessä [19], [20], [15], [17]. Esimerkiksi oppikirjoissa *Pyramidi 2* [20] ja *Calculus 1* [17] tekijöiden avulla muodostettava merkkikaavio oli ainoa menetelmä korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden opetuksessa.

2.4.2 Merkkikaaviomenetelmä testipisteiden avulla

Koska usean ratkaisumenetelmän on todettu tehostavan oppimista [5], otin kappaleeseen mukaan mallitehtävän B.4.6 korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden ratkaisemisesta testipisteiden avulla. Tätä varten kirjaan otettiin Boltzanon lause, jonka mukaan polynomifunktio voi vaihtaa merkkinsä vain nollakohdissaan. Tämä tulos liittyy oleellisesti testipistemenetelmään, sillä sen nojalla riittää, että laskee funktion arvo vain yhdessä pisteessä jokaiselta nollakohtien rajaamalta väliltä. Näin saadaan selville funktion arvojen etumerkit, ja epäyhtälön ratkaisu nähdään kokoamalla tulokset merkkikaavioon. Tämä menetelmä on erityisen hyvä, jos polynomifunktio on hankala jakaa tekijöihin.

2.4.3 Erikoistapaukset

Kirjan kappaleeseen ”Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö” otettiin mukaan vielä kolmas mallitehtävä B.4.7, jossa esitetään sellaisen korkeamman asteen polynomiepäyhtälön ratkaisu, mistä puuttuu paritonta astetta olevat termit. Tällaisen bikvadraattisen epäyhtälön ratkaisu on tärkeä näyttää opiskelijoille, sillä se voidaan sijoituksen avulla muuntaa alempaa astetta olevaksi epäyhtälöksi. Tässä tapauksessa neljännen asteen polynomiepäyhtälöstä saadaan toisen asteen polynomiepäyhtälö. Tässä kappaleessa esiintyvien mallitehtävien loppuun on otettu mukaan graafiset tarkistukset, jotta opiskelijat oppivat tarkistamaan lasketut tehtävät vielä esimerkiksi GeoGebralla.

Opiskelijoilla on tutkittu olevan hankaluuksia ymmärtää, että epäyhtälöllä voi olla vain yksi ratkaisu. Siksi mukaan otettiin pohdintatehtävä B.4.8. Pohdintatehtävässä tulee perustella ratkaisun muuttumista, kun tehtävässä esiintyvää kerrointa ja eksponenttia vaihdetaan. Tsamirin ja Bazzinin artikkelin mukaan tämän tyyppinen tehtävä voi olla haastava opiskelijoille. Samalla se tarjoaa mahdollisuuden lähestyä matematiikkaa yleisemmällä tasolla ja palauttaa mieleen aiemmin opittuja asioita. Annetut vastaukset tulee perustella, sillä perusteluiden on todettu parantavan muotoa $ax^{2n} \leq 0$ ($a > 0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) olevien epäyhtälöiden oppimista. [32]

2.5 Oppimateriaaliosan harjoitustehtävät

Tässä alaluvussa esitellään harjoitustehtävissä yleisimmin esiintyvät tyypit ja perustellaan niiden käyttöä tässä oppikirjan osassa. Oppimateriaaliosan neljän suuremman kappaleen lopussa on niihin liittyvät harjoitustehtävät, joita on tarkoitus antaa kotitehtäväksi tai laskea tunnilla, mikäli pohdintatehtäviltä jää aikaa. Jokaiseen kappaleeseen liittyy noin viisi tehtävää. Tehtäviä ei siis ole paljon, mutta ne on valittu huolella ja tarkoitus on, että kaikki tehdään. Lisäksi oppimateriaaliosan lopussa on lisätehtävät, joissa on neljä kertaavaa tehtävää epäyhtälöistä. Sekä harjoitus- että lisätehtävissä on vaikeaksi koettuja sanallisia tehtäviä, todistustehtäviä ja maltillisesti mekaanisia laskutehtäviä. Myös muita tehtävätyyppejä esiintyy. Esimerkiksi graafisesti ratkaistavia tehtäviä on jokaisen kappaleen tehtävissä ja lisäksi lisätehtävissä. Tehtävät on kehitetty niin, että aiempia tietoja pitää käyttää hyväksi. Tehtäviä tehdessään opiskelijat joutuvat muistelemaan muun muassa geometriaa, polynomien laskusääntöjä, muistikaavoja, yhtälöpareja, potenssien laskusääntöjä, aritmeettista jonoa ja summaa sekä yksikkömuunnoksia. Tehtävissä on myös hyödynnetty jonkin verran ylioppilastehtäviä, jotta opiskelijat näkevät minkä tyyppisiä ja tasoisia tehtäviä ylioppilaskirjoituksissa on aikaisemmin ollut. Ylioppilastehtävät voivat toimia myös motivoivina tekijöinä, kun opiskelijat huomaavat, että he osaavat jo laskea niitä. Seuraavaksi perustellaan tarkemmin oppikirjaosaan valittuja tehtävätyyppejä.

2.5.1 Sanalliset tehtävät

Turun matikkamaan julkaisussa perustellaan sanallisten tehtävien käyttöä sillä, että ne opettavat opiskelijoille tulevaisuuden kannalta tärkeitä ongelmanratkaisutaitoja ja niiden avulla on mahdollista yhdistää koulumatematiikka käytäntöön. Julkaisussa mainitaan myös, että sanalliset tehtävät voivat edesauttaa soveltavammissa tilanteissa vaadittavien matemaattisten taitojen kehittymistä. Parhaillaan sanalliset tehtävät voivat myös kasvattaa opiskelijoiden motivaatiota matematiikkaa kohtaan. [33]

Julkaisun mukaan nämä kaikki edellä mainitut oppimistavoitteet eivät kuitenkaan aina valitettavasti toteudu sanallisten tehtävien kohdalla, vaan ne voidaan kokea jopa pelätyiksi tai inhotuiksi tehtäviksi. Tähän halusin kiinnittää erityistä huomiota valitsemalla sanallisiksi tehtäviksi monipuolisia ja opiskelijoiden näkökulmasta mahdollisimman mielekkäitä tehtäviä. Julkaisun mukaan oppikirjoissa esiintyvien sanallisten tehtävien tarkoitus jää usein vain operaatioiden mekaanisen suorittamisen tasolle. Tämä on opettanut opiskelijat poimimaan tehtävistä vain tarvittavat luvut ja suorittamaan niillä operaatio, jota ollaan juuri harjoiteltu. Tämän takia lisäsin tehtäviin hieman vaikeampia sanallisia tehtäviä, jotka eivät ole pelkkää lukujen poimimista tai mekaanista laskemista. [33]

Sanallisten tehtävien ratkaisussa on tärkeää hahmottaa tilanne itselle ja siitä kannattaa piirtää esimerkiksi kuva, sillä kuvan piirtämisestä on todettu olevan hyötyä sanallisten tehtävien ratkaisussa [22]. Visuaalinen esitys auttaa ongelman ratkaisussa ja sen ymmärtämisessä [25]. Turun Matikkamaan julkaisussa Akatemiaprofessori Erno Lehtinen painottaa, että sanallisissa tehtävissä laatu korvaa määrän [33]. Syvällinen ongelmanratkaisukyky ei kehity monella mekaanisella sanallisella tehtävällä, vaan siihen riittää muutama haastavampi sanallinen tehtävä, joiden ratkaisuun keskitytään kunnolla [33]. Tästä syystä joka kappaleessa on vain korkeintaan kaksi sanallista tehtävää.

Tämän oppikirjan osan sanallisissa tehtävissä opiskelijat pääsevät muodostamaan epäyhtälöitä arjesta tuttuihin asioihin, kuten jäätelönmyyntiin, auton ostamiseen ja aitauksien rakentamiseen liittyen. Sanallisten tehtävien avulla opiskelijat oppivat muodostamaan sanallisista ilmaisuista (”korkeintaan”, ”vähintään”, ”ainakin”, ”suurempi kuin”) epäyhtälöitä. Tämä matemaattisen kielen ymmärrys on hyvin tärkeää; onhan se huomioitu matematiikan pitkän oppimäärän opetussuunnitelman tavoitteissa [23]. Samalla opiskelijat oppivat myös käyttämään epäyhtälöitä työkaluna matemaattisten ongelmien ratkaisussa.

2.5.2 Todistustehtävät

Miltei joka kappaleen tehtävissä on yksi todistustehtävä. Myös lisätehtävistä löytyy yksi todistustehtävä, sillä mielestäni opiskelijoiden on erittäin tärkeää oppia tekemään todistustehtäviä jo lukion ensimmäisistä kursseista lähtien. Andreas J. Stylianidesen artikkelissa *The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics* matemaattisia todistuksia luonnehditaan matemaattisen ymmärryksen perustaksi, joka on välttämätöntä matemaattiselle kehitykselle, tekemiselle ja kommunikoinnille. Artikkelin mukaan matemaattisia todistuksia tulisi sisällyttää jo peruskouluun, sillä peruskoulussa keskitytään pitkälti käsitteisiin ja laskemiseen, jolloin peruskoulusta päästyään oppilaat eivät kykene ymmärtämään tai kirjoittamaan todistuksia. [29]

Erityisesti tässä oppikirjan osassa on hyvä olla mukana todistustehtäviä, sillä on kyse pitkästä matematiikasta, jonka opetuksen tavoitteeksi opetushallitus on asettanut muun muassa: ”ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä” [23, s. 131]. Matemaattiset todistukset ovat osa matemaattista kieltä, ja näin ollen opiskelijoiden tulisi hallita todistusten periaate lukion jälkeen. Siksi todistustehtäviä tuleekin sisällyttää opetukseen heti lukion alusta lähtien.

2.5.3 Mekaaniset tehtävät

Matematiikan opetuksessa tähdätään sekä laskutaitojen hankkimiseen että ymmärtämiseen, joista kumpikaan ei yksin riitä [14]. Tehtävissäkin tulee siis ottaa huomioon sekä laskutaitojen opettelu että ymmärtäminen. Tämän oppikirjan pohdintatehtävät ovat ongelmalähtöisiä ja tähtäävät ymmärtämiseen, joten niiden lisäksi tehtävissä tulee olla myös laskutaitoja kehittäviä mekaanisia tehtäviä. Mekaanisten laskutehtävien avulla voidaan myös saavuttaa laskurutiini, jota opiskelijat tulevat todennäköisesti tarvitsemaan jatko-opinnoissaan.

Tässä oppikirjan osassa mekaanisia tehtäviä on yleensä sijoitettu aina harjoitusten alkuosaan, jotta niiden avulla päästäisiin alkuun tehtävien tekemisessä. Osassa laskutehtäviä lisähankaluutta on tuomassa jokin tuntematon vakio (Tehtävät 10, 13 b) ja 20). Vaikka tuntemattomat kirjaimet tehtävissä on todettu vaikeiksi [5], eivät tehtävät ole yleensä niin haastavia, miltä näyttävät, kun osaa olla välittämättä liikaa tuntemattomasta kirjaimesta.

Lähdeluettelo

[1] Askew M., & Wiliam D. (1995) Recent Research in Mathematics Education 5–16. Ofsted Reviews of Research. London: HMSO.

[2] Barron, B., & Darling-Hammond, L. (2008). Teaching for Meaningful Learning: A Review of Research on Inquiry-Based and Cooperative Learning. Book Excerpt. *George Lucas Educational Foundation*.

[3] Bicer, A., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2014). Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings. International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

[4] Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for research in mathematics education*, 41-62.

[5] Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education 3*(3), 221-229.

[6] Caglayan, G. (2014). Static Versus Dynamic Disposition: The Role of GeoGebra in Representing Polynomial-Rational Inequalities and Exponential-Logarithmic Functions. *Computers in the Schools, 31*(4), 339-370.

[7] Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999) Teaching and Learning Mathematics With Understanding. *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*, 19-32.

[8] Cuoco, A., Coldenberg, E.P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

[9] Digabi. (2014). Ohjelmistot, <https://digabi.fi/tekniikka/ohjelmistot/>, luettu 10.8.2016

[10] Dobbs, D. E., & Peterson, J. C. (1991). The sign-chart method for solving inequalities. The Mathematics Teacher, 84(8), 657-664.

[11] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. *The nature of mathematical thinking*, 253-284.

[12] El-khateeb, M. (2016). Errors Analysis of Solving Linear Inequalities among the Preparatory Year Students at King Saud University. *Journal of Education and Practice, 7*(12), 124-133.

[13] Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental psychology, 48*(5), 1229.

[14] Hakkarainen, K., Bolsström-Huttunen, M., Pyysalo, R., & Lonka, K. (2005) Matkaopas opettajjille. Tutkiva oppiminen käytännössä. Helsinki: WSOY.

[15] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinolli, T., & Sankilampi, T. (2005). Matematiikan taito 1-2. *Porvoo: WSOY*.

[16] Hohenwarter, J. & Hohenwarter, M. (2010). GeoGebra-opas. Virallinen käsikirja 3.2. Suomentanut Hinkula, T., H. Korhonen, J. Leino & K. Malinen. <https://app.geogebra.org/help/docufi.pdf>, luettu 10.8.2016

[17] Jäppinen, P., Kupiainen, A., & Räsänen, M. (2008). Calculus 1. *Keuruu: Otava*.

[18] Kagan, S & Kagan, M. (2002) Rakenteellinen lähestymistapa. Teoksessa P.Sahlberg & S. Sharan (toim.) Yhteistoiminnallisen oppimisen käsikirja (24–47). *Helsinki: WSOY*.

[19] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., & Tahvanainen, J. (2004). Pitkä matematiikka: Polynomifunktiot. *Porvoo: WSOY*.

[20] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A., & Savolainen, S. (2005). Pyramidi 2: Polynomifunktiot. *Vammala: Tammi*.

[21] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

[22] Mäcklin, J., & Nikula, M. (2010). Matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen matemaattisen ongelman ratkaisuvälineenä. Pro gradu -tutkielma. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tampereen yliopisto.

[23] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus.

[24] Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus.

[25] Polya, G. (1957). How to solve it? *A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

[26] Repo, I., & Nuutinen, T. (2003). Viestintätaito. Helsinki: Otava.

[27] Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149-163.

[28] Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A Picture is Worth a 1000 Words - The Role of Visualization in Mathematics Learning. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 457-464.

[29] Stylianides A.J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

[30] Swan, M. (2005). Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies. *Department for Education and Skills Standards Unit*.

[31] Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524.

[32] Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solution to algebraic 'single-value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(6), 793-812.

[33] Turun Matikkamaa. (2013). Matematiikan sanalliset tehtävät - Tehtävän ymmärrys.

[34] Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on student performance on, understanding of, linear equations and linear inequalities. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 113-147.

[35] Van Til, Cita T. and others. (1997). Problem-based Learning Behavior: The Impact of Differences in Problem-Based Learning Style and Activity on Students' Achievement. *ERIC*

[36] Vanhanen, Outi (2006). Yhteistoiminnallinen opetuspaketti lukion pitkän matematiikan Polynomifunktiot-kurssilla käytettäväksi. Pro gradu -tutkielma. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Helsingin yliopisto.

[37] Weinhold M.W. (2008). Designer Functions: Power Tools for Teaching Mathematics. *The Mathematics Teacher, 102*(1), 28-33.

A Opettajan opas

Tähän oppaaseen on koottu ajankäyttösuunnitelma, kunkin kappaleen tärkeimmät tavoitteet ja vinkkejä oppikirjassa esintyviin pohdintatehtäviin sekä niiden käsittelyyn oppitunnilla.

A.1 Ajankäyttösuunnitelma

Alla on esitetty suunnitelma siitä, kuinka kauan aikaa tulisi käyttää mihinkin aiheeseen. Tuntijako on tehty 45 minuutin oppitunneille. Huomaa, että suunnitelma on vain suuntaa-antava.

Epäyhtälöiden peruskäsitteitä	1 (h)
Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö	1-2 (h)
Toisen asteen polynomiepäyhtälö	1 (h)
Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö	1-2 (h)

A.2 Pohdintatehtävät

Tässä osiossa luetellaan kappaleittain jokaisen aihealueen tärkeimmät tavoitteet ja kerrotaan tarkemmin oppikirjan pohdintatehtävistä. Pohdintatehtävistä käydään läpi niiden opetukselliset tavoitteet ja oikeat ratkaisut. Lisäksi annetaan vinkkejä niiden käsittelyyn oppitunnilla ja ideoita mahdolliseen eriyttämiseen. Kaikki pohdintatehtävät on tarkoitettu tehtäväksi ilman teknisiä apuvälineitä, ellei toisin mainita. Suurin osa pohdintatehtävistä on suositeltavaa tehdä yhdessä parin kanssa. Pohdintatehtävien ratkaisut kannattaa myös käydä yhteisesti läpi väärinymmärrysten välttämämiseksi.

A.2.1 Epäyhtälöiden peruskäsitteitä

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija

- oppii, mikä epäyhtälö on
- tietää, miten sen ratkaisujoukot voidaan merkitä
- tutustuu ensimmäisen asteen epäyhtälön graafiseen ratkaisuun, jota syvennetään vielä seuraavassa kappaleessa.

Esimerkki B.1.3

Tässä esimerkissä esitellään muutamia malleja ei-epäyhtälöistä. On tärkeää, että opiskelijat ymmärtävät, miksi ne eivät ole epäyhtälöitä ja tästä syystä tehtävät tulee käydä yhteisesti läpi. Alla on esitetty perustelut, miksi ne eivät ole epäyhtälöitä (ks. epäyhtälön määritelmä):

a) Tämä ei ole epäyhtälö (ei esiinny epäyhtälömerkkiä), vaan yhtälö. Tarkemmin suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on luku 2 ja joka leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -9)$.

b) Kyseessä yhtälö, jossa kaksi lukua on asetettu yhtäsuuriksi.

c) Tämä ei ole puhdas epäyhtälö, sillä tässä esiintyy sekä yhtä kuin -merkki että epäyhtälömerkki. Tässä yhtälön saamaa arvoa verrataan lukuun nolla. Jos tämä ei-epäyhtälö jaettaisiin osiin, saataisiin $2 + 4 = 6$, joka on yhtälö ja $6 > 0$, joka on epäyhtälö.

d) Kyseessä pelkkä lauseke.

Pohdinta B.1.4

Tässä pohdinnassa tutustutaan epäyhtälöiden ominaisuuksiin.

a) Jos $a < b$ ja $b < c$, niin varmasti $a < c$. Kyseessä on transitiivisuus, joka on tärkeä ominaisuus käsiteltäessä epäyhtälöitä.

b) Tämän kohdan tarkoituksena on tuoda esille epäyhtälömerkkien eroja. Jos tiedetään, että $a < b$ on epätosi, niin väitelause $a \geq b$ on varmasti tosi. Väitelause $a > b$ ei välttämättä ole tosi, sillä a voi olla myös yhtäsuuri kuin b.

Pohdinta B.1.5

- Tarkoituksena johdattaa opiskelijat epäyhtälöiden graafiseen ratkaisuun ja samalla havainnollistaa epäyhtälön ratkaisujen lukumäärää, joita on kaikissa tapauksissa äärettömän monta (myös c)-kohdassa).
- Tehtävässä tulee olla tarkkana sanamuotojen kanssa, sillä esimerkiksi c)-kohdassa kysytään, milloin sekä $f(x)$ että $g(x)$ saavat aidosti nollaa pienempiä arvoja eli milloin molemmat ovat yhtä aikaa x-akselin alapuolella.
- Lisätehtäviä kaipaaville voi b)-kohdassa antaa tehtäväksi myös pohtia, milloin $f(x) \geq 0$ ja milloin $g(x) \leq 0$ tai milloin $f(x) < g(x)$.

Vastaus: a) $x = 2$ ja $x = -7$

b) $x < 2$, $x < -7$ ja $x > -1$. Ratkaisuja ääretön määrä.

c) $-7 < x < 2$. Ratkaisuja ääretön määrä.

A.2.2 Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija

- oppii ratkaisemaan ensimmäisen asteen epäyhtälön algebrallisesti

- ymmärtää, mistä johtuu epäyhtälömerkin kääntyminen negatiivisella luvulla kerrottaessa tai jaettaessa
- osaa tulkita epäyhtälön ratkaisua, kun vastauksessa ei enää esiinny muuttujia
- osaa ratkaista yksinkertaisen kaksoisepäyhtälön.

Pohdinta B.2.1

Pohdinnassa on problematisoitu ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälön ratkaisu. Siinä on esitetty sekä algebrallinen että graafinen ratkaisu, jotka ovat ristiriidassa keskenään.

Mitä huomaat?

- Algebrallinen ratkaisu väärin.
- Virheen täytyy johtua -2:lla jakamisesta.
- Algebrallisessa ratkaisussa epäyhtälömerkki tulee kääntää.

Miten selität tämän?

- Graafinen ratkaisu on oikein, joten virhe täytyy olla algebrallisessa ratkaisussa.
- Jotta saadaan yhtenevät ratkaisut, epäyhtälömerkki tulee kääntää jaettaessa luvulla -2.

Jos aikaa, voi antaa lisätehtäväksi pohtia, pystyykö epäyhtälön ratkaista algebrallisesti eri tavalla ja miten mahdollinen ratkaisu eroaa kirjassa esitetystä tavasta. Toinen mahdollinen algebrallinen ratkaisutapa olisi lähteä liikkeelle lisäämällä molemmille puolille termi $2x$, jolloin ei tule negatiivisella luvulla jakamisen ongelmaa.

Pohdinta B.2.2

Pohdinnan tavoitteena on opiskelijoille käyvän ilmi, että

- lisättäessä tai vähennettäessä sama luku epäyhtälön molemmilta puolilta, epäyhtälön ratkaisu säilyy (tosi epäyhtälö pysyy totena ja epätosi epäyhtälö epätotena)
- kerrottaessa tai jaettaessa epäyhtälön molemmat puolet samalla positiivisella luvulla, epäyhtälön ratkaisu säilyy (tosi epäyhtälö pysyy totena ja epätosi epäyhtälö epätotena)
- negatiivisella luvulla kerrottaessa tai jaettaessa epäyhtälön ratkaisu ei säily (tosi epäyhtälö muuttuu epätodeksi ja epätosi todeksi).
- nollalla kerrottaessa epäyhtälön ratkaisu ei välttämättä säily.

Tämän yhteydessä kannattaa vinkata opiskelijoille kappaleen lopusta löytyvästä yhteenvedosta, johon on koottu tämän pohdintatehtävän johtopäätökset eli mitä toimenpiteitä saa tehdä muokatessa epäyhtälöitä.

Olisi hyvä myös yhdistää tämä pohdinta edeltävään pohdintatehtävään, koska siten voidaan ymmärtää, miksi epäyhtälömerkki kääntyy jaettaessa negatiivisella luvulla.

Pohdinta B.2.3

Pohdinnan tavoitteena on, että opiskelijat oppivat

- ratkomaan ensimmäisen asteen yhtälöitä ja huomaavat, että sen voi tehdä monella eri tavalla
- analysoimaan omia ratkaisujaan ja vertaamaan niitä toiseen mahdolliseen ratkaisutapaan.

Pohdinta B.2.4

Pohdinnan tavoitteena on, että opiskelijat oppivat ratkomaan epäyhtälöitä graafisesti GeoGebralla. Tarkoituksena olisi, että opiskelijat huomaavat GeoGebran näyttävän epäyhtälön ratkaisujoukon suoraan syöttäessä epäyhtälön lausekkeen kokonaisena (GeoGebra värjää tason). Tämä on esimerkiksi kätevä tapa tarkistaa algebrallisesti laskettuja tehtäviä.

Vastaus: $x > 4$.

Pohdinta B.2.6

Tämän pohdinnan ideana on, että epäyhtälön ratkaisussa päädytään tilanteeseen, jossa muuttujat ovat hävinneet ja opiskelijoiden tulee osata päätellä, mikä on tällöin epäyhtälön ratkaisu.

Vastaus:

a) Päädytään tilanteeseen, joka on aina tosi, joten epäyhtälö on voimassa kaikilla r:n arvoilla eli $r \in \mathbb{R}$.

b) Päädytään tilanteeseen, joka on epätosi, joten epäyhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvoilla eli epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

Pohdinta B.2.7

Pohdinnan tavoitteena on oppia, että epäyhtälön vastauksen oikeellisuutta voi tarkastella kokeilemalla. Pohdintatehtävän on myös tarkoitus tuoda esille, että kokeileminen ei kerro, onko vastaus välttämättä oikein. Opiskelijoita voi ohjeistaa piirtämään ratkaisut lukusuoralle, jonka avulla voi olla helpompi hahmottaa, mitä tulisi tehdä. Opiskelijoita voi myös ohjeistaa esimerkiksi seuraavien kysymysten avulla:

- Millä tavalla pystyt eliminoimaan vääriä ratkaisuja ratkaisematta epäyhtälöä?
- Millaiset luvut kannattaa valita kokeiluun?
- Mistä tiedät kokeillessasi jollain luvulla, onko epäyhtälö ratkaistu oikein? (Vihje: edellinen pohdintatehtävä).

Vastaus: Oivan ja Jasperin saamat vastaukset ovat varmasti väärin. Minjan vastausta ei voida kokeilemalla osoittaa vääräksi. Vastauksen oikeaksi osoittaminen vaatii epäyhtälön ratkaisemista.

A.2.3 Toisen asteen polynomiepäyhtälö

Tämän kappaleen tavoitteena, että opiskelija oppii

- ratkaisemaan toisen asteen polynomiepäyhtälöitä
- analysoimaan valmiita ratkaisuja
- kehittämään itse epäyhtälöitä parille ratkaistavaksi.

Pohdinta B.3.1

- Pohdinnan tarkoituksena johdattaa opiskelijat toisen asteen epäyhtälöiden graafiseen ratkaisuun. Pitäisi onnistua opiskelijoilta, koska he osaavat jo ratkaista ensimmäisen asteen epäyhtälöitä graafisesti.
- c)-kohta on hieman haastavampi, sillä $f(x) < 0$ toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla paitsi, kun $x = 0$ ja $f(x) \geq 0$ toteutuu ainoastaan, kun $x = 0$.
- d)-kohdassa nollakohtia ei voi päätellä pelkästä kuvasta, vaan ne pitää laskea annetun paraabelin yhtälön avulla.

Vastaus:

	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$
(a)	$0 < x < 2$	$x \leq 0$ tai $x \geq 2$
(b)	ei ratkaisua	$x \in \mathbb{R}$
(c)	$x \neq 0$	$x = 0$
(d)	$x < -\sqrt{2}$ tai $x > \sqrt{2}$	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Pohdinta B.3.2

- Tämän pohdintatehtävän tavoitteena on saada opiskelijat kehittämään tapa, jolla ratkaista toisen asteen epäyhtälö.
- Tämä on hyvin avoin pohdintatehtävä, joten opiskelijat kaipaavat opettajalta varmasti jonkin verran ohjeistusta (ks. alapuolelta).
- Tarkoituksena tehdä ilman teknisiä apuvälineitä. Toki teknisillä apuvälineillä voi tarkistaa tehtävän.
- Tarkoituksena, että opiskelijat ymmärtäisivät edellisen pohdinnan perusteella lähteä liikkeelle nollakohdista. Niihin he pääsevät kiinni muokkaamalla epäyhtälön sellaiseen muotoon, jossa toisella puolella esiintyy nolla. Tämän jälkeen he pystyvät hahmottelemaan funktion kuvaajan, josta voivat päätellä vastauksen. Funktion kuvaajan hahmottelulla tarkoitetaan, että piirroksesta näkee funktion nollakohdat ja aukeamissuunnan.

- Toinen tapa, joka opiskelijoilla voi tulla mieleen, on piirtää epäyhtälömerkin molemmilla puolilla olevien lausekkeiden kuvaajat ja päätellä niiden avulla epäyhtälön ratkaisu. (Tarvitsee teknisiä apuvälineitä?)

- Nopeimmille opiskelijoille voi antaa pohdittavaksi, keksivätkö he useampaa tapaa ratkaista tehtävää.

- Jos opiskelijat eivät pääse alkuun, heitä voi opastaa kysymällä esimerkiksi:

  1. Minkä perusteella ratkaisit edellisessä pohdinnassa epäyhtälöt? (Kuvaajan, nollakohtien.)
  2. Mihin kuvaajassa kiinnitit huomiota, kun ratkaisit epäyhtälöitä graafisesti? (Nollakohtiin.)
  3. Mitä sinun täytyy tehdä epäyhtälölle $x^2 + 2 \leq 6x$, jotta saat selville kyseisen funktion nollakohdat? (Siirtää kaikki termit samalle puolelle ja vaihtaa epäyhtälömerkin tilalle on yhtä kuin -merkki.)
  4. Miten päättelet vastauksen? (Vastauksen voi päätellä suoraan hahmotellusta kuvaajasta.)

Vastaus: $3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}$.

Pohdinta B.3.3

Pohdinnan tarkoituksena on opettaa valmiiden ratkaisujen kriittistä arviointia ja niiden perustelemista.

Vastaus: a) Ratkaistu väärin - ihan kuin kyseessä olisi yhtälö. Tämä on hyvin yleinen virhe ratkaistaessa epäyhtälöitä, joten tehtävä kannattaa käydä huolella läpi opiskelijoiden kanssa. Tämän tehtävän tarkoituksena on toimia esimerkkinä, kuinka ei tule laskea toisen asteen polynomiepäyhtälöitä.

Ohjatessa opiskelijoita heille voi esittää johdattelevia kysymyksiä, kuten mitä a)-kohdassa saatu epäyhtälön ratkaisu $x > \pm 1$ tarkoittaa?

Tehtävän oikea ratkaisu: Sievennetään epäyhtälö muotoon

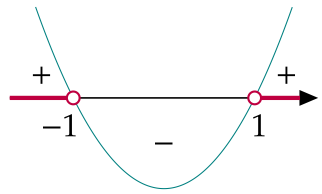
$$x^2 - 1 > 0$$

Ratkaistaan nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} (x-1) = 0 & \text{tai} & (x+1) = 0 \\ x = 1 & \text{tai} & x = -1 \end{array}$$

Hahmotellaan kuvaaja



Kuvaajasta nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

b) Oikein ratkaistu, käy mallitehtävästä.

Pohdinta B.3.4

Tämän pohdintatehtävän tarkoituksena on vielä selventää opiskelijoille, mitä toisen asteen epäyhtälön ratkaisussa on tehtävä. Vastaus voisi olla esimerkiksi seuraavanlainen:

1. Muunnetaan epäyhtälö muotoon, jossa lauseketta verrataan nollaan.
2. Ratkaistaan funktion nollakohdat.
3. Hahmotellaan funktion kuvaajan aukeamissuunta ja merkitään kuvaajaan funktion nollakohdat.
4. Päätellään hahmotellusta kuvaajasta epäyhtälön ratkaisu.

Nämä on syytä tuoda opiskelijoille selkeästi esille ja kertoa, mitä ratkaisuvaiheita tulee näkyä kokeessa.

Pohdinta B.3.5

- Pohdinnan tarkoituksena on päästää opiskelijat itse keksimään epäyhtälö (ei ottaa valmista kirjan tehtävää), jonka kaveri ratkaisee. Kaverin ratkaistua epäyhtälön, tekijä myös tarkistaa sen.
- Kannattaa muistuttaa, että kaveria ei tule päästää liian helpolla. Halutessaan voi keksiä esimerkiksi sanallisen epäyhtälön, jos aika riittää.
- Tarkistuksen jälkeen, tarkistaja voi antaa palautetta tekijälle ja kertoa missä mahdolliset virheet olivat.

A.2.4 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

Tämän kappaleen tavoitteena on, että opiskelija oppii ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä

- katsomalla ratkaisun suoraan funktion kuvaajasta
- merkkikaavion avulla käyttämällä hyväksi tekijöitä ja testipisteitä.

Pohdinta B.4.1 Pohdinnan tarkoituksena on johdattaa opiskelijat korkeamman asteen epäyhtälöiden graafiseen ratkaisuun. Pitäisi onnistua opiskelijoilta, koska he osaavat jo ratkaista ensimmäisen sekä toisen asteen epäyhtälöitä graafisesti. Jos polynomifunktioilla voi olla nollakohtia myös kuvien ulkopuolella, emme tiedä miten funktio käyttäytyy muualla. Tällöin emme voi tietää vastausta pohdintatehtävän kysymyksiin.

Pohdinta B.4.2

Pohdinnan tarkoituksena on lähestyä merkkikaaviota korkemman asteen polynomin ensimmäisen asteen tekijöiden merkkejä tarkastelemalla.

Jos opiskelijoilla on vaikeuksia 1-tehtävän b)-kohdassa, niin heille voi esittää esimerkiksi kysymyksen: "Tiedät tekijöiden merkit kyseisillä väleillä, niin kuinka voit päätellä tulofunktion merkin näiden avulla? Jos ratkaisu ei vielä selviä opiskelijoille, niin heille voi vinkata tulon merkkisäännöstä.

Merkkikaavio on opiskelijoille uusi juttu, joten merkkikaaviosta kannattaa käydä yhteisesti läpi ainakin seuraavia asioita:

- Tekijät merkitään vasemmanpuoleiseen sarakkeeseen.
- Nollakohdat merkitään ylös pystyviivojen päälle.
- Tekijöiden merkit tarkastellaan jokaisen nollakohdan välissä erikseen (apuna voi käyttää tekijöiden kuvaajia).
- Tulofunktion merkit merkitään alimmalle riville, joiden avulla päätellään vastaus. Pohtikaa, miten merkkikaaviosta näkee, milloin $R(x) \leq 0$ tai milloin $R(x) > 0$.
- Vastauksen merkkaaminen merkkikaavioon: vastaus voidaan merkitä merkkikaavioon vastaavasti kuin lukusuoralle ajattelemalla, että kaavion alinääriviiva on lukusuora. Merkitkää merkkikaavioon vastaus, milloin $R(x) > 0$.

Merkkikaavion tulisi näyttää tältä:

	-3	3	4	
$\frac{1}{3}x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-\frac{1}{2}x+2$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{1}{3}x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$R(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Pohdinta B.4.3 Vastaava pohdinta kuin edellinen. Tällä kertaa kyseessä paraabeli sekä suora ja vastaukset kerätään suoraan merkkikaavioon. Tämän pohdinnan tarkoituksena on näyttää opiskelijoille, että merkkikaaviossa tekijä voi olla myös korkeampaa astetta. Merkkikaavion tulisi näyttää tältä:

1.5

$\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{2}$	$+$	$+$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$	$-$	$+$
$S(x)$	$-$	$+$

Pohdinta B.4.8

Pohdinnan tarkoituksena on pohtia muotoa $ax^b \leq 0$ olevan epäyhtälön ratkaisuja ja miten kertoimen, eksponentin ja epäyhtälömerkin muuttaminen vaikuttaa sen ratkaisuihin. Alkuperäisellä yhtälöllä on yksi ratkaisu $x = 0$. Opiskelijaa voi ohjata tarvittaessa kysymyksillä:

- Miten epäyhtälön ratkaisu muuttuu, jos kerroin on negatiivinen? Entä, jos kerroin on nolla?
- Miten epäyhtälön ratkaisu muuttuu, jos eksponentti on esimerkiksi 0, 1, 2 tai 3.
- Miten epäyhtälön ratkaisu muuttuu, jos epäyhtälömerkkinä on $<$.

Vastaus: a) Jos kerroin on esimerkiksi negatiivinen, niin tällöin epäyhtälöllä on ääretön määrä ratkaisuja, yhden ratkaisun sijaan. Jos kerroin on nolla, epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla.

b) Jos eksponentti on pariton, niin epäyhtälöllä on ääretön määrä ratkaisuja. Jos taas eksponentti on parillinen, epäyhtälöllä on vain yksi ratkaisu. Jos eksponentti on nolla, epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) Jos epäyhtälömerkissä ei ole mukana yhtäsuuruutta ($<$), epäyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua. Jos epäyhtälömerkkinä olisi $>$ tai $\geq$ epäyhtälöllä olisi ääretön määrä ratkaisuja.

Pohdinta B.4.9

- Pohdinnan tarkoituksena on päästää opiskelijat itse keksimään epäyhtälö, joka toteuttaa annetut kriiterit. Lopuksi kaverin tulee tarkistaa, että tehtävä toteutuu annetuilla väleillä.
- Kannattaa varmistaa, että opiskelijat ymmärtävät tehtävänannon eli tulee keksiä sellainen epäyhtälö, joka toteutuu molemmilla annetuilla reaalilukuväleillä, eikä vain toisella.
- Jos epäyhtälön keksiminen tuntuu jollekin hankalalta, voi opastaa ensin hahmottelemaan sellaisen käyrän, jolla on tarvittavat nollakohdat. Tämän jälkeen voi miettiä millaisia tekijöiden kuvaajien tulisi olla. (Ks. pohdinta B.4.2). Näiden avulla voi muodostaa epäyhtälön, jota voi muokata haluamallaan tavalla. Tässä ikään kuin käytetään pohdintaa B.4.2 käänteisesti.

B Polynomiepäyhtälöt

Polynomiepäyhtälöt voidaan jakaa ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen epäyhtälöihin. Ennen kuin lähdetään tutkimaan niitä tarkemmin, katsotaan muutamia yleisiä asioita epäyhtälöistä.

B.1 Epäyhtälöiden peruskäsitteitä

Määritelmä B.1.1 *Epäyhtälössä* verrataan kahden lausekkeen arvojen välistä suuruutta käyttämällä jotain alla olevista epäyhtälömerkkeistä.

Merkintä	Tarkoitus
$a < b$	a on pienempi kuin b
$a > b$	a on suurempi kuin b
$a \leq b$	a on pienempi tai yhtä suuri kuin b
$a \geq b$	a on suurempi tai yhtä suuri kuin b

Esimerkki B.1.2 Esimerkkejä epäyhtälöistä

a) $2x + 1 \geq 3x$

b) $z^3 - z \leq 0$

c) $1 < 2$, joka on aina tosi epäyhtälö

d) $10 > 11$, joka on aina epätosi epäyhtälö

Esimerkki B.1.3 Esimerkkejä ei-epäyhtälöistä

a) $y = 2t - 9$

b) $7 = 7$

c) $2 + 4 = 6 > 0$

d) $9(2s^2 - s + 1)$

Sama epäyhtälö voidaan kirjoittaa usealla tavalla. Esimerkiksi epäyhtälö $a < b$ voidaan kirjoittaa muodossa $b > a$ ja vastaavasti $a \geq b$ muodossa $b \leq a$.

Tutustutaan vielä hieman lisää epäyhtälöiden ominaisuuksiin seuraavan pohdintatehtävän avulla.

Pohdinta B.1.4

a) Jos $a < b$ ja $b < c$, niin mitä voit sanoa lukujen a ja c välisestä suhteesta?

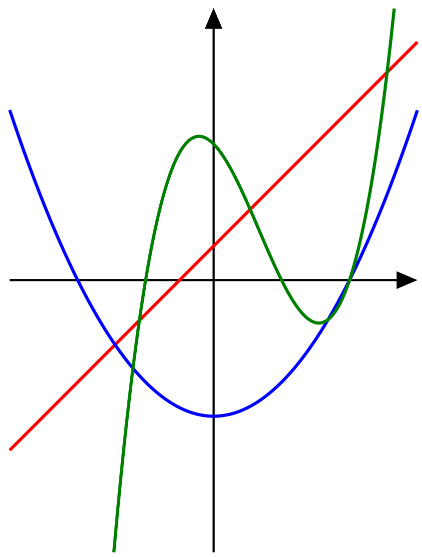
b) Jos tiedetään, että $a < b$ on epätosi, niin mitä voit sanoa väitelauseesta $a \geq b$? Entä väitelauseesta $a > b$?

Epäyhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien niiden lukujen etsimistä, joilla epäyhtälö toteutuu. Ennen kuin mennään epäyhtälöiden ratkaisemiseen algebrallisesti eli laskemalla, tutkitaan miten epäyhtälöitä voidaan ratkaista kuvaajien avulla eli graafisesti ja mitkä ovat epäyhtälöiden ratkaisujoukot.

B.1.1 Epäyhtälön ratkaisujoukko

Ensimmäisen asteen yhtälöllä voi olla korkeintaan yksi ratkaisu, toisen asteen yhtälöllä korkeintaan kaksi ratkaisua, kolmannen asteen yhtälöllä korkeintaan kolme ratkaisua ja niin edelleen. (Ks. kuva).

Kuinka monta ratkaisua epäyhtälöllä voi olla? Tutkitaan sitä graafisesti seuraavan pohdintatehtävän avulla.



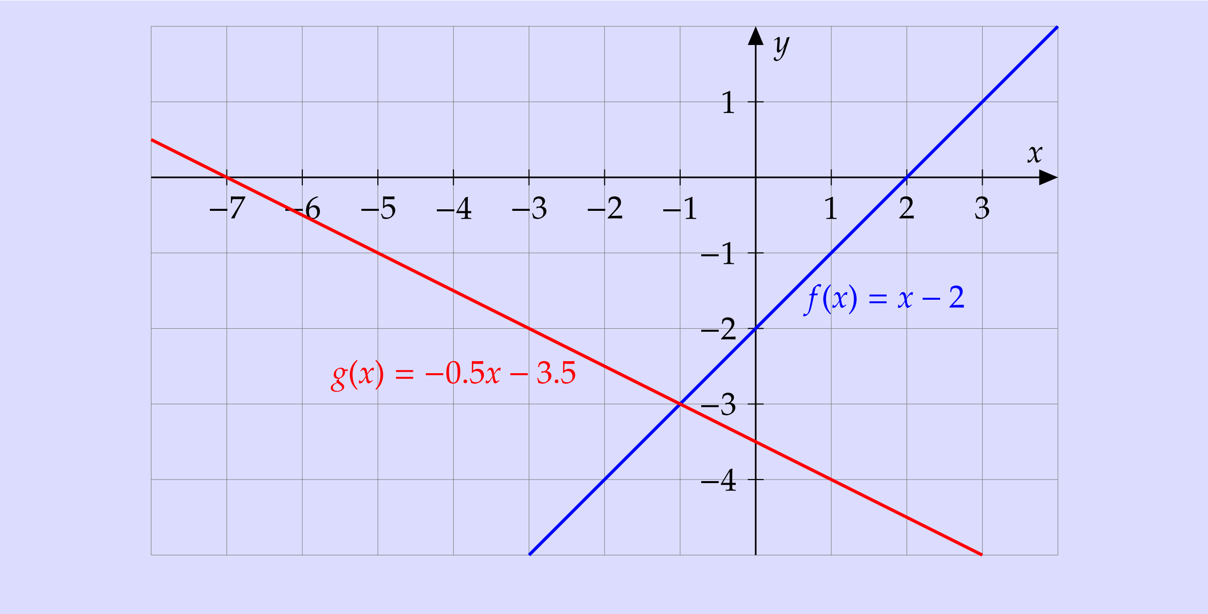
Pohdinta B.1.5

Alla on esitetty funktioiden $f(x) = x - 2$ ja $g(x) = -0{,}5x - 3{,}5$ kuvaajat.

a) Tutki, milloin $f(x) = 0$ ja milloin $g(x) = 0$.

b) Tutki, milloin $f(x) < 0$ ja milloin $g(x) > 0$. Entä milloin $f(x) > g(x)$? Kuinka monta ratkaisua näillä epäyhtälöillä on?

c) Tutki vielä, milloin sekä $f(x) < 0$ että $g(x) < 0$. Kuinka monta ratkaisua epäyhtälöllä on tässä tapauksessa?



Kuten edellisessä pohdintatehtävässä huomattiin epäyhtälöllä voi olla useampi, jopa ääretön määrä ratkaisuja, joista voidaan käyttää nimitystä *ratkaisujoukko* .

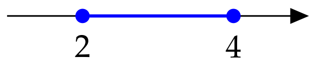
Määritelmä B.1.6 *Ratkaisujoukko* koostuu kaikista niistä luvuista, joilla yhtälö tai epäyhtälö on tosi.

Esimerkki B.1.7 Edeltävässä pohdintatehtävässä B.1.5 kohdan c) ratkaisujoukko oli reaalilukuväli $]-7, 2[$. Kuitenkaan esimerkiksi joukko $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ei ole c)-kohdan ratkaisujoukko, sillä se ei sisällä kaikkia ratkaisuja, vaan pelkästään väliin $] - 7, 2[$ kuuluvat kokonaisluvut.

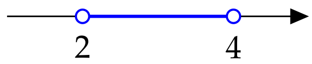
B.1.2 Reaalilukuvälit

Epäyhtälön ratkaisujoukko koostuu usein yhdestä tai useammasta *reaalilukuvälistä*. Reaalilukuvälillä tarkoitetaan kaikkia kahden luvun väliin jääviä lukuja, minkä takia välejä kirjoittaessa on syytä kiinnittää huomio päätepisteisiin. Reaalilukuvälejä merkitään usein laittamalla välin päätepisteet hakasulkujen sisään. Merkintä $[a, b]$ tarkoittaa, että myös välin päätepisteet a, b kuuluvat kyseiseen väliin. Jos päätepiste ei kuulu väliin, käännetään sitä vastaava hakasulku toisinpäin, esimerkiksi $]a, b[$. Väliä voidaan havainnollistaa piirtämällä se lukusuoralle kahden luvun välisenä janana. Jos päätepiste kuuluu väliin, se merkitään täytetyllä ympyrällä, jos päätepiste ei kuulu väliin, merkitään se tyhjällä ympyrällä.

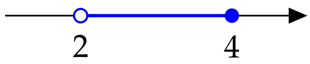
Suljettu väli sisältää päätepisteensä. Esimerkiksi suljettu väli $[2, 4]$ on niiden reaalilukujen x joukko, jotka toteuttavat *kaksoisepäyhtälön* $2 \leq x \leq 4$ eli epäyhtälöt $2 \leq x$ ja $x \leq 4$. Väli $[2, 4]$ voidaan esittää lukusuoralla seuraavasti:

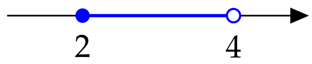


Avoin väli ei sisällä päätepisteitään. Esimerkiksi avoimen välin $]2, 4[$ muodostavat ne reaaliluvut x, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $2 < x < 4$. Lukusuoralla väli $]2, 4[$ näyttää tältä:

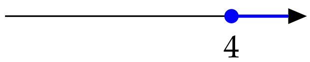


Puoliavoin väli sisältää toisen päätepisteistään. Esimerkiksi puoliavoin väli $]2, 4]$ sisältää oikean ja $[2, 4[$ vasemman päätepisteensä. Välit $]2, 4]$ ja $[2, 4[$ voidaan piirtää lukusuoralle seuraavasti:





Välin toinen päätepiste voi olla myös äärettömyydessä. Esimerkiksi $[4, \infty[$ on lukua 4 suurempien reaalilukujen joukko ja $]-\infty, 2[$ on lukua 2 pienempien reaalilukujen joukko. Lukusuoralla välit $[4, \infty[$ ja $]-\infty, 2[$ näyttävät tältä:



Huomautus Esimerkiksi merkintä $[a, b]$ on vain reaalilukuväli. Jos tarkoituksena on esittää väite, että jokin luku, esim. x, kuuluu kyseiselle välille, niin se kirjoitetaan muodossa $x \in [a, b]$, missä $\in$ luetaan "kuuluu joukkoon" tai "kuuluu välille".

Määritelmä B.1.8 *Positiivisilla luvuilla* tarkoitetaan kaikkia nollaa aidosti suurempia lukuja. *Negatiivisilla luvuilla* tarkoitetaan kaikkia nollaa aidosti pienempiä lukuja. Nolla ei ole positiivinen eikä negatiivinen luku.

Esimerkki B.1.9 Lauseke $a + b$ saa positiivisia arvoja, kun $a + b > 0$ ja negatiivisia arvoja, kun $a + b < 0$.

Tehtävät

1. Ilmoita puoliavoimet välit $]2,4]$ ja $[2,4[$ sekä välit $[4,\infty[$ ja $]-\infty,2[$ epäyhtälömuodossa.

2. Ilmoita pohdintatehtävän B.1.5 b)- ja c)-kohtien vastaukset reaalilukuväleinä. Esitä ne lisäksi myös lukusuoralla.

3. Kirjoita epäyhtälönä tai ilmaise merkintä sanallisesti.

a) Tuotteen hinta h on vähintään 5 euroa, mutta korkeintaan 10 euroa.

b) Tuotteen hintaa k voidaan merkitä $k \leq 1000$.

c) Tuotteen hinta l on yli 25 euroa.

d) Tuotteen hintaa m voidaan merkitä $m \in [50,\infty[$.

e) Tuotteen hinta n on alle 50 euroa tai yli 100 euroa.

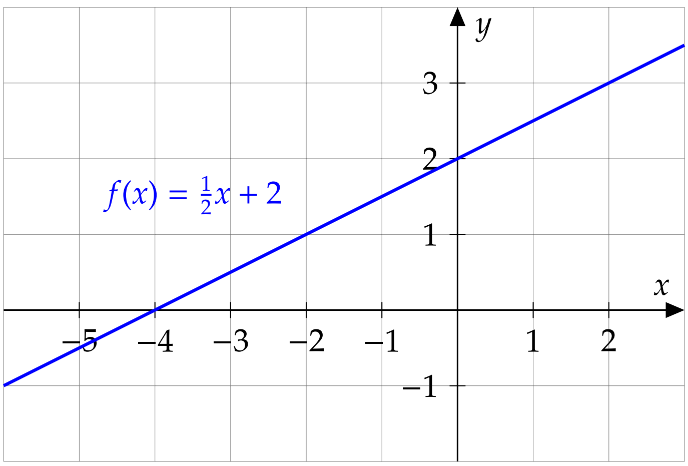
4. Päättele ilman teknisiä apuvälineitä, onko väite tosi vai epätosi. Perustele.

a) $-5 \geq -\frac{10}{2}$

b) $(\pi - 1)^2 - \pi(\pi - 1) > 0$

c) $2 \cdot (\sqrt{2})^2 < (\sqrt{2})^3$

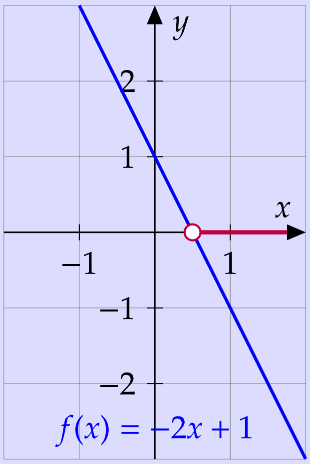
5. Alle on piirretty funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ kuvaaja. Tutki, milloin $f(x) \leq 3$ ja milloin $f(x) > 1$.



B.2 Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö

Pohdinta B.2.1 Tutki alla esitettyä epäyhtälön $-2x+1 < 0$ algebrallista ja graafista ratkaisua. Mitä huomaat? Miten selität tämän?

$$\begin{aligned} -2x + 1 &< 0 && \big|\, -1 \\ -2x &< -1 && \big|\, :(-2) \\ x &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Pohdinta B.2.2 PT

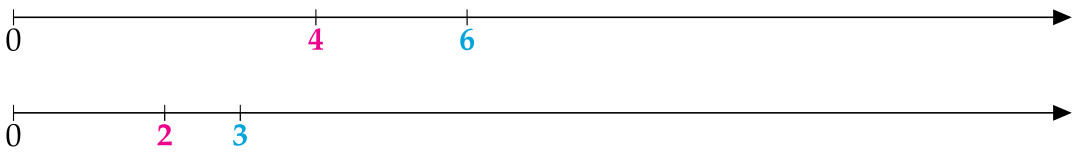
Toinen parista tekee tehtävän 1 ja toinen tehtävän 2.

1. Tarkastellaan epäyhtälöä $-2 < 4$, joka on tosi. Miten epäyhtälön totuusarvo muuttuu (tosi/epätosi), kun tämän epäyhtälön
   a) molemmille puolille lisätään luku 3
   b) molemmilta puolilta vähennetään luku 4
   c) molemmat puolet kerrotaan luvulla 5
   d) molemmat puolet jaetaan luvulla -2
   e) molemmat puolet kerrotaan nollalla.
2. Tarkastellaan epäyhtälöä $8 \leq -6$, joka on epätosi. Miten epäyhtälön totuusarvo muuttuu (tosi/epätosi), kun tämän epäyhtälön
   a) molemmille puolille lisätään luku 4
   b) molemmilta puolilta vähennetään luku 3
   c) molemmat puolet jaetaan luvulla 2
   d) molemmat puolet kerrotaan luvulla -5
   e) molemmat puolet kerrotaan nollalla.

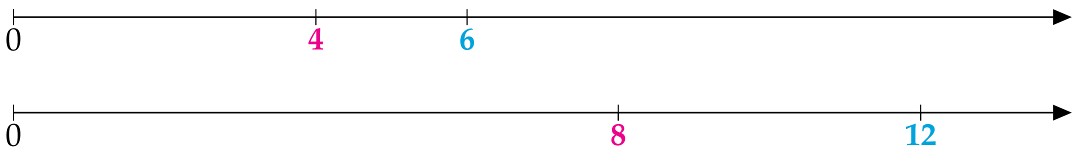
Tehtyänne tehtävät vertailkaa tuloksianne keskenään. Mitä huomaatte?

Katsotaan vielä lukusuoran avulla, mitä lukujen suuruusjärjestykselle tapahtuu, kun lukuja kerrotaan tai jaetaan sekä positiivisilla että negatiivisilla luvuilla.

Kun lukuja kerrotaan samalla ykköstä pienemmällä positiivisella luvulla, lukujen suuruusjärjestys säilyy, mutta ne lähenevät toisiaan. Esimerkiksi lukuja 4 ja 6 kerrottaessa luvulla $\frac{1}{2}$ saadaan luvut 2 ja 3, jotka ovat lähempänä toisiaan kuin luvut 4 ja 6.

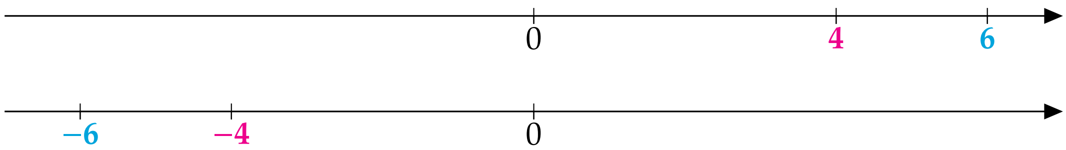


Kun lukuja kerrotaan ykköstä suuremmalla positiivisella luvulla, lukujen suuruusjärjestys säilyy, mutta ne erkaantuvat toisistaan. Esimerkiksi lukuja 4 ja 6 kerrottaessa luvulla 2 saadaan luvut 8 ja 12, jotka ovat kauempana toisistaan kuin luvut 4 ja 6.



Luvulla jakaminen on sama asia kuin kertominen luvun käänteisluvulla, joten positiivisella luvulla jakaminen säilyttää lukujen suuruusjärjestyksen.

Negatiivisella luvulla kertominen ei säilytä lukujen suuruusjärjestystä. Kerrottaessa esimerkiksi lukuja 4 ja 6 luvulla -1 saadaan luvut -4 ja -6 ja huomataan, että lukujen suuruusjärjestys kääntyy.



Kerrottaessa tai jaettaessa epäyhtälöä negatiivisella luvulla, täytyy epäyhtälömerkin suuntaa kääntää, jotta saadaan yhtäpitävä epäyhtälö.

Kuten yhtälöidenkin tapauksessa, nollalla kertomista tulee välttää, sillä se ei yleensä tuota yhtäpitävää epäyhtälöä, aivan kuin pohdintatehtävässä B.2.2 huomattiin. Halutessasi voit vielä havainnollistaa nollalla kertomista itsellesi lukusuoran avulla.

Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö on sellainen epäyhtälö, jossa toisella puolella epäyhtälömerkkiä esiintyy ensimmäisen asteen polynomi ja toisella puolella korkeintaan ensimmäisen asteen polynomi. Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälöt ratkaistaan muuten vastaavalla tavalla kuin ensimmäisen asteen polynomiyhtälöt, mutta poikkeuksena epyhtälömerkin kääntyminen kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla.

Pohdinta B.2.3

a) Ratkaise epäyhtälö $7-5(t+2)>2(t+2)$

b) Vertaa ratkaisuasi alla olevaan Olivian ratkaisuun. Oletteko ratkaisseet tehtävän samalla tavalla? Mitä eroavaisuuksia ja mitä yhtäläisyyksiä havaitset?

$$\begin{aligned} 7-5(t+2) &> 2(t+2) && \big|+5(t+2) \\ 7 &> 5(t+2)+2(t+2) && \\ 7 &> 7(t+2) && \big|:7 \\ 1 &> t+2 && \big|-2 \\ -1 &> t && \end{aligned}$$

Pohdinta B.2.4 GG
Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2}x+4<2(x-1)$ GeoGebralla.
Vihje: Syötä ensin epäyhtälömerkin molemmilla puolilla olevat lausekkeet erikseen syötekenttään ja sen jälkeen kokeile syöttää epäyhtälö kokonaisena. Mitä huomaat?

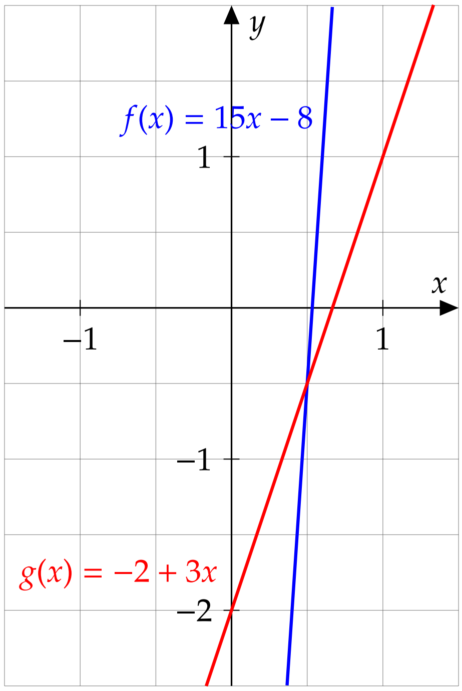
Mallitehtävä B.2.5 Ratkaise epäyhtälö $\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}>\frac{1}{3}\left(-1+\frac{3}{2}x\right)$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x-\frac{4}{3} &> \frac{1}{3}\left(-1+\frac{3}{2}x\right) && \big|\cdot 6 \\ 15x-8 &> 2\left(-1+\frac{3}{2}x\right) && \\ 15x-8 &> -2+3x && \\ 15x-3x &> -2+8 && \\ 12x &> 6 && \big|:12 \\ x &> \frac{1}{2} && \end{aligned}$$

Vastaus: $x>\frac{1}{2}$. Voidaan ilmoittaa myös muodossa $x\in\left]\frac{1}{2},\infty\right[$.

Tutkitaan epäyhtälön ratkaisua myös graafisesti. Piirretään funktioiden $f(x)=15x-8$ ja $g(x)=-2+3x$ kuvaajat ja tutkitaan, milloin $15x-8>-2+3x$ eli milloin $f(x)>g(x)$.



Epäyhtälön $f(x) > g(x)$ ratkaisu nähdään katsomalla kuvasta, milloin funktion $f(x)$ kuvaaja on funktion $g(x)$ kuvaajan yläpuolella. Tällöin $f(x)$ saa funktiota $g(x)$ suurempia arvoja. Kuvaajien perusteella tämä epäyhtälö toteutuu, kun $x > \frac{1}{2}$.

Pohdinta B.2.6

a) Alla on muokattu epäyhtälöä $\sqrt{3}(3-r) \geq \sqrt{2} - \sqrt{3}r$. Millä muuttujan r arvoilla epäyhtälö on voimassa?

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(3-r) &\geq \sqrt{2} - \sqrt{3}r \\ 3\sqrt{3} - \sqrt{3}r &\geq \sqrt{2} - \sqrt{3}r \\ 3\sqrt{3} &\geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) Alla on muokattu epäyhtälöä $3(1-m) > -3m + 5$. Millä muuttujan m arvoilla epäyhtälö on voimassa?

$$\begin{aligned} 3(1-m) &> -3m + 5 \\ 3 - 3m &> -3m + 5 \\ 3 &> 5. \end{aligned}$$

Pohdinta B.2.7 Ratkaistaessa epäyhtälöä $-6k + 4 \leq -9\left(\frac{1}{9}k - 1\right)$ Oiva sai vastaukseksi $k \leq -3$, Jasper $k \geq 6$ ja Minja $k \geq -1$. Selvitä kaksi varmasti väärää vastausta ratkaisematta epäyhtälöä. Mitä voit sanoa jäljelle jäävän vastauksen oikeellisuudesta?

Huomautus Epäyhtälön ratkaisu kannattaa aina tarkistaa joko GeoGebralla tai kokeilemalla eri muuttujan arvoilla. Kokeilemalla pystyt muun muassa helposti tarkistamaan, onko epäyhtälömerkin suunta oikein.

Joskus yhtälön arvoa halutaan rajoittaa sekä ylhäältä että alhaalta, jolloin saadaan ratkaistavaksi kaksi epäyhtälöä. Nämä epäyhtälöt yhdistämällä saadaan *kaksoisepäyhtälö*. Kaksoisepäyhtälöä ratkaistaessa etsitään niitä muuttujan arvoja, joilla molemmat epäyhtälöt ovat voimassa yhtä aikaa.

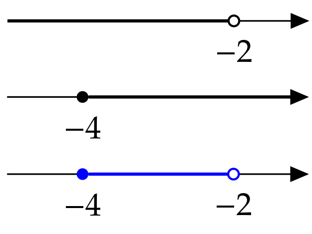
Mallitehtävä B.2.8 Ratkaise kaksoisepäyhtälö $5 < -3x - 1 \leq -x + 7$.

Ratkaisu: Kaksoisepäyhtälö voidaan jakaa kahdeksi erilliseksi epäyhtälöksi. Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt erikseen ja tutkitaan lopuksi, milloin epäyhtälöt ovat voimassa yhtä aikaa.

$$5 < -3x - 1 \leq -x + 7$$

$$\begin{array}{rlcrl}
5 < -3x - 1 & & \text{ja} & -3x - 1 \leq -x + 7 & \\
3x < -1 - 5 & & \text{ja} & -3x + x \leq 7 + 1 & \\
3x < -6 & \big| : 3 & \text{ja} & -2x \leq 8 & \big| : (-2) \\
x < -2 & & \text{ja} & x \geq -4. &
\end{array}$$

Tutkitaan, milloin epäyhtälöt voimassa yhtä aikaa.



Epäyhtälöt ovat voimassa yhtä aikaa, kun $-4 \leq x < -2$.

Vastaus: $-4 \leq x < -2$. Voidaan ilmoittaa myös muodossa $x \in [-4, -2[$.

Yhteenveto

Epäyhtälöä muokattaessa

- molemmille puolille voidaan lisätä sama luku/lauseke
- molemmilta puolilta voidaan vähentää sama luku/lauseke
- molempia puolia voidaan kertoa tai jakaa samalla positiivisella luvulla
- kerrottaessa tai jaettaessa molempia puolia samalla negatiivisella luvulla, täytyy epäyhtälömerkin suunta kääntää!
- lausekkeella kertominen tai jakaminen on vaarallista.

Tehtävät

6. Ratkaise epäyhtälö $-6(x-2) > -3x-3$

a) algebrallisesti, ilman teknisiä apuvälineitä

b) graafisesti GeoGebralla.

Ilmoita vastaus myös reaalilukuvälinä sekä lukusuoralla.

7. Ratkaise epäyhtälöt

a) $-8k < 0$

b) $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$ [K13, 1]

c) $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$ [S10, 2]

d) $(\sqrt{t}+1)^2 + 2 \leq 2\sqrt{t} + 5$

e) $9 - p \geq -\frac{3}{4}p + 1$, kun lisäksi on voimassa ehto $p > 5$.

8. Olavi suunnittelee pihallensa suunnikkaan muotoista hevosaitausta hänen kahdelle hevoselleen. Jos aitauksen yhden sivun pituus on 20 metriä, niin kuinka pitkä sen viereinen sivu voi olla, kun hevosaitauksen piiri tulee olla yli 96 metriä, mutta enintään 112 metriä.

9. Olli ja Pekka päättävät alkaa myydä jäätelöitä kesätöikseen. Heidän täytyy ostaa sitä varten kylmälaukku ja teline pyörään, joihin kuluu yhteensä 18 €. Jäätelöitä he hankkivat tukusta hintaan 1,20 €/kpl ja myyvät ne hintaan 2 €/kpl. Kuinka monta jäätelöä Ollin ja Pekan tulee myydä kesän aikana, jotta he molemmat tienaisivat ainakin 50 €?

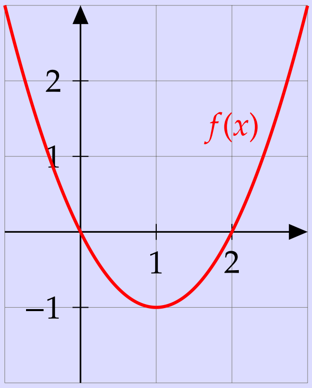
10. Ratkaise epäyhtälö $ax - 2 - a > 1$ parametrin a eri arvoilla.

B.3 Toisen asteen polynomiepäyhtälö

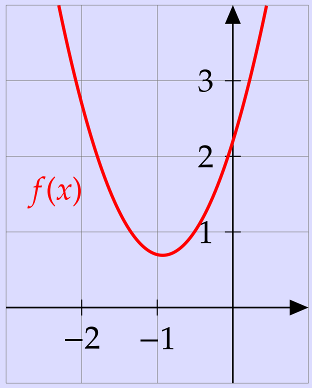
Pohdinta B.3.1

Päättele kuvaajien avulla toisen asteen polynomien nollakohdat sekä milloin $f(x) < 0$? Entä milloin $f(x) \geq 0$?

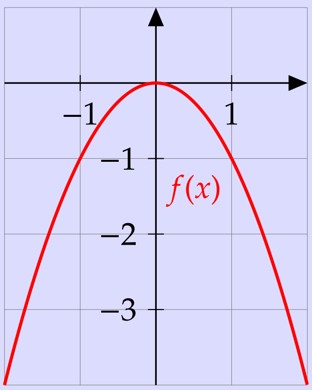
a)



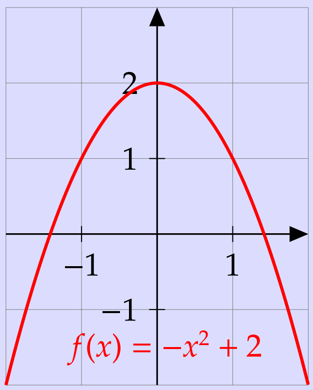
b)



c)



d)



Pohdinta B.3.2 PT

Pohdi parin kanssa, miten edellisen pohdintatehtävän B.3.1 perusteella pystyisi ratkaisemaan epäyhtälön $x^2 + 2 \leq 6x$. Ratkaiskaa epäyhtälö. Millä muuttujan x arvoilla epäyhtälö toteutuu?

Toisen asteen polynomiepäyhtälö on sellainen epäyhtälö, jossa toisella puolella epäyhtälömerkkiä on toisen asteen polynomi ja toisella puolella korkeintaan toisen asteen polynomi. Sen ratkaiseminen perustuu polynomin nollakohtiin sekä polynomin kuvaajan hahmotteluun.

Pohdinta B.3.3 Tutki, onko Olivia ratkaissut tehtävät oikein? Etsi mahdolliset virheet ja perustele, miksi ne ovat väärin. Korjaa lopuksi virheet ja laske, mikä tehtävän vastauksen tulisi olla.

a)

$$
\begin{aligned}
2x^2 &> 2 \quad \Big| :2\\
x^2 &> 1\\
x &> \pm\sqrt{1}\\
x &> \pm 1
\end{aligned}
$$

b)

$$x^2 - 5x + 1 \leq -3.$$

Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa epäyhtälön oikealle puolelle jää nolla:

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0.$$

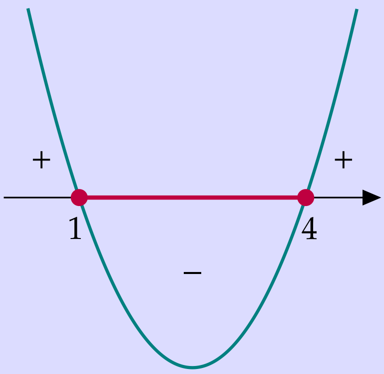
Ratkaistaan polynomin $x^2 - 5x + 4$ nollakohdat käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{2}{2} = 1.$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja:



Kuvaajasta nähdään, että paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä 1 ja 4 sekä aukeaa ylöspäin, jolloin epäyhtälö toteutuu, kun $1 \leq x \leq 4$.

Vastaus: $1 \leq x \leq 4$

Pohdinta B.3.4

Pohdi, mitä toisen asteen epäyhtälön ratkaisussa on tehtävä, jotta vastaus saadaan selville. Kirjoita vielä ratkaisuvaiheet itselle muistiin.

Pohdinta B.3.5 PT

a) Toinen parista tekee tehtävän 1. ja toinen tehtävän 2.

1. Keksi toisen asteen epäyhtälö, jolla on yksi ratkaisu.
2. Keksi toisen asteen epäyhtälö, jolla on useampi ratkaisu.

b) Anna keksimäsi tehtävä parin ratkaistavaksi.

c) Tarkista parisi laskema tehtävä.

Tehtävät

11. Ratkaise epäyhtälöt

a) $2x^2 < 0$

b) $(x + 1)^2 \leq 1$ [S04/1b]

c) $25t^2 - 1 \geq 2(5t + 7)$

d) $(z + 5)^2 \leq 0$

e) $-x^2 + 3(x - 2) + 9 > 3(x - 2) + 2x^2$ [k16/2b]

12. Sisarusten, Timon ja Siljan, yhteenlaskettu ikä on 38. Ikien tulo on vähintään 345. Minkä ikäisiä sisarukset voivat olla?

13. a) Millä muuttujan x arvoilla lauseke $x(5 - 8x)$ saa positiivisia arvoja? [K14, 1b]

b) Millä a:n arvoilla yhtälöllä $ax^2 + 3x + a = 0$ on kaksi ratkaisua?

14. Koululle suunnitellaan uutta auditoriota, johon pitää mahtua vähintään 260 henkilöä. Kuinka monta penkkiriviä tulee auditoriossa olla, jos ensimmäisellä rivillä on 8 paikkaa ja seuraaville riveille mahtuu aina 2 enemmän kuin edelliselle?

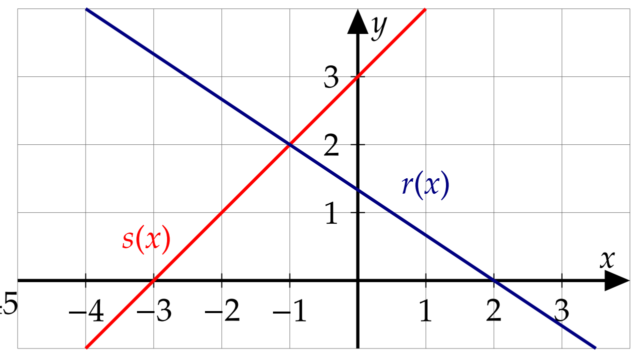
15. Suorakulmion muotoisen koira-aitauksen ympärysmitta on 28 m. Osoita, että koira-aitauksen pinta-ala on enintään 49 m^2.

16. Päättele piirrettyjen kuvaajien avulla, millä muuttujan x arvoilla niiden tulofunktion $f(x) = s(x) \cdot r(x)$ arvo on

a) nolla

b) negatiivinen

c) positiivinen

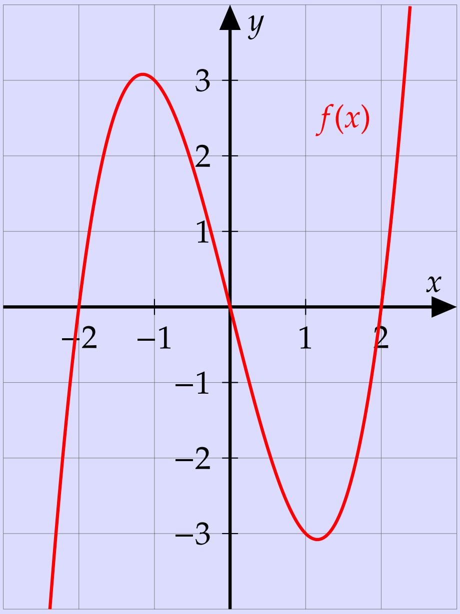


B.4 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

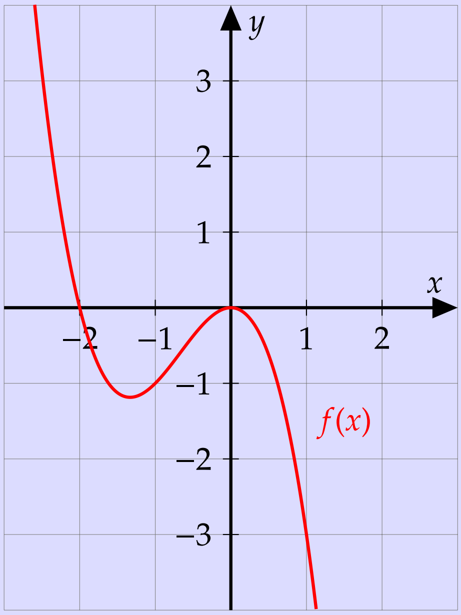
Pohdinta B.4.1

Päättele kuvaajien avulla polynomifunktioiden nollakohdat sekä milloin $f(x) < 0$? Entä milloin $f(x) \geq 0$? Funktioilla ei ole nollakohtia kuvan ulkopuolella.

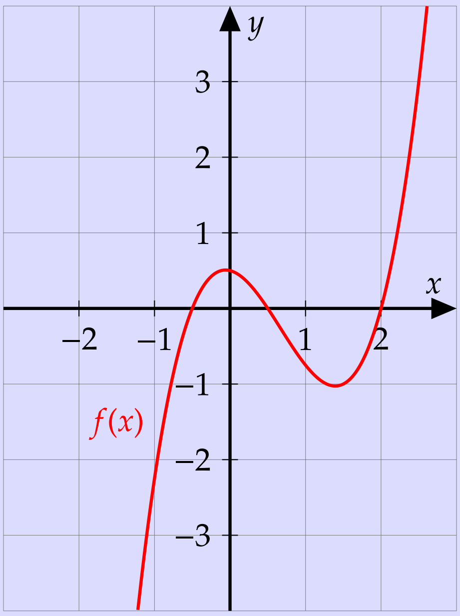
a)



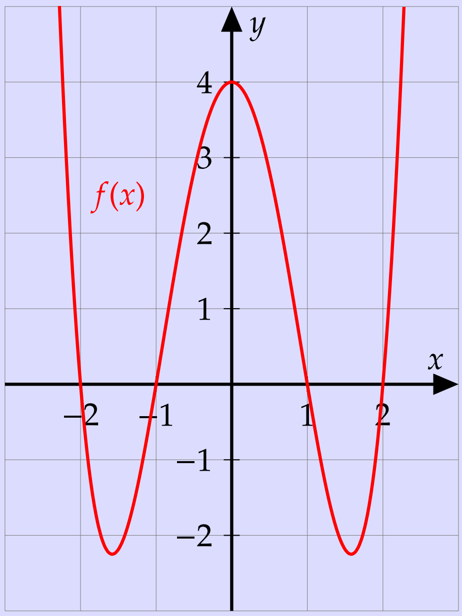
b)



c)



d)

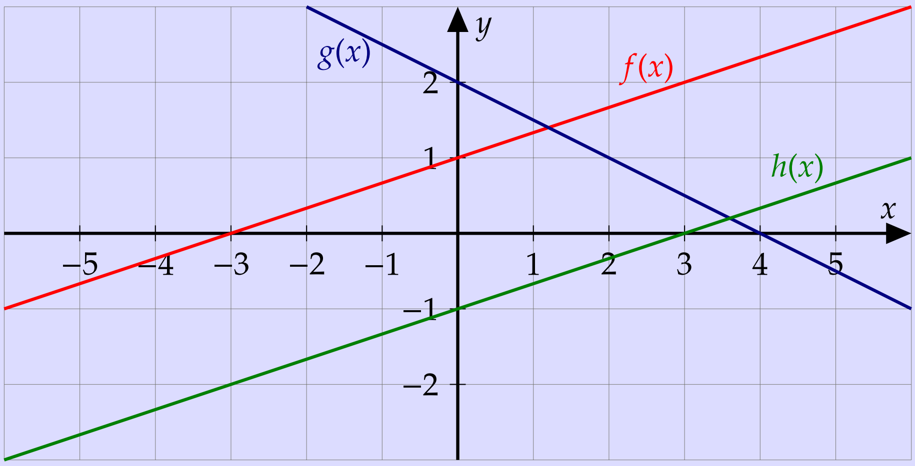


Muuttuuko antamasi vastaukset, jos polynomifunktioilla voi olla nollakohtia myös kuvien ulkopuolella?

Korkeamman asteen polynomiepäyhtälöllä tarkoitetaan sellaista epäyhtälöä, jossa vähintään epäyhtälömerkin toisella puolella on korkeampaa eli vähintään kolmatta astetta oleva polynomi. Äskeisen pohdintatehtävän perusteella osaamme nyt ratkaista korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä graafisesti eli päättelemällä vastauksen suoraan funktion kuvaajasta. Seuraavaksi on tarkoitus pohtia, voisimmeko kehittää jonkin ratkaisumenetelmän ratkaistaksemme epäyhtälöitä piirtämättä alkuperäisen funktion graafia. Aloitetaan tutkimalla korkeamman asteen polynomin tekijöiden kuvaajia.

Pohdinta B.4.2

Luvun 7 harjoitustehtävässä pohdittiin, milloin kolmesta ensimmäisen asteen polynomifunktiosta $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ja $h(x) = \frac{1}{3}x - 1$ muodostuva tulofunktio $R(x) = (\frac{1}{3}x + 1)(-\frac{1}{2}x + 2)(\frac{1}{3}x - 1)$ saa arvon nolla. Tutkitaan nyt, minkä merkkisiä (positiivisia vai negatiivisia) arvoja nämä funktiot saavat nollakohtien ympäristöissä ja, miten näiden tietojen avulla voidaan hahmotella tulofunktion $R(x)$ kuvaaja.



a) Tutki kuvaajien avulla, minkä merkkisiä arvoja funktiot $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ saavat, kun

   i. $x < -3$

   ii. $-3 < x < 3$

   iii. $3 < x < 4$

   iv. $x > 4$.

b) Päättele piirrettyjen ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajien avulla, minkä merkkisiä arvoja tulofunktio $R(x) = (\frac{1}{3}x + 1)(-\frac{1}{2}x + 2)(\frac{1}{3}x - 1)$ saa, kun

   i. $x < -3$

   ii. $-3 < x < 3$

   iii. $3 < x < 4$

iv. $x > 4$.

Miten päättelit merkin?

c) Hahmottele funktion $R(x)$ kuvaaja vihkoosi.

d) Tarkista GeoGebralla hahmottelitko kuvaajan muodon oikein. GG

e) Kokoa kohdan 1. tulokset alla olevaan taulukkoon siten, että käytät symboleja + ja − merkitsemään, minkä merkkisiä arvoja funktiot saavat missäkin kohdassa.

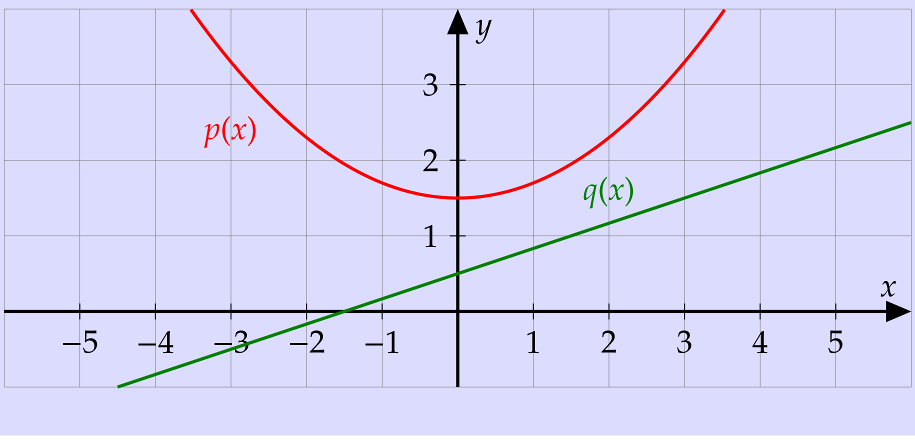
		-3	3	4
$\frac{1}{3}x + 1$				
$-\frac{1}{2}x + 2$				
$\frac{1}{3}x - 1$				
$R(x)$				

Milloin $R(x) = 0$, $R(x) \leq 0$, entä $R(x) > 0$?

Äsken täydentämääsi taulukkoa kutsutaan *merkkikaavioksi* . Merkkikaavion avulla pystytään ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä sen tekijöiden merkkien avulla. Tekijöiden merkit voidaan selvittää hahmottelemalla niiden kuvaajat. Tulofunktion merkit saadaan selville tekijöiden merkkien avulla käyttämällä tulon merkkisääntöä.

Pohdinta B.4.3

Muodosta merkkikaavio polynomifunktiolle $S(x) = (\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{2})(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})$ sen tekijöiden $p(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{2}$ ja $q(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ kuvaajien avulla ja tutki milloin $S(x) > 0$.



Mallitehtävä B.4.4 Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2}x^3 < 5x^2$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 &< 0 \\ \frac{1}{2}x^2(x-10) &< 0 \end{aligned}$$

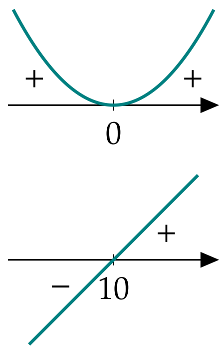
Ratkaistaan nollakohdat:

$$\frac{1}{2}x^2(x-10) = 0 \qquad \Big| \text{ tulon nollasääntö}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= 0 & \text{tai} \qquad & x - 10 = 0 \\ x^2 &= 0 & \text{tai} \qquad & x = 10 \\ x &= 0 & & \end{aligned}$$

Tehdään merkkikaavio. Hahmotellaan lisäksi tekijöiden kuvaajat, joista voimme helposti päätellä tekijöiden merkit nollakohtien rajaamilla väleillä.

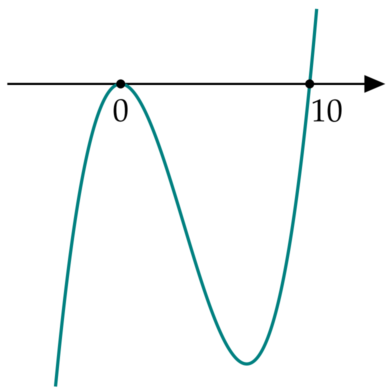
		0	10
$\frac{1}{2}x^2$	+	+	+
$x-10$	−	−	+
$\frac{1}{2}x^3 - 5x^2$	−	−	+



Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön ratkaisu on $x < 0$ tai $0 < x < 10$.

Vastaus: $x < 0$ tai $0 < x < 10$. Vastaus voidaan ilmoittaa myös muodossa $x < 10$, $x \neq 0$, jossa merkintä $\neq$ luetaan, että "erisuuri kuin".

Vastaus voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2$ kuvaaja.



Huomautus Jotta korkeamman asteen polynomiepäyhtälön ratkaisu olisi perusteltu, tulee merkkikaaviossa olevien tekijöiden merkit perustella esimerkiksi hahmottelemalla tekijöiden kuvaajat merkkikaavion viereen.

Joskus epäyhtälö on hankala jakaa tekijöihin, jolloin on helpompaa muodostaa merkkikaavio testipisteiden avulla. Tämä menetelmä pohjautuu seuraavaan lauseeseen.

Lause B.4.5 Polynomifunktio voi vaihtaa merkkinsä vain nollakohdissaan.

Tätä lausetta ei todisteta, mutta se on helppo uskoa todeksi, sillä polynomifunktio on jatkuva funktio eli sen kuvaaja on katkeamaton käyrä (jatkuvuutta käsitellään tarkemmin kurssilla 6. Derivaatta). Tällöin on luonnollista ajatella, että funktio voi vaihtaa merkkiään vain ylittäessään x-akselin. Katsotaan testipisteiden käytöstä yksi mallitehtävä.

Mallitehtävä B.4.6 Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{56}x^4 + \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{12}{7} \leq 0$.

Ratkaisu: Ratkaistava epäyhtälö näyttää monimutkaiselta, joten sitä ei voi helposti jakaa tekijöihin. Aloitetaan selvittämällä funktion $f(x) = \frac{1}{56}x^4 + \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{12}{7}$ nollakohdat teknisiä apuvälineitä käyttäen ja muodostetaan merkkikaavio testipisteiden avulla.

Nollakohdat:

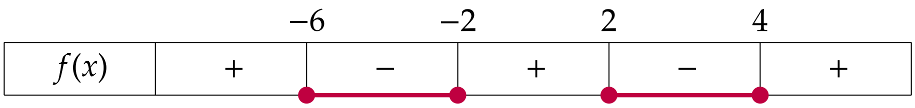
$$f(x) = \frac{1}{56}x^4 + \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{12}{7} = 0$$

$$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, joten laskemalla funktion arvo sen nollakohtien rajaamilla väleillä, saadaan selville minkä merkkisiä arvoja funktio saa missäkin kohtaa. Valitaan jokaiselta väliltä siis yksi piste, jossa lasketaan funktion arvo. Testipisteiksi kannattaa valita kohdat, joissa funktion arvo on mahdollisimman helppo laskea. Funktion arvot saa laskettua kätevästi esimerkiksi GeoGebran avulla.

Väli	Testipiste x	$f(x)$	Merkki
$x < -6$	-7	$f(-7) = 495/56$	$+$
$-6 < x < -2$	-4	$f(-4) = -24/7$	$-$
$-2 < x < 2$	0	$f(0) = 12/7$	$+$
$2 < x < 4$	3	$f(3) = -45/56$	$-$
x>4	5	$f(5) = 33/8$	$+$

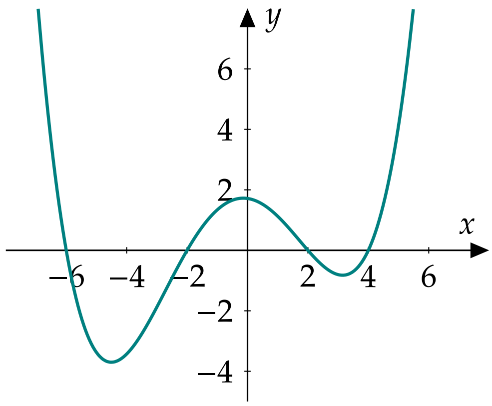
Muodostetaan merkkikaavio tietojemme perusteella



Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $\frac{1}{56}x^4 + \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{12}{7} \leq 0$ toteutuu, kun $-6 \leq x \leq -2$ tai $2 \leq x \leq 4$.

Vastaus: $-6 \leq x \leq -2$ tai $2 \leq x \leq 4$

Tarkistetaan vastaus vielä piirtämällä funktion $f(x) = \frac{1}{56}x^4 + \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{12}{7}$ kuvaaja.



Korkeamman asteen epäyhtälöt, joista puuttuu kokonaan paritonta astetta olevat termit, voidaan ratkaista sijoituksen avulla. Tällöin ratkaisu yksinkertaistuu huomattavasti.

Mallitehtävä B.4.7 Ratkaise epäyhtälö $x^4 - 7x^2 > 18$.

Ratkaisu: Muokataan epäyhtälö ensin sellaiseen muotoon, jossa toisella puolella esiintyy nolla

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 &> 18 \\ x^4 - 7x^2 - 18 &> 0. \end{aligned}$$

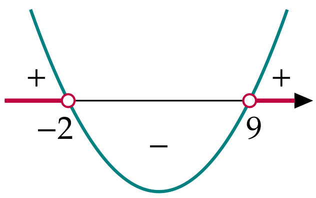
Tällaista bikvadraattista epäyhtälöä, jolla puuttuu paritonta astetta olevat termit, on hankala jakaa suoraan tekijöihin. Huomaamalla, että muuttujan x toinen potenssi voidaan korvata uudella muuttujalla, epäyhtälöstä saadaan toisen asteen epäyhtälö, jonka osaamme ratkaista. Sijoitetaan $t = x^2$, jolloin saadaan ratkaistavaksi epäyhtälöksi

$$t^2 - 7t - 18 > 0.$$

Ratkaistaan nollakohdat esimerkiksi neliöksi täydentämällä:

$$\begin{aligned} t^2 - 7t - 18 &= 0 \\ t^2 - 2 \cdot 3{,}5t &= 18 \qquad \Big| + 3{,}5^2 \\ (t - 3{,}5)^2 &= 5{,}5^2 \\ t - 3{,}5 = 5{,}5 \qquad &\text{tai} \qquad t - 3{,}5 = -5{,}5 \\ t = 9 \qquad &\text{tai} \qquad t = -2. \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion $f(t) = t^2 - 7t - 18$ kuvaaja, josta voidaan päätellä epäyhtälön $t^2 - 7t - 18 > 0$ ratkaisu



Kuvaajasta nähdään, että epäyhtälön $t^2 - 7t - 18 > 0$ ratkaisu on

$$t < -2 \qquad \text{tai} \qquad t > 9.$$

Sijoittamalla takaisin $t = x^2$, epäyhtälöt saadaan muotoon

$$x^2 < -2 \qquad \text{tai} \qquad x^2 > 9.$$

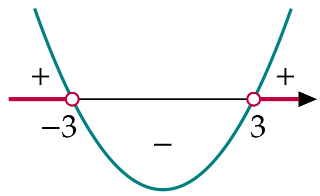
Epäyhtälö $x^2 < -2$ on aina epätosi, koska $x^2 \geq 0$, joten riittää tarkastella epäyhtälöä

$$\begin{aligned} x^2 &> 9 \\ x^2 - 9 &> 0. \end{aligned}$$

Nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 9 &= 0 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}
$$

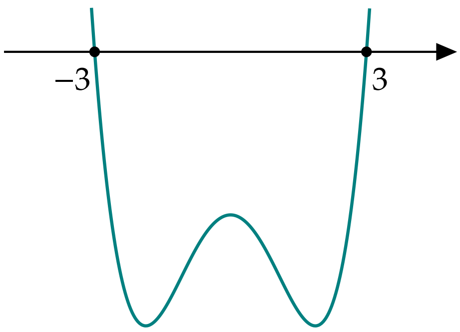
Hahmotellaan kuvaaja:



Kuvaajasta nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $x < -3$ tai $x > 3$.

Vastaus: $x < -3$ tai $x > 3$

Vastaus voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $f(x) = x^4 - 7x^2 - 18$ kuvaaja.



Pohdinta B.4.8 Tarkastellaan epäyhtälöä $3x^4 \leq 0$. Miten epäyhtälön ratkaisujoukko muuttuu, jos

a) kerroin on jokin muu reaaliluku kuin 3

b) eksponentti on jokin muu luonnollinen luku kuin 4

c) epäyhtälömerkkinä on jokin muu kuin $\leq$.

Perustele.

Pohdinta B.4.9 PT

a) Toinen parista tekee tehtävän i. ja toinen tehtävän ii.

  i. Keksi korkeamman asteen epäyhtälö, joka on voimassa sekä välillä $]-3, 0[$ että $]5, \infty[$, muttei niiden ulkopuolella.

  ii. Keksi korkeamman asteen epäyhtälö, joka on voimassa sekä välillä $[-2, -1]$ että $[2, \infty[$, muttei niiden ulkopuolella.

b) Anna keksimäsi tehtävä parillesi, jonka tehtävänä on tarkistaa, että se toteutuu annetuilla väleillä.

Tehtävät

17. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x(x+5)(x-2) > 0$

b) $x^3 + 4x^2 \geq 2x + 8$

c) $4x^4 + 11x^2 - 3 \leq 0$

d) $5x^6 \leq 0$

e) $x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 14x + 20 < 0$. *Vihje:* käytä e)-kohdassa apuna teknisiä apuvälineitä ja anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

18. Millä x:n arvoilla funktion $f(x) = x^3 - 4x + 6$ kuvaaja on suoran $y = 5x + 6$ yläpuolella? Ratkaise

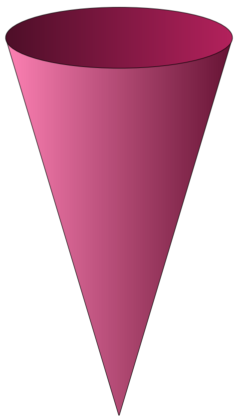
a) graafisesti GeoGebralla

b) algebrallisesti ilman teknisiä apuvälineitä.

19. Osoita, että lukua 1 suuremman luvun kuutio on aina suurempi kuin sen luvun neliö.

20. Olkoon $s > 0$. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^4 - sx^2$ arvot ovat negatiivisia.

21. Eräs popcornitehdas alkaa valmistaa uusia suoran ympyräkartion mallisia popcornikuppeja, joiden korkeus on kolme kertaa pidempi kuin sen säde. Mikä voi olla popcornikupin korkeus, kun niitä halutaan valmistaa 150 kpl ja yhden kupin tilavuudeksi halutaan vähintään 0,35 l, mutta korkeintaan 0,45 l? Anna vastaus senttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella.
Vihje: Suoran ympyräkartion tilavuus lasketaan kaavalla $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



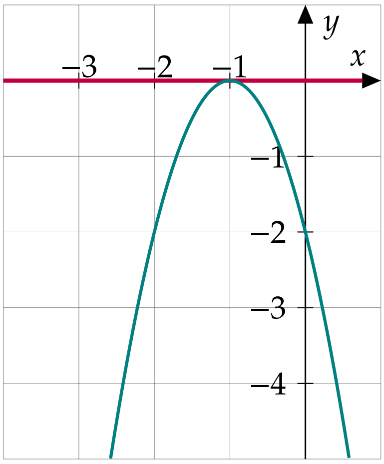
B.5 Lisätehtävät

1. Yhdistä oikea epäyhtälö sitä vastaavaan graafiseen ratkaisuun.

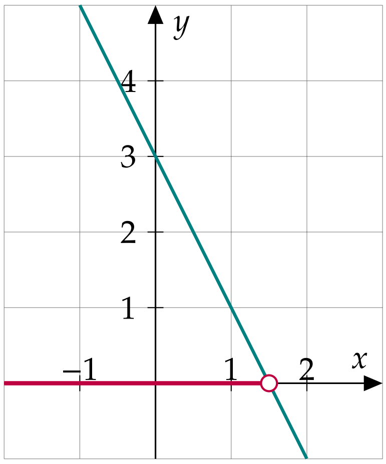
   i. $-x^4 - 6 \geq -6 - x^6$ ii. $-2x^2 - 4x \leq 2$

   iii. $2x^2 - 3x < x^2 - 2.25$ iv. $-x + 5 > x + 2$

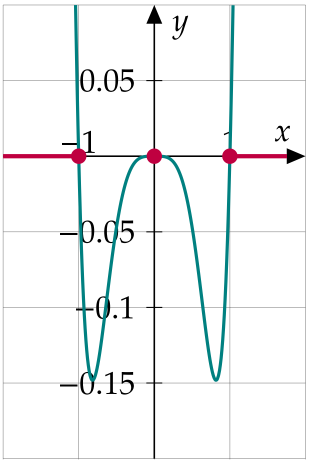
a)



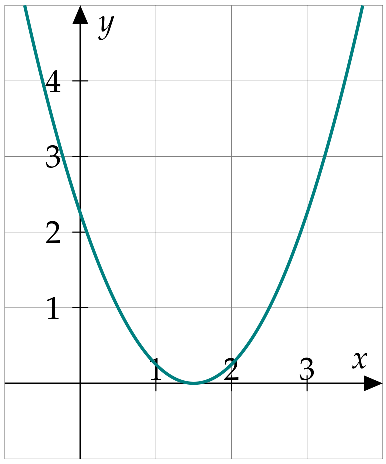
b)



c)



d)



2. Timo ja Silja alkavat molemmat säästää autoa varten. Timo säästää 60 euroa kuukaudessa ja Silja 90 euroa kuukaudessa. Siljan isä on lisäksi luvannut maksaa autosta 500 euroa ja Timon äiti 700 euroa.

   a) Kuinka kalliin auton Silja pystyy ostamaan 2 vuoden kuluttua?

   b) Kuinka kauan Timon tulisi säästää, jotta hän voisi ostaa kalliimman auton kuin Silja a)-kohdassa? Anna vastaus kuukauden tarkkuudella.

3. Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan

$$t = 0{,}01m^2 + 0{,}03m + 18$$

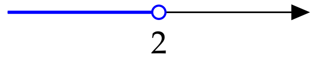
mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia? [K93/3b]

4. Osoita, että $5x^2 - 4x^3 - 2x$ saa positiivisia arvoja, kun $x < 0$.

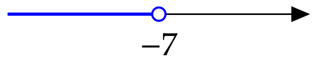
1. $2 < x \leq 4, \quad 2 \leq x \leq 4, \quad x \geq 4, \quad x < 2.$

2.

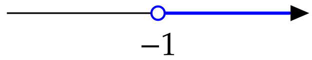
b) $x \in]-\infty, 2[$



$x \in]-\infty, -7[$



$x \in]-1, \infty[$



c) $x \in]-7, 2[$

3.

a) $5 \leq h \leq 10$

b) Tuotteen hinta k on enintään 1000 euroa.

c) $l > 25$

d) Tuotteen hinta m on vähintään 50 euroa. Epäyhtälönä $m \geq 50$.

e) $n < 50$ tai $n > 100$

4.

a) tosi

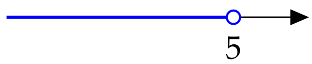
b) epätosi

c) epätosi

5. $f(x) \leq 3$, kun $x \leq 2$ ja $f(x) > 1$, kun $x > -2$

6.

$x < 5, \quad]-\infty, 5[,$



7.

a) $k > 0$

b) $x < \frac{21}{22}$

c) $x \geq \frac{3}{\sqrt{7}-4}$

d) $0 \leq t \leq 2$

e) $5 < p \leq 32$

8. Sivun pituus tulee olla yli 28 m, mutta enintään 36 m.

9. 148

10. Jos $a > 0$, niin $x > \frac{3+a}{a}$. Jos $a = 0$, niin epätosi. Jos $a < 0$, niin $x < \frac{3+a}{a}$.

11.

a) ei ratkaisua

b) $-2 \leq x \leq 0$

c) $t \leq -3/5$ tai $t \geq 1$

d) $z = -5$

e) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

12. Sisarukset voivat olla vähintään 15 vuotiaita, mutta korkeintaan 23 vuotiaita siten, että heidän ikien summa on 38. Esimerkiksi: Timo 15 ja Silja 23 tai Timo 20 ja Silja 18.

13.

a) $0 < x < \frac{5}{8}$

b) $-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2}, a \neq 0$

14. Tulee olla vähintään 13 penkkiriviä.

15. Osoita

16.

a) Kun $x = -3$ tai $x = 2$.

b) Kun $x < -3$ tai $x > 2$.

c) Kun $-3 < x < 2$

17.

a) $-5 < x < 0$ tai $x > 2$

b) $-4 \leq x \leq -\sqrt{2}$ tai $x \geq \sqrt{2}$

c) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

d) $x = 0$

e) $-7.20 < x < -1.52$ tai $1.18 < x < 1.55$

18. $-3 < x < 0$ tai $x > 3$

19. Osoita.

20. Kun $-\sqrt{s} < x < \sqrt{s}$, $x \neq 0$

21. Korkeus voi olla vähintään 17,5 cm, mutta enintään 19,0 cm. Kolme kertaa pidempi tarkoittaa nelinkertaista pituutta.

Oppimateriaalin hakemisto