

# Pintaraapaisu säieteoriaan - Alkeishiukkaset säikeiden värähtelytiloina ja kompaktien ulottuvuuksien olemassaolo

Tuure Orell  
LuK-tutkielma  
Koulutusohjelma: Fysiikka

27. huhtikuuta 2017

## Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2 Merkinnät</b>	<b>4</b>
<b>3 Säteiden fysiikkaa</b>	<b>5</b>
3.1 Avoimet säikeet . . . . .	6
3.2 Suljetut säikeet . . . . .	9
3.3 Hiukkastilat . . . . .	10
3.4 Supersäikeet . . . . .	13
<b>4 Ulottuvuudet</b>	<b>13</b>
4.1 Kääpetyneet ulottuvuudet . . . . .	14
4.2 Ylimääräisten ulottuvuuksien vaikutus gravitaatioon . . . . .	15
<b>5 Ongelmat</b>	<b>17</b>
<b>6 Yhteenveto</b>	<b>17</b>
<b>Viitteet</b>	<b>19</b>

## Kuvat

1 Kaavakuva säikeistä . . . . .	5
2 Avoin säie ja braanit . . . . .	6

## Taulukot

1 Alkeishiukkaset . . . . .	2
2 Vuorovaikutukset . . . . .	3

# 1. Johdanto

Fysiikan kehitykselle on kautta historian ollut ominaista teorioiden ja ilmiöiden yhdistäminen. 1800-luvulla James Clerk Maxwell yhdisti sähkö- ja magnetismin teorian yhdeksi sähkömagnetismin teoriaksi. Vuonna 1905 Albert Einstein esitti suppean suhteellisuusteorian, jossa hän yhdisti ajan ja avaruuden käsitteet yhdeksi aika-avaruudeksi, ja kymmenen vuotta myöhemmin yleisessä suhteellisuusteoriassa lopulta gravitaation ja aika-avaruuden. Samoihin aikoihin kehitetty kvanttimekaniikka saatiin yhdistettyä suppean suhteellisuusteorian kanssa kvanttikenttäteoriaksi. Tämän teorian avulla pystyttiin lopulta yhdistämään sähkömagneettinen ja heikko vuorovaikutus sähköheikoksi vuorovaikutukseksi. Kun tähän lisättiin vahvaa vuorovaikutusta kuvaava kvanttiteoria, kvanttiväridynamiikka, saatiin luotua standardimalli, joka kuvaa kaikki nykyfysiikan tuntemat hiukaset (Taulukko 1). [1][2]

Seuraava askel fysiikan yhtenäistämiseksi on täydellinen yhtenäisteoria, joka yhdistää sähköheikon vuorovaikutuksen ja vahvan vuorovaikutuksen. Kaiken teoria saavutetaan, kun yhdistetään yhtenäisteoriaan gravitaatio. Lisäksi teorian kauneuden kannalta olisi hyvä, jos siinä ei esiintyisi vapaasti valittavia parametreja. Standardimallissa on ongelmia, joiden takia se ei voi olla kaiken teoria eikä edes täydellinen yhtenäisteoria. Se ei esimerkiksi varsinaisesti yhdistä sähköheikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta, eikä se kerro mitään luonnon neljänestä perusvuorovaikutuksesta, gravitaatiosta. Lisäksi mallissa esiintyy parikymmentä parametria joita ei voida laskea teoreettisesti, vaan ne on lisättävä malliin käsin. [1]

Standardimalli selittää perusvuorovaikutukset välittäjähiukkasten avulla. Sähkömagneettista vuorovaikutusta välittää fotoni, vahvaa vuorovaikutusta erilaiset gluonit ja heikkoa vuorovaikutusta  $W^+$ ,  $W^-$  ja  $Z^0$ -bosonit. Kaikkien välittäjähiukkasten spin on 1. Jos oletetaan, että kaikki vuorovaikutukset toimivat pohjimmiltaan samalla tavalla, voidaan myös olettaa, että gravitaatiolla on oma välittäjähiukkanen, gravitoni, jonka spin on 2. Tämä ero spineissä voidaan ymmärtää seuraavasti. Ajatellaan laatikkoa, jossa on elektroneita, joilla on varaustiheys  $j^\mu$ , joka on nelivektori. Nopeudella  $v$  liikkuva havaitsija sen sijaan havaitsee laatikon supistuvan liikkeensä suunnassa, jolloin varaustiheys kasvaa kuten  $j'^\mu = j^\mu / \sqrt{1 - v^2}$ . Sähkömagneettisiin ominaisuuksiin liittyvät suureet muuttuvat siis kuten nelivektorit, joten fotoneita voidaan kuvata nelivektorilla. Toisaalta levossa oleva havaitsija mittaa elektroneille energian  $m$ . Liikkuva havaitsija sen sijaan mittaa energian  $m' = m / \sqrt{1 - v^2}$ . Lisäksi laatikon tilavuus muuttuu tekijällä  $1 / \sqrt{1 - v^2}$ , joten kokonaisuudessaan energiatiheys muuttuu kuten kaksi-indeksinen nelitensori. Näin ollen gravitonin kuvaamiseen tarvitaan kaksi-indeksinen nelitensori. [2][3]

Gravitaation välittäjähiukasta ei kuitenkaan ole vielä havaittu. Gravitonin lisäksi myös vuorovaikutuksen suhteellinen voimakkuus erottaa gravitaation muista vuorovaikutuksista; gravitaatio on huomattavasti heikompi kuin muut vuorovaikutukset (Taulukko 2).

Taulukko 1: Alkeishiukaset

Hiukkastyypit	Elektronin perhe	Myonin perhe	Taun perhe
Leptonit	Elektroni ja neutriino	Myoni ja neutriino	Tau ja neutriino
Kvarkit	Up, down	Strange, charm	Bottom, top

Taulukko 2: Vuorovaikutukset

Vuorovaikutus	Suhteellinen voimakkuus	Välittäjähiukkanen	Spin
Vahva	1	Gluonit	1
Sähkömagneettinen	1/137	Fotoni	1
Heikko	$10^{-9}$	$W^+$ , $W^-$ ja $Z^0$ -bosonit	1
Gravitaatio	$10^{-38}$	Gravitoni	2

Kvanttiteorian kehittäminen gravitaatiolle on osoittautunut erittäin vaikeaksi, ehkä jopa mahdottomaksi, käyttämällä samanlaisia työkaluja kuin muille vuorovaikutuksille. Kvanttikenttäteorioihin liittyy äärettömyyksiä. Käyttämällä renormalisaatioksi kutsuttua menetelmää nämä äärettömyydet voidaan poistaa, jolloin saadaan äärellisiä ratkaisuja [3]. Tämä menetelmä toimii sähköheikon ja vahvan vuorovaikutuksen tapauksissa. Gravitaation kvanttikenttäteoria sen sijaan on renormalisoitumaton [3]. Mikäli gravitaatio on kvantisoitavissa, sen kvantittamiseen tarvitaan siis joitain uudenlaisia tekniikoita. Yksi lupaava vaihtoehto on hylätä kvanttikenttäteorian käsitys pistemäisistä hiukkasista ja tarkastella seuraavaksi yksinkertaisinta tapausta, yksiulotteisia säikeitä.

Tällaisten kvanttimekaanisten säikeiden käyttäytymistä kuvaavia teorioita kutsutaan säieteorioiksi, ja vaikka niistä ei toistaiseksi ole kokeellisia todisteita, ovat ne kuitenkin lupaavia kandidaatteja kaiken teoriaksi. Nämä teorat voidaan jakaa kahteen ryhmään, bosoni- ja supersäieteorioihin. Nimensä mukaisesti ensin mainitut kuvaavat vain bosoneita, eivätkä siten ole realistisia fysikaalisia malleja, sillä ympäröivä maailmamme koostuu bosonien lisäksi myös fermioneista. Bosonisäikeet ovat kuitenkin huomattavasti yksinkertaisempia kuin supersäikeet, jotka lisäävät kuvaan vielä fermionit. Supersäieteorioita tunnetaan viisi erilaista. Nämä teorat näyttivät pitkään olevan irrallisia toisistaan. On kuitenkin todennäköistä, että kaikki supersäieteorat ovat yhden laajemman teorian erilaisia rajatapauksia. [1]

Kaikille säieteoriolle on yhteistä oletus siitä, että kaikki standardimallin näennäisesti erilaiset hiukkaset ovatkin seurausta samanlaisten säikeiden erilaisista värähtelytiloista. Toistaiseksi ei olla täysin varmoja siitä, kykeneekö säieteoria tuottamaan nämä erilaiset hiukkaset ja siten standardimallin, mutta periaatteellisella tasolla se on mahdollista. Varmaa kuitenkin on, että teoria tuottaa gravitonin, mikä on vahva todiste säieteoriasta gravitaation kvanttiteorianä. Lisäksi standardimallin parikymmentä vapaavalintaista parametria vähenevät säieteoriassa yhteen vapaaseen parametriin, joka on säikeen pituus. [1]

Supersäieteorioihin liittyy ajatus supersymmetriasta. Tämän ideana on, että jokaisella alkeishiukkasella on superpartneri; fermioneihin liittyy superbosoni ja bosoneihin superfermioni. Näiden superpartnereiden massa on yleisen käsityksen mukaan välillä 100 GeV - 1 TeV. Tämä energiaväli on havaittavissa LHC:llä, mutta toistaiseksi mitään ei kuitenkaan ole löytynyt. Supersymmetriaa esiintyy myös muissa vaihtoehtoisissa teorioissa, joten supersymmetristen hiukkasten löytyminen ei ole suora todiste säieteorian puolesta. [4]

Tässä tutkielmassa tutustutaan säieteoriaan tutkimalla bosonisäieteoriaa sen yksinkertaisuuden vuoksi. Näemme, miten säieteoria ennustaa hiukkaset säikeiden erilaisina värähtelytiloina, ja siinä sivussa myös maailmankaikkeuden ulottuvuuksien lukumäärän. Lisäksi pyritään esittämään säieteoreettinen selitys sille, miksi gravitaatio on paljon heikompi kuin muut perusvuorovaikutukset.

## 2. Merkinnät

Tässä tutkielmassa käytetään yksikköinä luonnollisia yksiköitä, jolloin luonnonvakiot saavat arvon yksi:  $\hbar = c = G = 1$ , missä  $\hbar$  on Planckin vakio,  $c$  valonnopeus tyhjiössä ja  $G$  gravitaatiivakio. Tällöin voidaan laskea pituuden, ajan ja massan yksiköiksi

$$\begin{aligned} L_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}, \\ T_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}, \\ M_P &= \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-5} \text{ g} \approx 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Näitä kutsutaan Planckin pituudeksi, Planckin ajaksi ja Planckin massaksi. Ne antavat suuruusluokkarivion kokoluokasta, jonka tarkasteluun tarvitaan yleisen suhteellisuusteorian sijaan kvantti-gravitaatiota.

Merkittään aika-avaruuden koordinaatteja nelivektorilla  $x^\mu$ . Suppeassa suhteellisuusteoriassa tämä tarkoittaa

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}), \quad (2.2)$$

missä  $x^0$  ja  $\vec{x}$  ovat tapahtuman aikakoordinaatti ja kolmiulotteinen paikkavektori. Tällöin voidaan merkitä aika-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärää  $D = 1 + d = 1 + 3 = 4$ , missä  $d$  on avaruudellisten ulottuvuuksien lukumäärä. Kuten myöhemmin osoitetaan, säieteoria vaatii toimiakseen tietyn määrän paikkaulottuvuuksia. Jätetään siis toistaiseksi  $d$  avoimeksi, jolloin merkitään

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^d). \quad (2.3)$$

Jatkossa on kuitenkin käytännöllisempää käyttää näiden koordinaattien sijaan valokartiokoordinaatteja  $x^+$  ja  $x^-$ , jotka määritellään koordinaattien  $x^0$  ja  $x^1$  avulla

$$x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \quad x^- = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Tässä on siis tehty koordinaattiakselin kierto. Vastaavasti myös liikemäärä voidaan kirjoittaa valokartiokoordinaateissa

$$p^+ = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}}, \quad p^- = \frac{p^0 - p^1}{\sqrt{2}}. \quad (2.5)$$

Valitaan  $x^+$  vastaamaan aikakoordinaattia. Valokartienergiaksi voidaan identifoida  $p^-$ . Tapahtumaa, eli aika-avaruuden koordinaattia, kuvaava vektori on valokartiokoordinaateissa

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^d) = (x^+, x^-, \vec{x}^d), \quad (2.6)$$

missä  $\vec{x}^d$  on  $D - 2$ -ulotteinen vektori. Kun siirrytään karteesisesta koordinaatistosta valokartiokoordinaatistoon, muuttuu metrinen tensori muotoon

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies \eta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Tässä muunnoksessa tensorin jälki säilyy:  $\text{Tr}(\eta) = D - 2$ .

Erityisessä suhteellisuusteoriassa hiukkasten liikettä aika-avaruudessa kuvataan Minkowskin diagrammiin piirretyillä maailmanviivoilla. Maailmanviivat ovat yksiulotteisia käyriä, joten ne voidaan esittää käyttämällä yhtä parametria  $\tau$ :

$$x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (x^0(\tau), x^1(\tau), \dots, x^d(\tau)) = x^\mu(\tau). \quad (2.8)$$

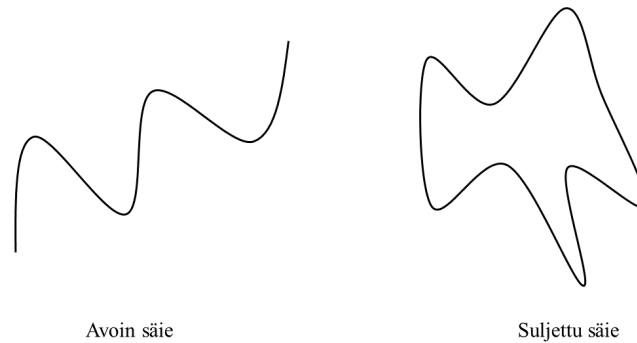
Säikeiden tapauksessa maailmanviivat ovat riittämättömiä, sillä yksiulotteiset säikeet piirtävät aika-avaruuteen kaksiulotteisen tason, maailmantason. Tämä taso voidaan esittää käyttämällä kahta parametria  $(\tau, \sigma)$ :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)). \quad (2.9)$$

Tässä  $\tau$  voidaan ymmärtää aikaparametriksi ja  $\sigma$  kuvaa paikkakoordinaattia säiettä pitkin mitattuna. Säikeiden koordinaatteja on tapana merkitä isolla kirjaimella  $X^\mu$ . [1]

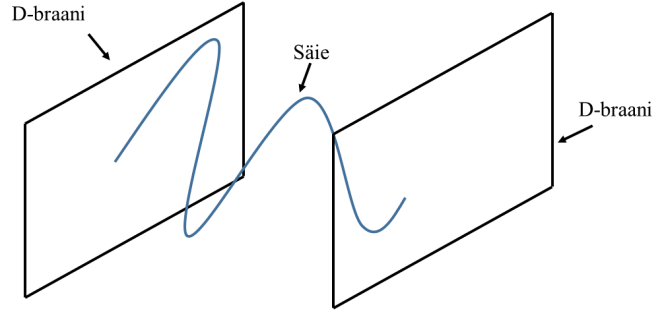
### 3. Säikeiden fysiikkaa

Säieteorioissa tutkitaan relativistisia kvanntisäikeitä. Nämä teoriat voidaan jakaa kahteen ryhmään, bosonisäieteorioihin ja supersäieteorioihin. Teorioissa esiintyy kahdenlaisia säikeitä, avoimia ja suljettuja. Suljetuilla säikeillä ei ole alku- eikä loppupistettä. Avoimilla säikeillä sen sijaan on (Kuva 1). Avoimelle säikeelle on käytännöllistä valita  $\sigma \in [0, \pi]$  ja suljetulle säikeelle  $\sigma \in [0, 2\pi]$ .



Kuva 1: Kaavakuva säikeistä

Suljetut säikeet eivät ole kiinnittyneet mihinkään, vaan voivat värähdellä vapaasti kaikissa ulottuvuuksissa. Avoimet säikeet sen sijaan ovat kiinnittyneet päistään niin sanottuihin  $D$ -braaneihin, hieman samaan tapaan kuin kitaran kielet kitaraan (Kuva 2). Nämä säikeet voivat värähdellä vain  $D$ -braanien rajaamissa ulottuvuuksissa.  $D$ -braaneja tarvitaan muun muassa liikemäärän säilymisen kannalta. Niiden tarpeellisuus on valitettavaa, sillä jotta siirtyminen nolla-ulotteisista hiukkasista yksi-ulotteisiin säikeisiin voitaisiin tehdä, tarvitaan säikeiden lisäksi vielä moniulotteisempia olioita, braaneja.



Kuva 2: Avoin säie ja braanit

### 3.1. Avoimet säikeet

Tarkastellaan aluksi avointa bosonikvanttisäiettä. Postuloidaan säikeen Hamiltonin operaattori

$$\hat{H} = 2\alpha' \hat{p}^+ \hat{p}^- \quad (3.1)$$

ja vaikutusintegraali koordinaateille  $X^I$

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - \hat{X}'^I \hat{X}'^I). \quad (3.2)$$

Näissä esiintyvä  $\alpha'$  liittyy säikeen jännitykseen ja sitä kautta pituuteen. Se on siis teorian ainoa vapaa parametri. Säikeen liikeyhtälö voidaan nyt ratkaista varioimalla vaikutusintegraalia (3.2):

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\partial_\tau (\delta \hat{X}^I) \dot{\hat{X}}^I - \partial_\sigma (\delta \hat{X}^I) \hat{X}'^I). \quad (3.3)$$

Oletetaan, että säikeen alku- ja loppupisteet on kiinnitetty. Tällöin voidaan osittaisintegroinnissa poistaa derivaatat  $\tau$ :n suhteen, jolloin jäljelle jää

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau (\hat{X}'^I \delta \hat{X}^I) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi d\sigma \delta \hat{X}^I (\ddot{\hat{X}}^I - \hat{X}^{\prime\prime I}) = 0. \quad (3.4)$$

Tästä saadaan liikeyhtälöksi aaltoyhtälö

$$\ddot{\hat{X}}^I = \hat{X}^{\prime\prime I}, \quad (3.5)$$

ja reunaehdot säikeen päätepisteissä

$$\frac{\partial \hat{X}^I}{\partial \sigma} \Big|_0 = \frac{\partial \hat{X}^I}{\partial \sigma} \Big|_\pi = 0. \quad (3.6)$$

Näitä kutsutaan Neumannin reunaehdoiksi. Yleisin mahdollinen ratkaisu, joka toteuttaa aaltoyhtälön (3.5) ja reunaehdot (3.6), on muotoa

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma) = \hat{q}^I(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n^I(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.7)$$

Sijoittamalla tämä vaikutusintegraaliin (3.2) saadaan

$$S = \int d\tau L = \int d\tau \left[ \frac{1}{4\alpha'} \dot{\hat{q}}^I(\tau) \dot{\hat{q}}^I(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n} \dot{\hat{q}}_n^I(\tau) \dot{\hat{q}}_n^I(\tau) - \frac{n}{2} \hat{q}_n^I(\tau) \hat{q}_n^I(\tau) \right) \right], \quad (3.8)$$

missä summatermissä esiintyy harmonisen oskillaattorin Lagrangen funktioita taajuuksilla  $n$ . Operaattorit  $\hat{q}_n^l(\tau)$  voidaan kirjoittaa harmonisen oskillaattorin luomis- ja tuhoamisoperaattorien avulla:

$$\hat{q}_n^l(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_n^l e^{-in\tau} - \hat{a}_n^{l\dagger} e^{in\tau}). \quad (3.9)$$

Ratkaistaan vielä  $\hat{q}^l$ . Lagrangen funktiosta saadaan liikemääräksi

$$\hat{p}^l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}^l} = \frac{1}{2\alpha'} \dot{\hat{q}}^l, \quad (3.10)$$

jolloin vastaavaksi Hamiltoniksi saadaan

$$\hat{H} = \alpha' \hat{p}^l \dot{\hat{q}}^l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} (\hat{p}_n^l \hat{p}_n^l + \hat{q}_n^l \hat{q}_n^l). \quad (3.11)$$

Heisenbergin liikeyhtälöstä saadaan tämän avulla ratkaistua:

$$\dot{\hat{q}}^l(\tau) = i[\hat{H}, \hat{q}^l(\tau)] \implies \dot{\hat{q}}^l(\tau) = \hat{x}_0^l + 2\alpha' \hat{p}^l \tau. \quad (3.12)$$

Liikeyhtälön ratkaisu on siis

$$\hat{X}^l(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^l + 2\alpha' \hat{p}^l \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^l e^{-in\tau} - \hat{a}_n^{l\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.13)$$

Muiden koordinaattien tapauksessa voidaan edetä vastaavasti, jolloin saadaan

$$\hat{X}^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' \hat{p}^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^+ \tau, \quad (3.14)$$

$$\hat{X}^-(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^- + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.15)$$

Ratkaisuissa esiintyvät operaattorit  $\hat{\alpha}_{-n}^\mu$  ja  $\hat{\alpha}_n^\mu$  ovat luomis- ja tuhoamisoperaattoreita, jotka ovat sidoksissa tavallisen kvanttimekaanisen harmonisen oskillaattorin luomis- ja tuhoamisoperaattoreihin  $\hat{a}_n^{\mu\dagger}$  ja  $\hat{a}_n^\mu$  seuraavasti:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n^\mu &= \sqrt{n} \hat{a}_n^\mu \\ \hat{\alpha}_{-n}^\mu &= \sqrt{n} \hat{a}_n^{\mu\dagger} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Liikeyhtälöissä esiintyvä termi  $\hat{x}_0^\mu$  on paikkaa kuvaava integroimisvakio, toinen termi ( $\hat{X}^+$ :n tapauksessa ainoa termi) kuvaa säikeen liikemäärää. Summaustermi kuvaa säikeen värähtelymodeja.

Tutkitaan seuraavaksi  $\hat{X}^-$  koordinaattia (3.15). Voidaan osoittaa, että --suuntaiset oskillaattorit voidaan kirjoittaa  $I$ -suuntaisten oskillaattorien avulla:

$$\sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_n^- = \frac{1}{\hat{p}^+} \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I = \frac{1}{\hat{p}^+} \hat{L}_n^\perp, \quad (3.17)$$

missä

$$\hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I \quad (3.18)$$

on Virasoron operaattori. Operaattorit  $\hat{\alpha}_m^I$  ja  $\hat{\alpha}_n^J$  noudattavat kommutaatiorelaatiota

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad (3.19)$$



missä  $\eta^{IJ}$  on metrisen tensorin elementti ja  $\delta$  Kroneckerin delta. Lisäksi ne ovat sidoksissa säikeen liikemäärään:

$$\hat{p}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \hat{\alpha}_0^\mu. \quad (3.20)$$

Erityisen mielenkiintoinen operaattori on siis  $\hat{L}_0^\perp$ :

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I, \quad (3.21)$$

joka voidaan kirjoittaa yhtälön (3.17) avulla myös muodossa

$$\hat{L}_0^\perp = 2\alpha' \hat{p}^+ \hat{p}^- \quad (3.22)$$

Huomataan, että tämä on identtinen Hamiltonin operaattorin määritelmän (3.1) kanssa:

$$\hat{H} = \hat{L}_0^\perp \quad (3.23)$$

Järjestetään tämän operaattorin luomis- ja hävittämisooperaattorit tavalliseen järjestykseen, jossa tuhoamisoperaattori operoi tilaan ennen luomisoperaattoria. Käyttämällä hyväksi kommutaatiorelaatiota (3.19), yhtälön (3.21) viimeinen termi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left( \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_{-p}^I] \right) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{IJ} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p, \end{aligned} \quad (3.24)$$

missä viimeinen yhtäsuuruus tulee metrisen tensorin  $\eta$  avaruuskoordinaattiosan  $I$  jäljestä  $\text{Tr}_1(\eta) = D-2$ . Operaattori  $\hat{L}_0^\perp$  voidaan nyt kirjoittaa

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (3.25)$$

Viimeinen termi on ongelmallinen, sillä se ei selvästikään supene. Merkitään sitä toistaiseksi  $a$ :lla,

$$a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p, \quad (3.26)$$

ja määritellään  $\hat{L}_0^\perp$  uudelleen

$$\hat{L}_0^\perp = \hat{l}_0^\perp + a = 2\alpha' \hat{p}^+ \hat{p}^- = \hat{H}, \quad (3.27)$$

missä

$$\hat{l}_0^\perp = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I. \quad (3.28)$$

Säikeen massa saadaan liikemäärän avulla

$$m^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p^I p^I. \quad (3.29)$$

Käyttämällä yhtälöitä (3.20) ja (3.27), tämä voidaan kirjoittaa

$$\hat{m}^2 = \frac{1}{\alpha'} (\hat{l}_0^\perp + a) - \hat{p}^I \hat{p}^I = \frac{1}{\alpha'} \left( a + \sum_{n=0}^{\infty} n \hat{a}_n^{I\dagger} \hat{a}_n^I \right). \quad (3.30)$$

Selvästikin  $a$ :n selvittäminen on tärkeää, sillä se vaikuttaa säikeen Hamiltonin operaattoriin, säikeen massaan ja aika-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärään.

Jos halutaan kvanttisäieteorian ja suhteellisuusteorian olevan yhteneviä, on löydettävä operaattori, joka tuottaa säikeelle Lorentz-muunnoksen. Käy ilmi, että tällainen operaattori on olemassa:

$$\hat{M}^{-J} = \hat{x}_0^- \hat{p}^J - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left[ \hat{x}_0^J (\hat{l}_0^\perp + a) + (\hat{l}_0^\perp + a) \hat{x}_0^J \right] - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' \hat{p}^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp). \quad (3.31)$$

Näiden operaattoreiden on kommutoitava, sillä muutoin teoria ei ole Lorentz-invariantti:

$$[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = 0. \quad (3.32)$$

Laskemalla kommutaattori saadaan

$$[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' (\hat{p}^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_n^I) \left( n \left[ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{24} (D-2) + a \right] \right). \quad (3.33)$$

Koska  $\hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^J \neq \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_n^I$ , on oltava

$$n \left[ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{24} (D-2) + a \right] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.34)$$

Saadaan siis

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{24} (D-2) = 0 \\ \frac{1}{24} (D-2) + a = 0 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Tästä saadaan ratkaisuna

$$D = 26, \quad a = -1. \quad (3.36)$$

Siis Hamiltonin operaattori ja säikeen massa voidaan kirjoittaa

$$\hat{H} = \hat{l}_0^\perp - 1, \quad (3.37)$$

$$\hat{m}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( -1 + \sum_{n=0}^{\infty} n \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n \right) = \frac{1}{\alpha'} \left( -1 + \hat{N}^\perp \right), \quad (3.38)$$

missä  $\hat{N}^\perp$  on numero-operaattori. Huomionarvoisaa on, että säieteoria ennusti aika-avaruuden ulottuvuuksien lukumäärän. Mikäli säieteoria pätee, aika-avaruudessa voi olla vain tietty määrä ulottuvuuksia, tässä tapauksessa 26. Tähän tulokseen olisi voitu päästä myös käyttämällä matemaattisesti vähintäänkin epäilyttävää väitettä, jonka mukaan  $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$ . [1][4]

## 3.2. Suljetut säikeet

Tarkastellaan seuraavaksi suljettua kvanttibosonisäiettä. Käsittely on hyvin pitkälti samanlaista kuin avoimen säikeen tapauksessa, mutta nyt säikeen ratkaisussa esiintyy eri suuntiin eteneviä aaltoja, joita molempia kuvaavat samanlaiset operaattorit kuin edellä. Merkitään oikealle etenevän aallon operaattoreita  $\hat{\alpha}_n^\mu$  ja vasemmalle etenevän  $\hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$ . Näille pätee

$$\hat{\alpha}_0^\mu = \hat{\tilde{\alpha}}_0^\mu. \quad (3.39)$$

Liikemäärä on

$$\hat{p}^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \hat{\alpha}_0^\mu. \quad (3.40)$$

Vertaamalla tätä avoimen säikeen tapaukseen (3.20) nähdään, että suljetun säikeen liikemäärä on kaksi kertaa suurempi. Liikeyhtälö on jälleen aaltoyhtälö (3.5), jonka ratkaisulle vaaditaan  $\hat{X}^\mu(\tau, \sigma) = \hat{X}^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ . Yleisin ratkaisu on

$$\hat{X}^\mu(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\hat{\alpha}_n^\mu e^{in\sigma} + \hat{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}). \quad (3.41)$$

Kuten avoimelle säikeelle, myös suljetulle säikeelle määritellään Virasoron operaattorit, joita on nyt kaksi erilaista:

$$\hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{n-p}^I, \quad \hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{n-p}^I. \quad (3.42)$$

Koska  $\hat{\alpha}_0^\mu = \hat{\alpha}_0^\mu$ , saadaan

$$\hat{L}_0^\perp = \hat{L}_0^\perp. \quad (3.43)$$

Myös suljetun säikeen operaattoreissa  $\hat{L}_0^\perp$  ja  $\hat{L}_0^\perp$  esiintyy ääretön summa luonnollisista luvuista. Edetään kuten avoimen säikeen tapauksessa, merkitään sitä  $a$ :lla ja  $\bar{a}$ :lla, ja määritellään kyseiset operaattorit ilman tätä termiä

$$\hat{l}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{a}_n^{I\dagger} \hat{a}_n^I = \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \hat{N}^\perp, \quad (3.44)$$

$$\hat{\bar{l}}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{\bar{a}}_n^{I\dagger} \hat{\bar{a}}_n^I = \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \hat{\bar{N}}^\perp, \quad (3.45)$$

missä  $\hat{N}^\perp$  ja  $\hat{\bar{N}}^\perp$  ovat numero-operaattoreita. Tästä seuraa, että  $\hat{N}^\perp = \hat{\bar{N}}^\perp$ . Tästä voidaan edetä samalla tavalla kuin avoimen säikeen tapauksessa, jolloin saadaan

$$D = 26, \quad a = \bar{a} = -1. \quad (3.46)$$

Suljetun säikeen massa on tällöin

$$\hat{m}^2 = \frac{2}{\alpha'} (\hat{N}^\perp + \hat{\bar{N}}^\perp - 2). \quad (3.47)$$

Hamiltonin operaattori voidaan kirjoittaa muotoon

$$\hat{H} = \hat{l}_0^\perp + \hat{\bar{l}}_0^\perp - 2. \quad (3.48)$$

[1][4]

### 3.3. Hiukkastilat

Säieteorian perusajatus on, että kaikki hiukkaset ovat säikeiden värähtelytiloja. Tarkastellaan seuraavaksi, millaisia hiukkastiloja edellä käsitellyt säikeet tuottavat. Tutkitaan avointa säiettä ja tiloja

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.49)$$

missä  $p^+$  on operaattorin  $\hat{p}^+$  ominaisarvo ja  $\vec{p}_T$  on operaattorin  $\hat{p}^I$  ominaisarvo eli liikemäärä kohtisuorassa suunnassa. Nämä tilat ovat oskillaattorien perustiloja, eli

$$\hat{a}_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 2 \dots 25. \quad (3.50)$$

Kaikki tilat voidaan nyt muodostaa perustilasta luomisoperaattoreiden avulla. Yleinen tila  $|\lambda\rangle$  voidaan kirjoittaa

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\hat{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \lambda_{n,I} \geq 0 \in \mathbb{Z}, \quad (3.51)$$

missä  $\lambda_{n,l}$  kertoo, kuinka monta kertaa operaattori  $\hat{a}_n^\dagger$  operoi. Tilat  $|\lambda\rangle$  muodostavat säikeen Hilbertin avaruuden kannan. Koska tämä kanta on ääretön, säieteoria kuvaa ääretöntä määrää erilaisia hiukkastiloja.

Tarkastellaan seuraavaksi, miten numero-operaattori

$$\hat{N}^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (3.52)$$

operoi kantatiloihin. Numero-operaattori ei kommutoi luomis- ja tuhoamisoperaattoreiden kanssa:

$$[\hat{N}^\perp, \hat{a}_n^\dagger] = n \hat{a}_n^\dagger, \quad [\hat{N}^\perp, \hat{a}_n] = -n \hat{a}_n. \quad (3.53)$$

Hyödyntämällä näitä kommutaatiorelaatioita ja  $\hat{N}^\perp$ :n määritelmää voidaan laskea  $\hat{N}^\perp |\lambda\rangle$ . Lasketaan, mitä tapahtuu, kun  $|\lambda\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle$  ja kun  $|\lambda\rangle = \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle$ :

$$\hat{N}^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad (3.54)$$

$$\hat{N}^\perp \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle = [\hat{N}^\perp, \hat{a}_1^\dagger] |p^+, \vec{p}_T\rangle + \hat{a}_1^\dagger \hat{N}^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.55)$$

Siis operaattorin  $\hat{N}^\perp$  ominaisarvot tiloissa  $|p^+, \vec{p}_T\rangle$  ja  $\hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle$  ovat 0 ja 1. Tällä on merkittäviä seurauksia, sillä operaattori  $\hat{N}^\perp$  esiintyy massan neliön lausekkeessa (3.38). Perustilan hiukkaselle  $\hat{N}^\perp = 0$ , joten sen massan neliö on

$$\hat{m}^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + \hat{N}^\perp) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.56)$$

Siis perustilalle  $m^2 < 0$ . Tällaisia hiukkasia kutsutaan takioneiksi. Ne ovat hypoteettisia hiukkasia, jotka liikkuvat valoa nopeammin. Ainakaan toistaiseksi niitä ei ole havaittu.

Tarkastellaan seuraavaksi viritystilaa, jolle  $\hat{N}^\perp = 1$ , eli tilaa  $|\lambda\rangle = \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle$ :

$$\hat{m}^2 \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + 1) \hat{a}_1^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (3.57)$$

Nämä tilat ovat massattomia, ja niitä on  $D - 2 = 24$  kappaletta. Ainoat toistaiseksi havaitut massattomat bosonit ovat fotoneita, joten jos nämä tilat voidaan identifioida sähkömagneettisen kentän kvanteiksi, olemme saaneet säieteorian yhtälöiden ratkaisuisista fysikaalisia hiukkasia.

Käytetään massattomia tiloja kantana ja kirjoitetaan yleinen massaton tila niiden lineaarikombinaationa:

$$|m=0\rangle = \sum_{l=2}^{25} c_l \hat{a}_l^\dagger |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.58)$$

Voidaan osoittaa, että  $D$ -ulotteisen aika-avaruuden valokartiokoordinaateissa sähkömagneettisen kentän kvantttilat ovat muotoa

$$|\gamma\rangle = \sum_{l=2}^{D-1} \xi_l \hat{a}_{p^+, \vec{p}_T}^{l\dagger} |0\rangle, \quad (3.59)$$

missä  $|0\rangle$  on tyhjiötila ja  $\xi_l$  on polarisaatiovektori. Nähdään, että tiloissa (3.58) ja (3.59) esiintyy samat koordinaatit, sillä on sama liikemäärä, sama massa ja kantatiloja on yhtä monta. Näin ollen tilat (3.58) voidaan tulkita sähkömagneettisen kentän kvanteiksi, fotoneiksi. [1] [4]

Tarkastellaan seuraavaksi suljettua säiettä. Yleinen perustila on jälleen  $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ , mutta nyt sekä vasem-  
malle että oikealle liikkuvien annihilaatio-operaattorien on hävitettävä perustila. Yleinen tila saadaan  
operoimalla operaattoreilla  $\hat{a}_n^{I\dagger}$  ja  $\hat{a}_n^{J\dagger}$  perustilaan:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\hat{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\hat{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \lambda_{n,I}, \bar{\lambda}_{m,J} \geq 0 \in \mathbb{Z}. \quad (3.60)$$

Kaikki näistä eivät kuitenkaan kuulu suljetun säikeen tila-avaruuteen, sillä, kuten edellä todettiin,  $\hat{N}^\perp =$   
 $\hat{N}^\perp$ . Ainoastaan tilat  $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ , jotka toteuttavat tämän ehdon, kuuluvat suljetun säikeen tila-avaruuteen.  
Edetään kuten edellä ja tarkastellaan tiloja, joille  $\hat{N}^\perp = 0$  ja  $\hat{N}^\perp = 1$ . Massan neliön lausekkeesta (3.47)  
saadaan perustilalle

$$\hat{m}^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.61)$$

Myös suljetun säikeen tapauksessa perustilan hiukkaset ovat takioneja. Ensimmäisille viritystiloille  $\hat{N}^\perp =$   
1, joten niiden massa on nolla. Näitä tiloja on  $(D-2) \times (D-2) = (D-2)^2$  kappaletta. Kirjoitetaan jälleen  
yleinen massaton tila näiden tilojen lineaarikombinaationa

$$|m=0\rangle = \sum_{I,J} R_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.62)$$

missä  $R_{IJ}$  ovat  $(D-2) \times (D-2)$  -matriisin elementtejä. Kaikki neliömatriisit voidaan hajottaa symmet-  
riseen ja antisymmetriseen osaan:

$$R_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI}) + \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI}) = S_{IJ} + A_{IJ}. \quad (3.63)$$

Symmetrinen osa  $S_{IJ}$  voidaan vielä hajottaa symmetriseen jäljettömään osaan  $\bar{S}_{IJ}$  ja identiteettimatriisin  
 $\delta_{IJ}$  monikertaan. Matriisi  $R$  on tällöin:

$$R_{IJ} = \bar{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}. \quad (3.64)$$

Yleinen massaton tila (3.62) voidaan nyt kirjoittaa kolmessa osassa:

$$|m=0\rangle = \sum_{I,J} \bar{S}_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (3.65)$$

$$+ \sum_{I,J} A_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (3.66)$$

$$+ S' \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.67)$$

Voidaan osoittaa, että valokartiokoordinaateissa gravitaatiokentän kvantteja kuvaavat tilat ovat

$$|g\rangle = \sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} \hat{a}_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |0\rangle, \quad (3.68)$$

missä  $\xi_{IJ}$  on symmetrinen polarisaatiotensori, jolle pätee  $\xi_{II} = 0$ . Vertaamalla tiloja (3.65) ja (3.68) näh-  
dään, että niillä on sama massa, sama liikemäärä ja samat koordinaatit. Lisäksi matriisit  $\bar{S}_{IJ}$  ja  $\xi_{IJ}$  ovat  
molemmat symmetrisiä ja jäljettömiä. Tästä voidaan päätellä, että tilat (3.65) kuvaavat gravitoneja. Tilo-  
ja (3.66) kutsutaan Kalb-Ramondin hiukkasiksi ja tilaa (3.67) dilatoniksi, joita kumpaakaan ei tosin ole  
havaittu. [1][4]

On siis osoitettu, että avoimen bosonisäikeen värähtelytiloissa esiintyy massattomia tiloja, jotka voidaan  
tulkita fotoneiksi. Vastaavasti suljetun säikeen massattomat värähtelytilat voidaan tulkita gravitoneiksi.

Tästä saadaan mahdollinen selitys sille, miksi gravitaatio on paljon heikompi vuorovaikutus kuin sähkömagnetismi. Kuten edellä todettiin, avoimet säikeet ovat kiinnittyneet D-braaneihin, joten ne tuntevat ainoastaan D-braanien rajaamat ulottuvuudet. Suljetut säikeet sen sijaan värähtelevät vapaasti kaikissa ulottuvuuksissa. Monet säieteoriasta johdetut mallit ehdottavat, että fotonit, leptonit ja kvarkit ovat avointen, D3-braaneihin kiinnittyneiden, säikeiden värähtelytiloja. Tällöin sähkömagneettinen kenttä esiintyy vain näissä kolmessa ulottuvuudessa. Gravitoni puolestaan on suljetun säikeen värähtelytila, joten se vaikuttaa kaikissa ulottuvuuksissa. Näin ollen gravitaation heikkous olisi vain näennäistä; voimme havaita gravitaatiosta ainoastaan sen osan, joka vaikuttaa meidän kolmessa ulottuvuudessamme. [1][4]

### 3.4. Supersäikeet

Edellä tarkastelimme bosonisäieteorioita. Nämä teoriat eivät ole fysikaalisia, sillä ne kuvaavat ainoastaan bosonitiloja. Lisäksi perustilan hiukkaset olivat takioneita. Tämä aiheuttaa sen, että perustilat eivät ole stabiileja. Nämä ongelmat korjaantuvat tarkastelemalla supersäikeitä.

Supersäieteoriat voidaan yleistää bosonisäieteoriasta lisäämällä säikeen vaikutusintegraaliin  $S_B$  termi  $S_F$ , joka kuvaa spinorikenttiä:

$$\begin{aligned} S &= S_B + S_F, \\ S_B &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X'^I X'^I), \\ S_F &= \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int d\sigma [\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Avoimen supersäikeen ratkaisuihin saadaan bosonitilat sisältävä Neveu-Schwarz -sektori ja fermionitilat sisältävä Ramond-sektori. Suljettu supersäie voidaan muodostaa yhdistämällä kaksi avointa säiettä. Samanmassaisia bosoni- ja fermionitiloja on yhtä monta, joten teoria on supersymmetrinen. Kummankaan säikeen spektrissä ei esiinny takionitiloja, joten teoria on stabiili. Teoria on fysikaalinen vain, jos ulottuvuuksien lukumäärä on  $D = 10$ . [1][4]

Tällä hetkellä tunnetaan viisi supersäieteoriaa: Tyypit IIA, IIB ja I, sekä heterootiset  $E_8 \times E_8$  ja  $SO(32)$ . Tyypit IIA ja IIB eroavat toisistaan siten, että IIB:n hiukkasilla esiintyy kiraalisuutta. Kiraalisuus on standardimallissa fermionien ominaisuus, jossa vasenkätisillä (oikeakätisillä) hiukkasilla ja oikeakätisillä (vasenkätisillä) antihiukkasilla on vastakkaismerkkinen varaus. Fermioni on oikeakätinen, jos sen spin osoittaa sen liikkeen suuntaan, ja vasenkätinen, jos sen spin on liikkeelle vastakkaiseen suuntaan. Tyypin I teoria saadaan sopivalla projektiolla tyypin IIB teoriasta. Tyypin II teoriat ja heterootiset teoriat eroavat toisistaan siinä, miten teoriassa käsitellään suljettuja säikeitä. Tyypin II suljetut säikeet saadaan yhdistämällä kaksi avointa supersäiettä. Heterootiset suljetut säikeet puolestaan saadaan yhdistämällä avoin kymmenessä ulottuvuudessa oleva supersäie kahdessakymmenessä ulottuvuudessa olevaan bosonisäikeeseen. Efektiivisesti teoria on kuitenkin kymmenenulotteinen. On mahdollista, että nämä viisi teoriaa ovat vain yhden teorian erilaisia raja-tapauksia. [1][4]

## 4. Ulottuvuudet

Edellä osoitettiin, että säieteoria vaatii toimiakseen tietyn määrän aika-avaruuden ulottuvuuksia. Voidaan ajatella (mikäli hypoteesi säikeistä on oikea), että säieteoria ennustaa aika-avaruuden ulottuvuuksien lu-

kumäärän. Bosonisäieteorialle tämä lukumäärä oli  $D = 26$  ja supersäikeille  $D = 10$ . Tämän ennusteen ja havaintojen välillä on kuitenkin ilmiselvää ristiriitaa; havaitsemassamme maailmassa on vain yksi aikaulottuvuus ja kolme paikkaulottuvuutta. Jotta säieteoria olisi uskottava, tämä ongelma on kyettävä ratkaisemaan.

#### 4.1. Käpertyneet ulottuvuudet

Yksi selitys puuttuville ulottuvuuksille on, että ne ovat käpertyneet niin pieniksi, ettei niitä ole havaittu. Tarkastellaan seuraavaksi, miten tällaiset kompaktit ulottuvuudet vaikuttavat energiatiloihin. Tutkitaan yksinkertaisuuden vuoksi  $m$ -massaista hiukkasta yksiulotteisessa äärettömässä potentiaalikuopassa, jonka leveys on  $L$ . Tämän systeemin aaltofunktiot ja niitä vastaavat energiat ovat tunnetusti

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad (4.1)$$

missä  $n = 1, 2, 3, \dots$  on systeemin kvanttiluku. Lisätään nyt toinen ulottuvuus, joka on käpertynyt  $R$ -säteiseksi ympyräksi, joka on hyvin pieni verrattuna potentiaalikuopan kokoon. Tämä ulottuvuus on jaksoellinen

$$y = y + 2\pi R, \quad R \ll L. \quad (4.2)$$

Tämän järjestelmän ajasta riippumaton Schrödingerin yhtälö on muotoa

$$-\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = E\Psi. \quad (4.3)$$

Käytetään tähän muuttujien erottelua, jolloin saadaan kaksi differentiaaliyhtälöä  $x$ - ja  $y$ -suunnissa:

$$\frac{d^2 \psi_q(q)}{dq^2} = -2mE_q \psi_q(q), \quad q = x, y. \quad (4.4)$$

Reunaehdot  $x$ -suunnassa ovat  $\psi_x(0) = \psi_x(L) = 0$ . Vastaavasti  $y$ -suunnassa  $\psi_y(0) = \psi_y(2\pi R)$ . Yhtälön (4.3) (normalisoimaton) ratkaisu on tällöin

$$\Psi(x, y) = \psi_x(x)\psi_y(y) = A \sin\left(\frac{n_x \pi}{L}x\right) \left[ B \sin\left(\frac{n_y}{R}y\right) + C \cos\left(\frac{n_y}{R}y\right) \right], \quad n_x = 1, 2, \dots \quad n_y = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

Tiloja (4.5) vastaavat energiat ovat

$$E_{n_x n_y} = E_x + E_y = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{n_x \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{R} \right)^2 \right]. \quad (4.6)$$

Toisin kuin kvanttiluku  $n_x$ , kvanttiluku  $n_y$  voi saada arvon nolla. Kvanttilukua  $n_y = 0$  vastaavat energiat ovat samat kuin yksiulotteisen potentiaalikuopan tapauksessa (yhtälö (4.1)). Matalin uusi energia saadaan, kun molemmat kvanttiluvut saavat arvon yksi:

$$E_{11} = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{1}{R} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{2mR^2}. \quad (4.7)$$

Approksimaatio voidaan tehdä, koska  $R \ll L$ . Tarkastellaan, millä yksiulotteisen potentiaalikuopan tilalla on samaa luokkaa oleva energia.

$$\frac{1}{2mR^2} \sim \frac{\pi^2 n^2}{2mL^2} \iff n \sim \frac{L}{\pi R}. \quad (4.8)$$

Koska  $L$  on paljon suurempi kuin  $R$ , täytyy  $n$ :n olla hyvin suuri luku. Tästä voidaan päätellä, että pienten jaksollisten ulottuvuuksien vaikutus järjestelmään tulee näkyväksi vasta hyvin suurilla energioilla. Tämä tulos ei ainakaan sulje pois tällaisten pienten käpertyneiden ulottuvuuksien olemassaolon mahdollisuutta. Niiden havaitsemiseen voidaan tarvita hyvinkin korkeita energioita, joten on mahdollista, että ne ovat toistaiseksi jääneet huomaamatta. [1]

## 4.2. Ylimääräisten ulottuvuuksien vaikutus gravitaatioon

Tarkastellaan seuraavaksi, miten nämä ylimääräiset ulottuvuudet vaikuttavat vuorovaikutuksiin. Kuten edellä mainittiin, ainoastaan gravitaatio ulottuu kolmen havaittavan ulottuvuuden lisäksi näihin kompakteihin ulottuvuuksiin. Aloitetaan tarkastelu Newtonin gravitaatiolaista

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.9)$$

Massallisten hiukkasten välinen gravitaatiovoima  $F$  on kääntäen verrannollinen hiukkasten välisen etäisyyden  $r$  neliöön. Tämä on suora seuraus kolmiulotteisesta avaruudesta: pallon pinnan läpi kulkeva vuo on kääntäen verrannollinen pallon säteen neliöön. Kolmiulotteisessa avaruudessa gravitaatiopotentiaali on siis

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{r} \propto \frac{1}{r}. \quad (4.10)$$

Tarkastellaan nyt avaruutta, jossa on yhden aika- ja kolmen makroskooppisen paikkaulottuvuuden lisäksi  $n$  kappaletta kompakteja ulottuvuuksia, joiden kokoluokka on  $R$ . Yhteensä ulottuvuuksia on siis  $D = 1 + 3 + n$  kappaletta. Tällaisessa avaruudessa gravitaatiopotentiaali on muotoa

$$V(r) \propto \frac{1}{r^{1+n}}. \quad (4.11)$$

Tämä pätee kuitenkin vain kompaktien ulottuvuuksien kokoluokassa, jolloin gravitaatiovuo voi levitä kaikkiin paikkaulottuvuuksiin. Kun siirrytään makroskooppisiin ulottuvuuksiin, gravitaatiokentän vuo voi levitä vain kolmessa ulottuvuudessa (tällöin efektiivisesti  $n = 0$ ), jolloin tuloksena on yhtälön (4.10) mukainen potentiaali. [3]

Mikäli kompakteja ulottuvuuksia on olemassa ja ne vaikuttavat gravitaatioon, pitäisi riittävän pienillä etäisyyksillä siis havaita poikkeamia Newtonin gravitaatiolaista. Yritetään saada jonkinlainen suuruusluokkarvio näille ulottuvuuksille. Kirjoitetaan seuraavassa luonnonvakiot  $G$ ,  $c$  ja  $\hbar$  näkyviin. Gravitaatiopotentiaali toteuttaa yhtälön

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho_m, \quad (4.12)$$

missä  $\rho_m$  on massatiheys. Nyt  $\nabla^2 V$ :n yksikkö on aina sama riippumatta ulottuvuuksien lukumäärästä. Massatiheyden yksikkö sen sijaan on  $M/V = M/L^d$ , missä  $M$  ja  $L$  ovat massan ja pituuden yksiköt. Massatiheyden yksikkö siis riippuu ulottuvuuksien lukumäärästä. Jotta yhtälön (4.12) yhtäsuuruus pätsisi kaikissa ulottuvuuksissa, on  $G$ :n yksikön riiputtava ulottuvuuksien lukumäärästä. Olkoon  $G$  gravitaatiovakio neliulotteisessa aika-avaruudessa, ja merkitään  $G^{(D)}$ :llä vastaavaa  $D$ -ulotteisessa tapauksessa. Nyt siis  $G^{(D)} \rho_m$ :n yksikkö on sama kaikissa ulottuvuuksissa:

$$\frac{[G^{(D)}]M}{L^{D-1}} = \frac{[G]M}{L^3} \implies [G^{(D)}] = [G]L^{D-4}. \quad (4.13)$$

Planckin pituuden määritelmästä (2.1) saadaan  $G$ :n yksiköksi

$$[G] = \frac{[c]^3 L^2}{[\hbar]}. \quad (4.14)$$



$D$ -ulotteisessa tapauksessa pätee vastaavasti

$$[G^{(D)}] = \frac{[c]^3 L^{D-2}}{[\hbar]}. \quad (4.15)$$

Tästä voidaan ratkaista Planckin pituus  $D$ -ulotteisessa avaruudessa. Käyttämällä neliulotteisen Planckin pituuden määritelmää saadaan:

$$(L_P^{(D)})^{D-2} = \frac{\hbar G^{(D)}}{c^3} = \frac{\hbar G G^{(D)}}{c^3 G} = L_P^2 \frac{G^{(D)}}{G}. \quad (4.16)$$

Tarkastellaan seuraavaksi kappaletta, joka kolmessa tilaulottuvuudessa on pistemäinen. Asetetaan se pisteeseen  $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ . Sen massatiheys voidaan kirjoittaa  $\delta$ -funktioiden avulla

$$\rho = M \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3), \quad (4.17)$$

missä  $M$  on kappaleen massa. Oletetaan, että kappale on rengasmaisen kompakteissa ulottuvuuksissa. Olkoon renkaan säde sama kuin kompaktien ulottuvuuksien ( $R$ ). Kappaleen massa on tällöin

$$M = \rho^{(D-4)} (2\pi R)^{D-4}, \quad (4.18)$$

missä  $\rho^{(D-4)}$  on massatiheys käpertyneissä ulottuvuuksissa. Tähän liittyy kokonaisuusmassatiheys, joka myös voidaan kirjoittaa  $\delta$ -funktioiden avulla

$$\rho^{(D)} = \rho^{(D-4)} \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3). \quad (4.19)$$

Massatiheyksien  $\rho^{(D)}$  ja  $\rho$  välillä on täten relaatio

$$\rho^{(D)} = \frac{1}{(2\pi R)^{D-4}} \rho. \quad (4.20)$$

Gravitaatiopotentiaali (4.12) voidaan kirjoittaa  $D$ -ulotteisena

$$\nabla^2 V^{(D)}(x^1, x^2, x^3) = 4\pi G^{(D)} \rho^{(D)} = 4\pi \frac{G^{(D)}}{(2\pi R)^{D-4}} \rho. \quad (4.21)$$

Koska potentiaali  $V$  riippuu vain koordinaateista  $x^1, x^2$  ja  $x^3$  ja koska neliulotteinen gravitaatiopotentiaali on keskiarvo  $V^{(D)}$ :stä kompaktien koordinaattien  $x^4, \dots, x^D$  yli on tässä tapauksessa suoraan  $V^{(D)}$ , yllä oleva on itse asiassa yhtälö neljässä ulottuvuudessa:

$$\nabla^2 V(x^1, x^2, x^3) = 4\pi \frac{G^{(D)}}{(2\pi R)^{D-4}} \rho = 4\pi G \rho. \quad (4.22)$$

Tästä saadaan relaatio neliulotteisen ja  $D$ -ulotteisen gravitaatiiovakion sekä kompaktin ulottuvuuden pituuden  $L_C = 2\pi R$  välille:

$$G^{(D)} = G (2\pi R)^{D-4} \implies (L_C)^{D-4} = \frac{G^{(D)}}{G}. \quad (4.23)$$

Yhtälöistä (4.16) ja (4.23) voidaan nyt ratkaista  $L_C$

$$L_C = L_P^{(D)} \left( \frac{L_P^{(D)}}{L_P} \right)^{\frac{2}{D-4}}. \quad (4.24)$$

Nyt voidaan esittää arvio kompaktien ulottuvuuksien koolle. Nykyisillä hiukkaskiihdyttimillä voidaan tutkia kokoluokan  $10^{-16}$  cm etäisyyksiä. Valitaan  $L_P^{(D)}$  pienemmäksi kuin tämä, esimerkiksi  $10^{-18}$  cm. Uskotaan supersäieteoriaa ja valitaan  $D = 10$ . Tällöin saadaan

$$L_C \sim 10^{-18} \left( \frac{10^{-18}}{10^{-33}} \right)^{\frac{2}{10-4}} \text{ cm} = 10^{-13} \text{ cm}. \quad (4.25)$$

Tämän karkean arvion perusteella voidaan todeta, että gravitaation pitäisi poiketa Newtonin gravitaatio-laista tämän kokoluokan etäisyyksillä. Näitä etäisyyksiä on tutkittava hiukkaskiihdyttimillä. Gravitaation heikkous suhteessa muihin vuorovaikutuksiin aiheuttaa kuitenkin ongelmia, sillä hiukkasten välistä gravitaatiota on hyvin vaikea havaita. Mikäli hiukkaskiihdyttimissä pystyttäisiin luomaan gravitoneja, osa niistä voisi siirtyä kompakteihin ulottuvuuksiin, jolloin voitaisiin havaita poikkeamia energian säilymisessä. [1][3]

Kokeiden perusteella Newtonin gravitaatiolaki pätee ainakin viidenkymmenen mikrometrin etäisyyksillä. Nyt saatu arvio kompaktien ulottuvuuksien koolle on siis hyvin sopusoinnussa havaintojen kanssa. [1]

## 5. Ongelmat

Säieteorioiden suurin ongelma on kokeellisten havaintojen puute ja kokeiden tekemisen vaikeus, ehkä jopa mahdottomuus. Suorien havaintojen saaminen säikeistä edellyttää useita kertaluokkia suurempia hiukkaskiihdyttimiä kuin mitä tällä hetkellä on saatavilla. Yksi ongelma on myös säieteorioiden rajoittuneisuus; ne toimivat vain tarkasti määrättyssä määrässä ulottuvuuksia, toisin kuin esimerkiksi sähkömagnetismin teoria, jonka voi yleistää useampaankin ulottuvuuteen.

Hyvin suuri ongelma teorian kannalta ovat erilaiset mahdolliset mallit, joita säieteoria tuottaa. Näitä mahdollisia malleja on arviolta  $10^{500}$  kappaletta [1]. Vaikka jokin niistä olisi standardimalli, sen todistaminen on hyvin vaikeaa. Tässä vaiheessa on hyvä mainita yhtymäkohta säieteorioiden ja kosmologian välillä. Nykyään on yleistymässä ajatus multiversumeista. Multiversumi on hypoteettinen joukko rinnakkaisia universumeita, joista yksi on se universumi, jonka me havaitsemme. On esitetty laskelmiin perustuvia arvioita tällaisessa multiversumissa olevien universumien lukumääristä. Säieteorioiden ennusteiden pohjalta tehtyjen laskelmien mukaan olisi olemassa  $10^{10^{375}}$  kappaletta erilaisia universumeita [5]. Mikäli multiversumihypoteesi pitäisi paikkansa, se voisi olla säieteorioiden kannalta hyvä, sillä säieteoriat pystyisivät mahdollisesti ennustamaan myös muiden universumeiden ominaisuuksia. Tämä on kuitenkin, ainakin toistaiseksi, fysiikan ulkopuolista spekulatiota, sillä kokeellisia havaintoja ei ole.

## 6. Yhteenveto

Toistaiseksi gravitaatiolle ei ole kehitetty toimivaa kvanttiteoriaa. Yksi lupaavista ehdokkaista kvantti-gravitaation teoriaksi ja myös kaikki perusvuorovaikutukset yhdistäväksi kaiken teoriaksi on säieteoria, jossa hiukkaset syntyvät relativististen kvanttisäikeiden eri värähtelytiloista. Yksi näistä värähtelytiloista on gravitaation välittäjähiukkanen, gravitoni. Säikeiden spektriin kuuluu myös muita hiukkasia, esimerkiksi fotoni. Tämä antaa viitteitä siitä, että säieteoria voisi olla kaiken teorian, joka siis selittäisi kaikki maailmankaikkeuden perusvuorovaikutukset. Säieteoriat toimivat vain tietyssä määrässä ulottuvuuksia, joita bosonisäieteorioissa on 26 ja supersäieteorioissa 10 kappaletta. Ylimääräiset ulottuvuudet on tulkittu olevan hyvin pieniksi käpertyneinä, jolloin niitä ei ole voitu havaita. Nämä käpertyneet ulottuvuudet myös mahdollistavat jonkinlaisen selityksen gravitaation suhteelliselle heikkoudelle: Gravitaatio on ainoa perusvuorovaikutus, joka vaikuttaa kaikissa ulottuvuuksissa. Tällöin gravitaatio, joka voidaan havaita, on vain osa todellisesta gravitaatiosta.

Toistaiseksi säieteorioista ei ole voitu luoda toimivaa mallia, joka tuottaisi hiukkasfysiikan standardimallin. Säieteorioiden ongelma onkin suuri määrä mahdollisia malleja. Lisäksi säieteorioiden kokeellinen tutkimus on käytännössä mahdotonta, sillä säikeiden kokoluokka on huomattavasti pienempi kuin mitä hiukkaskiihdyttimillä voidaan tutkia. Vaikka säieteorioista saataisiinkin ennusteita tuottava malli, joka kuvaa kaikkia tunnettuja hiukkasia, säikeiden olemassaolon ja sitä kautta säieteorian perushypoteesin paikkansapitävyyden varmentaminen on mahdotonta.

## Viitteet

- [1] B. Zwiebach: *A first course in string theory*, 2. painos (Cambridge university press, 2009); ss. 3-69, 194-212, 236-325.
- [2] H. D. Young, R. A. Freedman: *Univesity Physics*, 13. painos (Pearson Education, 2012); ss. 1490-1498.
- [3] A. Zee: *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2. painos (Princeton University Press, 2010); ss. 39, 40-42, 161-167.
- [4] J. H. Schwarz: *Introduction to Superstring Theory*, Luentomoniste, versio 9.8.2000, California institute of technology.
- [5] A. Linde, V. Vanchurin: *How many universes are in the multiverse?*, Physical Review D81, 083525 (2010).