Aritmeettisten funktioiden keskiarvot

Averages of Arithmetical Functions

Marko Hiltunen

Pro gradu -tutkielma

Helmikuu 2017

MATEMAATTISTEN TIETEIDEN TUTKINTO-OHJELMA
OULUN YLIOPISTO

Sisältö

1 Johdanto

Tutkielmassa perehdytään erilaisten aritmeettisten funktioiden ominaisuuksiin, kun muuttujan n arvo on suuri. Suurilla muuttujien arvoilla funktioiden arvot voivat vaihdella suurestikin, kuten esimerkiksi tekijäfunktiolla $d(n)$, jonka arvot vaihtelevat luvun kaksi ja mielivaltaisen suurten lukujen välillä. Vaihtelun määrä kasvaa merkittävästi, mitä suuremmaksi muuttujan n arvo kasvaa.

Vaihtelun takia aritmeettisten funktioiden käyttäytymistä on tämän takia hankala käsitellä suurilla muuttujan arvoilla. Joskus tutkimista auttaa aritmeettinen keskiarvo

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Keskiarvot tasoittavat vaihtelua, joten on järkevää olettaa keskiarvon käyttäytyvän säännöllisemmin suurillakin muuttujan arvoilla. Tämä pätee varsinkin aikaisemmin esitetylle tekijäfunktiolle $d(n)$. Työssä osoitetaan, että tekijäfunktion keskiarvo $\tilde{d}(n)$ on luokkaa $\log x$ suurilla arvoilla. Tarkemmin ilmaistuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{d}(n)}{\log n} = 1.$$

Tällöin funktion $d(n)$ keskiarvo on $\log n$. Dirichletin johtama tulos tekijäfunktion osittaissummille vuodelta 1849 on merkittävä, sillä se on tarkempi tulos kuin yllä oleva raja-arvo.

Keskiarvojen tutkimiseen tarvitaan mielivaltaisen funktion osasummia $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. Usein summauksen yläraja korvataan reaaliluvulla x, jolloin summa kirjoitetaan muodossa

$$\sum_{k\leq x} f(k),$$

missä k käy läpi kokonaisluvut ykkösestä lukuun x asti. Työssä perehdytään Eulerin φ-funktion, Möbius funktion sekä Mangoldt'n funktion keskiarvoihin. Työssä johdetaan myös Eulerin summakaava, joka on hyödyllinen keskiarvoja johdettaessa.

Tutkielman tärkeinpänä lähteenä on käytetty Tom M. Apostolin kirjaa *Introduction to Analytic Number Theory* [1].

2 Peruskäsitteitä

Lause 2.1. Kokonaisluku voidaan esittää alkulukujen tulona. Tällöin

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \text{ ja } b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$$

ja näiden lukujen suurin yhteinen tekijä eli $\mathrm{syt}(a,b)$ saadaan seuraavalla tavalla

$$\mathrm{syt}(a,b) = p_1^{min(a_1,b_1)} p_2^{min(a_2,b_2)} \cdots p_n^{min(a_n,b_n)}.$$

Todistus. Katso [2]. □

Merkitään tästä eteenpäin $\mathrm{syt}(a,b) = (a,b)$.

Määritelmä 2.2. Luvut x ja y ovat *suhteellisia alkulukuja*, jos $(x,y) = 1$.

Määritelmä 2.3. *Lattiafunktio* (eli porrasfunktio)

$$[\ ] \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

saadaan asettamalla

$$[x] \ = \ \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Merkitään vielä

$$\{x\} = x - [x],$$

missä $\{x\}$ tarkoittaa luvun *desimaaliosaa.* (Vertaa [3]).

Määritelmä 2.4. *Eulerin vakio* C määritellään yhtälöllä

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log(n)\right). \tag{1}$$

Määritelmä 2.5. Jos $g(x) > 0$ kaikille $x \geq a$, niin

$$f(x) = O(g(x)) \tag{2}$$

tarkoittaa sitä, että osamäärä $f(x)/g(x)$ on rajoitettu, kun $x \geq a$. Täten on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että

$$|f(x)| \leq Mg(x) \text{ kaikille } x \geq a.$$

Tällöin sanotaan, että funktio $f(x)$ on *iso O funktiosta* $g(x)$.

Määritelmä 2.6. Jos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

niin funktio $f(x)$ on *asymptoottinen* funktion $g(x)$ kanssa, kun x lähestyy ääretontä. Käytetään asymptoottisuudelle merkintää

$$f(x) \sim g(x), \text{ kun } x \to \infty.$$

Määritelmä 2.7. Määritellään *Riemannin* ζ*-funktio*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ kun } s > 1,$$

ja

$$\zeta(s) = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right), \text{ kun } 0 < s < 1.$$

3 Aritmeettisia funktioita

Määritelmä 3.1. *Möbius-funktio* $\mu(n)$ määritellään seuraavalla tavalla:

$$\mu(1) = 1.$$

Jos $n > 1, n \in \mathbb{N}$, niin $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\mu(n) = (-1)^k, \text{jos } a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1, \\ &\mu(n) = 0 \text{ muulloin.} \end{aligned} \tag{3}$$

Huomaa, että $\mu(n) = 0$ jos ja vain jos luvulla n on jokin neliötekijä.

Esimerkki 3.2. Lasketaan $\mu(9688)$. Jaetaan ensin luku alkulukutekijöihin. Saadaan $9688 = 2 \cdot 4844 = 2^2 \cdot 2422$. Luvun alkulukutekijöissä on ainakin yksi korkeampi potenssi tekijöillä kuin 1, jolloin määritelmän mukaan $\mu(9688) = 0$.

Lause 3.3. Summa

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 1, \\ 0, & \text{kun } n > 1. \end{cases}$$

Todistus. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan. Olkoon ensin $n = 1$, jolloin saadaan $\sum_{d|1} \mu(d) = [1/1] = 1$. Olkoon sitten $n > 1$. Tällöin luku n voidaan esittää alkulukutekijöidensä tulona $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{k_1}$, missä k on kokonaisluku. Nollasta eroavat termit saadaan, kun $d = 1$ ja sellaisista luvun n tekijöistä, jotka ovat erillisten alkulukujen tuloja. Täten

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(n) =& \mu(p_1) + \mu(p_2) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) \\ &+ \mu(p_1 p_2 p_3) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ =& 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k.\end{aligned}$$

Binomilauseen avulla lauseke saadaan muotoon $(1-1)^k$, mikä on nolla. □

Määritelmä 3.4. *Eulerin funktion* $\varphi(n)$ arvo on niiden lukujen $1 \leq k \leq n$ summa, jotka ovat luvun n kanssa suhteellisia alkulukuja. Täten

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n}{}' 1. \tag{4}$$

missä $'$ merkitsee, että summa käy läpi kaikki ne luvut k, jotka ovat luvun n kanssa suhteellisia alkulukuja.

Lemma 3.5. Funktion φ arvot voidaan laskea kaavasta

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

kun p on alkuluku ja $k \geq 1$ kokonaisluku.

Todistus. Koska p on alkuluku, niin luvut m, joille pätee $(p^k, m) \neq 1$, ovat alkuluvun p monikertoja. Nämä luvut ovat $p, 2p, 3p, ..., p^{k-1}p = p^k$. Näitä on yhteensä p^{k-1} kappaletta. Luvun p^k kanssa suhteellisia alkulukuja on tällöin $p^k - p^{k-1}$ kappaletta, mikä todistaa väitteen. □

Lemma 3.6. Funktiolle φ pätee $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, jos $(m, n) = 1$.

Todistus. Katso [2]. □

Esimerkki 3.7. Lasketaan $\varphi(36)$. Aritmetiikan peruslauseen nojalla $36 = 2^2 \cdot 3^2$, jolloin saadaan

$$\varphi(36) = \varphi(2^2)\varphi(3^2) = 4(1 - 1/2) \cdot 9(1 - 1/3) = 36 \cdot 1/2 \cdot 1/3 = 12.$$

Listaamalla luvut ovat 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31 ja 35.

Lause 3.8 (Funktioiden μ ja φ välinen yhteys)**.** Jos $n \geq 1$, niin

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

Todistus. Summan (4) voi kirjoittaa myös muodossa

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)}\right],$$

missä luku k käy läpi luvut $1, 2, \ldots, n$ ja summaa yhteen vain ne luvut, jotka ovat luvun n kanssa suhteellisia alkulukuja. Lauseen 3.3 nojalla summa saadaan muotoon

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d).$$

Koska $d|k$, niin $k = qd$, missä $1 \leq q \leq n/d$, sillä luku d jakaa myös luvun n. Koska $k = qd$, niin tällöin $1 \leq k \leq n$ jos ja vain jos $1 \leq q \leq n/d$. Täten viimeinen summa voidaan kirjoittaa muotoon

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

Tämä todistaa väitteen oikeaksi. □

Määritelmä 3.9. Määritellään aritmeettinen funktio I seuraavalla tavalla:

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = 1, \\ 0, & \text{jos } n > 1. \end{cases}$$

Tätä kutsutaan *identiteettifunktioksi.*

Määritelmä 3.10. Olkoon α reaaliluku tai kompleksiluku ja olkoon kokonaisluku $n > 1$. Tällöin *tekijäfunktio* $\sigma_\alpha(n)$ määritellään

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha. \tag{5}$$

Summassa luvun n tekijät korotetaan potenssiin α.

Kun $\alpha = 0$, niin $\sigma_0(n)$ on luvun n tekijöiden määrä. Tälle käytetään myös merkintää $d(n)$.

Kun $\alpha = 1$, niin $\sigma_1(n)$ on luvun n tekijöiden summa. Tälle käytetään myös merkintää $\sigma(n)$.

Olkoon p alkuluku ja $a \geq 1$. Tällöin lausekkeen $\sigma_\alpha(p^a)$ tekijät ovat $1, p, p^2, ..., p^a$, joten

$$\sigma_\alpha(p^a) = 1^\alpha + p^\alpha + p^{2\alpha} + ... + p^{a\alpha} = \begin{cases} \dfrac{p^{\alpha(a+1)} - 1}{p^\alpha - 1}, & \text{jos } \alpha \neq 0, \\ a + 1, & \text{jos } \alpha = 0. \end{cases}$$

Määritelmä 3.11. Määritellään *Mangoldt'n funktio* $\Lambda(n)$ seuraavasti: Jokaiselle kokonaisluvulle $n \geq 1$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{jos } n = p^m \text{ jollekin alkuluvulle } p \text{ ja luvulle } m \geq 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{6}$$

Esimerkki 3.12. Tarkastellaan lukuja 31, 32 ja 33. Näistä luku 31 on alkuluku. Tällöin $\Lambda(31) = \log 31$. Luku $32 = 2^5$, jolloin määritelmän mukaan $\Lambda(32) = \log 2$. Viimeisenä luku $33 = 3 \cdot 11$. Kahden alkuluvun tulo antaa määritelmän mukaan tuloksen nolla, joten $\Lambda(33) = 0$.

Lause 3.13. Jos $n \geq 1$, niin tällöin

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{7}$$

Todistus. Lause on tosi, jos $n = 1$, sillä molemmat puolet saavat arvon 0. Tarkastellaan tilannetta, jossa $n > 1$:

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}.$$

Ottamalla logaritmi puolittain saadaan

$$\log n = a_1 \log p_1 + a_2 \log p_2 + \ldots + a_r \log p_r = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k.$$

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön (7) oikeaa puolta. Nollasta eriävät termit tulevat jakajalta d, joka on muotoa p_k^m luvun m arvoilla $1, 2, \ldots, a_k$ ja $k = 1, 2, \ldots r$. Täten

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m).$$

Määritelmän 3.11 perusteella saadaan

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k = \log n,$$

mikä todistaa yhtälön (7). □

4 Multiplikatiivisuus ja yleistetyt konvoluutiot

Määritelmä 4.1. Jos f ja g ovat aritmeettisia funktioita, niin näiden funktioiden *Dirichletin tulo* on aritmeettinen funktio h, jonka määrittää tulo

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big). \tag{8}$$

Merkitään $f * g = h$ ja $(f * g)(n) = h(n)$.

Aritmeettisten funktioiden joukko varustettuna Dirichletin tulolla $*$ muodostaa Abelin ryhmän.

Lause 4.2. Olkoon f, g ja k aritmeettisia funktioita. Tällöin niille on voimassa

$$\begin{aligned} f * g &= g * f && (\textit{kommutatiivisuus}), \\ (f * g) * k &= f * (g * k) && (\textit{assosiatiivisuus}). \end{aligned}$$

sekä $(f * I)(n) = (I * f)(n) = f(n)$.

Todistus. Huomataan, että $f * g$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) g(b) = \sum_{a \cdot b = n} g(b) f(a) = (g * f)(n),$$

mistä seuraa kommutatiivisuus. Assossiatiivisuuden toteamiseksi merkitään $g * k = A$, jolloin saadaan $f * (g * k) = f * A$. Tällöin

$$\begin{aligned} (f * A)(n) &= \sum_{a \cdot d = n} f(a) A(d) = \sum_{a \cdot d = n} f(a) \sum_{b \cdot c = d} g(b) k(c) \\ &= \sum_{a \cdot b \cdot c = n} f(a) g(b) k(c). \end{aligned}$$

Toisaalta, jos $B = f * g$, niin tällöin saadaan $B * k$, joka voidaan kirjoittaa yllä olevaan summalausekemuotoon. Täten $f * A = B * k$ ovat yhtä pitäviä. □

4.1 Multiplikatiiviset funktiot

Dirichletin multiplikaatio muodosti Abelin ryhmän, kuten aikaisemmin totesimme. Tälle ryhmälle on olemassa tärkeä aliryhmä multiplikatiiviset funktiot.

Määritelmä 4.3. Aritmeettista funktiota f kutsutaan *multiplikatiiviseksi*, jos f ei ole identtisesti nolla ja jos

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{aina, kun } (m,n) = 1.$$

Multiplikatiivinen funktio on *täysin multiplikatiivinen*, jos $f(mn) = f(m)f(n)$ millä tahansa muuttujien m ja n arvoilla.

Lause 4.4. Jos f on multiplikatiivinen, niin tällöin $f(1) = 1$.

Todistus. Määritelmän mukaan $f(n \cdot 1) = f(n)f(1)$, sillä $(n,1) = 1$ kaikilla muuttujan n arvoilla. Määritelmän mukaan myös f ei ole identtisesti nolla, joten tästä seuraa $f(n) \neq 0$ millään muuttujan n arvolla. Näin $f(1) = 1$. $\square$

Lause 4.5. Funktio f on multiplikatiivinen jos ja vain jos

$$f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$$

kaikilla alkuluvuilla p ja kaikilla kokonaisluvuilla $a_i \geq 1$.

Todistus. "$\Rightarrow$"Olkoon f multiplikatiivinen. Tällöin sille pätee

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

aina kun $(m,n) = 1$. Nyt f koostuu erillisistä alkulukujen potensseista. Tällöin $(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$. Tästä saadaan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) &= f(p_1^{a_1} \cdots p_{r-1}^{a_{r-1}}) f(p_r^{a_r}) \\ &= ... = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r}). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"Olkoon $f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$. Jos n_1 ja n_2 ovat positiivisia kokonaislukuja ja $(n_1, n_2) = 1$, niin näiden lukujen alkulukuhajotelmat muodostuvat erillisistä alkulukujen joukoista. Tällöin oletuksen mukainen esitys on yhtä määritelmän kanssa, mikä todistaa lauseen. $\square$

Aikaisemmin esitelty tekijäfunktio on multiplikatiivinen.

4.2 Yleistetyt konvoluutiot

Olkoon F reaali- tai kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty positiivisella x-akselilla siten, että $F(x) = 0$ kaikilla arvoilla $0 < x < 1$. Olkoon α mielivaltainen aritmeettinen funktio. Seuraavan tyyppiset summat

$$\sum_{n \leq x} \alpha(n) F\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

ovat yleisiä lukuteoriassa. Summa määrittelee uuden funktion G, jonka määrittelyjoukko on myös positiivinen x-akseli. $G(x) = 0$, kun $0 < x < 1$. Merkitään $G = \alpha \circ F$, jolloin saadaan

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Jos $F(x) = 0$ aina, kun x ei ole kokonaisluku, saadaan funktiosta F aritmeettinen funktio ja huomataan, että

$$(\alpha \circ F)(x) = (\alpha * F)(x)$$

kaikille kokonaisluvuille $m \geq 1$. Tällöin merkintää "$\circ$" voidaan pitää yleistyksenä Dirichletin konvoluution merkinnälle "$*$". Operaatio $\circ$ ei kuitenkaan aina ole kommutatiivinen tai assosiatiivinen. Kuitenkin seuraava lause tarjoaa vaihtoehdon assosiatiivisuudelle.

Lause 4.6. Olkoon α ja β aritmeettisia funktioita. Tällöin

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F. \tag{9}$$

Todistus. Kaikille $x > 0$ pätee

$$\big(\alpha \circ (\beta \circ F)\big)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) \sum_{m \leq x/n} \beta(m) F\Big(\frac{x}{mn}\Big) = \sum_{mn \leq x} \alpha(n)\beta(m) F\Big(\frac{x}{mn}\Big).$$

Merkitään nyt $k = mn$. Tällöin summa käy läpi luvut kaikki luvut k, jotka ovat pienempia kuin x. Funktion β muuttujaksi tulee (k/n) ja tuloon saadaan toinen summa, missä luku n jakaa luvun k, sillä edellisessä vaiheessa luvut m ja n käyvät läpi kaikki tulot, jotka olivat pienempiä kuin x. Tällöin saadaan

$$\sum_{mn \leq x} \alpha(n)\beta(m) F\Big(\frac{x}{mn}\Big) = \sum_{k \leq x} \Bigg(\sum_{n|k} \alpha(n)\beta\Big(\frac{k}{n}\Big)\Bigg) F\Big(\frac{x}{k}\Big).$$

Käytetään Määritelmää 4.1, jolloin sisempi summa voidaan korvata funktioiden α ja β Dirichletin tulolla. Tällöin saadaan

$$\sum_{k \leq x} (\alpha * \beta)(k) F\Big(\frac{x}{k}\Big) = \big((\alpha * \beta) \circ F\big)(x).$$

□

Identiteettikuvaus $I(n) = [1/n]$ on vasemmanpuoleinen identiteetti operaatiolle "$\circ$", sillä

$$(I \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{1}{n}\right] F\left(\frac{x}{n}\right) = F(x).$$

5 Eulerin summakaava

Joskus on mahdollista saada osittaissumman asymptoottinen arvo vertaamalla sitä integraaliin. Eulerin summakaavalla saadaan selville tarkka virhe tähän approksimointiin.

Lause 5.1. Jos funktiolla f on jatkuva derivaatta f' välillä $[y, x]$, missä $0 < y < x$, niin tällöin

$$\begin{aligned} \sum_{y<n\leq x} f(n) &= \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - [t])f'(t)dt \\ &\quad + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y). \end{aligned} \tag{10}$$

Todistus. Olkoon $m = [y]$ ja $k = [x]$. Kokonaisluvuille n ja $n-1$ välillä $[y, x]$ saadaan

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n} [t]f'(t)dt &= \int_{n-1}^{n} (n-1)f'(t)dt = (n-1)(f(n) - f(n-1)) \\ &= (nf(n) - (n-1)f(n-1)) - f(n). \end{aligned}$$

Koko alueen yli voidaan muodostaa integraalien summa

$$\int_{m+1}^{m+2} [t]f'(t)dt + \int_{m+2}^{m+3} [t]f'(t)dt + ... + \int_{k-1}^{k} [t]f'(t)dt.$$

Integraaleista muodostuu teleskooppisumma. Täten voidaan muodostaa yksi integraali, missä alarajaksi tulee $m+1$ ja ylärajaksi k:

$$\begin{aligned} \int_{m+1}^{k} [t]f'(t)dt &= kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{n=m+2}^{k} f(n) \\ &= kf(k) - mf(m+1) - \sum_{y<n\leq x} f(n). \end{aligned}$$

Koska luvut x ja y kuuluvat reaalilukuihin ja $[x] = k$ sekä $[y] = m$, niin integraalista puuttuvat vielä välit $[y, m+1]$ sekä $[k, x]$. Integroitaessa ensimmäinen väli saadaan

$$\int_y^{m+1} [t]f'(t)dt = \int_y^{m+1} mf'(t)dt = m(f(m+1) - f(y)) = mf(m+1) - mf(y).$$

Integroitaessa viimeinen väli

$$\int_k^x [t]f'(t)dt = \int_k^x kf'(t)dt = k(f(x) - f(k)) = kf(x) - kf(k).$$

Summaamalla integraalit koko välin $[y, x]$ yli saadaan

$$\begin{aligned}\int_y^x [t]f'(t)dt =& mf(m+1) - mf(y) + kf(k)\\ &- mf(m+1) - \sum_{y<n\leq x} f(n) + kf(x) - kf(k)\\ =& kf(x) - mf(y) - \sum_{y<n\leq x} f(n).\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_y^x [t]f'(t)dt + kf(x) - mf(y). \tag{11}$$

Merkitään nyt $k = x - \{x\}$ ja $m = y - \{y\}$, jolloin saadaan

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_y^x [t]f'(t)dt + xf(x) - yf(y) - \{x\}f(x) + \{y\}f(y). \tag{12}$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)dt$$

eli

$$xf(x) - yf(y) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x tf'(t)dt.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (12) saadaan

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_y^x [t]f'(t)dt + \int_y^x f(t)dt + \int_y^x tf'(t)dt - \{x\}f(x) + \{y\}f(y)$$

Ensimmäinen ja kolmas integraali voidaan yhdistää, jolloin saadaan

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t) + \int_y^x (t - [t])f'(t)dt - \{x\}f(x) + \{y\}f(y).$$

Sijoitetaan nyt $\{x\} = x - [x]$ ja $\{y\} = y - [y]$, jolloin saadaan

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t) + \int_y^x (t - [t])f'(t)dt + ([x] - x)f(x) - ([y] - y)f(y).$$

$\square$

6 Asymptoottikaavoja

Seuraavassa lauseessa esitellään erilaisia asymptoottikaavoja, jotka ovat seurausta Eulerin summakaavasta. Kaavoissa C on Eulerin vakio, ζ Riemannin zeta-funktio ja $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lause 6.1. Olkoon $x \geq 1$, niin tällöin

(a) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\Big(\frac{1}{x}\Big).$

(b) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$, kun $s > 0$ ja $s \neq 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$, kun $s > 1$.

(d) $\displaystyle\sum_{n\leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha)$, kun $\alpha \geq 0$.

Todistus. Kohtaan (a) valitaan funktioksi $f(t) = 1/t$ ja sijoitetaan tämä Eulerin summakaavaan, jolloin saadaan

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{1<n\leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x}. \tag{13}$$

Arvioidaan termiä $(x - [x])/x$. Koska osoittajaan jää jäljelle luvun x desimaaliosa, joka on pienempi kuin yksi, niin tällöin

$$f(x) = \frac{x-[x]}{x} < \frac{1}{x} = g(x).$$

Täten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x - [x] < 1 = M.$$

Tästä seuraa, että $|f(x)| < Mg(x)$, jolloin saadaan

$$f(x) = \frac{x-[x]}{x} = O(g(x)) = O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (13), jolloin saadaan

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 + O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Nyt

$$-\int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}dt = -\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{t-[t]}{t^2}dt + \lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{t-[t]}{t^2}dt, \tag{14}$$

sillä vasemmalla puolella on väli luvusta 1 lukuun x ja oikealla puolella on epäoleellinen integraali luvusta 1 äärettömään, johon lisätään epäoleellinen integraali luvusta x äärettömään. Tällöin integrointiväli pysyy samana. Jälkimmäinen epäoleellinen integraali on olemassa, sillä se suppenee, kun muuttuja lähestyy ääretöntä. Tällöin integraalia voidaan arvioida ylöspäin

$$0 \le \lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{t-[t]}{t^2}dt \le \lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{x}.$$

Täten edellä arvioitu integraali sisältyy funktioon $O(1/x)$ ja yhtälö sievenee muotoon

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt + O\Big(\frac{1}{x}\Big). \tag{15}$$

Yhtälö (a) pitää paikkaansa, jos

$$C = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt.$$

Kun muuttuja x lähestyy ääretöntä, siirtämällä yhtälön (15) termejä sopivasti saadaan

$$1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt = \lim_{x\to\infty}\bigg(\sum_{n\le x}\frac{1}{n} - \log x\bigg).$$

Tämä on Määritelmän 2.4 nojalla Eulerin vakio C, mikä todistaa kohdan (a).

Kohtaan (b) valitaan funktioksi $f(x) = x^{-s}$, missä $s > 0$ ja $s \neq 1$ ja sijoitetaan se Eulerin summafunktioon, jolloin saadaan

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = 1 + \sum_{1<x\le x} = \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x^s}. \tag{16}$$

Integroitaessa ensimmäinen termi saadaan integraalifunktioksi $(t^{1-s})/(1-s)$, johon sijoittamalla yläraja ja alaraja saadaan $(x^{1-s})/(1-s) - (1)/(1-s)$. Edellisen yhtälön viimeistä termiä voidaan arvioida samalla tavalla kuin tehtiin yhtälössä (13), jolloin saadaan

$$\frac{x-[x]}{x^s} < \frac{1}{x^s}.$$

Täten voidaan merkitä

$$\frac{x-[x]}{x^s} = O(\frac{1}{x^s}) = O(x^{-s}).$$

Tarkastellaan seuraavaksi toista integraalia. Muokkaamalla integrointivälejä, kuten yhtälössä (14) saadaan

$$-\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt = -\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{t-[t]}{t^{s+1}} + \lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt.$$

Arvioidaan integraalia välillä $[x, c]$ ylöspäin ja integroidaan sen jälkeen, jolloin saadaan

$$\lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{t-[t]}{t^{s+1}} < \lim_{c\to\infty}\int_x^c \frac{1}{t^{s+1}} = \frac{1}{x^s} = x^{-s}.$$

Saatu x^{-s} saadaan sisällytettyä virhetermiin $O(x^{-s})$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (16) saadaan

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + O(x^{-s}).$$

Merkitään seuraavaksi

$$C(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

ja sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s}). \tag{17}$$

Jos $s > 1$ ja muuttuja x lähestyy ääretöntä, niin yhtälön (17) vasen puoli lähestyy funktiota $\zeta(s)$ ja termit x^{1-s} sekä x^{-s} lähestyvät nollaa. Täten $\zeta(s) = C(s)$.

Jos $0 < s < 1$ ja luku x lähestyy ääretöntä, niin termi x^{-s} lähestyy nollaa, jolloin yhtälö (17) saadaan muotoon

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s}\right) = C(s).$$

Nyt $C(s) = \zeta(s)$ aina kun $0 < s < 1$, mikä todistaa kohdan (b) oikeaksi.

Kohdan (c) todistamiseen käytetään kohtaa (b), kun $s > 1$, jolloin saadaan

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-s}) = O(x^{1-s}).$$

Tulokseen päädytään approksimoimalla $x^{-s} \leq x^{1-s}$. Tämä pätee, sillä $s > 1$.

Kohdan (d) todistamisessa, sijoitetaan Eulerin summakaavaan $f(t) = t^{\alpha}$. Tällöin saadaan

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = 1 + \sum_{1<n\leq x} n^{\alpha} = \int_1^x t^{\alpha} dt + \alpha \int_1^x t^{\alpha-1}(t-[t])dt + 1 - (x-[x])x^{\alpha}. \quad (18)$$

Arvioidaan ensin $t - [t] < 1$ ja integroidaan jälkimmäinen integraali, jolloin saadaan

$$\alpha \int_1^x t^{\alpha-1}(t-[t])dt < \alpha \int_1^x t^{\alpha-1} dt = \alpha\Big(\frac{x^{\alpha}}{\alpha} - \frac{x^0}{\alpha}\Big) = x^{\alpha} - 1.$$

Samoin $x - [x] < 1$, jolloin saadaan $(x - [x])x^{\alpha} < x^{\alpha}$. Sijoittamalla nämä tulokset yhtälöön (18) ja merkitsemällä ylöspäin arvioituja termejä iso O funktioilla saadaan

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = \int_1^x t^{\alpha} dt + O(x^{\alpha}) - 1 + 1 + O(x^{\alpha}) = \int_1^x t^{\alpha} dt + O(x^{\alpha}).$$

Integroitaessa väli $[1, x]$ saadaan

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O(x^{\alpha}).$$

Koska termi $(-1/(\alpha+1))$ on vakio, niin se voidaan sisällyttää virhetermiin, jolloin saadaan haluttu muoto

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha}),$$

mikä todistaa kohdan (d). □

7 Aritmeettisten funktioiden keskiarvoja

Tässä kappaleessa perehdytään funktioiden $\sigma_{\alpha}(n)$ ja $\varphi(n)$ keskiarvoihin. Samalla todistetaan myös Dirichletin asymptoottikaava tekijäfunktiolle $d(n)$. Myöhemmin tarkastellaan vielä aritmeettisten funktioiden $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$ keskiarvoja sekä muita ominaisuuksia.

7.1 Funktion $d(n)$ keskiarvo

Lause 7.1. Kaikille luvuille $x \geq 1$ on voimassa

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}), \tag{19}$$

missä C on Eulerin vakio.

Todistus. Koska tekijäfunktio $d(n) = \sum_{d|n} 1$, niin

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1.$$

Sijoittamalla $n = qd$, missä q on kokonaisluku, saadaan kaksoissumma muotoon

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{\substack{q,d \\ qd \leq x}} 1. \tag{20}$$

Pisteparit qd, jotka toteuttavat ehdon $qd \leq x$, voidaan sijoittaa (q, d)-koordinaatistoon. Ehdon $qd = n$ täyttävät pisteparit asettuvat hilapisteiksi qd-tasolle ja ne sijaitsevat funktion $f(x) = n/x$ käyrällä, kuten Kuvasta 1 nähdään. Yhtälö (20) laskee hilapisteet luvun n arvoille $1, 2, 3, ..., [x]$. Jokaiselle kiinnitetylle luvulle $d \leq x$ voidaan laskea hilapisteiden määrä vaakarivillä, joka toteuttaa ehdon $1 \leq q \leq x/d$, ja tämän jälkeen voidaan laskea summa joukon $d \leq x$ yli. Tällöin yhtälö (20) saadaan muotoon

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{\substack{q,d \\ qd \leq x}} 1 = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} 1. \tag{21}$$

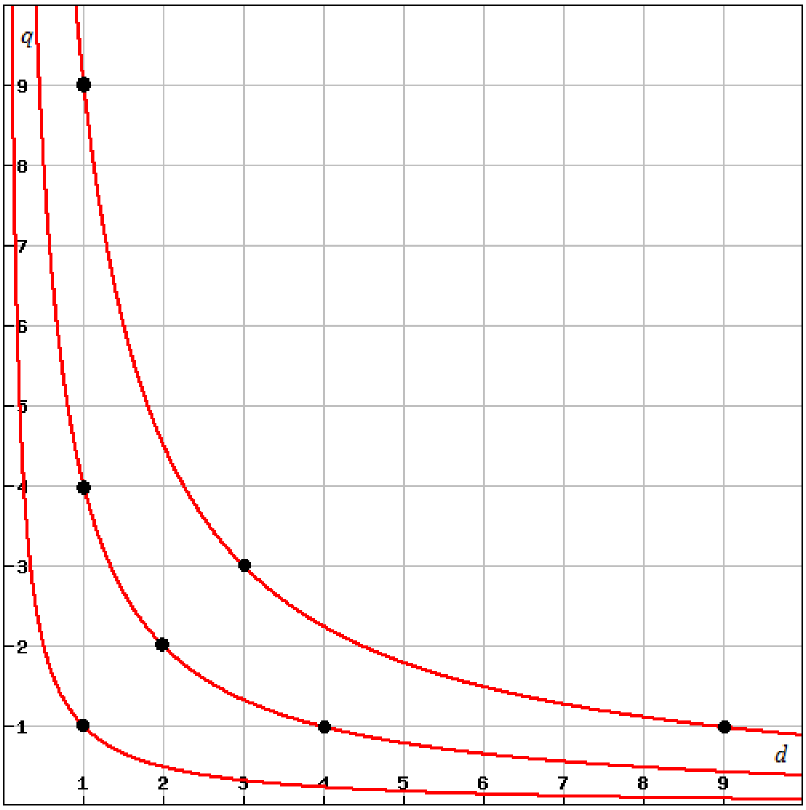
Seuraavaksi käytetään kohtaa (d) Lauseesta 6.1 ja kun $\alpha = 0$, jolloin

$$\sum_{q \leq x/d} 1 = \frac{x}{d} + O(1).$$

Lauseen 6.1 kohdan (a) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) =& \sum_{d \leq x} \Big(\frac{x}{d} + O(1) \Big) = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} + O(x) \\ =& x \left(\log x + C + O\Big(\frac{1}{x}\Big) \right) + O(x) = x \log x + O(x). \end{aligned}$$

Näin saatu tulos tekijöiden summalle on kokoluokkaa $x \log x$, kun luku x lähestyy ääretöntä. Tulos on heikompi versio yhtälöstä (19) ja se antaa funktion $d(n)$ keskiarvoksi $\log n$.



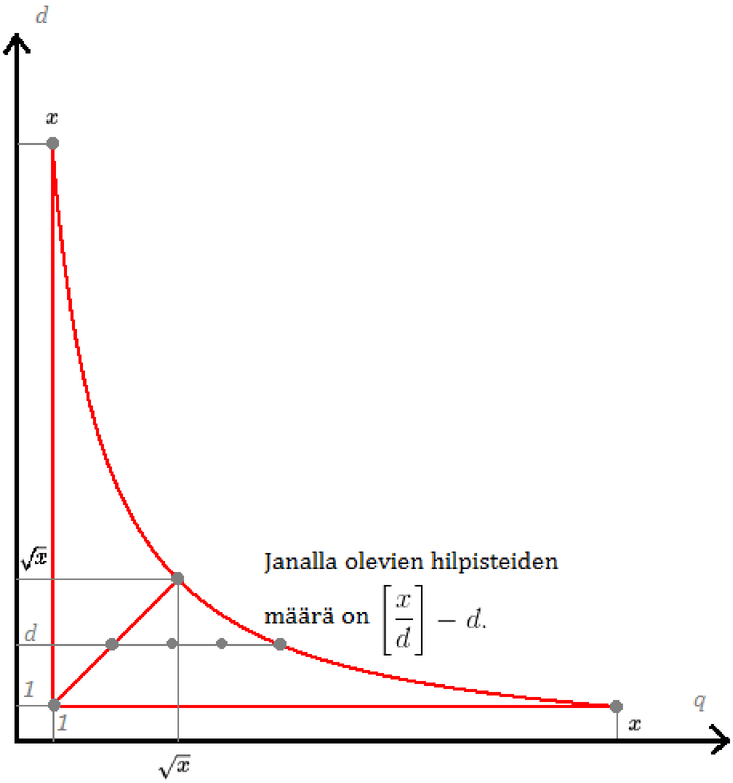
Kuva 1: Koordinaatistoon on piirretty hyperbelit $1/x$, $4/x$ ja $9/x$ sekä näiden kuvaajien hilapisteet.

Palataan yhtälöön (20) varsinaisen Dirichletin asymptoottikaavan todistamisessa. Hyödynnetään todistuksessa hyperbolin symmetrisyyttä. Symmetria-akselina on suora $q = d$. Hilapisteiden kokonaislukumäärä saadaan laskemalla symmetria-akselin alapuolella olevien pisteiden määrä kaksinkertaisena ja tähän lisätään pisteet, jotka sijaitsevat suoralla $q = d$. Kuvasta 2 nähdään, että

$$\sum_{n \leq x} d(n) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{d} \right] - d \right) + [\sqrt{x}].$$

Käytetään tähän yhtälöä $[y] = y + O(1)$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) = \; & 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{d} - d + O(1) \right) + O(\sqrt{x}) \\ & 2x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} d + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$



Kuva 2: Hilapisteiden laskeminen annettuun muuttujan x arvoon asti.

Sovelletaan ensimmäiseen summaan Lauseen 6.1 kohtaa (a) ja jälkimmäiseen summaan kohtaa (d) luvun α arvolla 1, jolloin saadaan

$$\sum_{n \le x} d(n) = 2x\left(\log\sqrt{x} + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - 2\left(\frac{x}{2} + O(\sqrt{x})\right) + O(\sqrt{x})$$
$$= x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x}).$$

$\square$

Huomautus 7.2. *Asymptoottikaavan virhetermiä $O(\sqrt{x})$ voidaan tarkentaa. Vuonna 1903 Voronoï osoitti, että virhe on korkeintaan $O(x^{1/3}\log x)$. Vuonna 1922 van der Corput osoitti virheen olevan korkeintaan $O(x^{33/100})$. Tarkimman tuloksen tähän mennessä on osoittanut Huxley vuonna 2003. Hän osoitti, että virhe on korkeintaan $O(x^{131/416}) \approx 0,31490$ [6]. Vuonna 1915 Hardy ja Landau kuitenkin osoittivat, että virhetermi on vähintään $O(x^{1/4})$. Tarkkaa virhetermiä ei tunneta ja ongelma tunnetaan nimellä Dirichletin tekijä-ongelmana (Dirichlet's divisor problem).*

7.2 Funktion $\sigma_\alpha(n)$ keskiarvo

Tapaus $\alpha = 0$ käsiteltiin Lauseessa 7.1. Oletetaan seuraavaksi, että $\alpha > 0$ ja käsitellään vielä tilanne $\alpha = 1$ erikseen.

Lause 7.3. Olkoon $x \geq 1$ ja olkoon $\alpha = 1$. Tällöin

$$\sum_{n\leq x} \sigma_1(n) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x\log x). \tag{22}$$

Todistus. Käytetään samanlaista menetelmää kuin Lauseen 7.1 heikomman version todistamisessa. Tällöin

$$\sum_{n\leq x} \sigma_1(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{q|n} q = \sum_{\substack{q,d \\ qd\leq x}} q = \sum_{d\leq x}\sum_{q\leq x/d} q.$$

Sovelletaan tähän Lauseen 6.1 kohtaa (d) luvun α arvolla 1 ja merkitään $q = x/d$, jolloin saadaan

$$\sum_{n\leq x} \sigma_1(n) = \sum_{d\leq x}\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{d}\Big)^2 + O\Big(\frac{x}{d}\Big)\right) = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} + O\bigg(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\bigg).$$

Korvataan summat Lauseen 6.1 kohdilla (a) ja (b). Kohdan (a) avulla saadaan

$$\sum_{d\leq x}\frac{1}{d} = \log x + C + O(\frac{1}{x}).$$

Virheterminä olevaan summaan kuuluvat vakio C ja termi $O(1/x)$. Nämä sisältyvät termiin $O(\log x)$. Täten

$$O\bigg(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\bigg) = O(x\log x).$$

Lauseen 6.1 kohdan (b) avulla saadaan

$$\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} = \frac{x^{1-2}}{1-2} + \zeta(2) + O(x^{-2}) = -\frac{1}{x} + \zeta(2) + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Yhdistämällä nämä saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\sigma_1(n) =& \frac{x^2}{2}\bigg(-\frac{1}{x} + \zeta(2) + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\bigg) + O(x\log x)\\ =& \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x\log x).\end{aligned}$$

□

Lause 7.4. Funktion $\zeta(s)$ arvo muuttujan arvolla 2 on $6/\pi^2$. [4]

Todistus. Käytetään ensiksi Taylorin sarjakehitelmää funktiolle $\sin x$, jolloin saadaan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

ja jaetaan yhtälö puolittain muuttujalla x ja $x \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

Murtofunktion arvo on nolla, aina kun osoittaja saa arvon nolla. Täten funktiolla $(\sin x)/x$ on nollakohta aina kohdassa $k\pi$, missä k on kokonaisluku, mutta ei nolla. Käyttämällä Weierstrassin tekijöihinjakolausetta saadaan toinen esitys funktiolle $(\sin x)/x$ kirjoittamalla funktio nollakohtiensa tulona. Nollakohdat voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = k\pi \quad \text{eli} \quad 0 = 1 - \frac{x}{k\pi}.$$

Tällöin saadaan

$$\frac{\sin x}{x} = \Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 - \frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1 - \frac{x}{3\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{3\pi}\Big) \cdot ....$$

Kertomalla termit pareittain auki saadaan yhtälö

$$\frac{\sin x}{x} = \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\Big) \cdot ....$$

Seuraavaksi tuloa lähdetään purkamaan siten, että muodostuu summa, jossa muutujan x aste on kaksi. Muista termeistä ei olla tässä kiinnostuneita. Purkamalla auki sopivasti saadaan

$$-\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - ... = -x^2\Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\Big).$$

Palataan takaisin Taylorin kehitelmään ja huomataan, että termin $-x^2$ kerroin on $1/3! = 1/6$. Koska molemmat muodot ovat yhtäpitäviä, niin tällöin on oltava

$$\frac{-1}{6} = -\Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\Big),$$

mistä kertomalla yhtälö puolittain luvulla $-\pi^2$ saadaan

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

Huomautus 7.5. *Nyt $\zeta(2) = \pi^2/6$. Tämä sijoitettuna yhtälöön (22) antaa yhtälön $\sigma_1(n)$ keskiarvoksi $(\pi^2 n)/12$.*

Lause 7.6. Olkoon $x \geq 1$ ja $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Tällöin

$$\sum_{n \leq x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + O(x^\beta),$$

missä $\beta = \max\{1, \alpha\}$.

Todistus. Nyt

$$\sum_{n \leq x} \sigma_\alpha(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{q|n} q^\alpha.$$

Merkitään nyt $n = qd$, sillä $q|n$. Koska $n \leq x$, niin sijoitetaan luvun n paikalle tulo qd, jolloin saadaan $qd \leq x$ eli $q \leq x/d$. Tällöin voidaan summata kaikkien kokonaislukujen q yli, jotka toteuttavat ehdon $q \leq x/d$ ja sen jälkeen käydään läpi kaikki luvut d, jotka toteuttavat ehdon $d \leq x$. Näin Lauseen 6.1 kohdan (d) ja luvun α arvolla 1 saadaan

$$\sum_{n \leq x} \sigma_\alpha(n) = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} q^\alpha = \sum_{d \leq x} \left(\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{x}{d}\right)^{\alpha+1} + O\left(\frac{x^\alpha}{d^\alpha}\right) \right).$$

Tästä saadaan laskemalla

$$\sum_{d \leq x} \left(\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{x}{d}\right)^{\alpha+1} + O\left(\frac{x^\alpha}{d^\alpha}\right) \right) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{\alpha+1}} + O\left(x^\alpha \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^\alpha} \right)$$

Hyödyntämällä Lauseen 6.1 kohtaa (b) molempiin summiin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{\alpha+1}} + O\left(x^2 \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^\alpha} \right) &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} + \zeta(\alpha+1) + O(x^{-\alpha-1}) \right) \\ &\quad + O\left(x^\alpha \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \zeta(\alpha) + O(x^{-\alpha}) \right) \right). \end{aligned}$$

Avaamalla ensimmäiset sulut saadaan

$$\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + O(x) + O(1)$$

ja avaamalla jälkimmäiset sulut saadaan

$$O\left(\frac{x}{1-\alpha} + \zeta(\alpha) x^\alpha + O(1) \right) = O(x) + O(x^\alpha) + O(1).$$

Täten

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x)+O(1)+O(x^\alpha).$$

Kun $\alpha<1$, niin tällöin termi $O(x)$ on hallitseva virhetermi. Vastaavasti, kun $\alpha>1$, niin termi $O(x^\alpha)$ on hallitseva. Täten

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta),$$

missä $\beta=\max(1,\alpha)$. □

Funktion $\sigma_\alpha(n)$ keskiarvo negatiiviselle luvulle α saadaan sijoittamalla $\alpha=-\beta,\beta>0$.

Lause 7.7. Olkoon $\beta>0$ ja olkoon $\delta=\max(0,1-\beta)$. Jos $x>1$, niin tällöin

$$\sum_{n\leq x}\sigma_{-\beta}(n)=\begin{cases}\zeta(\beta+1)x+O(x^\delta), & \text{kun } \beta\neq 1,\\ \zeta(2)x+O(\log x), & \text{kun } \beta=1.\end{cases}$$

Todistus. Merkitään

$$\sum_{n\leq x}\sigma_{-\beta}(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n}d^{-\beta}=\sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n}\frac{1}{d^\beta}$$

Käytetään samanlaista päättelyä kuin Lauseessa 7.6, jolloin saadaan

$$\sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n}\frac{1}{d^\beta}=\sum_{d\leq x}\sum_{q\leq x/d}\frac{1}{d^\beta}=\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\sum_{q\leq x/d}1.$$

Nyt jälkimmäinen summa on $x/d+O(1)$, joten saadaan

$$\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\sum_{q\leq x/d}1=\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\Big(\frac{x}{d}+O(1)\Big)=x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^{\beta+1}}+O\Bigg(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\Bigg).$$

Jos $\beta=1$, niin tällöin virhetermiksi muodostuu

$$O\Bigg(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\Bigg)=O\Bigg(\log x+C+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\Bigg)=O(\log x).$$

Hallitseva $\log x$, jolloin virhe on $O(\log x)$. Jos $\beta\neq 1$, niin Lauseen 6.1 kohdan (b) nojalla virhetermi on

$$O\Bigg(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\Bigg)=O\Bigg(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}+\zeta(\beta)+O(x^{-\beta})\Bigg)=O(x^{1-\beta})+O(1).$$

Tarkastellaan termiä $x\sum_{d\le x}(1/d^{\beta})$. Sovelletaan Lauseen 6.1 kohtaa (b), jolloin

$$x\sum_{d\le x}\frac{1}{d^{\beta}} = x\cdot\frac{x^{1-\beta-1}}{-\beta}+\zeta(\beta+1)x+xO(x^{-\beta-1})$$
$$=\frac{x^{1-\beta}}{-\beta}+\zeta(\beta+1)x+O(x^{-\beta})=\zeta(\beta+1)x+O(x^{1-\beta}).$$

Summan virhetermi määräytyy eksponentista β. Jos $\beta=1$, niin

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\frac{1}{d^{\beta}}=\zeta(2)+O(\log x)$$

ja

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\frac{1}{d^{\beta}}=\zeta(\beta+1)x+O(x^{\delta}),$$

kun $\beta\neq 1$, missä $\delta=\max(0,1-\beta)$. □

7.3 Funktion $\varphi(n)$ keskiarvo

Eulerin φ-funktion keskiarvon laskemiseen tarvitaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}$$

summaa. Se suppenee absoluuttisesti, sillä sen majorantti on $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$.

Lause 7.8. Olkoon funktiot

$$F(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^2}\quad\text{ja}\quad G(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2}$$

sekä $f(n)=1$ ja $g(n)=\mu(n)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}. \tag{23}$$

Todistus. Katso [1] sivu 228. □

Merkitään nyt

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}-\sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2}$$

ja hyödyntämällä Lauseen 6.1 kohtaa (c) saadaan jälkimmäinen summa muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}-\sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Käytetään tätä lähtökohtana funktion $\varphi(n)$ keskiarvon johtamiseen.

Lause 7.9. Olkoon $x>1$. Tällöin

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x). \tag{24}$$

Todistus. Aloitetaan todistus Lauseen 3.8 yhtälöstä

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d},$$

jolloin saadaan

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}\mu(d)q=\sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{q\leq x/d}q.$$

Lauseen 6.1 kohdan (d) ja luvun α arvolla 1 saadaan

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\sum_{d\leq x}\mu(d)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2+O\left(\frac{x}{d}\right)\right).$$

Avamaalla sulut ja uudelleen järjestelemällä yhtälö saadaan muotoon

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\frac{1}{2}x^2\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right).$$

Hyödyntämällä Lausetta 7.8 ensimmäiseen summaan ja Lauseen 6.1 kohtaa (a) toiseen summaan saadaan

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)+O(x\log x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x).$$

□

8 Origosta näkyvät hilapisteet

Funktion $\varphi(n)$ osittaissummien asymptoottikaavaa voidaan soveltaa teoriaan, joka koskee hilapisteiden, jotka voidaan nähdä origosta, jakautumiseen tasolla.

Määritelmä 8.1. Hilapisteet P ja Q ovat kahdenkeskeisesti näkyviä, jos pisteiden välisellä janalla ei ole muita hilapisteitä kuin päätepisteet P ja Q.

Lause 8.2. Kaksi hilapistettä (a, b) ja (m, n) ovat kahdenkeskeisesti näkyviä jos ja vain jos luvut $a - m$ ja $b - n$ ovat suhteellisia alkulukuja.

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa hilapiste $(m, n) = 0$.

" $\Rightarrow$ " Oletetaan ensin, että hilapiste (a, b) on näkyvä origosta ja olkoon $d = (a, b)$. Jos $d > 1$, niin tällöin $a = dp$ ja $b = dq$. Tällöin hilapiste (p, q) on origon ja hilapisteen (a, b) välissä, koska

$$k = \frac{b}{a} = \frac{dq}{dp} = \frac{q}{p}.$$

Tässä k tarkoittaa suoran kulmakerrointa. Tämä aiheuttaa ristiriidan, sillä hilapiste (a, b) oli näkyvä origosta. Ristiriita aiheutui siitä, että hilapisteen (a, b) ja origon väliin olisi tullut hilapiste (p, q), jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä olisi muu kuin 1. Täten $d = 1$.

" $\Leftarrow$ " Oletetaan nyt, että $(a, b) = 1$. Jos pisteen (a, b) ja origon välillä on hilapiste (p, q), niin saadaan

$$p = at \quad \text{ja} \quad q = bt.$$

Tämä siksi, että hilapisteen ja origon kautta kulkevalla suoralla olevat pisteet voidaan esittää näkyvän hilapisteen monikertoina, sillä ne sijaitsevat samalla suoralla, jolla origo ja kyseessä oleva näkyvä hilapiste on. Koska $(a, b) = 1$, niin tästä seuraa $0 < t < 1$. Tällöin luku t on rationaalinen, jolloin on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut s ja r, joille pätee $(s, r) = 1$. Kirjoitetaan täten

$$sp = ar \quad \text{ja} \quad sq = br,$$

jolloin $s|ar$ ja $s|br$, mistä seuraa $s|a$ ja $s|b$, sillä $(s, r) = 1$. Koska luku s jakaa molemmat luvuista a ja b sekä $(a, b) = 1$, niin $s = 1$. Tämä aiheuttaa ristiriidan, sillä $0 < t < 1$. Tällöin hilapiste (a, b) on näkyvä origosta.

Olkoon hilapiste (m, n) muu kuin origo. Tällöin hilapisteet (a, b) ja (m, n) ovat kahdenkeskeisesti näkyviä, mikäli hilapiste $(a - m, b - n)$ on näkyvä origosta. Tässä jana pisteiden (a, b) ja (m, n) välillä voidaan ajatella vektorina

$\overline{A} = (a-m)\bar{\imath} + (b-n)\bar{\jmath}$, mikä vastaa paikkavektoria origosta pisteeseen $(a-m, b-n)$. Lauseen väite seuraa suoraan, kun pisteeseen $(a-m, b-n)$ sovelletaan aikaisempaa päättelyä. □

Hilapisteitä on tasossa ääretön määrä. Täten on luontevaa pohtia, miten hilapisteet ovat jakautuneet tasoon.

Ajatellaan suuri neliön muotoinen alue xy-tasoon, joka määritellään epäyhtälöillä

$$|x| \le r \quad \text{ja} \quad |y| \le r.$$

Merkitään neliössä olevien hilapisteiden lukumäärää merkinnällä $N(r)$ ja origosta näkyvien hilapisteiden lukumäärää $N'(r)$. Tällöin näiden osamäärän avulla voimme päätellä näkyvien hilapisteiden suhteessa kaikkiin hilapisteisiin, kun ylärajaa r kasvatetaan. Kun rajan r annetaan kasvaa rajatta, niin seuraavassa lauseessa huomataan, että osamäärällä on olemassa raja-arvo. Tätä arvoa kutsutaan origosta näkyvien hilapisteiden tiheydeksi.

Lause 8.3. Origosta näkyvien hilapisteiden tiheys on $6/\pi^2$.

Todistus. Pyritään osoittamaan, että

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Kahdeksan origoa lähinnä olevaa hilapistettä ovat kaikki näkyviä. Symmetrian perusteella nähdään, että näkyvien hilapisteiden määrä on kahdeksan (origoa lähinnä olevat) sekä kahdeksan kertaa alueessa

$$\{(x,y) : 2 \le x \le r, \quad 1 \le y \le x\}$$

olevat näkyvät pisteet. (Tummennettu alue Kuvassa 3.) Tällöin voidaan muodostaa yhtälö

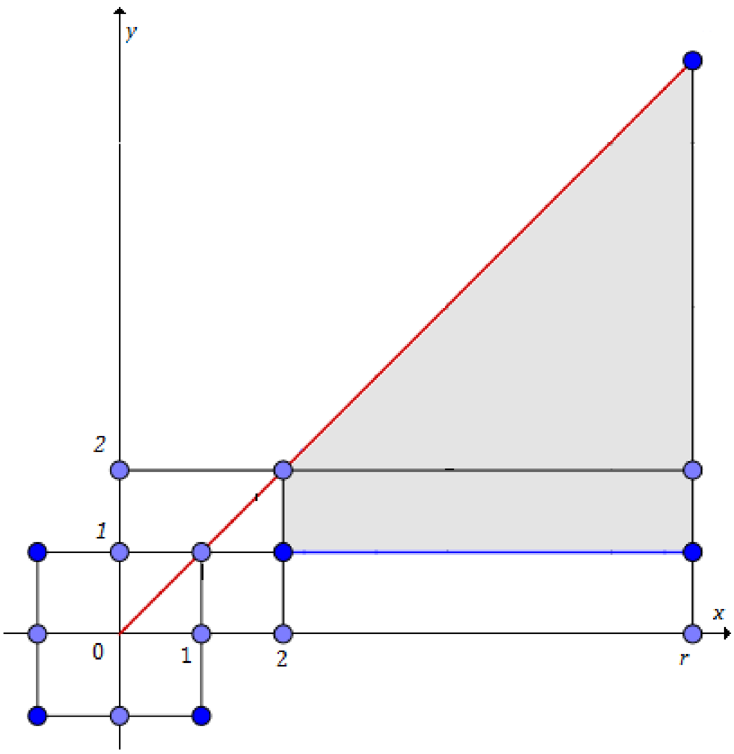
$$\begin{aligned} N'(r) =& 8 + 8 \sum_{2\le n\le r} \sum_{\substack{1\le m<n \\ (m,n)=1}} 1 = 8\Bigg(1 + \sum_{2\le n\le r} \sum_{\substack{1\le m<n \\ (m,n)=1}} 1\Bigg) \\ =& 8\Bigg(1 + \sum_{2\le n\le r} \varphi(n)\Bigg) = 8 \sum_{1\le n\le r} \varphi(n). \end{aligned}$$

Lauseen 7.9 nojalla

$$N'(r) = \frac{24}{\pi^2} r^2 + O(r \log r).$$

Määritellyssä alueessa on kokonaisuudessaan hilapisteitä

$$N(r) = (2[r]+1)^2 = (2r + O(1))^2 = 4r^2 + O(r),$$



Kuva 3: Harmaalla alueella on yhteensä $\sum_{2\leq n\leq r} \varphi(n)$ origosta näkyviä hilapisteitä.

jolloin saadaan

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{\frac{24}{\pi^2}r^2 + O(r\log r)}{4r^2 + O(r)}.$$

Ottamalla $4r^2$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{4r^2}{4r^2} \cdot \frac{\frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{4} \cdot O\left(\frac{\log r}{r}\right)}{1 + \frac{1}{4} \cdot O\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Kun säde r lähestyy ääretöntä, niin osamäärät $(\log r)/r$ ja $1/r$ lähestyvät nollaa. Täten raja-arvoksi osamäärälle $N'(r)/N(r)$ tulee $6/\pi^2$. $\square$

Huomautus 8.4. *Lauseen 8.3 tulosta sanotaan joskus todennäköisyydeksi, jolla satunnaisesti valittu hilapiste on origosta näkyvä. Jos valitaan satun-*

naisesti luvut a ja b, niin ne ovat todennäköisyydellä $6/\pi^2$ *suhteellisia alkulukuja.*

9 Funktiot $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$

9.1 Funktioiden $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$ keskiarvot

Lause 9.1. Olkoon $x > 1$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \mu(n) = 0.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 9.2. Olkoon $x > 1$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = 1.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Edellisten lauseiden todistukset eivät kuulu tämän tutkielman aihepiiriin. Tulokset ovat ekvivalentteja alkulukulauseen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

kanssa, missä funktio $\pi(x)$ kuvaa niiden alkulukujen määrää, jotka ovat pienempiä kuin x.

Intuitiivinen tulkinta Möbius-funktion keskiarvolle voidaan ajatella kolikon heitosta. Ajatellaan, että Möbius-funktion arvot olisivat täysin satunnaisia luvun n eri arvoilla. Jos heitetään kolikkoa n kertaa ja lyödään vetoa aina kruunan puolesta. Kruunalla summaan lisätään yksi piste ja klaavalla poistetaan yksi piste. Kun n on riittävän iso, niin laskettu summa on todennäköisesti paljon lähempänä nollaa kuin arvoa n, jolloin osamäärä lähestyy nollaa. [5]

Tässä kappaleessa johdetaan muutamia perustuloksia edellä mainituille funktioille ja pohjustetaan niiden merkitystä alkulukujen jakautumisessa. Tulosten johtamiseen käytetään mielivaltaisia aritmeettisia funktioita f ja g sekä niiden Dirichletin tuloa $f * g$.

9.2 Dirichletin tulon osittaissummat

Lause 9.3. Olkoon $h = f * g$ ja olkoon

$$H(x) = \sum_{n \le x} h(n), \quad F(x) = \sum_{n \le x} f(n) \quad \text{ja} \quad G(x) = \sum_{n \le x} g(n),$$

niin tällöin

$$H(x) = \sum_{n \le x} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \le x} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right). \tag{25}$$

Todistus. Käytetään todistuksessa Lauseen 4.6 tulosta, joka yhdistää operaatiot $\circ$ ja $*$. Jotta Dirichletin tuloa voidaan käyttää, niin tarvitaan funktio

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

Funktio toimii aritmeettisena funktiona, joka kuvaa luvut ykkösestä äärettömään ykköseksi. Tällöin $F = f \circ U$ ja $G = g \circ U$. Käyttämällä tätä saadaan

$$\begin{aligned} f \circ G &= f \circ (g \circ U) = (f * g) \circ U = h \circ U = H \\ g \circ F &= g \circ (f \circ U) = (g * f) \circ U = (f * g) \circ U = H, \end{aligned}$$

mikä todistaa lauseen oikeaksi. □

Mikäli funktio $g(n) = 1$ kaikilla muuttujan n arvoilla, niin tällöin

$$G(x) = \sum_{n \le x} g(n) = \sum_{n \le x} 1 = [x].$$

Tästä saadaan seuraus Lauseelle 9.3.

Lause 9.4. Jos $F(x) = \sum_{n \le x} f(n)$, niin

$$\sum_{n \le x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \le x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \le x} F\left(\frac{x}{n}\right). \tag{26}$$

Todistus. Yhtälön (26) vasen puoli voidaan avata, jolloin saadaan

$$\sum_{n \le x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n_1} f(d) + \sum_{d|n_2} f(d) + ... + \sum_{d|[x]-1} f(d) + \sum_{d|[x]} f(d).$$

Tällöin ensimmäiseen summaan tulee mukaan luvun n_1 monikerrat aina muuttujan arvon x kokonaisosaan asti. Tästä seuraa, että termejä tulee yhteensä

$[x/n_1]$ kappaletta. Sama toistuu muillakin arvoilla n_i, aina kun $i \geq 1$. Tällöin funktion arvoa pisteessä n_i tulee yhteensä $[x/n_i]$ kappaletta, jolloin summa saadaan muotoon

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leq x} f(n) \left[\frac{x}{n} \right].$$

Koska $G(x) = [x]$, niin yhtälöstä (25) saadaan

$$\sum_{n \leq x} f(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \sum_{n \leq x} f(n) G\left(\frac{x}{n} \right) = \sum_{n \leq x} g(n) F\left(\frac{x}{n} \right) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n} \right).$$

□

9.3 Sovelluksia funktiolle $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$

Sijoitetaan funktiot $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$ erikseen Lauseeseen 9.4, jolloin saadaan johdettua seuraavat identiteetit, jotka ovat tarpeellisia alkulukujen jakautumisen tutkimiseen.

Lause 9.5. Olkoon $x \leq 1$. Tällöin sekä

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] = 1 \tag{27}$$

että

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \log[x]! \tag{28}$$

ovat voimassa.

Todistus. Yhtälöstä (26) saadaan

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d).$$

Käyttämällä Lausetta 3.3 saadaan

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{1}{n} \right] = 1.$$

Sovelletaan Lausetta 3.13 yhtälön (28) todistamiseen, jolloin tulos tulee samalla tavalla kuin ylempikin, eli

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} \log n = \log[x]!.$$

□

Huomautus 9.6. *Lauseen 9.5 tuloksia voidaan pitää painotettuina keskiarvoina funktioille $\mu(n)$ ja $\Lambda(n)$.*

Alkulukulauseen johtamisessa osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

suppenee ja summaksi tulee nolla. Yhtälön (27) avulla voidaan osoittaa, että edellä mainitun sarjan osittaissummat ovat rajoitetut ylhäältä.

Lause 9.7. Olkoon $x \geq 1$, jolloin

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1. \tag{29}$$

Yhtäsuuruus on voimassa ainoastaan, kun $x < 2$.

Todistus. Olkoon ensin $x < 2$. Tällöin summattavia on $[x] = 1$ kappaletta, jolloin saadaan

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{\mu(1)}{1} = 1.$$

Olkoon $x \geq 2$. Käytetään merkintää $\{y\} = y - [y]$, jolloin

$$\begin{aligned} 1 = &\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right) \\ =& x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Muokkaamalla edellistä yhtälöä saadaan

$$x \left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| = \left| 1 + \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right|.$$

Koska $|\mu(n)| \leq 1$, niin

$$\left| 1 + \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right| \leq 1 + \sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = 1 + \{x\} + \sum_{2 \leq n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\}.$$

Summaa voidaan arvioida ylöspäin, sillä $0 \leq \{x\} < 1$. Tällöin saadaan

$$1 + \{x\} + \sum_{2 \leq n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} < 1 + \{x\} + [x] - 1 = x.$$

Näin saatiin

$$x\left|\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\right| < x.$$

Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain luvulla x, niin saadaan yhtälö (29) aidolla epäyhtälöllä. □

Palataan yhtälöön

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \log[x]!$$

ja johdetaan tätä apuna käyttäen seuraava lause, joka tunnetaan myös nimellä Legendren identiteetti.

Lause 9.8. Jokaiselle $x \ge 1$ pätee

$$[x]! = \prod_{p\le x} p^{\alpha(p)},$$

missä tulo muodostuu kaikista alkuluvuista p, joille pätee $p \le x$, ja

$$\alpha(p) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]. \tag{30}$$

Todistus. Koska $\Lambda(n) = 0$ aina, kun n ei ole jonkun alkuluvun p potenssi. Mangoldt'n funktion määritelmästä saadaan $\Lambda(n) = \Lambda(p^m) = \log p$ ja sijoitetaan $n = p^m$, jolloin saadaan

$$\log[x]! = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{p\le x}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]\log p = \sum_{p\le x}\log p\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right].$$

Luvut n_i voidaan kirjoittaa alkuluvun p potensseina, jolloin niiden sijasta voidaan käydä läpi kaikki tekijät p^m. Eksponentin ylärajaksi voidaan merkitä ääretön, sillä kun $p^m > x$, niin kokonaisosa on nolla ja termit tämän jälkeen ovat nollia. Sijoitetaan yhtälö (30) ja käytetään logaritmin laskusääntöjä, jolloin saadaan

$$\log[x]! = \sum_{p\le x}\alpha(p)\log p = \sum_{p\le x}\log p^{\alpha(p)}.$$

Logaritmien laskusääntöjen nojalla saadaan

$$[x]! = \prod_{p\le x} p^{\alpha(p)},$$

mikä todistaa lauseen. □

Huomautus 9.9. *Ylläoleva summa on rajoitettu, sillä* $[x/p^m] = 0$*, kun* $p > x$*.*

Määritetään Eulerin summakaavan avulla asymptoottikaava lausekkeelle $\log[x]!$.

Lause 9.10. Olkoon $x \geq 2$. Tällöin

$$\log[x]! = x \log x - x + O(\log x)$$

ja täten

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = x \log x - x + O(\log x). \tag{31}$$

Todistus. Olkoon nyt $f(t) = \log t$ ja sijoitetaan se Eulerin summakaavaan, jolloin saadaan

$$\log[x]! = \sum_{n \leq x} \log n = \int_1^x \log t \; dt + 1 + \int_1^x \frac{t - [t]}{t} dt - (x - [x]) \log x.$$

Integroimalla funktion $\log t$ luvusta 1 lukuun x saadaan integraalifunktioksi $x(\log(x) - 1)$. Approksimoimalla viimeisen logaritmin kerrointa $x - [x] < 1$ saadaan $(x - [x]) \log x < \log x$, joka voidaan merkitä virheeksi. Tällöin

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + 1 + \int_1^x \frac{t - [t]}{t} dt + O(\log x).$$

Approksimoidaan integraalin osoittajaa $t - [t] < 1$, jolloin integroitaessa saadaan $\log x$. Tämä voidaan ottaa aikaisempaan virhetermiin mukaan, jolloin saadaan

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x).$$

Yhtälön (31) tulos seuraa yhtälöstä (28). □

Lause 9.11. Kaikille $x \geq 2$ pätee

$$\sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p}\right] \log p = x \log x + O(x),$$

missä summa käy läpi kaikki alkuluvut p, joille pätee $p \leq x$.

Todistus. Koska $\Lambda(n) = 0$ aina, kun n ei ole alkuluvun potenssi, niin

$$\sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]\Lambda(n) = \sum_{p}\sum_{\substack{m=1\\p^m\leq x}}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]\Lambda(p^m).$$

Jos $p^m \leq x$, niin $p \leq x$. Jos $p > x$, niin $[x/p^m] = 0$. Viimeinen summa saadaan muotoon

$$\sum_{p\leq x}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]\log p = \sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]\log p + \sum_{p\leq x}\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]\log p.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että viimeinen summa voidaan korvata halutulla iso O -merkinnällä.

$$\sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right] \leq \sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x}{p^m} = x\sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m. \tag{32}$$

Geometrinen sarja suppenee, kun suhdeluku $|q| < 1$. Tämä pätee, sillä p on alkuluku. Täten jälkimmäisestä summasta saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m - \sum_{m=0}^{1}\left(\frac{1}{p}\right)^m = \frac{1}{1-(1/p)} - 1 - \frac{1}{p}\\ &= \frac{p^2-(p^2-p)-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä tulos yhtälöön (32), jolloin saadaan

$$\sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right] \leq x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)}$$

Arvioimalla

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n}} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^3}}$$

huomataan, että summa suppenee. Tällöin sillä on olemassa joku arvo a, jota summa lähestyy. Koska a on jokin äärellinen luku, niin virheeksi voidaan merkitä

$$x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)} = ax = O(x),$$

mistä seuraa

$$\sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]\Lambda(n)=\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]\log p+O(x).$$

Yhtälön (31) nojalla saadaan

$$x\log x-x+O(\log x)=\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]\log p+O(x).$$

Siirtelemällä termejä ja yhdistämällä termit $-x$ ja $O(\log x)$ virhetermiin $O(x)$. Yhdistäminen voidaan tehdä, sillä $O(x)$ on suurempi kuin $O(\log x)$. Tällöin saadaan

$$\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]=x\log x+O(x),$$

mikä todistaa väitteen. □

9.4 Toinen tulos Dirichletin tulon osittaissummille

Tämä tulos on yleisempi tulos, kuin Lauseessa 9.3 johdettu tulos. Sitä voidaan hyödyntää eritoten tiettyjen Dirichletin tulojen osittaissummien tutkimiseen.

Lauseessa 9.3 todettiin, että

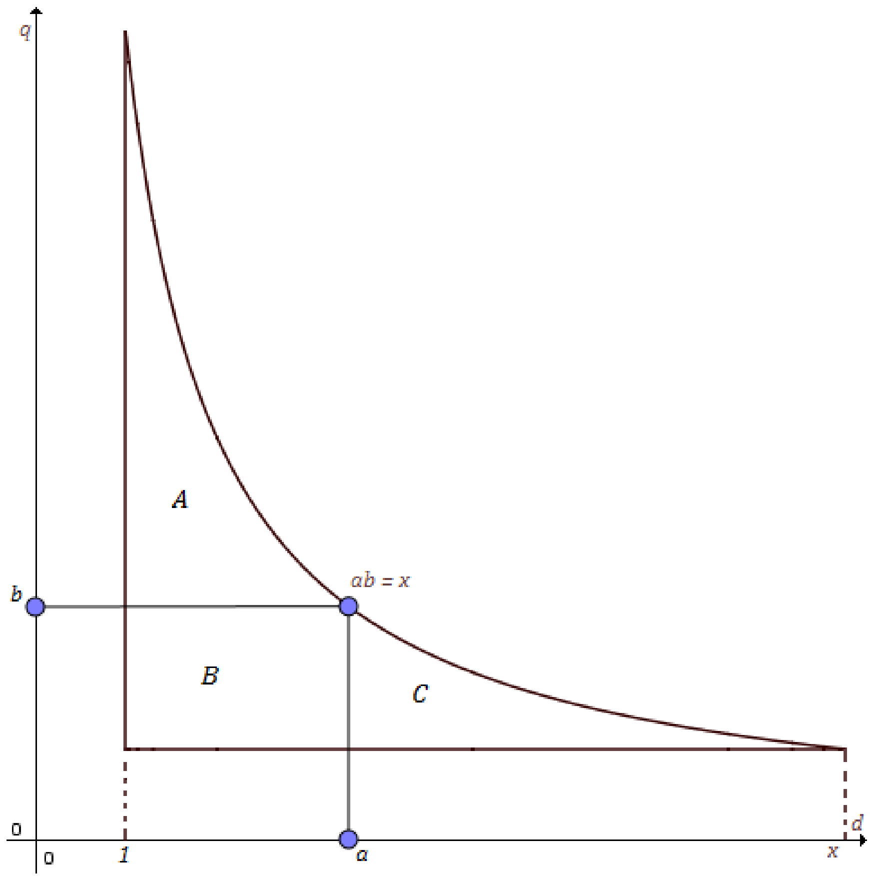
$$F(x)=\sum_{n\leq x}f(n)\quad\text{ja}\quad G(x)=\sum_{n\leq x}g(n)\quad\text{ja}\quad H(x)=\sum_{n\leq x}(f*g)(n).$$

Tästä seuraa, että

$$H(x)=\sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}f(d)g(q).$$

Lause 9.12. Olkoon a ja b positiivisia reaalilukuja, joille pätee $ab=x$. Tällöin

$$\begin{aligned}H(x)&=\sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}f(d)g(q)\\&=\sum_{n\leq a}f(n)G\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leq b}g(n)F\left(\frac{x}{n}\right)-F(a)G(b).\end{aligned}\tag{33}$$



Kuva 4: Koordinaatistossa on kuvattuna tulo $ab = x$ ja kuvion rajaamat alueet A, B ja C.

Todistus. Summaan $H(x)$ kuuluvat hilapisteet, jotka kuuluvat Kuvassa 4 rajoitettuun alueeseen. Jaetaan samaan kuvaan rajattu alue osiin A, B ja C ja lasketaan hilapisteet ensin alueessa $A \cup B$, jonka jälkeen lasketaan hilapisteet alueessa $B \cup C$. Huomataan, että alue B tulee laskettua kahteen kertaan, jolloin tämän alueen hilapisteden määrä pitää vähentää kertaalleen. Täten saadaan

$$H(x) = \sum_{d \leq a} \sum_{q \leq x/d} f(d)g(q) + \sum_{q \leq b} \sum_{d \leq x/q} f(d)g(q) - \sum_{d \leq a} \sum_{q \leq b} f(d)g(q) \tag{34}$$

Tarkastelemalla yhtälön (34) summia huomataan, että

$$\sum_{d \leq a} \sum_{q \leq x/d} f(d)g(q) = \sum_{d \leq a} f(d) \sum_{q \leq x/d} g(q) = \sum_{d \leq a} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{n \leq a} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Samanlaisella päättelyllä saadaan

$$\sum_{q \leq b} \sum_{d \leq x/q} f(d)g(q) = \sum_{n \leq b} g(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Viimeinen osa yhtälöstä (34) saadaan

$$\sum_{d \leq a} \sum_{q \leq b} f(d)g(q) = \sum_{d \leq a} f(d) \sum_{q \leq b} g(q) = F(a)G(b).$$

Nämä sijoittamalla yhtälöön (34) saadaan yhtälö (33), mikä todistaa väitteen. $\square$

Viitteet

[1] Apostol T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, Pasadena, California, 1995.

[2] Myllylä K., *Lukuteoria ja ryhmät*, Oulun yliopisto, 2012.

[3] Matala-aho T., *Lukuteorian perusteet*, Oulun yliopisto, 2012.

[4] Sullivan B. W., *The Basel Problem*, Carnegie Mellon University, 2013.

[5] Clark P. L., *Introduction to Number Theory*, University of Georgia, 2007.

[6] Huxley M. N., *Introduction to Number TheoryExponential Sums and Lattice points III*, Proc, London Math. Soc., 2003.