Verrannollisuus ja lineaarinen riippuvuus lukion lyhyessä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Anu Ervasti
2192628
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto

Kevät 2016

Sisältö

Esipuhe

Oulun yliopiston matematiikan laitoksen oppikirjaprojektiin pääseminen ja hienon ryhmän kanssa projektin eteenpäin vieminen on ollut erityinen ja arvokas kokemus. Toivon, että tutkielmastani on hyötyä opettajille uuden opetussuunnitelman 2015 mukaisen opetuksen toteutuksessa.

Haluan esittää kiitokseni kaikille oppikirjaprojektiin osallistuneille, erityisesti tutkielmani ohjaajille professori Peter Hästölle Oulun ja Turun yliopistosta, yliopistolehtori Pekka Salmelle Oulun yliopistosta ja yliopisto-opettaja Marko Leinoselle Oulun yliopistosta. Erityiset kiitokset haluan esittää myös oppikirjaprojektissa mukana olleelle Maija Peltolalle yhteisen taakan jakamisesta. Lopuksi kiitän rakkaita vanhempiani ja avopuolisoani tärkeästä henkilökohtaisesta tuesta ja ymmärryksestä tämän projektin aikana.

Johdanto

Tämä tutkielma liittyy Oulun yliopiston matematiikan laitoksen projektiin, jonka tarkoituksena on luoda lukion lyhyen ja pitkän matematiikan kursseja käsittelevä verkkopohjainen oppikirja. Oppikirja pohjautuu lukion uuteen opetussuunnitelmaan 2015, joka otetaan lukioissa käyttöön 1.8.2016 alkaen [17]. Oppikirja on tarkoitus julkaista verkkosivulla http://www.avoinoppikirja.fi.

Oppikirjan materiaali on tarkoitettu lyhyen matematiikan MAB2-kurssille ja pitkän matematiikan MAA2-kurssille. Lyhyen matematiikan kurssin aihealueina ovat lausekkeet ja yhtälöt ja pitkän matematiikan kurssin aihealueina ovat polynomifunktiot ja -yhtälöt. Oppikirja on jaettu kolmeen osaan; lyhyen matematiikan, lyhyen ja pitkän matematiikan sekä pitkän matematiikan osaan.

Tässä tutkielmassa on aiheena lyhyen matematiikan alkuosa, jossa käsitellään suhdetta, suoraan ja kääntäen verrannollisuutta sekä lineaarista riippuvuutta. Osaa alueen sisällöstä on käsitelty yläkoulun puolella, joten oppikirjan on tarkoitus kerrata ja syventää oppilaiden osaamista näillä osa-alueilla.

Tutkielman alussa pohditaan oppikirjan sisältöön vaikuttaneita yleisiä tekijöitä. Oppikirjan sisällössä on otettu huomioon lukion uuden opetussuunnitelman 2015 matematiikan opiskelun oppimistavoitteet ja kurssien opetussisällöt. Myös matematiikan ylioppilaskokeen sähköistyminen on pyritty huomioimaan opetusmateriaalin suunnittelussa. Artikkelin *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [6] pohjalta valittiin matemaattisia taitoja, joita oppikirjassa halutaan kehittää. Oppikirjaan on valittu uuden asian käsittelytavaksi pohdintojen ja tehtävien kautta aiheen teoriaan siirtyminen. Lisäksi oppikirjan tehtävissä painotetaan parityöskentelyyn, perustelemiseen, mallitehtävien ratkaisujen analysointiin ja vertailuun sekä esimerkkien antamiseen ja omien tehtävien keksimiseen.

Tutkielman opetusmateriaalissa on huomioitu oppilaiden yksilöllinen verrannollinen ajattelu ja sen kehittäminen. Opetusmateriaalin tavoitteena on kehittää oppilaan suureiden välisten riippuvuuksien tunnistamista ja graafisen esitystavan hahmottamista. Erilaisiin ratkaisumenetelmiin tutustumalla ja niitä vertailemalla oppilaita kannustetaan kehittämään luovia matemaattisten ongelmien ratkaisutapoja. Oppilaita ohjataan esittämään hyvin perustellut ratkaisut ja päätelmät sekä kirjallisesti että suullisesti vierustoverille tai koko luokalle. Opetusmateriaalissa on pyritty selventämään ja ehkäisemään yleisiä harhakäsityksiä eri aihealuiden ongelmakohdissa. Opetusmateriaaliin ja sen tehtäviin on valittu oppilaita lähellä olevia aiheita ja tehtäviä on eri vaativuustasoissa.

Tutkielmasta löytyy myös Opettajan opas, jossa esitellään kappaleiden sisällöt, opetuksen tavoitteet ja pohdintatehtävien ratkaisut. Tutkielman lopussa on oppikirjamateriaali ja tehtävien vastaukset.

1 Oppikirjaan vaikuttaneet tekijät

Tässä luvussa pohditaan oppikirjan syntymisprosessiin vaikuttaneita tekijöitä. Oppikirjan sisältöä suunniteltaessa projektiryhmä perehtyi sekä peruskoulun että lukion opetussuunnitelmien perusteisiin, joiden avulla rajattiin oppikirjan sisältö ja päätettiin aiheiden käsittelyjärjestys. Tämän jälkeen projektiryhmä asetti oppikirjalle yleiset tavoitteet niin lähestymistapojen kuin tehtävätyyppienkin suhteen, jotta oppikirjasta tulisi yhtenäinen kokonaisuus.

1.1 Opetussuunnitelmat

Opetushallitus on päättänyt 27.10.2015 lukion opetussuunnitelman perusteista nuorille tarkoitettua lukiokoulutusta varten [15]. Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 mukaan laadittu opetussuunnitelma otetaan käyttöön lukion aloittavilla opiskelijoilla 1.8.2016 lukien, ja käyttöönotto etenee vuosiluokka kerrallaan.

Uudessa opetussuunnitelmassa matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa oppilas matemaattiseen ajatteluun, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä ja kehittää laskemisen taitoja ja ongelmanratkaisutaitoja. Lyhyen matematiikan oppimäärän opetuksen tarkoituksena korostuu valmius hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. Seuraavassa otteita lyhyen matematiikan opetuksen tavoitteista:

> Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija
>
> - osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä
> - saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen
> - oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna.

Verkossa julkaistava oppikirja on MAB2-kurssille, ”Lausekkeet ja yhtälöt”, ja MAA2-kurssille, ”Polynomifunktiot ja -yhtälöt”. Kurssit suoritetaan pitkälle ja lyhyelle matematiikalle yhteisen MAY1-kurssin jälkeen. Kurssin tavoitteina on oppia käyttämään matematiikkaa elämässä esiintyvien jokapäiväisten ongelmien ratkaisemiseen ja luottaa omiin matemaattisiin kykyihinsä, ymmärtää lineaarisen riippuvuuden ja verrannollisuuden käsite ja kehittää yhtälönratkaisutaitoja. Kurssin keskeisissä sisällöissä on mainittu suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus, ongelmien muuttaminen yhtälöiksi ja yhtälöiden graafinen ratkaiseminen. [17]

Myös uusi peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden mukaan laadittu opetussuunnitelma otetaan käyttöön yläkoulussa syksystä 2017 alkaen. Opetussuunnitelman perusteiden mukaan matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetuksen tulee ohjata oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Matematiikan tavoitteisiin liittyviin keskeisiin sisältöalueisiin 7–9 -luokilla kuuluu mm. algebrassa ensimmäisen asteen yhtälöiden muodostaminen ja ratkaisu sekä verrannon käyttö tehtävien ratkaisussa, ja funktioissa riippuvuuksien kuvaaminen graafisesti ja algebrallisesti, suoraan ja kääntäen verrannollisuus, suorien piirtäminen koordinaatistoon, suoran kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteet sekä kuvaajien tulkinta. [18]

1.2 Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe

Ylioppilastutkinto sähköistyy vaiheittain syksyn 2016 tutkinnosta alkaen. Matematiikan ylioppilaskoe sähköistyy viimeisenä aineena keväällä 2019. Tällöin kuusituntinen ylioppilaskoe tehdään henkilökohtaisella päätelaitteella suljetussa ympäristössä, jossa pystyy käyttämään tiettyjä ohjelmistoja, kuten LibreOfficea ja Geogebraa. Ylioppilaskokeessa ei ole tarkoituksena testata erikseen tietoteknisiä taitoja, mutta ohjelmistojen hallinta helpottaa kokeen suorittamista. [19]

Matematiikan sähköisen ylioppilaskokeen tehtävissä tulee olemaan osa ilman teknisiä apuvälineitä ratkaistavia tehtäviä. Teknisiä apuvälineitä joutuu kuitenkin käyttämään kaavojen kirjoittamisessa kaavaeditorilla ja perusteluissa esimerkiksi taulukoiden ja kuvaajien muodossa. Ylioppilaskokeen loppupään tehtävissä hyödynnetään sähköisen kokeen teknisiä mahdollisuuksia esimerkiksi aineistojen ja symbolisen laskennan kautta. [19]

Matematiikan sähköiseen ylioppilaskirjoitukseen on hyvä alkaa totuttautumaan ohjelmistojen käyttöön tutustumalla, mikä on oppikirjassa pyritty ottamaan huomioon. Oppikirjassa on mukana tehtäviä, joissa on mahdollista hyödyntää teknisiä apuvälineitä, esimerkiksi Geogebraa kuvaajien piirtämisessä.

1.3 Yleiset tavoitteet

Projektiryhmän yhdessä laatimat oppikirjan yleiset tavoitteet on asetettu *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* -artikkelin pohjalta. Oppikirjassa on pyritty tuomaan esille tutkivaa oppimista tutkimuksellisuuden ja kokeilun kautta. Oppilaiden yksilöllistä matemaattista ajattelua korostetaan ja matematiikan suullista ja kirjallista perustelua kehitetään. Perusteluissa opetellaan hyödyntämään kuvioita, taulukoita ja kuvaajia. Oppikirjassa painotetaan myös graafista tarkastelua, ja aihe käsitellään graafisesti ennen kuin siirrytään sen algebralliseen käsittelyyn.

1.3.1 *Habits of Mind*

Artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* pohditaan millaisia matemaattisia taitoja oppilailla olisi hyvä olla tulevaisuudessa [6]. Kyseisen artikkelin pohjalta oppikirjaan on valittu yleisiä tavoitteita, joihin liittyviä matematiikan taitoja halutaan erityisesti tuoda esiin oppikirjassa.

Matematiikan opetuksessa tehdään liian harvoin kokeiluja, vaikkakin matemaattisessa tutkimuksessa se on hyvin keskeistä. Oppilaiden tulisi oppia ratkaisemaan matemaattisia ongelmia erilaisia kokeiluja tekemällä. Lisäksi oppilaille tulisi opettaa kriittistä suhtautumista kokeiluissa saatuihin tuloksiin. Artikkelissa mainitaan myös miten vakuuttavien arvausten tekeminen kuuluu olennaisesti matematiikkaan. Arvausten kuitenkin tulisi pohjautua saatuihin tuloksiin, aiempaan kokemukseen ja prosessin ymmärtämiseen. [6]

Matematiikassa käytetään symboleja ja rakenteita, joiden avulla voidaan luoda uusia sanoja ja määritelmiä. Artikkelin mukaan oppilaiden tulisi oppia matemaattinen esitystapa. Heidän tulisi osata perustella tarkasti ratkaisun eri vaiheet. Heidän tulisi osata perustelemalla vakuuttaa luokkakaverinsa vastauksen oikeellisuudesta. Oppilaiden tulisi kehittää tapa, jolla he pystyvät ilmaisemaan matematiikkaan liittyvät ajatukset, päätelmät ja tulokset kirjoittamalla. [6]

Oppikirjassa pyritään määrittelemään uusia käsitteitä, kun aiheeseen on tutustuttu havainnollistavin esimerkein. Oppilaita kehotetaan kommunikoimaan parin kanssa ja selittämään tehdyt havainnot ja päätelmät parille. Oppilaat joutuvat perustelemaan myös valmiiksi ratkaistujen tehtävien virheet tai miksi ratkaisu on oikein. Perustelevaa sanallisten ja graafisten tehtävien ratkaisutapaa harjotellaan opetusmateriaalissa. Malliratkaisujen kautta oppilaille pyritään opettamaan johdonmukainen ja perusteleva esitystapa tehtävien ratkaisuun.

Matematiikkaa voi hahmottaa visuaalisesti monella eri tapaa. Ensiksi voidaan hahmottaa päässä asioita, jotka ovat selvästi visuaalisia, ja hahmotetun kuvan avulla ratkaista ongelmia. Toiseksi voidaan hahmottaa visuaalisesti ideoita ja prosesseja, jotka aluksi ovat luonteeltaan epävisuaalisia. Tämän tavan tarkoituksena on auttaa ymmärtämään prosesseja. Kolmanneksi myös täysin epävisuaalisia prosesseja on mahdollista hahmottaa visuaalisesti. Näitä kolmea visuaalisen hahmottamisen tapaa tulisi hyödyntää opetuksessa. Oppilaiden tulisi mm. osata tehdä taulukoita ja kuvaajia asioiden ymmärtämistä varten. [6]

Opetusmateriaalissa visuaalisuutta on korostettu niin aiheiden käsittelyssä kuin asioiden selittämisessä tarkentamisessa. Graafisten esitysten tueksi on otettu taulukoita selittämään miten kuvaajien pisteet on saatu ja miten taulukon avulla voidaan vertailla suureita. Diagrammien avulla on pyritty selventämään mm. osien suhteita toisiin ja kokonaisuuteen.

Artikkelin mukaan oppilaiden tulisi oppia näkemään ja löytämään asioiden säännönmukaisuuksia myös opetustilanteiden ulkopuolella. Esimerkiksi kirjallisuuden ja historiallisten tapahtumien tutkimisessa tulee hahmottaa asioiden säännönmukaisuuksia. [6]

1.3.2 Lähestymistavat

Matematiikan opetuksessa yleisin tapa on kertoa oppilaille ensin uusi aihe ja siihen käytettävät menetelmät, minkä jälkeen siirrytään aiheeseen liittyvien tehtävien ratkaisemiseen. Tästä lähestymistavasta haluttiin tietoisesti poiketa tässä oppikirjassa, sillä oppilaat haluttiin laittaa pohtimaan asiaa ennen kertomista. Uutta asiaa päätettiin lähestyä pohdintatehtävän avulla kaikissa oppikirjan osissa. Tämän tutkielman oppikirjan osaan kuuluvat aihealueet tulisi olla oppilaille tuttuja, sillä ne on opetettu ensimmäisen kerran yläasteella [18].

Artikkelissa *Productive Failure in Learning Math* tutkittiin onko parempi lähestyä uutta aihetta ensin opettamalla aihe ja menettelytavat, minkä jälkeen ratkaistaan tehtäviä vai ratkaista ensin tehtäviä, vaikka ne epäonnistuisivatkin, ja sitten opettaa aihe ja menetelmät. Molemmilla tavoilla saatiin hyviä tuloksia menetelmien oppimisessa. Kuitenkin oppilaat, jotka omistautuivat ongelman ratkaisemiseen ennen kuin se oli opetettu, ymmärsivät opetettavan asian paremmin ja heidän oli helpompi siirtyä sanallisiin tehtäviin kuin oppilaiden, joita opetettiin ensin. [12]

Kyseisen artikkelin toisessa tutkimuksessa kahden aiemman tutkitun lähestymistavan lisäksi tutkittiin miten suoriutuvat oppilaat, joilla on mahdollisuus oppia toisten oppilaiden tekemistä virheellisistä ongelmanratkaisuista. Kyseiset oppilaat opiskelivat ja arvioivat toistensa saamia ratkaisuja ennen opetusta. He suoriutuvat paremmin kuin oppilaat, joita opetettiin aluksi, mutta heikommin kuin oppilaat, jotka paneutuivat ongelman ratkaisemiseen ensin. [12]

Vertailu on olennainen oppimisprosessi. Saman ongelman vierekkäin asetettujen ratkaisutapojen vertaileminen helpottaa varsinkin eri menettelytapojen oppimista ja edistää joustavuutta ongelmanratkaisussa. Yläkouluikäisille tehdyn tutkimuksen mukaan eri ratkaisumenetelmien vertailu tukee menettelytapojen oppimista, sillä se tukee oppilaita tutkimaan ja käyttämään vaihtoehtoisia ratkaisumenetelmiä. [22]

Vertailu on huomioitu opetusmateriaalissa mm. verrannon eri ratkaisumenetelmiin tutustuttaessa. Vertailemalla on haluttu korostaa, että verranto on mahdollista ratkaista muillakin tavoilla kuin ristiinkertomalla. Tarkoituksena on, että oppilaat saavat vertailla eri tapojen haittoja ja hyötyjä, ja valita sopivimman ratkaisutavan tehtävän luonteesta riippuen.

1.3.3 Tehtävätyypit

Oppikirjaan haettiin vaihtelevuutta erilaisilla tehtävätyypeillä ja ideoita tehtäviin haettiin oppikirjalle asetetuista yleisistä tavoitteista. Tehtävien valinnassa haluttiin myös korostaa tutkimuksellisuutta ja graafista tarkastelua.

Oppikirjaan valittiin muutamia tehtävätyyppejä perinteisten suorien tehtävien lisäksi. Artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* mainitaan, että oppilaiden olisi hyvä itse luoda matematiikkaa [6]. Tämän vuoksi oppikirjassa on mukana tehtäviä, joissa oppilaiden tulee keksiä aiheeseen liittyviä esimerkkejä ja suunnitella tehtävä parille ratkaistavaksi, kuten tehtävässä 12. Oppikirjan pohdintatehtävissä on myös tehtäviä, joiden valmista ratkaisua tulee analysoida ja saadun vastauksen järkevyyttä pohtia. Myös graafiset tehtävät ja tutkimustehtävät ovat saaneet painoarvon erityisesti lineaarisen riippuvuuden tehtävissä.

2 Suureiden välinen riippuvuus

Tässä kappaleessa perustellaan tutkielmaan kuuluvan oppikirjaosan sisältöön vaikuttaneita tekijöitä. Tutkielman oppikirjaosassa on pyritty kehittämään oppilaan verrannollista ajattelua ja suureiden välisten riippuvuuksien tunnistamista sekä graafisen esityksen hahmottamista. Verrannollinen ajattelu on tärkeä taito, jonka vaillinainen osaaminen voi aiheuttaa mm. oppimisvaikeuksia tulevissa opinnoissa [9].

Oppikirjan aihealueiden järjestyksen valinnassa on korostettu graafista lähestymistapaa. Opetusmateriaalissa on pyritty puuttumaan aihealueiden hankaliin kohtiin ja selventämään yleisiä harhakäsityksiä tehtävien, kuvien ja selitysten avulla. Opetusmateriaalin sisällössä ja tehtävien valinnassa on huomioitu oppilaiden yksilölliset erot.

2.1 Verrannollinen ajattelu

Moni tunnettu psykologi on tutkinut lapsien ja nuorien matemaattisten taitojen ja ymmärryksen kehittymistä. Verrannollinen ajattelu on yksi taito, joka kehittyy iän myötä.

Piagetin mukaan vasta 12–13 -vuotiaalla on tarvittavat kognitiiviset taidot verrannollisuuden ymmärtämiseen. Kyseiset tarvittavat taidot liittyvät verrannollisen riippuvuuden ymmärtämisen lisäksi sen ymmärtämiseen lukuarvoilla määrättäessä. [3]

Hoffer & Hofferin mukaan verrannollista ajattelua on yleisesti pidetty yhtenä tärkeimpänä ajattelumuotona, joka hankitaan nuoruudessa. Tämän ajattelun kehittymisen epäonnistuminen varhais- tai keskinuoruudessa haittaa tiettyjen tieteenalojen opiskelemista, erityisesti aloilla, joilla edellytetään kvantitatiivista ajattelua ja ymmärtämistä, kuten algebrassa, geometriassa, biologiassa, kemiassa ja fysiikassa. Hoffer & Hofferin mukaan suhteen käyttö ja verrannollinen ajattelu ovat monissa käytännön tilanteissa mukana, joten kyseisiä kykyjä pitäisi huolellisesti kehittää koulussa. [9]

Tutkija Robert Karplus kollegoineen on tutkinut oppilaiden verrannollisuuden ymmärtämistä ja pyrkinyt löytämään verrannollisuuden ymmärtämisen eri tasoja, kuten verrannollisuuden ymmärtämistä suhdekäsitteen kautta. Tutkimusten mukaan eri-ikäiset oppilaat lähestyvät ongelmaa eri tavalla. Tutkitut 4. luokkalaiset arvasivat verrannollisuuteen liittyvän ongelman vastauksen kun taas vanhemmat yläkoululaiset osasivat päätellä oikean vastauksen verrannollisuuden avulla tai muilla keinoilla. Robert Karplus on käyttänyt tutkimuksissaan mm. Mr. Short/Mr. Tall -ongelmaa, joka löytyy oppimateriaalista suoraan verrannollisuuden pohdintatehtävänä. [14]

Oppilaan päättelyn taso riippuu siis paljon oppilaan iästä. Nuorella oppilaalla on tapana käyttää additiivista päättelyä ongelmien ratkaisemiseen, kun myöhemmin vertailu pohjautuu kertomismenetelmiin, kuten suhteen, murtoluvu, prosenttien ja verrannon käyttöön. Vaikka vanhempien oppilaiden tulisi ymmärtää ja osata käyttää esimerkiksi suhdetta ja prosentteja, he helposti yleistävät ongelmia liikaa ja yrittävät ratkaista ongelmaa vaikeammilla menetelmillä kuin ratkaisu oikeastaan vaatisi. [13]

2.2 Verrannollisuuden ja lineaarisen riippuvuuden käsittely

Verrannollisuus ja lineaarisuus ovat tärkeitä ideoita matematiikassa ja luonnontieteissä. Tämän vuoksi verrannollisuuden opiskeluun käytetään aikaa niin peruskoulussa kuin lukiossakin [17].

Oppikirjassa aiheiden käsittelyjärjestyksenä on siirtyä verrannollisuudesta lineaariseen riippuvuuteen ja ensimmäisen asteen yhtälön graafiseen käsittelyyn. Vasta tämän jälkeen käsitellään ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti. Kyseinen käsittelyjärjestys ei ole tavanomainen lyhyen matematiikan oppikirjoissa, sillä useissa kirjoissa ensimmäisen asteen yhtälön algebrallinen käsittely tulee ennen verrannollisuutta ja lineaarista riippuvuutta.

Verrannollisuus-kappaleen alussa tutustutaan suhde-käsitteeseen, sillä verranto määritellään kahden suhteen yhtäsuuruutena [10]. Samalla käsitellään suhteen arkipäivän sovellus, mittakaava. Matematiikan käyttäminen arkipäivän ongelman ratkaisemisessa voi motivoida oppilasta opiskelemaan matematiikkaa, sillä mitä lähempänä oppilaiden arkipäivää käsiteltävä asia on sitä kiinnostuneempia oppilaat ovat aiheesta [23].

Tämän jälkeen oppikirjassa käsitellään suoraan ja kääntäen verrannollisuus. Molempia aiheita lähestytään pohdintatehtävien kautta, sillä oppilaan ajattelun herättäminen pohdintatehtävillä motivoi oppilasta kiinnostumaan aiheesta [12]. Tämän jälkeen oppikirjassa tutkitaan kahden suureen välistä riippuvuutta graafisesti. Graafisen tarkastelun avulla päästään suoraan ja kääntäen verrannollisuuksien määritelmiin ja mallitehtäviin.

Suoraan verrannollisuus -kappaleessa käsitellään verranto ja verrannon eri ratkaisumenetelmiä. Oppilaat pääsevät myös vertailemaan ratkaisumenetelmiä ja analysoimaan malliratkaisuja, mikä tukee joustavuutta ja monipuolista ratkaisumenetelmien käyttöä [22]. Tämän jälkeen verrantoa käytetään sanallisten verrannollisuuslaskujen ratkaisuissa. Sanallisiin verrannollisuustehtäviin liittyen opetusmateriaalissa käydään läpi tehtävien vaatimat sanalliset perustelut ja havainnollistaminen.

Lineaarinen riippuvuus -kappale nidotaan yhteen verrannollisuuden kanssa vertailemalla suoraan verrannollista riippuvuutta ja lineaarista riippuvuutta. Lineaarisen riippuvuuden kuvaajana on suora, jonka kulmakertoimen ja vakiotermin ominaisuuksiin tutustutaan mm. kokeilemalla teknisiä apuvälineitä käyttäen. Kappaleen lopussa pohditaan miten suoran yhtälöstä saadaan ratkaistua muuttujan x arvo.

Artikkelin *Connected Representations: From Proportion to Linear Functions* mukaan yhtenäinen ja tehokas siirtyminen verrannollisuudesta lineaarisiin funktioihin tulisi sisältää myös visuaalisia keinoja, kuten taulukoiden ja kuvaajien käyttöä. Suoraan verrannollisen ongelman käsittelystä taulukoiden ja kuvaajien avulla voidaan siirtyä syntyvän suoran yhtälön muodostamiseen ja kulmakertoimen määrittämiseen, jolloin kulmakertoimen huomataan olevan verrannollisuuskerroin. Tämän jälkeen on hyvä siirtyä lineaarisen riippuvuuden tutkimiseen. Ongelmasta muodostetaan taulukko, josta saatujen arvojen avulla hahmotellaan kuvaaja. Kuvaajan avulla voidaan ratkaista ongelmia ja pystytään määrittämään suoran yhtälö. Tämän jälkeen on mahdollista edetä niin ensimmäisen asteen yhtälöön algebrallisesti kuin toisen asteen yhtälön graafiseen esittämiseen. [2]

Lineaarista ja verrannollista mallintamista on paljon matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa. Useat tutkijat [8] ovat huomanneet, että oppilaille saattaa tulla taipumus alkaa ajatella jokaisen numeerisen suhteen olevan lineaarista. Tällaista taipumusta kutsutaan lineaarisuuden illuusioksi. Kyseinen ilmiö todettiin myös yläkoulu- ja lukioikäisille tehdyssä tutkimuksessa, jossa selvitettiin oppilaiden taipumus nähdä verrannollista riippuvuutta todennäköisyystapauksissa [7].

Luokkatilanteessa oppilaille saattaa syntyä käsitys, että kaikki on lineaarisesti riippuvaa, jos vastaesimerkkejä ei oteta huomioon. Lineaarista illuusiota pyrittiin ehkäisemään pohdintatehtävissä, joissa pitää löytää lineaarisesti riippuvien suureiden lisäksi lineaarisesti riippumattomia suureita. Esimerkkien ja vastaesimerkkien löytämiseksi oppilaiden tulee ymmärtää myös käsitteiden määritelmät.

2.3 Graafinen tarkastelu

Graafisen tarkastelun hahmottaminen on hyödyllinen taito niin matematiikassa kuin myös luonnontieteissä, kuten fysiikassa. Useat tutkijat ovat havainneet, että oppilailla on usein vaikeuksia ymmärtää ja tulkita kuvaajia oikein.

Artikkelin *Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics* mukaan fysiikan opettajat uskovat, että oppilaiden huono matematiikan osaaminen selittää oppimisvaikeudet fysiikassa [21]. Kuitenkin, tutkimuksessa oppilaat osasivat laskea kulmakertoimeen liittyviä matematiikan tehtäviä, mutta epäonnistuivat samankaltaisissa fysiikan tehtävissä. Oppilaat käyttävät erilaisia ratkaisutapoja fysiikan ja matematiikan tehtävissä, vaikka tehtävät olisivat samankaltaiset. Tämän vuoksi opetusmateriaaliin on otettu mukaan myös fysiikkaan liittyviä suureita, kuten apine ja tilavuus, ja niiden riippuvuuksien selvittämistä niin algebrallisesti kuin graafisestikin.

Oppilaiden väärinymmärrykset ja puutteet suoran kulmakertoimen ymmärtämisessä voivat aiheuttaa useita oppimisvaikeuksia funktioiden, raja-arvon, derivaatan ja integraalin ymmärtämisessä lukiossa. Artikkelin *Investigation of Eight-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function* mukaan oppilaille on helpompaa kulmakertoimen määrittäminen pelkästään algebrallisesti kuin graafisesti ja algebrallisesti. Oppilaat eivät usein ymmärrä algebrallisen ja graafisen esityksen välistä yhteyttä. Tällöin kuvaajasta yhtälöön siirtyminen ja yhtälöstä kuvaajaan siirtyminen koetaan hankalaksi. [4]

Oppilailla esiintyy myös vääriä käsityksiä ja vaikeuksia ymmärtää lineaarisia yhtälöitä, kuvaajia ja kulmakertoimia. Heillä on vaikeuksia osata käyttää suoran pisteitä kulmakertoimen määrittämiseen. Ongelmia esiintyy myös kulmakertoimen määrittämisessä suoran algebrallisesta muodosta ja oppilailla on vaikeuksia ymmärtää kulmakertoimen muuttuminen, kun suoran yhtälö esitetään toisessa muodossa, kuten ratkaistun muodon $y = kx + b$ sijaan yleisessä muodossa $ax + by + c = 0$. [4]

Oppilailla on kaksi yleistä väärinymmärrystä kuvaajien lukemiseen liittyen. Ensinnäkin oppilaat käsittelevät kuvaajaa kuin piirrosta. Jos oppilaille annetaan tehtäväksi piirtää aika-nopeus -kuvaaja, jossa pyöräillään mäen yli, moni oppilaista piirtää kuvaajaksi mäen. Näin ilmeni artikkelin *Misconceptions in Graphing* tutkimuksessa, vaikka oppilas olisi ensiksi pystynyt kuvailemaan verbaalisesti nopeuden vaihtelut oikein. Lisäksi oppilaille aiheutti ongelmia aika-nopeus -kuvaaja, jossa kahden auton kulkemista tutkittiin. Kun autojen kuvaajat leikkasivat toisensa, oppilaiden mielestä autot ohittivat toisensa kyseisessä pisteessä. [5]

Toiseksi nopeutta ei osattu hahmottaa aika-matka -kuvaajasta, kun oppilailta kysyttiin kahden tasaisella nopeudella etenevän eri kohdista lähtevän objektin nopeutta tietyllä ajanhetkellä. Osa oppilaista oletti vastauksen löytyvän graafin korkeudesta kulmakertoimen sijaan. Tällöin väärä päättely johtuu väärinymmärretystä yhteydestä satunnaisen muuttujan ja kuvaajan väärän ominaisuuden välillä. [5]

2.4 Yhtälön ratkaisumenetelmät

Verrannollisuuteen liittyviä tehtäviä voidaan ratkaista useilla eri tavoilla, samoin kuin yhtälönratkaisussa voidaan käyttää eri menetelmiä. Opetusmateriaalissa on otettu huomioon oppilaiden yksilölliset erot ja oppilaita rohkaistaan kehittämään itselle luontaisinta verrannollista ajattelua. Oppikirjan mallitehtävien ratkaisuissa käytetään verrannon laskemisessa yhtälön operoimista puolittain, ristiinkertomista tai päättelyä. Ratkaisumenetelmiä vertaillaan keskenään ja sanallisten verrannollisuustehtävien ratkaisumenetelmäksi on valittu tehtävän luonteesta riippuen sopivin menetelmä. Opetusmateriaalissa on pyritty suosimaan vertailtavien asioiden vierekkäin asettelua.

Artikkelissa *Teachers' Views about Multiple Strategies in Middle and High School Mathematics* selvitettiin hyötyjä oppilaiden tutustuttamisesta useisiin ratkaisumenetelmiin. Opettajat kokivat, että ensisijainen hyöty useiden ratkaisumenetelmien opettamisessa oli, että se auttoi heitä muokkaamaan opetustaan, jotta he voisivat ottaa huomioon oppilaiden oppimistyylien ja ajattelutapojen yksilölliset erot. Tutkimukseen osallistuneiden opettajien mielestä oppilaiden altistaminen useille ratkaisumenetelmille sai heidät ymmärtämään oppilaita paremmin ja auttoi varmistamaan, että jokainen oppilas löysi itselleen sopivan ratkaisumenetelmän. Useiden ratkaisumenetelmien käytössä on myös mahdollisia haittoja. Opettajien mielestä erityisesti heikomman osaamisen oppilaat saattavat hämmentyä useista opetettavista ratkaisumenetelmistä. Lisäksi opettajat kokivat, että ajan puute haittaa useiden menetelmien opettamista. [16]

Opetusmateriaalissa on haluttu korostaa, että verranto voidaan ratkaista muutenkin kuin ristiinkertomalla. Huolenaiheena on, että oppilaille jää liian puutteellinen käsitys ja osaaminen suhteeseen ja verrannollisuuteen liittyvien yhtälöiden ratkaisusta varsinkin, jos ristiinkertominen opetetaan ainoaksi tavaksi ratkaista verranto. Tällöin oppilailla ei ole myöskään mahdollisuutta vertailla erilaisia ongelmia ja niiden ratkaisutapoja. Pahimmassa tapauksessa oppilaille saattaa jäädä mieleen vain muistinvaraisia ratkaisukaavoja. Ainoastaan noin neljäsosa yläkouluikäisistä oppilaista, jotka oli opetettu ratkaisemaan verranto vain ristiinkertomalla, osasi ratkaista mittakaavaan liittyvän verrannollisuustehtävän oikein tutkimuksessa [27].

Improving seventh grade students' learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction -artikkelissa korkean osaamisen oppilaat tutustutettiin suhde- ja verrannollisuustehtävissä kolmeen eri ratkaisutapaan ja heitä opetettiin valitsemaan tehtävään sopivin ratkaisutapa. Tämän jälkeen tehdyn kyselyn mukaan korkean osaamisen oppilaat kokivat kaikkien opittujen ratkaisutapojen olevan lähes yhtä helppoja. Matalan osaamisen oppilaat taas pitävät ratkaisukeinoista ristiinkertomista helpoimpana ratkaisutapana. Matalan tason oppilaille opetettiin ensisijaisesti ratkaisemaan suhde- ja verrannollisuustehtävät ristiinkertomalla. [11]

Oppilaiden aiheen käsitteellinen ymmärtäminen ja menettelytapojen ymmärtäminen sekä joustavuus yhtälönratkaisussa ovat parempia, kun oppilaat ovat vertailleet eri yhtälön ratkaisumenetelmiä vierekkäin kuin alekkain. Vierekkäin vertailemalla oppilaat myös ajattelivat laajemmin ja käyttivät matemaattisia termejä enemmän. [22]

2.5 Mitä verrataan ja mihin?

Jo alakoulusta tutut käsitteet, kuten osamäärä, suhde ja verrannollisuus, vaativat paljon matemaattista ymmärtämistä ja ovat vaikeita opettaa. Kyseiset käsitteet ilmaisevat asioiden matemaattisia suhteita, ja niiden eroja ja yhteneväisyyksiä oppilaiden on vaikea erottaa. Osamäärän, suhteen ja verrannon opettamisessa tulee olla huolellinen terminologian käyttämisessä väärinymmärrysten välttämiseksi. [24]

Suhdetta käsitellessä oppilailla esiintyy vaikeuksia ymmärtää mitä verrataan ja mihin verrataan. Kun suureita vertaillaan keskenään ja kun suuretta verrataan kokonaisuuteen voidaan käyttää samanlaista merkintätapaa, vaikka vertaillaankin eri asioita [24].

Suhteen käsittelyssä osien vertailussa käytetään visualisointia kuvin ja kuvion asioiden selventämiseksi. Artikkelin mukaan *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics* visualisointi kuvien ja kuvioiden avulla kasvattaa matematiikan hahmottamista ja ymmärtämistä [1].

Oppikirjan suhde-kappaleessa käsitellään kahden suureen sekä suureen ja kokonaisuuden välisessä vertailussa artikkelissa *Classroom Challenge* esiintyvää 3/5-ongelmaa soveltamalla [26]. Kuvassa, jossa viidestä osasta kolme on väritettynä, esiintyy monia suhteita eri osien välillä. Kun alkuperäisessä ongelmassa keskitytään osien ja kokonaisuuksien hahmottamiseen, oppikirjan tehtävässä pyritään vertailemaan osia toisiin osiin ja kokonaisuuteen sekä erottamaan ne toisistaan.

2.6 Tehtävät

Opetusmateriaalin tehtävät niin teoria- kuin tehtäväosaan valikoituivat koko oppikirjaa koskevien yleisten tavoitteiden ja aiheeseen liittyvän kirjallisuuden avulla. Tehtävien kautta on pyritty tuomaan esille aihealueeseen liittyviä harhakäsityksiä. Näiden lisäksi on tutkittu vanhoja ylioppilaskokeita, ja niistä on otettu oppikirjaan mukaan erilaisia aiheisiin liittyviä tehtäviä. Tehtävät antavat myös jonkinlaista suuntaa mitä asioita ja minkä tasoisesti asiat tulisi osata ylioppilaskokeissa [15].

Opetusmateriaalin tehtävien aiheiden valinnassa, varsinkin verrannollisuustehtävien kohdalla, on valittu oppilaille sopivia ja hyödyllisiä aiheita. Opetusuunnitelman mukaan opetukseen tulisi valita aiheita, jotka ovat arkipäivän sovelluksia tai oppilaita kiinnostavia aiheita, ilmiöitä ja niihin liittyviä ongelmia [17]. Myös aiheisiin liittyvät luonnontieteiden esimerkit on otettu huomioon tehtävien aihevalinnoissa.

Yleisesti ottaen, opettajat ovat maininneet hyvien matematiikan tehtävien piirteiksi, että hyvät tehtävät sallivat useita lähestymistapoja ja useita ratkaisuja, ovat vaihtelevia, ovat yhteyksissä luokassa opiskeltuun matematiikkaan, vaativat kriittistä ajattelua ja päättelyä ja ovat sopivalla vaikeustasolla [25]. Näitä asioita on pyritty ottamaan huomioon opetusmateriaalin tehtävien valinnassa.

2.6.1 Verrannollisuus

Artikkelin Degrees of Freedom in Modeling: Taking Certainty out of Proportion mukaan koulumatematiikan ja arkielämän matematiikan välillä on huolestuttava ero. Verrannollisuuteen liittyvissä perustehtävissä ongelma oletetaan verrannollisuustehtäväksi ilman, että tilannetta mietittäisiin tai matemaattista mallintamista käytettäisiin. Myös opettajat laskevat tavallisilta verrannollisuuslaskuilta näyttävät laskut usein verrannollisuuden avulla, vaikka oikeassa elämässä samanlaiset ongelmat ratkaistaisiin muilla tavoin. [20]

Opetusmateriaalissa verrannollisuuteen liittyviin sanallisiin tehtäviin on pyritty valitsemaan myös tehtäviä, jotka on mahdollista ratkaista monilla tavoilla. Esimerkiksi tehtävässä 7 b)-kohdan voi laskea verrannolla tehtävänannon arvoilla tai tehtävän a)-kohtaa hyväksi käyttäen. Tehtävän tarkoituksena on saada oppilaat huomaamaan, että sanallisen verrannollisuustehtävän ratkaisemiseksi ei ole välttämätöntä käyttää verrantoa, vaan tehtävän ratkaisun voi päätellä myös muuten.

Verrannollisuuteen liittyvät tehtävät ovat usein sanallisia tehtäviä, joiden tehtävänannosta löytyvien tietojen avulla voidaan muodostaa taulukko ja päätellä kyseessä oleva riippuvuus, ellei sitä ole erikseen mainittu. Sanallisia tehtäviä voidaan vaikeuttaa jättämällä kertomatta suureiden välinen riippuvuus tehtävänannossa. Monikohtaisissa tehtävissä on eri tasoisia tehtäviä, joiden avulla oppilaita voi eriyttää. Tehtävien joukkoon on otettu myös hieman haastavampia kahta tuntematonta sisältäviä tehtäviä, kuten tehtävä 13.

Opetusmateriaalissa painotetaan myös sanallisten verrannollisuustehtävien ratkaisujen perusteluihin. Pelkkä verrannon esiintyminen ei välttämättä tarkoita, että kyseessä on verrannollinen riippuvuus, sillä kyseessä voi olla vain kahden suhteen yhtäsuuruus [24]. Toisaalta myös suureiden välisen verrannollisuuden esittäminen ei välttämättä kaipaa verrantoa kuten aiemmin todettiin, sillä yhtälön esittämistä tärkeämpää on selittää verrannollinen ajatteluprosessi.

Matematiikan tehtävissä mallintamisessa saattaa aiheutua ongelmia, mikäli tehtävät sisältävät vaihtoehtoisen moraalisen näkökannan tai vaativat esitietoa. Moraalinen näkökanta esiintyy esimerkiksi seuraavanlaisessa tehtävässä: ”Kaksi kaverusta, Anne ja John, ostavat 5 dollarin lottokupongin yhdessä. Anna maksaa 3 dollaria ja John 2 dollaria. Heidän kuponkinsa voittaa 40 dollaria. Miten heidän tulisi jakaa rahat?” Tehtävän mallintamisessa ongelmaksi tulee, millä tavalla jaon ajatellaan olevan oikein, moraalisesti vai matemaattisesti. [20]

Opetusmateriaalin suhde-kappaleessa on samankaltainen tehtävä mallitehtävänä. Usein vastaavanlaisissa tehtävissä kysytään ”Mikä on oikea tapa jakaa rahat?”, vaikka jakamiseen ei ole yksiselitteistä tapaa. Mallitehtävän A.4 tehtävänannossa spesifioidaan, että mansikoiden jakaminen halutaan tehdä maksuosuuden suhteen, mutta opetustilanteessa on hyvä tuoda esille vaihtoehtoiset jakamistavat. Kuitenkin kyseinen tehtävätyyppi on hyvä esimerkki suhteen käyttämisestä konkreettisen ongelman ratkaisemisessa.

Verrannollisuuteen liittyvissä tutkimuksissa on usein käytetty tiettyä ongelmaa oppilaiden verrannollisen ajattelun tason tunnistamiseen ja määrittämiseen. Verrannollisen ajattelun herättelemiseen käytetään suoraan verrannollisuus -kappalessa Robert Karplusin kehittämää Mr. Short/Mr. Tall -ongelmaa, jota ovat käyttäneet niin opettajat kuin tutkijatkin ympäri maailmaa [14]. Mr. Short/Mr. Tall -ongelmassa vertaillaan kahden erimittaisen hahmon, Mr. Short'n ja Mr. Tallin, pituuksia napeilla ja klemmareilla. Ongelman avulla voidaan tunnistaa oppilaan verrannollisen ajattelun taso, kun verrannollisen ajattelu tasoja ovat esimerkiksi epälooginen taso, additiivinen taso, siirtymätaso ja suhdetaso. Kyseinen tehtävä voi auttaa opettajaa tiedostamaan millä tasolla oppilaat ovat ja miten oppilaiden ajattelussa esiintyviä virhekäsityksiä voidaan oikaista.

2.6.2 Lineaarinen riippuvuus

Lineaarisen riippuvuuden tehtävissä graafisuudella on suuri painoarvo. Kappaleessa Graafinen tarkastelu on eritelty yleisiä harhakäsityksiä kuvaajien tulkinnassa ja suoran yhtälössä, joiden pohjalta vaikeuksia aiheuttavia tehtäviä on valittu opetusmateriaaliin. Opetusmateriaalissa on sähköistyvän ylioppilaskokeen myötä otettu huomioon myös tietokoneohjelmistoihin tutustuminen kokeiluun painottuvan pohdintatehtävän myötä.

Opetusmateriaalin lineaarisen riippuvuuden tehtävissä tutkitaan ja piirretään monenlaisia kuvaajia. Oppilaat laitetaan muodostamaan ja piirtämään kuvaajia erityisesti sanallisesta tehtävänannosta saatujen tietojen perusteella. Oppilailla esiintyy vaikeuksia hahmottaa nopeutta aika–matka -kuvaajasta [5], minkä vuoksi oppilaat pääsevät pohtimaan sanallisen tehtävän graafista ratkaisemista vastaavanlaisessa kuvaajatehtävässä 22. Tehtävissä käsitellään sekaisin sekä suoran graafisia että algebrallisia esitystapoja, jotta oppilaat löytäisivät yhteyden suoran yhtälön ja suoran kuvaajan välillä. Esimerkiksi tehtävässä 21 on pyydetty algebrallisesta suoran yhtälöstä hahmottelemaan graafinen esitys, kun suoran yhtälö on esitetty yleisessä muodossa.

Oppilailla on usein vaikeuksia hahmottaa kahden kuvaajan leikkauspisteen merkitys ja mitä kuvaajat kertovat tilanteesta ennen ja jälkeen toistensa leikkaamisen [5]. Lineaarisen riippuvuuden pohdintatehtävässä B.1 oppilaat muodostavat ja piirtävät kuntosalien kustannuksista kuvaajat. Kyseisessä pohdintatehtävässä selvennetään leikkauspisteen merkitystä konkretisoimalla tilanne arkielämän esimerkkiin.

Suoran yhtälöön liittyvissä tehtävissä on keskitytty oppilaille vaikeisiin kohtiin. Suoran yhtälöstä on niin pohdintatehtävinä kuin tuntitehtävinäkin määrittelytehtäviä, joissa tulee määrittää suoran kulmakerroin ja vakiotermi eri muotoisista suoran yhtälöistä. Kulmakertoimen määrittäminen, kun suoran yhtälö esitetään eri muodossa kuin $y = kx + b$, on oppilaille hankalaa [4]. Vaikeuksia aiheuttavat myös suoran yhtälön määrittämiset pisteiden avulla, joten opetusmateriaalissa on mukana erilaisia suoran yhtälön määrittämistehtäviä.

Kokeilua ja tutkimuksellisuutta oppilaat pääsevät harjoittamaan opetusmateriaalin tehtävässä B.5. Suoran yhtälöä käsiteltäessä ennen laskevan ja nousevan suoran määritelmää tutustutaan suoran muotoon tietokoneavusteisesti tutkimalla kulmakertoimen ja vakiotermin saamien arvojen merkitystä suoran muotoon. Tällöin oppilaat saavat kokeilemalla tutkia suoran muotoa ja tehdä saaduista tuloksista johtopäätelmiä. Vasta tämän jälkeen oppilaille annetaan nousevan ja laskevan suoran käsitteiden määritelmät.

2.6.3 Ylioppilaskokeiden tehtävät

Verrannollisuustehtäviä on ollut useissa ylioppilaskokeessa viime vuosien aikana. Ylioppilaskokeen tehtävätyypit ovat vaihdelleet, sillä kevään 2015 kokeessa tehtävä 7 oli tavanomainen kääntäen verrannollisuus -tehtävä, jossa talvinopeusrajoitus piti määrittää, kun kesänopeusrajoituksen tiedettiin olevan 20 km/h korkeampi ja matkan kestot olivat tiedossa. Syksyllä 1999 tehtävässä 8 taas määriteltiin aluksi annettujen suureiden väliset riippuvuudet ja niiden avulla tuli osata ensin mallintaa tehtävä, minkä jälkeen ratkaista tuntematon saadun kaavan avulla. [15]

Lineaariseen riippuvuuteen ja mallintamiseen liittyviä tehtäviä on ollut ylioppilaskokeissa vuosittain. Oppikirjaan on otettu syksyn 2015 tehtävän 11 a)-kohta, jossa on kyseessä lineaarisen kasvun tehtävä [15]. Tehtävän ratkaisussa kuvaajan hahmotteleminen auttaa hahmottamaan riippuvuutta. Kyseisen tehtävän voi ratkaista myös aritmeettisen lukujonon avulla, mikä on käyty MAY1-kurssilla [17]. Lineaarisen riippuvuuden haastavimpia tehtäviä on syksyn 2001 tehtävä 6, jossa muodostetaan ja piirretään bensiini- ja dieselautojen vuotuisille kustannuksille kuvaajat. Bensiiniauton kustannukset ovat suoraan verrannollisia ajettujen kilometrien määrään, kun dieselauton kustannukset koostuvat dieselverosta ja ajetuista kilometreistä. Alkuperäistä tehtäväantoa on hieman muutettu oppilasystävällisemmksi muuttamalla markat euroiksi.

Opetusmateriaalissa ylioppilastehtävät on merkitty tehtävänannon loppuun hakasuluissa, esimerkiksi [k06/4]. Pieni s- tai k-kirjan merkitsee lyhyen matematiikan syksyn tai kevään ylioppilaskoetta ja jälkimmäinen numero kertoo tehtävän numeron.

3 Opettajan opas

Tässä oppaassa esitellään opetusmateriaalin kappaleiden sisällöt, pohdintatehtävät ja tehtävien vastaukset. Samalla tarjotaan vinkkejä oppilaiden eriyttämiseen pohdintatehtävissä.

3.1 Ajankäyttösuunnitelma

Ajankäyttösuunnitelman tuntijako on tehty 45 minuutin oppituntien mukaan. Tuntijako on suuntaa-antava ehdotus opettajalle.

Verrannollisuus (3 h)

- Suhde (1 h)
- Suoraan verrannollisuus (1 h)
- Kääntäen verrannollisuus (1 h)

Lineaarinen riippuvuus (2 h)

3.2 Verrannollisuus

Tässä kappaleessa käsitellään suhdetta, suoraan verrannollisuutta ja kääntäen verrannollisuutta. Kappaleen tavoitteina on verrattavien osien tunnistaminen, verrannon useiden ratkaisutapojen hahmottaminen, ongelmien muotoileminen yhtälöiksi, suoraan ja kääntäen verrannollisuuden käsitteiden ymmärtäminen ja sanallisten tehtävien ratkaiseminen perustellen.

3.2.1 Sisältö

Verrannollisuuden ensimmäisessä kappaleessa käsitellään suhdetta, sillä verranto määritellään yleensä kahden suhteen yhtäsuuruutena. Suhde-kappaleen alussa selitetään kuvien avulla suureiden sekä suureen ja kokonaisuuden välistä vertailua. Suhteen arkipäivän esimerkkinä tutustutaan mittakaavaan, jonka lisäksi suhdetta käytetään myös osuuksienjakoon liittyvässä mallitehtävässä.

Suoraan verrannollisuus -kappaleessa on tarkoituksena edetä verrannollista ajattelua herättelevän pohdintatehtävän kautta tarkastelemaan suoraan verrannollisia suureita graafisesti. Suoraan verrannollisuuden määritelmän jälkeen keksitään esimerkkejä suoraan verrannollisista suureista. Kappaleessa tutustutaan verrantoon ja vertaillaan sen eri ratkaisumenetelmiä. Kappaleen lopussa esitellään sanallisen verrannollisuustehtävän ratkaisumalli.

Kääntäen verrannollisuus -kappaleen alussa edetään kuten edellisessä kappaleessa. Kappaleessa analysoidaan valmiiksi ratkaistua tehtävää ja lopuksi ratkaistaan kahta tuntematonta sisältävä sanallinen verrannollisuustehtävä.

Verrannollisuuteen liittyvissä tuntitehtävissä on painotettu yhtälön muodostamista sanallisesta tehtävänannosta. Osassa tehtävistä tehtävänannossa on kerrottu suureiden välinen riippuvuus on ja osassa tehtävistä se täytyy ensin itse päätellä.

3.2.2 Pohdintatehtävät

Pohdinta A.1

- Tarkoituksena päästä vertailemaan mustien ja valkoisten osien määrää.
- Ensimmäisessä kuviossa kolme neliötä on valkoisia ja kolme neliötä mustia, toisessa kuviossa on kolme mustaa osaa ja kuusi valkoista osaa, ja kolmannessa kuviossa on kolme mustaa osaa ja 12 valkoista osaa.
- Mustien ja valkoisten osien välinen suhde on ensimmäisessä kuviossa 1 : 1 ja kolmannessa kuviossa 1 : 4.

Pohdinta A.3

- Tarkoituksena mittakaavan soveltaminen arkielämän esimerkissä.
- Esimerkiksi 10 cm mittaisen patsasluonnoksen mittakaava saa olla enintään 10 : 300 eli 1 : 30.
- Oppilaiden tekemiä luonnoksia vertailemalla voidaan huomata, että koon kasvaminen vaikuttaa mittakaavaan. Mitä isompi luonnos sitä pienempi mittakaava.

Pohdinta A.5

- Tarkoituksena johdatella oppilaalle ominaiseen verrannolliseen ajatteluun.
- Pohdintatehtävää voidaan helpottaa ohjaamalla oppilas vertailemaan nappien ja klemmarien suhdetta tai piirtämään herra Pitkä pituus napeissa.
- Oppilaiden käyttämiä ratkaisutapoja olisi hyvä käydä läpi. Oppilaita kannattaa muistuttaa, että verranto itsessään ei perustele, että kyseessä on suoraan verrannollisuus.
- Herra Pätkän pituus on 6 klemmaria ja herra Pitkän 9 klemmaria.

Pohdinta A.6

- Oppilailla on taipumus alkaa ajatella jokaisen numeerisen suhteen olevan lineaarista. Tämän vuoksi on hyvä ottaa esiin myös vastaesimerkkejä.
- Suoraan verrannollisia suurepareja ovat mm. solmu ja metri, bensiinin kulutus ja kilometrit sekä työn määrä ja aika.

- Ei suoraan verrannollisia suurepareja ovat mm. vaatteiden määrä ja kuivumisaika, työn määrä ja aika sekä auton jarrutusmatka ja nopeus.

Pohdinta A.7

- Tarkoituksena on todistaa miksi ristiinkertominen on toimiva tapa ratkaista verranto.
- Tehtävänanto saattaa aiheuttaa oppilaissa hämmennystä, joten aluksi oppilaita voidaan ohjeistaa tutkimaan mitä yhtälöissä on samaa ja mitä eroa. Tämän jälkeen voidaan pohtia miten yhtälön toista puolta operoimalla yhtälöt saataisiin näyttämään samalta.
- Todistaminen kannattaa pitää varsin yksinkertaisena: riittää, että yhtälöä kerrotaan puolittain termeillä a_2 ja b_2.
- Voidaan halutessa ratkaista myös toisinpäin, sillä ristiinkerrotusta muodosta saadaan yhtälöä jakamalla verranto.

Pohdinta A.9

- Tarkoituksena on vertailla kahta eri menetelmillä tehtyä verrannon ratkaisua. Tavan 1 ratkaisu on tehty ristiinkertomalla ja tavan 2 ratkaisu yhtälöä puolittain operoimalla.
- Tavan 1 ristiinkertomisessa on tullut virhe, sillä Oiva on kertonut suhteiden ala- ja yläkerrat keskenään ja vastaukseksi saadaan liian pieni arvo. Tapa 2 on oikein.
- Oppilaita voi pohdintatehtävän yhteydessä muistuttaa, että ulkoaopetellun kaavan käyttämisessä on riskinsä.

Pohdinta A.11

- Tarkoituksena saada oppilaat huomaamaan, että suureiden välillä voi olla muunlaistakin riippuvuutta kuin vain suoraan verrannollisuutta.
- Oppilaita voi ohjeistaa kuvittelemaan esimerkkitilanteeksi automatka ja miettimään, miten suureet silloin konkreettisesti muuttuvat.
- ”Auton nopeus pysyy samana, esimerkiksi 60 km/h. Kuinka kauan matkassa kestää, jos matka on esimerkiksi 10 km suunniteltua pitempi?”

Pohdinta A.12

- Kääntäen verrannollisia suurepareja ovat mm. työntekijöiden määrä ja työn kesto, nopeus ja aika sekä laattojen koko ja laattojen määrä.
- Ei kääntäen verrannollisia suurepareja ovat mm. työn määrä ja aika, auton vuokran hinta ja vuokra-aika sekä auton jarrutusmatka ja nopeus.

Pohdinta A.13

- Tarkoituksena on kiinnittää huomio sanallisen tehtävän oikein mallintamiseen.
- Taulukkoa ei ole tehty suureita vertailemalla vaan alku- ja lopputilanteita vertailemalla. Koska verranto on muodostettu suoraan taulukosta, verrannon muodostaminen on epäonnistunut.
- Vastaukseksi kuitenkin saadaan, että työntekijöitä tarvitaan enemmän, mikä on oikein. Työntekijöiden määräksi saadaan kuitenkin hyvin suuri arvo muihin arvoihin verrattu, mikä oppilaiden tulisi huomata.
- Inventointiin tarvitaan vähintään kuusi työntekijää.

3.3 Lineaarinen riippuvuus

Tässä kappaleessa tutustutaan lineaariseen riippuvuuteen, suoran yhtälöön, kulmakertoimeen ja vakiotermiin. Kappaleen tavoitteina on sanallisten tehtävien mallintaminen, lineaaristen kuvaajien piirtäminen ja tulkinta sekä kulmakertoimen ja vakiotermin tunnistaminen ja vaikutus suoran yhtälöön ja lineaariseen riippuvuuteen.

3.3.1 Sisältö

Lineaariseen riippuvuuteen johdatellaan graafisesti lineaarisen riippuvuuden ja suoraan verrannollisuuden kuvaajia tarkastelemalla. Lineaarista riippuvuutta käsittelevän johdattelun jälkeen annetaan lineaarisen riippuvuuden ja suoran yhtälön määritelmä. Suoran yhtälöstä tutkitaan kulmakerrointa ja vakiotermiä mm. piirto-ohjelmalla, mistä päädytään nousevan ja laskevan suoran määritelmiin. Kappaleen lopussa kerrataan vielä suoran yhtälön termien merkitys lineaariseen riippuvuuteen ja johdatellaan tuntemattoman x ratkaisemiseen.

3.3.2 Pohdintatehtävät

Pohdinta B.1

- Tarkoituksena on tutkia graafisesti suoraan verrannollisuutta ja lineaarista riippuvuutta kuvaajien avulla. Oppilaat piirtävät kuntosalien maksujen kuvaajat samaan koordinaatistoon ja vastaavat kuvaajien perusteella tehtävän kysymykseen.
- Oppilaita voi ohjeistaa taulukoiden käyttöön kuvaajien pisteitä määrättäessä. Lisäksi koordinaatiston ja kuvaajien piirtämisessä on syytä muistuttaa myös akselien ja kuvaajien nimeämisestä.
- Rauta ja Penkki -salin kuukausimaksut kuvautuu suoraan verrannollisesti kun taas Fit'n Fab -salin aloitusmaksu ja kuukausimaksut kuvautuu lineaarisesti. Tehtävän vastaus löytyy kuvaajien leikkauspisteestä, joten Fit'n Fab tulee edullisemmaksi 10. kuukauden jälkeen.

Pohdinta B.2

- Tarkoituksena on vertailla suoraan verrannollisia suureita ja lineaarisesti riippuvia suureita.
- Lineaarisesti riippuvia suurepareja ovat mm. vuokra-autolla ajettujen kilometrien määrä ja auton vuokrakustannukset (auton vuokra ja bensiinit) sekä puhelun kesto ja puhelun maksu, jos puhelulla on aloitushinta ja minuuttimaksu.

Pohdinta B.3

- Tässä pohdintatehtävässä oppilaiden tulee huomioida missä muodossa suoran yhtälön on annettu.
- Yhtälöt kannattaa aluksi muuttaa muotoon $y = kx + b$.

  a) Kulmakerroin $k = -2/3$ ja vakiotermi $b = 0$
  b) Kulmakerroin $k = -5$ ja vakiotermi $b = 3$
  c) Kulmakerroin $k = -3$ ja vakiotermi $b = 1/2$.

Pohdinta B.5

- Tutkimisen tarkoituksena on tutustua suoran piirtämiseen piirto-ohjelmalla ja tutkia suoran kulmakerrointa ja vakiotermiä eri arvoilla.
- Tarkoituksena on päästä yleistämään, että positiivisilla kulmakertoimen arvoilla suora on nouseva ja negatiivisilla kulmakertoimen arvoilla laskeva. Vakiotermin arvo taas vaikuttaa leikkaako suora y-akselin x-akselin ala- vai yläpuolella.
- Kulmakerrointa ja vakiotermiä tutkimalla voidaan saada esimerkiksi seuraavanlaisia vastauksia:

  a) Kun kulmakerroin on positiivinen kokonaisluku, suoran y-arvot kasvavat vasemmalta oikealle eli suora on nouseva. Mitä suurempi kulmakerroin sitä jyrkemmin suora nousee.
  b) Kun kulmakerroin on negatiivinen kokonaisluku, suoran y-arvot pienentyvät vasemmalta oikealle eli suora on laskeva. Mitä suurempi kulmakerroin sitä jyrkemmin suora laskee.
  c) Kun vakiotermi on positiivinen, suora leikkaa y-akselin x-akselin yläpuolella.
  d) Kun vakiotermi on negatiivinen, suora leikkaa y-akselin x-akselin alapuolella.

Pohdinta B.7

- Tarkoituksena on saada oppilaat pohtimaan ja päättelemään suoran muotoa edellisen pohdintatehtävän B.5 ja suoran määritelmän avulla.

- Oppilaita voi ohjeistaa myös tutkimaan ongelmaa piirtämällä suora muutaman pisteen kautta.
- Suora, jonka kulmakerroin $k = 0$, on x-akselin suuntainen ja suoran yhtälö on $y = b$.

Pohdinta B.8

- Pohdinnan tarkoituksena on päätellä lineaarisen riippuvuuden kuvaajan ja suoran yhtälön yhteyttä ja johdatella jo seuraavan kappaleen aiheeseen, ensimmäisen asteen yhtälön algebralliseen ratkaisemiseen.
- Vastaukset voidaan selvittää päättelemällä
  a) $x = 1$, sillä $4 = 3x + 1$
  b) $x = 2$, sillä $5 = x + 3$
  c) $x = 8$, sillä $18 = 3/2x + 6$.

4 Yhteenveto

Lähdeluettelo

[1] Arcavi, A. (2003). *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52.3, s. 215-241.

[2] Baltus, C. (2010). *Connected Representations: From Proportion to Linear Functions*. The Mathematics Teacher, 103.8, s. 590-596.

[3] Barbel, I. & J. Piaget (1958). *The Growth of Logical Thinking*. Basic Books, Inc. New York.

[4] Osman B. (2012). *Investigation of Eight-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function*. BOLEMA: Mathematics Education Bulletin 26.42.

[5] Clement J. (1985). *Misconceptions in Graphing*. Department of Physics and Astronomy, University of Massachusetts Amherst ja Technical Education Research Centers, Cambridge.

[6] Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & J. Mark (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. The Journal of Mathematical Behavior 15, s. 375-402.

[7] Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & L. Verschaffel (2003). *The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence Towards Probabilistic Reasoning*. Educational Studies in Mathematics 53.2, s 113-138.

[8] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. s. 267. Dordrecht/Boston/Lancaster.

[9] Hoffer, A. & S. Hoffer (1988). *Ratios and Proportional Thinking*. In Thomas R., Post (Ed), Teaching Mathematics in Grades K-8: Research based methods, s. 285-312. Massachusetts, Allyn and Bacon.

[10] James, G. & R. James (1992). *Mathematics Dictionary*. 5. painos. New York: Van Nostrand Reinhold Co.

[11] Jitendra, A.K., Star, J.R., Starosta, K., Leh, J.M., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C.L. & T.R. Mack (2009). *Improving Seventh Grade Students' Learning of Ratio and Proportion: The Role of Schema-based instruction*. Contemporary Educational Psychology, 34.3, s. 250-264.

[12] Kapur, M. (2014). *Productive Failure in Learning Math*. Cognitive Science 38.5, s. 1008-1022.

[13] Kastberg, S.E., D'Ambrosio, B. & K. Lynch-Davis (2012). *Understanding Proportional Reasoning for Teaching*. Australian Mathematics Teacher 68.3, s. 32-40.

[14] Khoury, H.A. (2002). *Exploring Proportional Reasoning: Mr. Tall/Mr. Short*. Northern Illinois University, DeKalb, Illinois.

[15] Kivelä, S.K. *Matematiikan ylioppilastehtävät*. http://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html

[16] Lynch, K. & J.R. Star (2014). *Teachers' Views About Multiple Strategies in Middle and High School Mathematics*. Mathematical Thinking and Learning, 16.2, s. 85-108.

[17] Opetushallitus (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf.

[18] Opetushallitus (2015). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

[19] Ylioppilastutkintolautakunta (2015). *Sähköinen Ylioppilastutkinto- Matematiikka*. Helsinki: Ylioppilastutkintolautakunta. https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/fi_sahkoinen_matematiikka.pdf

[20] Peled, I. & R. Bassan-Cincinatus (2005). *Degrees of Freedom on Modeling: Taking Certainty Out of Proportion*. Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, s.57-64.

[21] Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. & L. Ivanjek (2012). *Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics*. International Journal of Science and Mathematics Education, 10.6, s. 1393-1414.

[22] Rittle-Johnson, B. & J.R. Star (2007). *Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations*. Journal of Educational Psychology, 99.3, s. 561-574.

[23] Rubel, L.H., Chu, H. & L. Shookhoff (2011). *Learning to Map and Mapping to Learn Our Students' Worlds*. Mathematics Teacher 104.8, s. 586-591.

[24] Smith, J.P. (2002). *The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios*. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, The National Council of Teachers of Mathematics, s. 3-17. Reston, Virginia.

[25] Stecher, B.M. & K.J. Mitchell (1995). *Vermont Teachers' Understanding of Mathematical Problem Solving and "Good"Math Problems*. Rand Corp., Santa Monica, CA. Inst. on Education and Training.

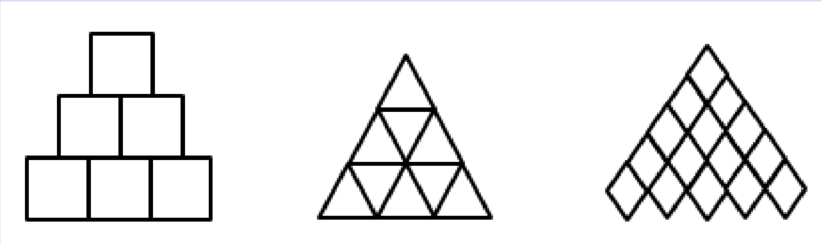
[26] Thompson, P.W. (2002). *Classroom Challenge*. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, The National Council of Teachers of Mathematics, s. 103-104. Reston, Virginia.

[27] Weinberg, S.L. (2002). *Proportional Reasoning: One Problem, Many Solutions!*. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, The National Council of Teachers of Mathematics, s. 138-144. Reston, Virginia.

A Verrannollisuus

A.1 Suhde

Pohdinta A.1 Väritä ensimmäisestä kuviosta $\frac{1}{2}$, toisesta kuviosta $\frac{1}{3}$ ja kolmannesta kuviosta $\frac{1}{5}$ mustalla. Montako osaa kuviossa on valkoista ja montako mustaa?



Pohdinnan toisessa kuviossa, kolmiossa, mustaa aluetta on kuvioissa yksi osa ja valkoista aluetta kaksi osaa koko kuviosta. Kuvion väritysohje voidaan esittää *mustien ja valkoisten osien välisenä suhteena* 1 : 2.

Mikä on mustien ja valkoisten osien välinen suhde pohdinnan kahdessa muussa kuviossa?

Määritelmä: *Suhde*

Suhde on kahden suureen välinen osamäärä. Suureiden a ja b välistä suhdetta merkitään usein kaksoispisteiden avulla

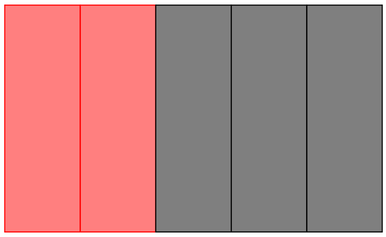
$$a : b.$$

Tutkitaan alla olevaa kuvaa. Kuvassa on viisi osaa, joista kolme on harmaata ja kaksi punaista osaa.

Kun suuretta verrataan toiseen suureeseen (punaisia osia harmaasiin osiin), kyseessä on suureiden välinen suhde 2 : 3.

Kun suuretta verrataan kokonaisuuteen (punaisia osia kaikkiin osiin), on kyseessä 2 : 5.

Myös prosenttien avulla voidaan ilmaista suureen osuus koko kokonaisuudesta, kuten punaista on 40% koko kuvasta.



Yksi suhdemerkinnän sovellus, *mittakaava*, esiintyy kartoissa. Ilman mittakaavaa kartasta ei ole yhtä paljon hyötyä, sillä mittakaava $1 : 10000$ kertoo kartan ja todellisen luonnon välisen suhteen. Tällöin 1 cm kartalla vastaa 10000 cm luonnossa.

Mallitehtävä A.2 Kartan mittakaava on $1 : 5000$. Tällöin 1 cm kartalla on 5000 cm luonnossa. Jos kartalta mitattu matka on 5 cm, niin matka luonnossa on

$$5 \cdot 5000 \text{ cm} = 25000 \text{ cm} = 250 \text{ m}.$$

Pohdinta A.3 Hakaniemen torille on suunnitteilla korkeintaan kolmemetrinen patsas. Piirrä vihkoosi torille sopiva patsas ja anna sille mittakaava. Anna parisi ratkaista patsaan korkeus luonnossa.

Huomautus: Laskuissa suhdetta on helpompi merkitä kaksoispisteen sijaan jakoviivalla

$$1 : 500 = \frac{1}{500}.$$

Suhdetta käytetään myös osuuksia laskettaessa. Esimerkiksi lottokupongille osunut voitto voidaan jakaa siihen osallistuneiden henkilöiden maksuosuuksien mukaan, jolloin jako olisi matemaattisesti ajateltuna oikeudenmukainen. Seuraavassa mallitehtävässä jaetaan yhdessä ostetut mansikat maksuosuuksien mukaan kolmen henkilön kesken.

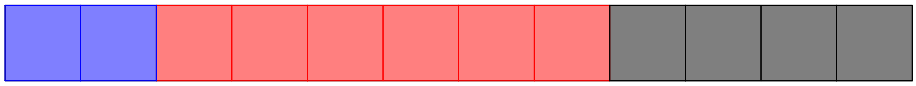
Mallitehtävä A.4 Oiva, Toivo ja Aino ostavat yhdessä 10 kg mansikkalaatikon. Oiva maksaa mansikoista 2 euroa, Toivo 6 euroa ja Aino kaksi kertaa niin paljon kuin Oiva. Kuinka paljon kukin saa mansikoita, jos mansikat jaetaan maksuosuuden mukaan? Ilmoita tulos 10 gramman tarkkuudella.

Ratkaisu: Tapa 1

Mansikkalaatikon hinta saadaan, kun lasketaan yhteen Oivan, Toivon ja Ainon maksuosuudet. Mansikat maksoivat siis yhteensä

$$2\,€ + 6\,€ + 2 \cdot 2\,€ = 12\,€.$$

Mansikat jaettiin suhteessa 2 : 6 : 4. Lasketaan Oivan, Toivon ja Ainon maksuosuudet mansikkalaatikon hinnasta.



Oiva $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ Toivo $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Aino $\frac{2\cdot 2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Kun maksuosuudet on selvillä, lasketaan kuinka paljon mansikoita kukin saa.

$$\text{Oivan mansikat: } \tfrac{1}{6} \cdot 10 \text{ kg} = 1{,}67 \text{ kg}$$
$$\text{Toivon mansikat: } \tfrac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} = 5{,}00 \text{ kg}$$
$$\text{Ainon mansikat: } \tfrac{1}{3} \cdot 10 \text{ kg} = 3{,}33 \text{ kg}$$

Tapa 2.

Lasketaan ensiksi paljonko yhdellä eurolla saisi mansikkalaatikosta mansikoita

$$\frac{10 \text{ kg}}{12\,€} = \frac{5 \text{ kg}}{6\,€} = 0{,}8333 \text{ kg/€}.$$

Tämän jälkeen voidaan laskea paljonko kukin sai mansikoita maksuosuutensa mukaisesti.

$$\text{Oivan mansikat: } \tfrac{5}{6} \text{ kg/€} \cdot 2\,€ = 1{,}67 \text{ kg}$$
$$\text{Toivon mansikat: } \tfrac{5}{6} \text{ kg/€} \cdot 6\,€ = 5{,}00 \text{ kg}$$
$$\text{Ainon mansikat: } \tfrac{5 \text{ kg}}{6} \text{ kg/€} \cdot 2 \cdot 2\,€ = 3{,}33 \text{ kg}$$

Vastaus: Oiva sai masikkalaatikosta mansikoita 1,67 kg, Toivo 5,00 kg ja Aino 3,33 kg.

Tehtävät

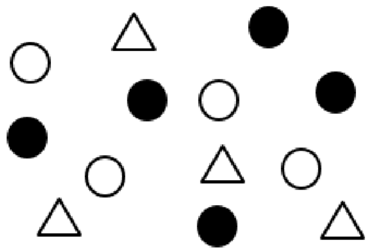
1. Merkitse suhteena

a) vartin suhde puoleen tuntiin

b) 300 gramman suhde 1,5 kilogrammaan

c) 20 sekunnin suhde viiteen minuuttiin.

2. Tutki kuvaa ja ilmoita



a) valkosten pallojen määrä kaikista palloista

b) valkoisten ja mustien pallojen välinen suhde

c) pallojen ja kolmioiden välinen suhde.

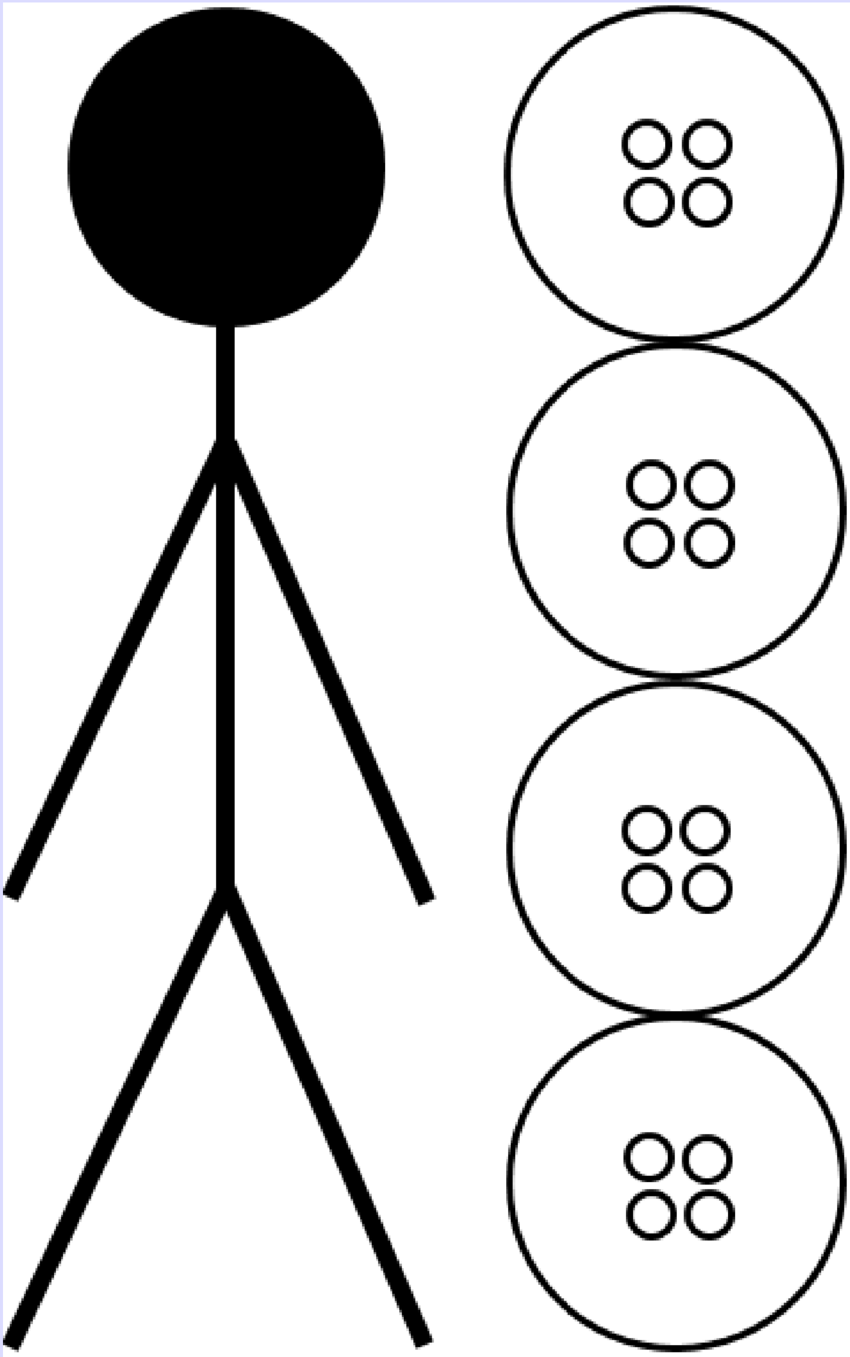
3. Täysmehutiiviste laimennetaan vedellä suhteessa 1 : 3. Kuinka paljon tiivistettä ja vettä tarvitaan, kun halutaan valmistaa 12 litraa mehua?

4. Laudan pituus on 15 metriä. Lauta jaetaan kolmeen osaan, joista ensimmäisen osa toista osaa metrin lyhyempi ja kolmas osa on toista osaa metrin pitempi. Kuinka pitkiä osat ovat?

5. Kenkäkaupassa on "Osta kolme maksa kaksi" –tarjous, jossa edullisimmat kengät saa kaupan päälle. Oiva ja Toivo päättävät käyttää tarjouksen yhdessä siten, että Oiva ostaa 34,95 € ja 29,95 € maksavat kengät ja Toivo ostaa 49,95 euron kengät. Kuinka paljon kumpikin maksaa kengistä, jos maksu jaetaan maksuosuuden mukaan?

A.2 Suoraan verrannollisuus

Pohdinta A.5 Kuvassa on herra Pätkä, jonka pituus on neljä nappia. Herra Pitkän pituus on samoilla napeilla mitattuna kuusi nappia.



Mittaa herra Pätkän pituus klemmareiden avulla. Kuinka pitkä herra Pitkä olisi klemmareilla mitattuna? Selitä parille miten sait vastauksen.

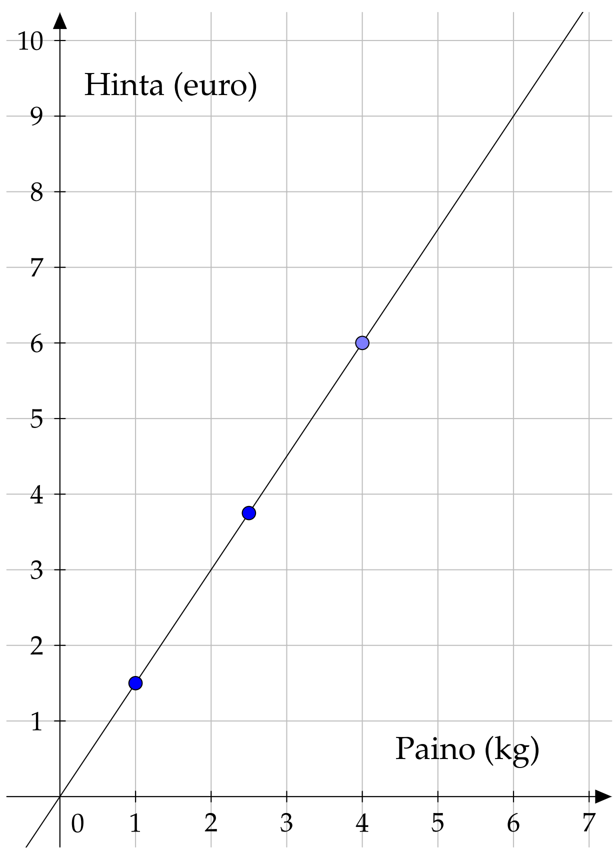
Edellisessä kappaleessa tutustuttiin suhde-käsitteeseen ja sen sovelluksiin laskuissa. Tässä ja seuraavassa kappaleessa vertaillaan kahden suureen välisiä riippuvuuksia ja ratkaistaan verrantoja. Luonnontieteissä, kuten fysiikassa ja kemiassa, suureiden välillä on usein riippuvuuksia. Esimerkiksi liike-energia on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön ja tietyn kaasumäärän tilavuus on kääntäen verrannollinen paineeseen.

Tutkitaan bataattien painon ja hinnan välistä suhdetta, kun bataatit maksavat 1,5 euroa/kg.

Aluksi tehdään taulukko, josta selviää paljonko 1 kg, 2,5 kg ja 4 kg bataatteja maksaa. Lasketaan taulukkoon myös bataattien painon ja hinnan välinen suhde.

Paino (kg)	Hinta (euro)	Suhde
1	$1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$	$\frac{1{,}5}{1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
2,5	$2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$	$\frac{3{,}75}{2{,}5} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
4	$4 \cdot 1{,}5 = 6$	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Tutkitaan seuraavaksi bataattien painon ja hinnan välistä suhdetta graafisesti sijoittamalla taulukon pisteparit (x,y)-koordinaatistoon. Kuvaajaksi muodostuu origon kautta kulkeva suora $y = \frac{3}{2}x$, missä x on bataattien paino ja y on hinta.



Huomataan, mitä enemmän bataatit painavat sitä enemmän ne maksavat. Painon ja hinnan välinen suhde pysyy samana (kts. taulukko).

Määritelmä: *Suoraan verrannollisuus*

Suureet y ja x ovat *suoraan verrannolliset*, kun suureiden suhde on vakio

$$\frac{y}{x} = k,$$

missä $k \neq 0$ on *verrannollisuuskerroin*.

Jos suureet kasvavat tai vähenevät samassa suhteessa, on suureiden välinen riippuvuus suoraan verrannollisuus. Tällöin suureiden välinen suhde on vakio.

Suoraan verrannollisten suureiden riippuvuuden kuvaaja on origon kautta kulkeva suora $y = kx$.

Pohdinta A.6 Keksi parin kanssa kaksi suureparia, jotka ovat suoraan verrannollisia ja kaksi suureparia, jotka eivät ole suoraan verrannollisia.

Koska suoraan verrannollisten suureiden a ja b suhde on vakio, saadaan suureiden välille yhtälö

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

jota kutsutaan *verrannoksi*. Verrannon avulla saadaan selvitettyä suureen tuntematon arvo.

Pohdinta A.7 Osoita, että yhtälö $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ voidaan esittää muodossa $a_1b_2 = b_1a_2$.

Aiemman pohdinnan perusteella verranto $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ voidaan siis ratkaista myös yhtälöllä $a_1b_2 = b_1a_2$. Kyseistä menetelmää kutsutaan *ristiinkertomiseksi*.

Ristiinkertominen voi helpottaa verrannon ratkaisemista, mutta verrannon voi ratkaista muillakin tavoilla, kuten operoimalla yhtälöä puolittain.

Mallitehtävä A.8 Lukujen 9 ja 3 suhde on yhtä suuri kuin lukujen x ja 10 suhde. Mikä on x?

Ratkaisu: Muodotetaan tehtävänannon perusteella verranto, joka ratkaistaan kahdella eri tavalla: ristiinkertomalla ja operoimalla yhtälöä puolittain.

Ristiinkertominen:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{3} &= \frac{x}{10} \\
9 \cdot 10 &= 3x \qquad \| :3 \\
\frac{3x}{3} &= \frac{90}{3} \\
x &= 30
\end{aligned}$$

Yhtälön operointi:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{3} &= \frac{x}{10} \qquad \| \cdot 10 \\
\frac{x}{10} \cdot 10 &= 3 \cdot 10 \\
x &= 30
\end{aligned}$$

Mallitehtävän voi ratkaista myös päättelemällä:

Luku 9 on kolme kertaa suurempi kuin luku 3. Koska lukujen 9 ja 3 suhde on yhtä suuri kuin lukujen x ja 10 suhde, luku x on kolme kertaa suurempi kuin luku 10. Tällöin $x = 30$.

Pohdinta A.9 Oiva ratkaisi verrannon kahdella eri tavalla ja sai eri vastaukset. Pohdi parin kanssa kumpi ratkaisuista on oikein ja miksi.

Tapa 1:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{10} &= \frac{15}{x} \\
10 \cdot x &= 15 \cdot 4 \qquad \| :10 \\
x &= \frac{75}{10} \\
x &= 7{,}5.
\end{aligned}$$

Tapa 2:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{10} &= \frac{15}{x} \qquad \| \cdot x \\
\frac{4}{10} \cdot x &= 15 \qquad \| \cdot 10 \\
4x &= 15 \cdot 10 \qquad \| :4 \\
x &= \frac{150}{4} \\
x &= 37{,}5.
\end{aligned}$$

Verrannollisuustehtävät ovat usein sanallisia tehtäviä. Tällöin vastaukseksi ei riitä pelkkä yhtälön ratkaiseminen, vaan tehtävän ratkaisuun vaaditaan myös perusteluja. Pelkkä verrannon antaminen ei kerro suureiden välisestä riippuvuudesta.

Aluksi kannattaa tehtävänannon perusteella pohtia mikä riippuvuus on kyseessä ja taulukoida tehtävänannossa ilmoitetut arvot. Tämän jälkeen muodostetaan verranto ja ratkaistaan tuntematon, tai päätellään tuntematon johdonmukaisesti perustellen. Ratkaisun järkevyyttä kannattaa pohtia tehtävän tietojen perusteella tai sijoittamalla saatu arvo alkuperäiseen verrantoon. Lopuksi tehtävälle annetaan sanallinen vastaus.

Seuraava mallitehtävä on ratkaistu ylläolevia ohjeita noudattaen.

Mallitehtävä A.10 Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Huonolla kelillä nopeudella 80 km/h kulkevan auton pysähtymiseen menee 70 m. Kuinka pitkä jarrutusmatka on, jos auton nopeus on 100 km/h? Ilmoita vastaus metrien tarkkuudella.

Ratkaisu: Suureiden välillä suoraan verrannollinen riippuvuus. Taulukoidaan tehtävänannon arvot ja asetetaan kysytty jarrutusmatka tuntemattomaksi.

Jarrutusmatka (m)	Nopeuden neliö ($(m/s)^2$)
70	80^2
x	100^2

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä x

$$\begin{aligned}
\frac{70}{x} &= \frac{80^2}{100^2} \\
\frac{70}{x} &= \left(\frac{80}{100}\right)^2 \\
\frac{70}{x} &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\
\frac{70}{x} &= \frac{16}{25} \qquad \| \; \textit{ristiinkertominen} \\
16x &= 70 \cdot 25 \qquad \| \; : 16 \\
x &= \frac{1750}{16} \\
x &= 109{,}375.
\end{aligned}$$

Vastaus: Jarrutusmatka on 109 m nopeudella 100 km/h.

Tehtävät

6. Kirjoita verranto ja ratkaise x.

a) Lukujen -10 ja x suhde on yhtä suuri kuin lukujen 4 ja -6 suhde.

b) Tulon $3x$ suhde lukuun 12 on yhtä suuri kuin lukujen 21 ja 9 suhde.

c) Summan $x + 2$ suhde lukuun 9 on yhtä suuri kuin erotuksen $x - 2$ suhde lukuun 18.

7. Juoksukilpailussa lyhyemmän juoksumatkan pituus on 7 mailia. Tiedetään, että pitempi juoksumatka 15 mailia on 24140,16 metriä.

a) Kuinka paljon yksi maili on kilometreinä?

b) Kuinka monta kilometriä pitkä lyhyempi juoksumatka on?

Ilmoita tulokset metrien tarkkuudella.

8. Ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$ on suoraan verrannollinen säteen neliöön. Erään ympyrän säteen neliö on 36 cm^2. Mikä on sellaisen ympyrän säde, jonka pinta-ala on kolme kertaa isompi kuin tunnettu ympyrä?

9. Vakiolämpötilassa olevan kaasun paine on suoraan verrannollinen tilavuuden käänteislukuun. Jos kaasun paine kasvaa 30 prosenttia, miten tilavuus muuttuu?

A.3 Kääntäen verrannollisuus

Pohdinta A.11 Pohdi parisi kanssa matkan, ajan ja nopeuden välisiä riippuvuuksia.

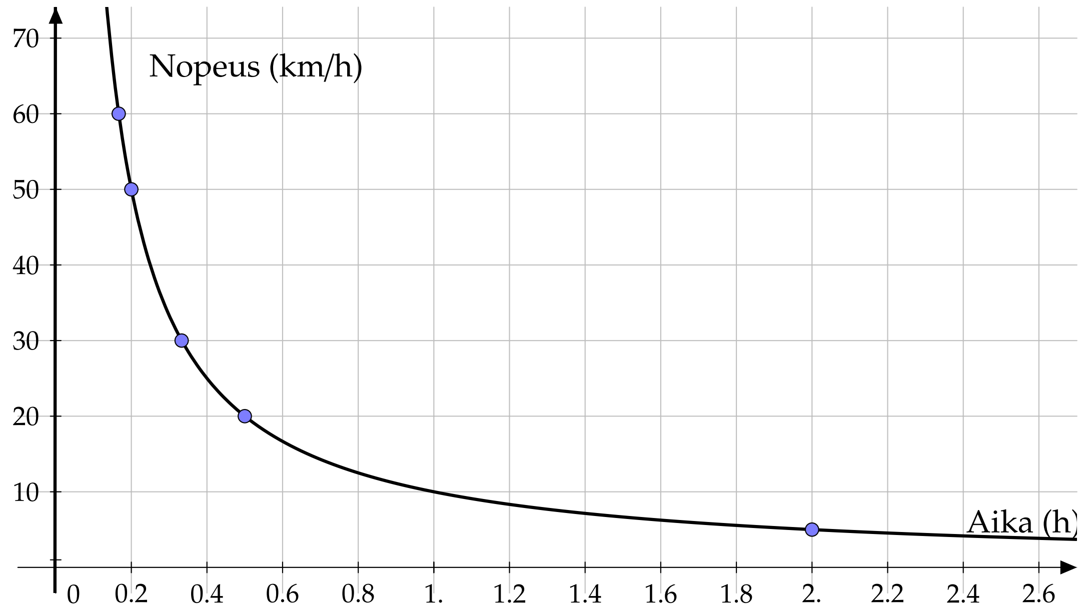
Miten aika muuttuu, jos nopeus pysyy vakiona ja matkaa kasvatetaan? Miten nopeus muuttuu, jos matka pysyy vakiona ja aika vähenee?

Oiva kulkee koulumatkansa eri kulkuvälineillä. Tutkitaan kulkuvälineillä koulumatkaan käytetyn ajan ja keskinopeuden tuloa, kun koulumatkan pituus on 10 km.

Tehdään taulukko, josta nähdään kuinka kauan koulumatka kestää ja millä nopeudella se kuljetaan eri kulkuvälineillä.

Kulkuväline	Aika (h)	Nopeus (km/h)	Tulo
Kävely	2	5	$2 \cdot 5 = 10$
Bussi	20 (min)= $\frac{1}{3}$	30	$\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$
Pyörä	30 (min)= $\frac{1}{2}$	20	$\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$
Auto	10 (min)= $\frac{1}{6}$	60	$\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$

Tutkitaan seuraavaksi eri kulkuvälineiden ajan ja nopeuden välistä suhdetta graafisesti sijoittamalla taulukon pisteparit (x, y)-koordinaatistoon. Kuvaaksi muodostuu hyperbeli $y = \frac{10}{x}$, missä x on kulkuvälineellä kulunut aika ja y on kulkuvälineen nopeus. (Hyperbeli ei kuulu lyhyen matematiikan sisältöön.)



Huomataan, että nopeuden lisääntyessä matkaan kulunut aika vähenee. Nopeuden ja ajan tulo pysyy samana (kts. taulukko).

Määritelmä: *Kääntäen verrannollisuus*

Suureet x ja y ovat *kääntäen verrannolliset*, kun suureiden tulo on vakio

$$x \cdot y = k,$$

missä $k \neq 0$ on verrannollisuuskerroin.

Jos toisen suureen kasvaessa toinen suure pienenee samassa suhteessa, on suureiden välinen riippuvuus kääntäen verrannollisuus. Tällöin suureiden välinen tulo on vakio.

Kääntäen verrannollisten suureiden riippuvuuden kuvaaja on hyperbeli $y = \frac{k}{x}$.

Pohdinta A.12 Keksi parin kanssa kaksi suureparia, jotka ovat kääntäen verrannollisia, ja kaksi suureparia, jotka eivät ole kääntäen verrannollisia.

Koska kääntäen verrannollisten suureiden a ja b tulo on vakio,

Suure a	Suure b
a_1	b_1
a_2	b_2

taulukoitujen suureiden arvoista voidaan muodostaa yhtälö

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2,$$

josta saadaan kääntäen verrannollisuuden verrannoksi

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Pohdinta A.13 Oivan tehtävänä oli laskea, kuinka monta työntekijää saa inventoitua vaateliikkeen 9 tunnissa, jos kolmella työntekijällä kestää inventoinnissa 15 tuntia.

Pohdi parin kanssa Oivan ratkaisua. Onko saatu vastaus järkevä? Perustele.

Ratkaisu: Kyseessä on kääntäen verrannollisuus.

Aluksi	Lopuksi
x	3
9	15

$$\begin{aligned}
\frac{x}{9} &= \frac{15}{3} \\
3x &= 15 \cdot 9 \\
x &= \frac{15 \cdot 9}{3} \\
x &= \frac{135}{3} \\
x &= 45
\end{aligned}$$

Vastaus: Inventointiin tarvitaan 45 työntekijää.

Aiemmin on ratkaistu tehtäviä, joissa selvitetään yksi tuntematon. Seuraavassa mallitehtävässä on kuitenkin mukana useampi muuttuja.

Mallitehtävä A.14 Lauttamatka saareen kestää 55 min. Kuinka kauan siihen menee uudella lautalla, jolla voi ajaa 20 prosenttia nopeammin kuin vanhalla?

Ratkaisu: Lauttamatkaan kuluva aika vähenee, kun nopeutta kasvatetaan. Kuljettava matka pysyy vakiona. Tällöin kyseessä on kääntäen verrannollisuus.

Tehdään taulukko, jossa näkyy lauttamatkaan kuluva aika ja lautan nopeus. Merkitään tuntematonta kirjaimella a ja nopeutta muuttujalla x.

Aika (min)	Nopeus
55	x
a	$1{,}20x$

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan a

$$\begin{aligned}
\frac{55}{a} &= \frac{1{,}20x}{x} && \| \; \textit{ristiinkertominen} \\
55x &= 1{,}20x \cdot a && \| \; : 1{,}20 \\
a &= \frac{55x}{1{,}20x} \\
a &= 45{,}8333
\end{aligned}$$

Vastaus: Uudella lautalla matka kestää 46 minuuttia.

Tehtävät

10. Mikä riippuvuus seuraavien suureiden välillä on?

a) Matka ja nopeus, kun aika on vakio.

b) Tiheys ja tilavuus, kun massa on vakio.

c) Pallon pinta-ala ja säteen neliö.

d) Ihmisen paino ja pituus.

11. Päättele taulukosta mikä riippuvuus on kyseessä. Perustele.

Pituus (m)	50	15	3
Leveys (m)	75	250	1250

12. Suunnittele verrannollisuustehtävä ja anna se parille ratkaistavaksi.

13. Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannollisia suureita. Kun nopeus kasvaa 20 prosenttia montako prosenttia matkaan käytetty aika pienenee?

14. Juhlavieraiden kahvitsemiseen tarvitaan 11 täytekakkua. Kuinka monta täytekakkua tarvitaan, jos vieraat syövätkin täytekakkua 30 prosenttia arvioitua enemmän?

15. Eräällä tieosuudella käytetään kesällä ja talvella erilaisia nopeusrajoituksi. Talvinopeudella matkaan kului 15 minuuttia ja kesänopeudella 3 minuuttia vähemmän, kun ajetaan maksiminopeudella. Mikä talvinopeusrajoitus on silloin, kun kesänopeus on 20 km/h korkeampi kuin talvinopeus? [k15/7]

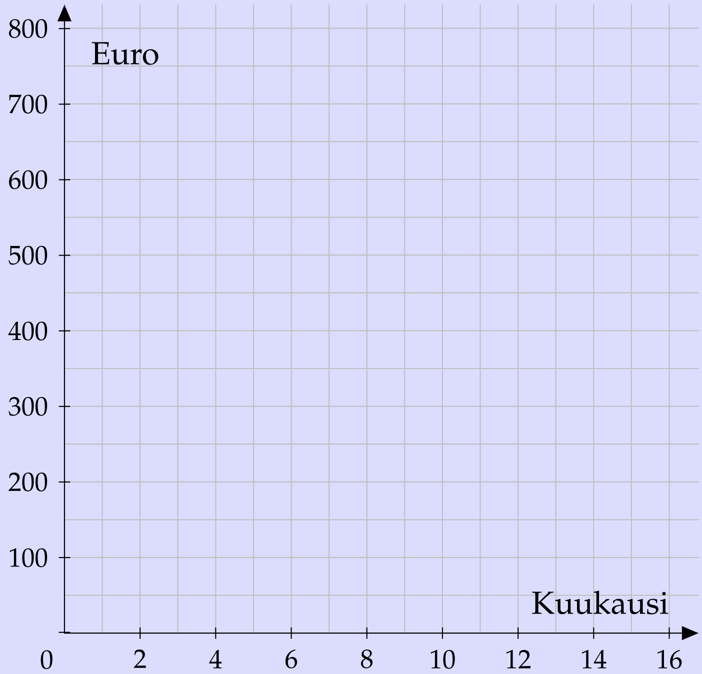
16. Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä. [k06/4]

Huom. Kappaleen painolla tarkoitetaan kappaleeseen kohdistuvaa vetovoimaa, joka muuttuu kappaleen sijainnin muuttuessa, kun taas kappaleen massa pysyy samana sijainnista riippumatta.

17. Valonlähteen antaman valaistuksen voimakkuus on suoraan verrannollinen valolähteen tehoon P ja kääntäen verrannollinen valolähteen etäisyyden d neliöön. Mikä kaava antaa valaistuksen voimakkuuden etäisyydellä d valolähteestä, jonka teho on P? Valolähde, jonka teho on P, on 1,2 m:n etäisyydellä kohteesta. Mille etäisyydelle on asetettava valonlähde, jonka teho on $3P$, kun halutaan sen antavan yhtä voimakkaan valaistuksen? [s99/8]

B Lineaarinen riippuvuus

Pohdinta B.1 Aino vertailee eri kuntosaleja ja niiden hintoja. Kuntosali Rauta ja Penkki veloittaa asiakkailtaan 50 €/kk, kun taas Fit'n Fab- salin liittymismaksu on 150 euroa ja kuukausimaksu 35 euroa.



Kopioi vihkoosi ylläoleva koordinaatisto ja piirrä kuntosalien hinnoista kuvaajat. Kuinka monen kuukauden kuluttua Fit'n Fab tulee edullisemmaksi kuin Rauta ja Penkki?

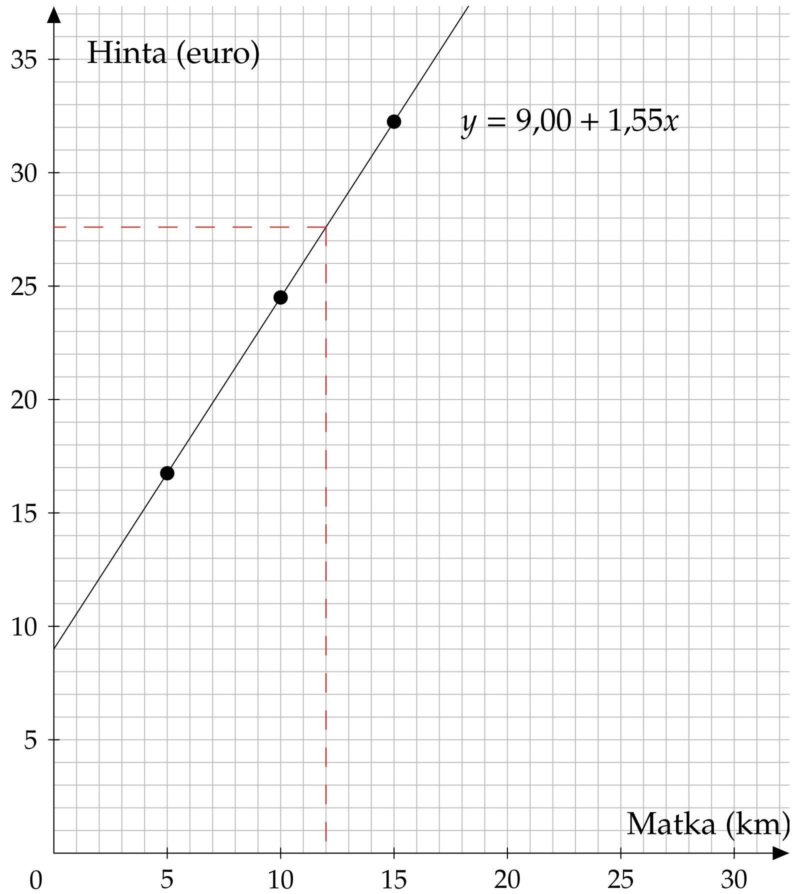
Tässä kappaleessa tutustutaan vielä yhteen suureiden väliseen riippuvuuteen, lineaariseen riippuvuuteen. Lineaarisen riippuvuuden erityistapaus on jo aiemmin käsitelty suoraan verrannollisuus. Suoraan verrannollinen riippuvuus on siis aina lineaarista riippuvuutta, mutta lineaarinen riippuvuus ei ole välttämättä suoraan verrannollista riippuvuutta.

Tutkitaan taksimatkan hintaa, joka määräytyy aloitusmaksusta ja ajetusta kilometrimäärästä. Tutkitaan taksimatkan hintaa pyhäpäivänä, jolloin aloitusmaksu on 9,00 € euroa ja kilometrimaksu 1,55 €.

Tarkastellaan ongelmaa kuvaajan avulla. Valitaan x-akselille matkan pituus kilometreinä ja y-akselille taksimatkalle kertyvä hinta euroina. Lasketaan kolme kuvaajan pistettä, kun matkan hinta aloitusmaksun jälkeen kasvaa 1,55 €/km.

Matka (km)	Hinta (euro)
5	$9{,}00 + 1{,}55 \cdot 5 = 16{,}75$
10	$9{,}00 + 1{,}55 \cdot 10 = 24{,}50$
15	$9{,}00 + 1{,}55 \cdot 15 = 32{,}25$

Merkitään pisteet koordinaatistoon ja todetaan, että pisteet muodostavat suoran. Taksimatkan hinnan yhtälöksi saadaan $y = 9{,}00 + 1{,}55x$, missä x on kuljettu kilometrimäärä. Koska funktion kuvaajaksi muodostuu suora, joka ei kulje origon kautta, on taksimatkan pituuden ja hinnan välillä lineaarinen riippuvuus.



Kuvaajan avulla voidaan graafisesti arvioida kuinka paljon 12 kilometrin taksimatka maksaisi pyhäpäivänä. Suoralla kohdassa, jossa $x = 12$, vastaava y-koordinaatin arvo on noin 27,5. Tällöin 12 kilometrin taksimatkalle tulee hinnaksi noin 27,50 euroa.

Huomaa, että graafisesti arvioitu arvo on epätarkka. Tarkka arvo voidaan määrittää algebrallisesti suoran yhtälön avulla.

Halutaan ratkaista muuttujan y arvo, kun $x = 12$, joten sijoitetaan x suoran yhtälöön

$$y = 9{,}00 + 1{,}55 \cdot 12$$
$$y = 9{,}00 + 18{,}6$$
$$y = 27{,}60.$$

Taksimatkan tarkaksi hinnaksi 12 kilometriltä tulee $27,60$ euroa.

Määritelmä: *Lineaarinen riippuvuus*

Suureiden x ja y välistä *lineaarista riippuvuutta* kuvaa yleisesti suora $y = kx + b$.

Pohdinta B.2 Keksi parin kanssa kolme lineaarista riippuvuutta, jotka eivät ole suoraan verrannollisia.

Määritelmä: *Suoran yhtälö*

Suoran yhtälö on $y = kx + b$, missä k ja b ovat reaalilukuja. Vakiota k kutsutaan *kulmakertoimeksi* ja vakiota b *vakiotermiksi*.

Suoran yhtälöä kutsutaan myös lineaariseksi yhtälöksi ja ensimmäisen asteen yhtälöksi, jota käsitellään lisää seuraavassa kappaleessa.

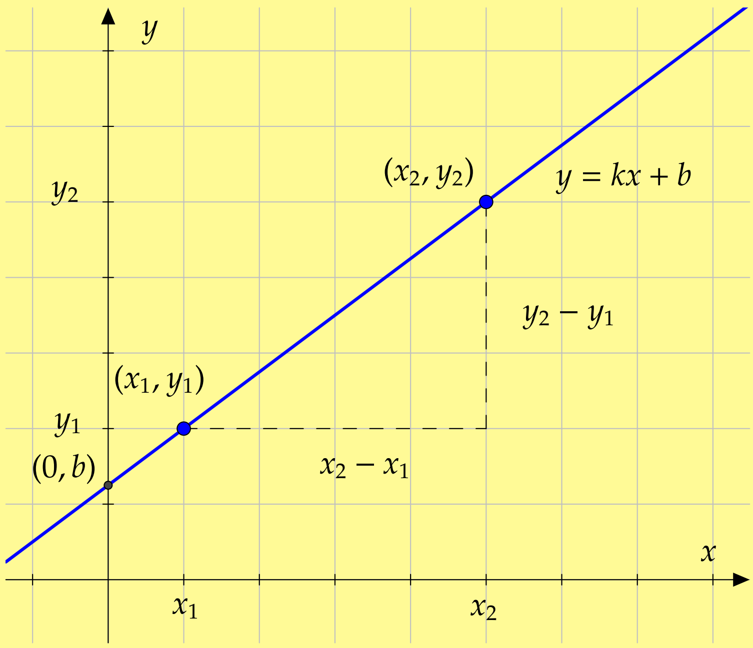
Suoran yhtälöllä on useita eri esitysmuotoja, kuten suora $y = kx + b$ voidaan esittää muodossa $y - kx - b = 0$.

Suoran yhtälö voidaan määrittää, kun tiedetään yksi suoran piste ja suoran kulmakerroin.

Pohdinta B.3 Mikä on seuraavien suorien kulmakerroin ja vakiotermi

a) $y = -\frac{2}{3}x$ b) $y + 5x - 3 = 0$ c) $2y + 6x - 1 = 0$?

Lause B.4 Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran $y = kx + b$ vakiotermi b kertoo suoran ja y-akselin leikkauskohdan.



Kun $x = 0$, suora $y = kx + b$ leikkaa y-akselin. Sijoittamalla $x = 0$ suoran yhtälöksi saadaan

$$y = k \cdot 0 + b$$
$$y = b.$$

Täten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.

Lisätietoa: Suoran $y = kx + b$ kulmakerroin saadaan kahden suoran pisteen y- ja x-arvojen erotuksen avulla,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Seuraavaksi tutkitaan mitä suoran kulmakerroin kertoo suoran muodosta.

Pohdinta B.5 Tutki suoran $y = kx + b$ kuvaajaa piirto-ohjelmalla. Selitä parille tekemäsi havainnot.

a) Aseta vakiotermiksi $b = 2$ ja tutki suoran muotoa, kun kulmakerroin k on positiivinen kokonaisluku.

b) Aseta vakiotermiksi $b = 2$ ja tutki suoran muotoa, kun kulmakerroin k on negatiivinen kokonaisluku.

c) Aseta kulmakertoimeksi $k = 2$ ja tutki suoraa, kun vakiotermi b on positiivinen.

d) Aseta kulmakertoimeksi $k = 2$ ja tutki suoraa, kun vakiotermi b on negatiivinen.

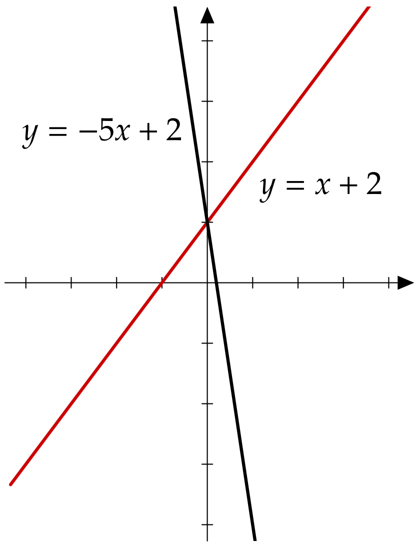
Määritelmä: *Nouseva ja laskeva suora*

Suoran kulmakerroin $|k|$ kertoo suoran kaltevuuden. Mitä suurempi k on, sitä jyrkempi on suora.

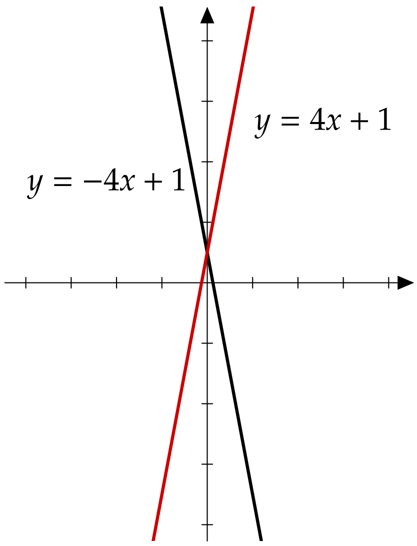
Kun $k > 0$, suora on *nouseva*.

Kun $k < 0$, suora on *laskeva*.

Esimerkki B.6 Kuvissa A ja B on vertailtu suorien kulmakertoimia kuvaajien avulla.



Kuva A



Kuva B

Kuvassa A laskeva suora $y = -5x + 2$ on jyrkempi kuin nouseva suora $y = x + 2$. Kuvassa B molemmat suorat ovat yhtä jyrkkiä, mutta toinen suorista on laskeva ja toinen nouseva.

Pohdinta B.7 Millainen suora on, jos sen kulmakerroin $k = 0$?

Suureiden x ja y välisessä lineaarisessa rippuvuudessa kulmakerroin kertoo missä suhteessa suureet y ja x muuttuvat, eli kasvavatko vai vähenevätkö suureet ja kuinka nopeasti. Vakiotermi taas kertoo tilanteen alkuasetelman, eli millaisista lähtökohdista lineaarinen riippuvuus muodostuu.

Kulmakertoimen ja vakiotermin avulla pystytään selvittämään kumman tahansa suureen, x:n tai y:n, arvo, kun toisen suureen arvo tiedetään.

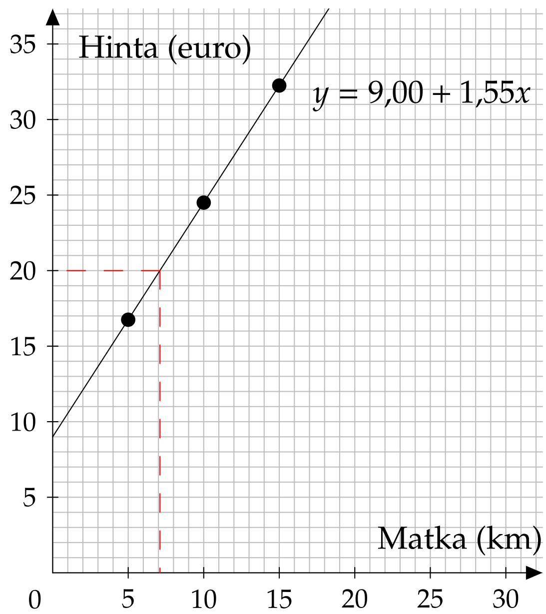
Pohdinta B.8 Suureiden x ja y välillä on lineaarinen riippuvuus. Päättele, mikä on suureen x arvo, kun

a) riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = 3x + 1$ ja suureen y arvo on 4

b) riippuvuutta kuvaavan yhtälön kulmakerroin $k = 1$, vakiotermi $b = 3$ ja suure $y = 5$

c) riippuvuutta kuvaava suora leikkaa y-akselin pisteessä (0,6), suoran kulmakerroin $k = \frac{3}{2}$ ja suureen y arvo on 18.

Palataan vielä lopuksi kappaleen alussa käsiteltyyn taksiesimerkkiin, jossa tutkittiin taksimatkan hinnan muodostumista kilometrien mukaan. Pohditaan miten saadaan selville matkan pituus, jos taksimatkan hinta tiedetään.



Graafisesti voidaan arvioida, että esimerkiksi 20 € maksavan taksimatkan pituus on noin 7,10 km.

Miten saataisiin määritettyä kilometrien tarkka arvo, kun taksimatkan hinnan lauseke on

$$y = 9{,}00 + 1{,}55x$$

ja matkan hinta on 55 €?

Tehtävät

18. Mikä on suoran kulmakerroin ja vakiotermi, kun suoran yhtälö on

a) $y = -4x + 2$ b) $3y + 12x - 3 = 0$ c) $y = x$ d) $y - 1 = 0$?

Mitkä suorista ovat nousevia?

19. Keksi kaksi sellaista suoran yhtälöä, jotka kulkevat pisteen $(2, 6)$ kautta.

20. Suoran kulkee pisteen $(4, 3)$ kautta ja suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{2}$. Määritä suoran yhtälö.

21. Piirrä suora $-3x + y - 3 = 0$. Määritä suoran kulmakerroin. Missä pisteissä suora leikkaa x- ja y-akselit?

22. Oiva ja Aino lähtevät samaan aikaan kulkemaan kohti keskustaa. Oiva kävelee keskustaan koulusta nopeudella 5 km/h. Aino pyöräilee kotoa keskustaan koulun kautta nopeudella 15 km/h. Matka kotoa keskustaan on 5 kilometriä pitempi kuin koululta keskustaan. Kuinka kauan kestää, että Aino saa Oivan kiinni? Kuinka kaukana kotoa he kohtaavat?

Vinkki: Piirrä tilanteesta kuvaaja.

23. Uusi puhelinmalli tuli markkinoille tammikuun alussa. Mallia myytiin tammikuun aikana 7817 kappaletta ja huhtikuun aikana 13238 kappaletta. Esitä arvio puhelinmallin joulukuun myynnille, kun oletetaan, että myynti kasvaa lineaarisesti. [s15/11a]

24. Bensiinikäyttöisen auton ja vastaavan dieselmoottorilla varustetun auton polttoaineen kulutukset ovat 7,9 ja 5,4 litraa sadalla kilometrillä. Oletetaan bensiinin litrahinnaksi 1,05 € ja dieselpolttoaineen 0,70 €. Halvan polttoainehinnan vastapainoksi dieselautosta on maksettava vuotuinen dieselvero, joka esimerkin autossa on 450 €. Esitä autojen vuotuiset kustannukset ajokilometrien funktiona ja piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon, kun vuodessa ajetaan enintään 30000 km. Kuinka paljon vuodessa on vähintään ajettava, jotta dieselautolla ajaminen olisi bensiinikäyttöistä autoa edullisempaa? [s01/6]

Vastaukset

1.

a) $1 : 2 = \frac{1}{2}$

b) $1 : 5 = \frac{1}{5}$

c) $1 : 15 = \frac{1}{15}$

2.

a) $\frac{4}{9}$

b) $4 : 5 = \frac{4}{5}$

c) $9 : 4 = \frac{9}{4}$

3. Tiivistettä tarvitaan 3 litraa ja vettä 9 litraa.

4. Laudan osien pituudet ovat 4m, 5m ja 6m.

5. Oivan maksaa 47,98 € ja Toivo maksaa 39,92 €.

6.

a) $\frac{-10}{x} = \frac{4}{-6} \Leftrightarrow x = 15$

b) $\frac{3x}{12} = \frac{21}{9} \Leftrightarrow x = \frac{84}{9} = 9\frac{1}{3}$

c) $\frac{x+2}{9} = \frac{x-2}{18} \Leftrightarrow x = -6$

7.

a) Yksi maili on 1,609 kilometriä.

b) Lyhyen juoksumatkan pituus on 11,265 kilometriä.

8. Ympyrän säde on $\sqrt{108} \approx 10,4$cm.

9. Tilavuus pienenee, sillä $p_1 \cdot V_1 = 1{,}3p_1 \cdot V_2 \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1{,}3$.

10.

a) Suoraan verrannollisuus

b) Kääntäen verrannollisuus

c) Suoraan verrannollisuus

d) Ei riippuvuutta

11. Kääntäen verrannollisuus

13. Aika pienenee 17 prosenttia.

14. Juhlavieraita varten tarvitaan 15 kakkua.

15. Talvinopeusrajoitus on 80 km/h.

16. Lentokoneen paino on 10 kilometrin korkeudessa 55,8 tonnia.

17. Valaistuksen voimakkuus $E = \frac{P}{d^2}$. Valonlähteen etäisyys on $d = \sqrt{4,32} \approx 2{,}1$ metriä.

18.

a) Kulmakerroin $k = -4$ ja vakiotermi $b = 2$

b) Kulmakerroin $k = -4$ ja vakiotermi $b = 1$

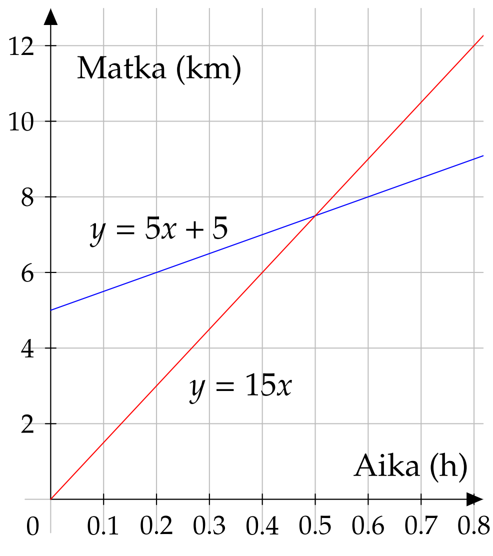
c) Kulmakerroin $k = 1$ ja vakiotermi $b = 0$

d) Kulmakerroin $k = 0$ ja vakiotermi $b = 1$

20. $y = 2x + 1$

21. Kulmakerroin $k = 3$. Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-1, 0)$ ja y-akselin pisteessä $(0, 3)$.

22. Ainon kulkemista kuvaa suora $y = 15x$ ja Oivan kulkemista suora $y = 5x+5$. Ainolla kestää 30 min saada Oiva kiinni ja he kohtaavat 7,5 km päässä kotoa.



HUOM. Jos matka koulusta keskustaan on alle 7,5 kilometriä, Aino ei saa Oivaa kiinni.

23. Lineaarisen kasvun yhtälö on $y = 1807x + 7817$ ja myyntiarvio on $y(12) = 29501$ kappaletta.

24. Bensiinikäyttöisen auton vuotuiset kustannukset ovat $y_B = 0,08295x$ ja dieselkäyttöisen auton $y_D = 0,0378x + 450$. Dieselautolla olisi ajettava vähintään 9970 kilometriä, jotta ajaminen olisi bensiiniautoa edullisempaa.