Riemann-integraalin ja mittaintegraalin vertailua

Pro gradu -tutkielma
Piia Taskinen
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2016

Sisältö

Johdanto

Riemannin integraalia käytetään usein opetuksessa, koska Riemannin lähestymistapa on helppo ymmärtää ja sen peruslauseet ovat helppoja todistaa. Menetelmä ei ole kuitenkaan tarpeeksi tehokas, eikä sen haastavammat tulokset ole yhtään helpompia todistaa. On totta, että Riemannin integraalimenetelmä aikanaan edisti matemaatikkoja huomattavasti, mutta siitä on jo yli 150 vuotta.

Mittaintegraalin esitti alun perin vuonna 1957 tsekkiläinen matemaatikko Jaroslav Kurzweil. Vaikka hän ei antanut yksityiskohtaisia oppeja integraalista, hän käytti menetelmää omassa työssään differentiaaliyhtälöiden parissa. Integraalin löysi uudelleen vuonna 1961 englantilainen matemaatikko Ralph Henstock, joka kehitti mittaintegraalin perusominaisuudet ja loi mittaintegraalin suppenemislauseet.

Tarkoituksenani on esitellä tämä suhteellisen uusi integraaliteoria (tunnetaan nimillä "mittaintegraali", "yleistetty Riemann-integraali", ja "Henstock-Kurzweil-integraali), joka korjaa perinteisen Riemannin integraalin epäkohtia ja sekä yksinkertaistaa, että laajentaa Lebesguen integraaliteoriaa.

Riemannin integraalissa on useita olennaisia epäkohtia. Pahin epäkohta on Riemann-integroituvien funktioiden joukon pienuus. Rimann-integraali joudutaan laajentamaan niin sanotuksi "epäoleelliseksi integraaliksi", jos jokin piste integroimisvälillä on ongelmallinen tai jos halutaan integroida yli äärettömien välien. Toinen keskeinen ongelma Riemannin integraaliteoriassa on että Riemann-integroituvista funktioista koostuva suppeva jono ei välttämättä suppene kohti funktiota, joka on Riemann-integroituva.

Erityisesti epäkohta joka motivoi matemaatikkoja 1900-luvun alussa oli Analyysin Peruslauseen yleistys. Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \text{kaikilla} \quad x \in [a, b],$$

kun $F' = f$. Valitettavasti lause ei ole voimassa Riemannin eikä Lebesguen integraalille, sillä molemmissa teorioissa vaaditaan oletus, että derivaatan F' on oltava integroituva. Riemannin integraaliteoria ei takaa, että jokaisella Riemann-integroituvalla funktiolla olisi integraalifunktiota tai vaikka integraalifunktio olisikin olemassa se ei välttämättä ole Riemann-integroituva.

Mittaintegraalin määritelmä on vain kevyt muunnelma perinteisestä Riemannin integraalista ja se tuottaa integraalin, joka sisältää Riemannin ja Lebesguen integraalin erityistapauksina. Koska menetelmä on hyvin samanlainen Riemannin integraalin kanssa, se on teknisesti Lebesguen integraalia paljon helpompi. Kuitenkin se on huomattavasti yleisempi, erityisesti se sisältää kaikki funktiot, jotka ovat derivaattafunktioita ja se myös sisältää kaikki "epäoleelliset integraalit". Koska vain pienellä lisäpanostuksella saadaan paljon enemmän, menetelmää voidaan pitää erittäin merkittävänä.

Luku 1

Esitietoja

Tarkastellaan aluksi terminologiaa ja työkaluja, joita tarvitaan jatkossa.

Tässä työssä käytetään välejä $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a \leq b$. Välin I pituus $l(I)$ saadaan laskemalla $l(I) := b - a$. Välin pituudelle on oltava voimassa $l(I) \geq 0$. Välin pituus $l(I) = 0$, jos ja vain jos välin päätepisteet yhtyvät eli jos $a = b$. Lisäksi määritellään, että $l(\emptyset) = 0$, missä $\emptyset$ on tyhjä joukko.

Olkoon $r > 0$. Pisteen $x \in \mathbb{R}$ r-säteinen *suljettu ympäristö* on *suljettu väli*

$$B[x; r] := [x - r, x + r].$$

Pisteen x r-säteinen *avoin ympäristö* on *avoin väli*

$$B]x; r[:=]x - r, x + r[.$$

1.1 Välijaosta

Määritelmä 1.1. Olkoon $I = [a, b]$ väli reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Välin I *välijako* eli *jako* $\mathcal{P}$ on sellainen äärellinen joukko suljettuja välin I *osavälejä* $\{I_1, \ldots, I_n\}$, että $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$, kun $i \neq j$ ja $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$. Merkitään I_i^0:lla osaväliä i, josta on poistettu välin päätepisteet. Osaväli I_i^0 on siten muotoa $I_i^0 =]x_i, x_{i+1}[$.

Huomautus 1.2. Osavälit I_i on aina mahdollista järjestää kasvavaan järjestykseen siten, että $\max I_i = \min I_{i+1}$, kun $i = 1, \ldots, n-1$. Jos asetetaan $x_0 := a$ ja $x_i := \max I_i$, kun $i = 1, \ldots, n$, voimme kirjoittaa välit: $I_1 := [x_0, x_1], I_2 := [x_1, x_2], \ldots, I_n := [x_{n-1}, x_n]$.

Jatkossa välin I jako on joukko sisäpisteiltään erillisiä osavälejä, siten että $I_i^0 \bigcap I_j^0 = \emptyset$ tai äärellinen järjestetty joukko jakopisteitä.

Määritelmä 1.3. Välin I *merkitty jako* $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq n\}$ on sellainen järjestettyjen parien äärellinen joukko, että $t_i \in I_i$, kun $i = 1, \ldots, n$ ja $\{I_i : 1 \leq i \leq n\}$ on sellainen välin I jako, että $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$. Joukon $\dot{\mathcal{P}}$ alkioita I_i kutsutaan joukon $\dot{\mathcal{P}}$ osaväliksi ja kutakin alkiota t_i kutsutaan välin I_i *merkiksi.*

Määritelmä 1.4. Olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^{n}$ välin $I = [a, b]$ merkitty jako ja olkoon $\delta > 0$. Sanotaan, että $\dot{\mathcal{P}}$ on *δ-hieno*, jos $I_i \subseteq [t_i - \delta, t_i + \delta]$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Määritelmä 1.5. Väliä $I \subset \mathbb{R}$, joka sisältää molemmat päätepisteensä kutsutaan *rajoitetuksi suljetuksi väliksi* tai *kompaktiksi väliksi.*

Laajennettu reaalilukujoukko Lisätään kaksi alkiota $\{\infty\}$ ja $\{-\infty\}$ reaalilukujoukkoon $\mathbb{R}$ ja merkitään joukkoa symbolilla $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Alkioita $\{\pm\infty\}$ ei pidetä reaalilukuina, joten laajennetaan joitain reaalijoukon operaatioita joukkoon $\bar{\mathbb{R}}$.

Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Määritellään:

- $\infty + c = c + \infty = \infty$ kaikilla $\quad -\infty < c.$
- $(-\infty) + c = c + (-\infty) = -\infty$ kaikilla $\quad c < \infty.$
- Kun $c > 0$, niin $c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty$ ja $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = -\infty.$
- Kun $c < 0$, niin $c \cdot \infty = \infty \cdot c = -\infty$ ja $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = \infty.$
- $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ ja $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0.$

Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa järjestys

$$-\infty < x < \infty.$$

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin suljetut välit joukossa $\mathbb{R}$ ovat muotoa:

$$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \quad]-\infty, b] := \{y \in \mathbb{R} : y \leq b\}.$$

Vastaavasti avoimet välit ovat muotoa:

$$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad]-\infty, b[:= \{y \in \mathbb{R} : y < b\}.$$

Jos halutaan lisätä alkiot $\pm\infty$ näille väleille, määritellään:

$$[a, \infty] := \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a \leq x \leq \infty\},$$

samalla tavalla väleille $]a, \infty], [-\infty, b], [-\infty, b[$ ja $[-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}}$. Kaikkia tämän tyyppisiä välejä kutsutaan *äärettömiksi väleiksi.* Määritellään, että äärettömän välin pituus $l(I)$ on aina ∞.

1.2 Funktiojonoista

Määritelmä 1.6 (Pisteittäinen suppeneminen)**.** Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}$ ja $S \neq \emptyset$. Sanotaan, että funktiojono $(f_n) : S \to \mathbb{R}$ *suppenee pisteittäin* joukossa S, jos jokaisella joukon S pisteellä x on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Funktiota f kutsutaan funktiojonon (f_n) rajafunktioksi.

Määritelmä 1.7 (Tasainen suppeneminen)**.** Olkoon $f_n : S \to \mathbb{R}, n = 1, \ldots$. Jonon (f_n) sanotaan *suppenevan tasaisesti* joukossa S kohti funktiota f, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $K_\epsilon \in \mathbb{N}$, että jos $k \geq K_\epsilon$, niin

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad x \in S.$$

Määritelmä 1.8. Jono (f_n) on *tasaisesti rajoitettu* joukossa S, jos on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in S$ ja kaikilla n.

Määritelmä 1.9. Jono $(f_n) : I \to \mathbb{R}$ on *kasvava* välillä I, jos

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in I, k \in \mathbb{N}.$$

Jono (f_n) on *vähenevä* välillä I, jos

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in I, k \in \mathbb{N}.$$

Jonoa sanotaan *monotoniseksi* välillä I, jos se on joko kasvava tai vähenevä välillä I.

Cauchyn suppenemiskriteeri antaa menetelmän reaalilukujonon suppenemisen osoittamiseen ilman, että tiedetään jonon raja-arvoa.

Määritelmä 1.10. Reaalilukujonoa (x_n) sanotaan *Cauchyn jonoksi*, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{Z}$, että

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad n, m \geq n_\epsilon.$$

Lause 1.11 (Cauchyn suppenemiskriteeri)**.** *Reaalilukujono (x_n) suppenee, jos ja vain jos (x_n) on Cauchyn jono.*

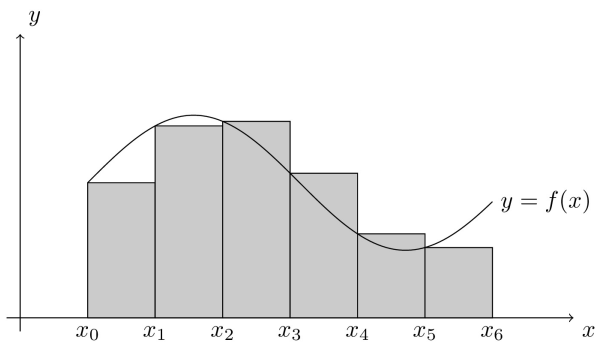
Todistus. (Ks. [6, s.86]) □

Määritelmä 1.12. Olkoon (f_n) funktiojono reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Sanotaan, että sarja $\sum f_n$ *suppenee itseisesti*, jos sarja $\sum |f_n|$ suppenee joukossa $\mathbb{R}$.

Luku 2

Riemann-integraali

Matemaattisen analyysin keskeisimpiä ongelmia on käyrän alapuolelle jäävän pinta-alan arvioiminen. Positiivisen funktion f ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan arvioimiseksi välillä $[a, b]$ jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, joita on äärellinen määrä n. Kun osavälin I_i pituus on $l(I_i) = |x_i - x_{i-1}|$ ja t_i on jokin piste välillä I_i, summaa $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)l(I_i)$ voidaan pitää likiarvona, sillä se on pinta-ala suorakulmioista, joiden kantana on osavälit I_i ja korkeus on $f(t_i)$.



Kuva 2.1: Riemannin summa, $t_i = x_{i-1}$.

Määritellään ensin Riemann-integraali. Riemannin integraali on sama kuin lukiossa opetettu integraali ja käytetty myös useissa sovelluksissa.

Määritelmä 2.1. Olkoon funktio f määritelty välillä $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ja olkoot funktion arvot joukossa $\mathbb{R}$. Merkitään $f : I \to \mathbb{R}$. Olkoon $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq n\}$ mikä tahansa välin I merkitty jako. Tällöin summaa

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)l(I_i)$$

kutsutaan funktion f jakoa $\dot{\mathcal{P}}$ vastaavaksi *Riemannin summaksi.*

Kun $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ja $i = 1, \ldots, n$, niin Riemannin summa tulee muotoon

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Kun $f \geq 0$, niin Riemannin summa on likiarvo alueen pinta-alalle, joka jää funktion f ja x-akselin väliin. Jaon hienouden mittana on annettujen osavälien I_i maksimipituus.

Määritelmä 2.2 (Riemann-integraali)**.** Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *Riemann-integroituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa sellainen luku $A \in \mathbb{R}$, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta_\epsilon > 0$, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa merkitty δ_ϵ-hieno jako, niin

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| < \epsilon.$$

Lukua A sanotaan funktion f integraaliksi välin I yli ja merkitään $\int_a^b f$.

Riemann-integraalista käytetään jatkossa myös lyhennettä R-integraali. Merkitään jatkossa kaikkien välin I Riemann-integroituvien funktioiden joukkoa symbolilla $\mathcal{R}(I)$.

Funktion f Riemann-integraali välillä I saadaan siis Riemannin summan raja-arvona, kun jakovälejä hienonnetaan. Koska osavälejä kontrolloi luku δ, osavälien I_i pituudet ovat ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin jokin vakio 2δ.

Esimerkki 2.3. Määritellään funktio $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, niin että

$$g(x) := \begin{cases} 2, & \text{kun} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & \text{kun} \quad 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}$ välin $[0, 3]$ δ-hieno jako. Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_1$ sellainen jaon $\dot{\mathcal{P}}$ osajoukko, jonka merkit on välillä $[0, 1]$, jolla $g(x) = 2$. Lisäksi olkoon $\dot{\mathcal{P}}_2$ sellainen jaon $\dot{\mathcal{P}}$ osajoukko, jonka merkit on välillä $]1, 3]$, jolla $g(x) = 3$. Selvästi saadaan, että

$$S(g; \dot{\mathcal{P}}) = S(g; \dot{\mathcal{P}}_1) + S(g; \dot{\mathcal{P}}_2). \tag{2.1}$$

Olkoon U_1 välijaon $\dot{\mathcal{P}}_1$ osavälien yhdiste, tällöin

$$[0, 1 - \delta] \subset U_1 \subset [0, 1 + \delta].$$

Koska $g(t_k) = 2$ välijaon $\dot{\mathcal{P}}_1$ merkeissä, saadaan

$$2(1 - \delta) \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 2(1 + \delta).$$

Samoin olkoon U_2 välijaon $\dot{\mathcal{P}}_2$ osavälien yhdiste, joka tällöin kuuluu välille $[1+\delta, 3]$, jonka pituus on $2-\delta$, ja joka kuuluu välille $[1-\delta, 3]$, jonka pituus on $2+\delta$. Näin ollen

$$3(2-\delta) \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}_2) \leq 3(2+\delta).$$

Kun lisätään nämä epäyhtälöt yhtälöön (2.1), saadaan

$$8 - 5\delta \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}) = S(g; \dot{\mathcal{P}}_1) + S(g; \dot{\mathcal{P}}_2) \leq 8 + 5\delta,$$

mistä seuraa, että

$$|S(g; \dot{\mathcal{P}}) - 8| \leq 5\delta.$$

Viimeinen termi saadaan $< \epsilon$, kun valitaan $\delta_\epsilon < \epsilon/5$. Koska ϵ on mielivaltainen, niin $g \in \mathcal{R}([0,3])$ ja $\int_0^3 g = 8$.

Funktion muuttaminen toiseksi funktioksi äärellisessä pistejoukossa ei vaikuta funktion integroituvuuteen eikä sen integraalin arvoon.

Lause 2.4. *Jos $g \in \mathcal{R}(I)$ ja jos $f(x) = g(x)$ muualla paitsi äärellisessä pistejoukossa välillä I, niin $f \in \mathcal{R}(I)$ ja $\int_I f = \int_I g$.*

Todistus. (Ks. [6, s.201]) □

Seuraavaa lausetta voidaan käyttää funktioiden R-integroituvuuden osoittamiseen. Tulos on hyödyllinen, koska integraalin arvoa ei tarvitse tietää.

Lause 2.5 (Cauchyn kriteeri)**.** *Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen η_ϵ>0, että jos $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])\}_1^n$ ja $\dot{\mathcal{Q}} = \{(s_i, [x_{j-1}, x_j])\}_1^n$ ovat mitä tahansa välin I η_ϵ-hienoja merkittyjä jakoja, niin*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \leq \epsilon.$$

Todistus. (Ks. [6, s.208]) □

Käsite *melkein kaikkialla*, jota käytetään seuraavassa Lauseessa, määritellään luvussa 4.

Lause 2.6. *Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos se on jatkuva melkein kaikkialla.*

Todistus. (Ks. [6, s.362]) □

2.1 Darbouxin määritelmä

Darbouxin integraalimenetelmä on teknisesti helpompi, koska sillä vältetään monimutkaiset äärettömän monet merkkivalinnat. Darbouxin ja Riemannin integraalit ovat yhtäpitäviä suljetuilla ja rajoitetuilla väleillä.

Määritelmä 2.7. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio välillä $I = [a, b]$ ja olkoon $\mathcal{P} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ välin I jako. Kun $k = 1, \ldots, n$, olkoon

$$m_k := \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad \text{ja} \quad M_k := \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Määritellään välijakoa $\mathcal{P}$ vastaava funktion f *alasumma*

$$L(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

ja *yläsumma*

$$U(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Jos f on positiivinen funktio, niin alasumma $L(f; \mathcal{P})$ on pinta-ala joka muodostuu suorakulmioista, joiden kantana on väli $[x_{k-1}, x_k]$ ja korkeus on m_k. Vastaavasti yläsumma $U(f; \mathcal{P})$ muodostuu suorakulmioista joiden kantana on $[x_{k-1}, x_k]$ ja korkeus on M_k.

Merkitään kaikkien välin I välijakojen joukkoa symbolilla $\mathscr{P}(I)$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $I := [a, b]$ ja olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktion f *alaintegraali* yli välin I on luku

$$L(f) := \sup \{L(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\},$$

ja funktion f yläintegraali yli välin I on luku

$$U(f) := \inf \{U(f; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}.$$

Jos I on suljettu, rajoitettu väli ja funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, niin alaintegraali $L(f)$ ja yläintegraali $U(f)$ ovat aina olemassa.

Määritelmä 2.9. Olkoon $I := [a, b]$ ja olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Tällöin funktio f on *Darboux-integroituva* välillä I, jos $L(f) = U(f)$. Tässä tapauksessa funktion f Darbouxin integraalin arvo yli välin I on luku $L(f) = U(f)$.

Esimerkki 2.10. Määritellään funktio g välillä $[0,3]$ niin, että $g(x) := 2$, kun $0 \leq x \leq 1$ ja $g(x) := 3$, kun $1 < x \leq 3$, kuten Esimerkissä 2.3. Olkoon $\epsilon > 0$. Kun määrätään välijako $\mathcal{P}_\epsilon := (0, 1, 1+\epsilon, 3)$, niin saadaan yläsumma

$$U(g; \mathcal{P}_\epsilon) = 2 \cdot (1-0) + 3(1+\epsilon-1) + 3(2-\epsilon) = 2 + 3\epsilon + 6 - 3\epsilon = 8.$$

Tällöin yläintegraalille on voimassa $U(g) \leq 8$. Vastaavasti saadaan alasumma

$$L(g; \mathcal{P}_\epsilon) = 2 + 2\epsilon + 3(2-\epsilon) = 8 - \epsilon,$$

joten alaintegraalille on voimassa $L(g) \geq 8$. Tällöin saadaan, että $8 \leq L(g) \leq U(g) \leq 8$, josta seuraa, että $L(g) = U(g) = 8$. Näin ollen funktion g Darbouxin integraalin arvo yli välin $[0,3]$ on 8.

Lause 2.11. *Funktio f välillä $I := [a,b]$ on Darboux-integroituva, jos ja vain jos se on Riemann-integroituva.*

Todistus. (Ks. [6, s.232]) □

2.2 Riemann-integraalin perusominaisuuksia

Esittelen seuraavaksi tärkeimpiä Riemann-integraalin perusominaisuuksia. Ominaisuudet ovat muodollisesti samat myös mittaintegraalille, joten niiden todistuksetkin eroavat vain kevyesti. Jätän todistukset pois tutkielmastani, mutta Riemann-integraalille ne löytyvät esimerkiksi teoksesta [6] ja mittaintegraalille [2].

Lause 2.12 (Additiivisuus)**.** *Jos f ja $g \in \mathcal{R}(I)$, niin niiden summa $f+g \in \mathcal{R}(I)$ ja*

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$

Lause 2.13 (Homogeenisuus)**.** *Jos $f \in \mathcal{R}(I)$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin $cf \in \mathcal{R}(I)$ ja*

$$\int_I cf = c \int_I f.$$

Lause 2.14. *Jos $f \in \mathcal{R}(I)$ ja $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I$, niin*

$$\int_I f \geq 0.$$

Seuraus 2.15 (Epäyhtälön säilyminen)**.** *Jos $f, g \in \mathcal{R}(I)$ ja $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in I$, niin*

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Seuraus 2.16. *Jos $f \in \mathcal{R}(I)$ ja jos m, M ovat sellaisia lukuja, että $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in I := [a, b]$, niin*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Seuraus 2.17. *Jos f on Riemann-integroituva välillä I, niin funktio $|f|$ on myös Riemann-integroituva ja*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Huomautus 2.18. Mittaintegraalin tapauksessa Seuraksessa 2.17, täytyy lisäksi olettaa, että myös $|f|$ on mittaintegroituva, sillä funktion f mittaintegroituvuudesta ei seuraa, että myös funktio $|f|$ on mittaintegroituva.

Integraali välien funktiona Jos funktio on Riemann-integroituva yli välin I, se on myös Riemann-integroituva yli minkä tahansa osavälin väliltä I. Lisäksi integraali on additiivinen seuraavan Lauseen nojalla.

Lause 2.19. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja olkoon $c \in]a, b[$. Tällöin $f \in \mathcal{R}([a, b])$ jos ja vain jos sen rajoittumat väleille $[a, c]$ ja $[c, b]$ ovat molemmat Riemann-integroituvia. Tässä tapauksessa*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Seuraus 2.20. *Jos $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ja jos $[c, d] \subseteq [a, b]$ niin funktion f rajoittuma välille $[c, d]$ on R-integroituva.*

Seuraus 2.21. *Jos $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ja jos $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, niin funktion f rajoittumat kaikille osaväleille $[c_{i-1}, c_i]$ ovat R-integroituvia ja*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Jos $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ ja $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$, niin määritellään, että $\int_\alpha^\beta f$ on funktion f rajoittuman integraali osavälille $[\alpha, \beta]$. Seuraavaksi määritellään integraalin myös mielivaltaisille pisteille $\alpha, \beta \in [a, b]$.

Määritelmä 2.22. Jos $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ja $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$ määritellään

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{ja} \quad \int_\alpha^\alpha f := 0.$$

Lause 2.23. *Jos* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *ja jos* α, β, γ *ovat mitä tahansa lukuja väliltä* $[a,b]$, *niin*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\beta} f,$$

siinä mielessä, että jos mitkä tahansa kaksi ylläolevasta integraalista on olemassa, niin siitä seuraa että myös kolmas integraali on olemassa ja yhtäsuuruus on voimassa.

2.3 Analyysin peruslause

Analyysin peruslause yhdistää derivoinnin ja integroinnin peruskäsitteet ja osoittaa, että ne ovat pääasiallisesti toistensa käänteistoimituksia. Analyysin peruslause voidaan jakaa karkeasti kahteen osaan: derivaatan integraaliin ja integraalin derivaattaan. Käsittelen tässä derivaatan integraalin. Menetelmän avulla pystytään käytännössä laskemaan integraalien arvoja, sillä pelkän määritelmän avulla integraalin arvon määrittäminen on yleensä hankalaa. Analyysin peruslause väittää, että

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'.$$

Kaavaa kutsutaan Newton-Leibnizin kaavaksi ja sen paikkansapitävyys riippuu integraalin käsitteestä, jota käytetään.

Huomautus 2.24. Analyysin peruslause Riemannin integraalille sallii joitain poikkeuksellisia pisteitä $c \in E$, joissa $F'(c)$ ei ole olemassa tai $F'(c) \neq f(c)$. Määritellään poikkeuksellisen joukon käsite Luvussa 4.

Lause 2.25 (Analyysin peruslause)**.** *Oletetaan, että on olemassa sellainen numeroituva poikkeuksellinen joukko* E *välillä* $[a,b]$ *ja sellaiset funktiot* $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$, *että*

1. F *on jatkuva välillä* $[a,b]$,
2. $F'(x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in [a,b] \setminus E$,
3. $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Tällöin

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Todistus. (Ks. [6, s.216]) □

Huomautus 2.26. Integraalifunktiota F kutsutaan myös funktion f *primitiiviksi.* Tarkemmin sanottuna F on funktion f primitiivi välillä $[a, b]$, jos F on jatkuva välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Analyysin peruslause antaa mahdollisuuden Riemannin määrätyn integraalin laskemiseen, kun integroitava funktio on jonkun tunnetun funktion derivaatta.

Esimerkki 2.27. Määrätään integraali

$$\int_0^\pi \sin x dx.$$

Koska $D_x(-\cos x) = \sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin funktio $F(x) = -\cos x$ on funktion $f(x) = \sin x$ integraalifunktio. Koska $f(x)$ on jatkuva, niin Analyysin peruslauseen 2.25 nojalla

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

2.4 Epäoleellinen integraali

Jos funktio f ei ole rajoitettu tai se heilahtelee paljon jonkin pisteen ympäristössä, niin f ei ole Riemann-integroituva. Tällöin integraali voidaan arvioida niin sanottuna Riemannin *epäoleellisena integraalina.*

Lause 2.28. *Jos f on R-integroituva välillä $[a, b]$, niin f on rajoitettu välillä $[a, b]$.*

Todistus. (Ks. [6, s.205]) □

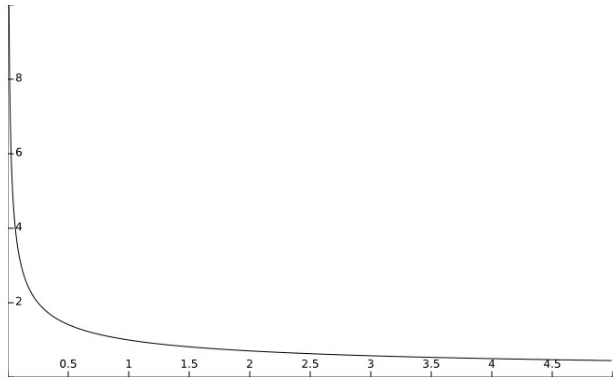
Määritelmä 2.29. Olkoon funktio f rajoittamaton tai erittäin heilahteleva jossain pisteen $c \in [a, b]$ ympäristössä. Määritellään Riemannin *epäoleellinen integraali* asettamalla

$$\int_a^b f := \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f + \lim_{\beta \to c^+} \int_\beta^b f.$$

Mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa, niin sanotaan, että *epäoleelliset integraalit* $\int_a^c f$ ja $\int_c^b f$ *suppenevat.*

Esimerkki 2.30. Funktio $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$, kun $x \in]0, 1]$ ja $f(0) = 0$, ei ole Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$, koska se ei ole rajoitettu pisteessä 0. Integraali voidaan laskea yli välin $[0, 1]$ raja-arvona:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$



Kuva 2.2: Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ kuvaaja.

2.5 Rajafunktion integroituvuus

Useissa matemaattisissa ongelmissa raja-arvon ja integraalin järjestystä pitää vaihtaa. Tällöin on hyödyllistä tietää, onko rajafunktio Riemann-integroituva ja onko rajafunktion integraali yli välin I sama kuin funktion f_n välin I integraalin raja-arvo, eli päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Merkittävä tasaisesti suppenevan funktiojonon ominaisuus on, että raja-arvon muodostamisen ja integroimisen järjestys voidaan vaihtaa.

Lause 2.31. *Olkoon (f_n) jono R-integroituvia funktioita. Jos (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $I := [a, b]$, niin rajafunktio $f \in \mathcal{R}(I)$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Todistus. (Ks. [3, s. 16]) □

Esimerkki 2.32. Olkoot $f(x) = e^x$ ja $f_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}x^2}$. Tällöin $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[0, 1]$, koska

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} e^x|e^{\frac{1}{n}x^2} - 1| \leq e|e^{\frac{1}{n}} - 1| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Lauseen 2.31 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Tasaisen suppenemisen oletukset ovat erittäin tiukkoja, mikä rajoittaa tuloksen käytettävyyttä. Esitän seuraavaksi tuloksen, joka ei vaadi funktioiden tasaista suppenemista, mutta rajafunktion on oltava R-integroituva.

Lause 2.33 (Arzelàn dominoidun konvergenssin lause)**.** *Olkoon* (f_n) *tasaisesti rajoitettu R-integroituvien funktioiden jono joka suppenee välillä* $I := [a, b]$ *kohti funktiota* $f \in \mathcal{R}(I)$*. Tällöin on voimassa*

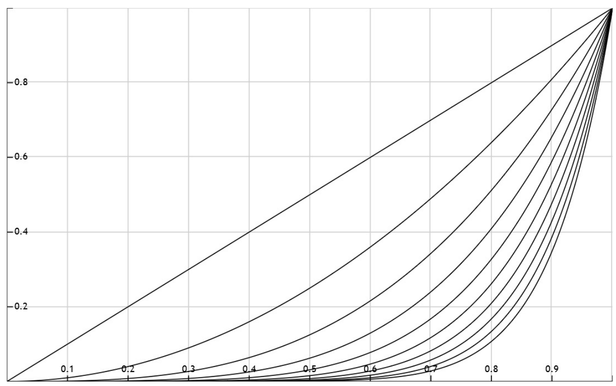
$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Todistus. (Ks. [3, s. 18]) □

Esimerkki 2.34. Olkoon $f_n(x) = x^n$, kun $0 \leq x \leq 1$. Rajafunktio on $f(x) = 0$, kun $x \in [0, 1[$ ja $f(1) = 1$. Koska kyseessä on jatkuvien funktioiden $f_n \in \mathcal{R}(I)$ jono epäjatkuvalla raja-arvolla, suppeneminen ei ole tasaista. Integraalien jonon raja-arvo on

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Joten $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$.



Kuva 2.3: Funktioiden $f_n(x) = x^n$, kun $0 \leq x \leq 1$ ja $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$ kuvaajat.

Luku 3

Riemann-integraalin epäkohtia

Tarkastellaan Riemannin integraaliteorian epäkohtia esimerkein.

3.1 Riemann-integroituvien funktioiden joukon pienuus

Suurin epäkohta Riemannin integraalissa on R-integroituvien funktioiden joukon pienuus. Jos funktio on jollain välillä rajoittamaton (tai jos integroimisväli ulottuu äärettömyyteen) tai funktion arvot heilahtelevat paljon jonkin pisteen ympäristössä, funktio ei välttämättä ole integroituva.

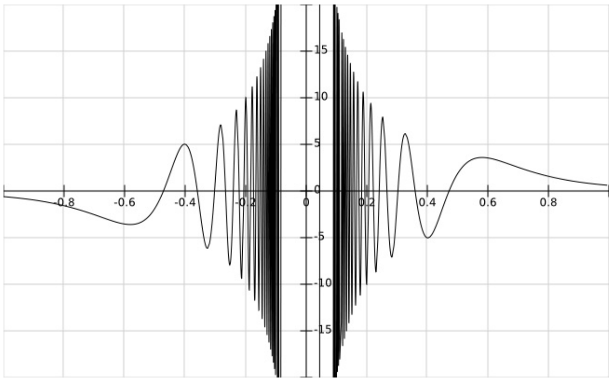
Esimerkki 3.1. Olkoon funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{kun} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{kun} \quad x = 0. \end{cases}$$

Osoitetaan, että funktio f ei ole Riemann-integroituva millään välillä, joka sisältää luvun 0. Luvuilla $x_k = 1/\sqrt{(1+2k)\pi}$, missä $k = 1, 2, \ldots$, saadaan

$$\begin{aligned} f(x_k) =& 2x_k \sin \frac{1}{x_k^2} - \frac{2}{x_k} \cos \frac{1}{x_k^2} \\ =& (2/\sqrt{(1+2k)\pi}) \sin \left(\frac{1}{(1/\sqrt{(1+2k)\pi})^2} \right) \\ &- 2\sqrt{(1+2k)\pi} \cos \left(\frac{1}{(1/\sqrt{(1+2k)\pi})^2} \right) \\ =& 0 - 2\sqrt{(1+2k)\pi} \cdot (-1) = 2\sqrt{(1+2k)\pi}. \end{aligned}$$

Luvun k kasvaessa myös $f(x_k)$ kasvaa, joten funktio ei ole rajoitettu millään välillä $[0, h)$, kun $h > 0$. Tällöin funktio f ei ole myöskään Riemann-integroituva millään välillä, joka sisältää luvun 0.



Kuva 3.1: Funktion $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ kuvaaja.

Esimerkki 3.2 (Dirichletin funktio)**.** Olkoon

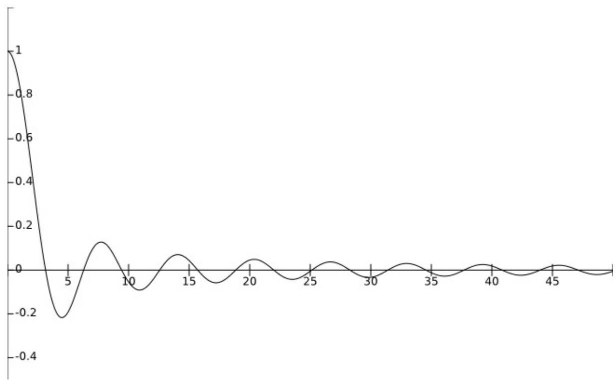
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,1],\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in [0,1],\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Olkoon $\epsilon_0 := \frac{1}{2}$. Jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa välin $[0,1]$ jako, jonka merkit ovat rationaalilukuja, niin $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = 1$ ja jos $\dot{\mathcal{Q}}$ on mikä tahansa välin $[0,1]$ jako, jonka merkit ovat irrationaalilukuja, niin $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = 0$. Koska molemmat jaot voidaan tehdä mielivaltaisen lyhyillä välijaoilla, Cauchyn kriteerin 2.5 nojalla funktio ei ole Riemann-integroituva.

Esimerkki 3.3. Epäoleellinen integraali $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$, joka tunnetaan myös *Dirichletin integraalina*, ei ole olemassa Riemannin integraalille.

$$\int_\pi^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx$$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to \infty,$$

kun $n \to \infty$, sillä harmoninen sarja hajaantuu. Näin ollen myös epäoleellinen integraali $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ hajaantuu, joten Seurauksen 2.17 nojalla funktiolla $\frac{\sin x}{x}$ ei ole epäoleellista R-integraalia.



Kuva 3.2: Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ kuvaaja.

3.2 Analyysin Peruslause

Vaikka funktio F olisi derivoituva joka pisteessä välillä $[a, b]$, funktio F' ei välttämättä ole Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

Esimerkki 3.4. Olkoon funktio

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t = 0 \\ t^2 \cos(\pi/t^2), & \text{kun} \quad 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Tällöin

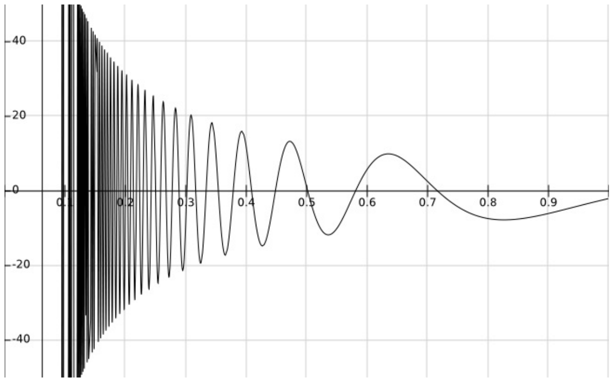
$$F'(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t = 0 \\ 2t \cos(\pi/t^2) + (2\pi/t) \sin(\pi/t^2), & \text{kun} \quad 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Funktio F' ei ole rajoitettu välillä $[0, 1]$, joten se ei ole Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$, joten Analyysin peruslausetta 2.25 ei voi soveltaa.

Esimerkki 3.5. Jos $F(x) := 2\sqrt{x}$, kun $x \in [0, b]$, niin F on jatkuva välillä $[0, b]$ ja $F'(x) = 1/\sqrt{x}$, kun $x \in]0, b]$. Koska funktio $f := F'$ ei ole rajoitettu välillä $]0, b]$, se ei ole R-integroituva välillä $[0, b]$. Näin ollen Analyysin peruslausetta 2.25 ei voi soveltaa.

3.3 Rajafunktion integroituvuus

Suurin osa funktioista, joita käsitellään koulumatematiikassa, on joko (paloittain) monotonisia tai (paloittain) jatkuvia. Joka tapauksessa ne ovat yleensä



Kuva 3.3: Funktion $f(t) = 2t\cos(\pi/t^2) + (2\pi/t)\sin(\pi/t^2)$ kuvaaja.

Riemann-integroituvia. Kuitenkin jopa suhteellisen alkeellisissa matemaattisissa sovelluksissa on välttämätöntä tarkastella funktiojonojen tai sarjojen raja-arvoja ja nämä raja-arvolausekkeet tuottavat usein vielä monimutkaisempia funktioita. Riemann-integroituvien funktioiden jonon (f_k) rajafunktio ei välttämättä ole Riemann-integroituva. Sen lisäksi vaikka rajafunktio olisikin Riemann-integroituva, sen Riemann-integraalin arvo ei välttämättä ole sama kuin integraalien $(\int_I f_k)$ jonon raja-arvo.

Esimerkki 3.6. Olkoon $\mathbb{Q}_1 := \{r_1, \ldots, r_k\}$ rationaalilukujen luetelma väliltä $[0,1]$. Olkoon $f_k(x) := 1$, kun $x = r_1, \ldots, r_k$ ja $f_k = 0$ muulloin. Tällöin jono (f_k) suppenee joka pisteessä kohti Dirichletin epäjatkuvaa funktiota $f(x) := 1$, kun $x \in \mathbb{Q}_1$ ja $f(x) := 0$ muulloin. Vaikka kaikki funktiot f_k ovat R-integroituvia integraalilla 0, rajafunktio ei ole R-integroituva, joten Arzelàn lausetta ei voida käyttää. Selvästi jono (f_n) ei myöskään ole tasaisesti suppeneva, koska $f \notin \mathcal{R}(I)$.

Ylläoleva esimerkki osoittaa, että Riemann-integroituvuus ei käyttäydy hyvin, edes yksinkertaisimmissakaan rajankäyntioperaatioissa.

Esimerkki 3.7. Olkoon $g_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ k > 2$ määritelty niin, että

$$g_k(x) := \begin{cases} k^2 x, & \text{kun} \quad 0 \le x \le 1/k, \\ -k^2(x - 2/k), & \text{kun} \quad 1/k < x \le 2/k, \\ 0, & \text{kun} \quad 2/k < x \le 1. \end{cases}$$

Osoitetaan, että jono (g_k) suppenee joka pisteessä välillä $[0,1]$ kohti nollafunktiota $g(x) = 0$. Kun $x = 0, g_k(0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Kun $x > 0$, on olemassa sellainen luku $k_x \in \mathbb{N}$, että $k_x \ge 2/x$, jolloin $g_k(x) = 0$ kaikilla

$k \geq k_x$. Täten rajafunktioksi saadaan $\lim g_k(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Koska kaikki funktiot g_k ovat jatkuvia, ne ovat R-integroituvia ja siten myös rajafunktio on R-integroituva. Kuitenkin

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_k dx = &\int_0^{1/k} g_k dx + \int_{1/k}^{2/k} g_k dx + \int_{2/k}^1 g_k dx \\ =&0 - k^2 \left(\frac{2}{k^2} - \frac{4}{k^2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{2}{k^2} \right) + 1/2 = 1.\end{aligned}$$

Joten

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 g_k = 1 \neq \int_0^1 g = 0 \quad \text{kaikilla} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Esimerkissä 3.7 on jatkuvien funktioiden jono, joka suppenee kaikissa välin pisteissä kohti jatkuvaa funktiota. Rajafunktion Riemann-integraali ei kuitenkaan ole sama kuin funktion Riemann-integraalien jonon raja-arvo. Funktiojono ei ole rajoitettu, sillä sen arvot kasvavat erittäin suureksi pisteessä $x = \frac{1}{k} \to 0$, kun $k \to \infty$, koska $g_k(1/k) = k^2 \cdot \frac{1}{k} = k \to \infty$, kun $k \to \infty$.

Luku 4

Mittaintegraali

Riemann-integraalin määritelmä perustuu integraalin oletetun arvon likiarvoon Riemannin summien avulla. Yleisesti funktio käyttäytyy eri tavalla eri osissa integroimisväliä, joten on luonnollista odottaa, että jos jotkut jaon osavälit on huomattavasti pienempiä kuin toiset, on mahdollista saada parempi likiarvo.

Mittaintegraalimenetelmässä huomio kiinnittyy välien merkkeihin selvästi enemmän kuin Riemann-integraalissa. Välien merkittyjen jakojen $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ hienoutta voidaan hallita vaatimalla, että jokainen osaväli I_i kuuluu välille $B[t_i; \delta(t_i)] := [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, joka riippuu merkistä t_i ja $\delta(t)$ on vakion sijaan funktio.

Olkoon $I = [a, b], a < b$ ja olkoon $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ välin $I = [a, b]$ merkitty jako.

Määritelmä 4.1. Olkoon $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$. Funktiota $\delta : I \to \mathbb{R}$ sanotaan *mittafunktioksi* tai *mitaksi* välillä I, jos $\delta(t) > 0$ kaikilla $t \in I$. Väli, jota mittafunktio δ kontrolloi pisteen $t \in I$ ympäristössä, on $B[t; \delta(t)] := [t - \delta(t), t + \delta(t)]$.

Otetaan seuraavaksi esimerkkejä välin I mittafunktioista, jotka valaisevat teoriaa ja ovat myös hyödyllisiä jatkossa.

Esimerkki 4.2. (a) Olkoon $\delta > 0$ positiivinen luku. Tällöin voidaan määritellä mitta $\delta : I \to \mathbb{R}$ asettamalla $\delta(t) := \delta$ kaikilla $t \in I$. Tällaista mittafunktiota kutsutaan *vakiomitaksi.* Huomataan, että välijako $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ on δ-hieno tälle vakiomitalle jos ja vain jos

$$I_i \subseteq [t_i - \delta, t_i + \delta] = B[t_i; \delta] \quad \text{kaikilla} \quad i = 1, \dots, n.$$

(b) Olkoot δ_1 ja δ_2 välin $I := [a, b]$ mittafunktioita ja kun määritellään

$$\delta(t) := \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}, \quad \text{kun} \quad t \in I,$$

niin δ on välin I mittafunktio. Tämä konstruktio voidaan laajentaa äärelliseen määrään mitä tahansa välin I mittoja.

(c) Usein on kätevää valita mittafunktio δ, joka pakottaa jonkun tietyn annetun pisteen merkiksi mille tahansa δ-hienolle välijaolle.

Esimerkiksi olkoon $I := [0,1]$ ja olkoon $\delta(0) := \frac{1}{4}$ ja $\delta(t) := \frac{1}{2}t$, kun $0 < t \leq 1$. Tällöin δ on välin I mittafunktio. Olkoon $\dot{\mathcal{P}}$ välin I δ-hieno välijako, tällöin pisteen $0 \in I$ täytyy kuulua jollekin välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ osavälille $I_1 = [0, x_1]$. Osoitetaan, että osavälin I_1 merkkinä t_1 täytyy olla 0. Koska $\dot{\mathcal{P}}$ on δ-hieno, niin selvästi on oltava $[0, x_1] \subseteq [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)]$, mistä seuraa, että

$$t_1 - \delta(t_1) \leq 0. \tag{4.1}$$

Nyt jos $t_1 > 0$, niin $\delta(t_1) = \frac{1}{2}t_1$ ja $t_1 - \delta(t_1) = t_1 - \frac{1}{2}t_1 > 0$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön (4.1) kanssa. Näin ollen täytyy olla $t_1 = 0$.

Huomataan, että jotkut pisteet välillä I hallitsevat suuria välejä ja toiset pisteet hallitsevat erittäin pieniä välejä. Seuraavan tuloksen mukaan, jos $I = [a,b] \subset \mathbb{R}, a < b$ on kompakti väli, ja jos δ on mikä tahansa mittafunktio välillä I, niin on olemassa välin I välijako, jossa kukin merkki t_i hallitsee vastaavaa osaväliä I_i.

Lause 4.3 (Cousinin Lause)**.** *Jos δ on mitta välillä $I = [a,b]$, niin on olemassa välin I δ-hieno merkitty jako.*

Todistus. (Ks. [1, s.11]) □

Mittaintegraali $\int_I f$ määritellään Riemannin summana hyvin samaan tapaan kuin Riemannin integraali. Summan jaon hienoutta hallitsee vakion δ sijaan mittafunktio $\delta(t)$.

Määritelmä 4.4 (Mittaintegraali)**.** Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *mittaintegroituva*, jos on olemassa sellainen luku $B \in \mathbb{R}$, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen mitta δ_ϵ, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa merkitty δ_ϵ-hieno jako, niin

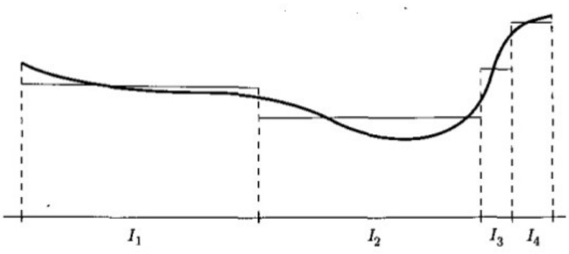
$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - B| \leq \epsilon.$$

Lukua B sanotaan funktion f integraaliksi välin I yli ja merkitään

$$\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Merkitään jatkossa kaikkien välin I mittaintegroituvien funktioiden joukkoa symbolilla $\mathcal{R}^*(I)$.

Mittaintegraalissa osavälien pituuksien annetaan vaihdella enemmän, kunhan väleillä, jossa funktion arvot muuttuvat nopeasti, on tarpeeksi lyhyt pituus.



Kuva 4.1: Mittaintegraalimenetelmä.

Esimerkki 4.5. Olkoon $f(x) = 1/\sqrt{x}$, kun $x > 0$ ja $f(0) = 0$. Kuten esimerkissä 2.30 todettiin, funktio f ei ole Riemann-integroituva yli välin $[0, 1]$. Osoitetaan, että f on mittaintegroituva ja sen integraali yli välin $I := [0, 1]$ on 2.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tarkastellaan ensin funktiota luvun 0 lähellä. Kun $0 < x < 1$ käytetään funktion f epäoleellista integraalia $2\sqrt{x}$ välillä $[0, x]$ funktion f ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan arvioimiseen . Valitaan sellainen mitta δ, että $\delta(t) \subset]0, t[$ kaikilla $t \in]0, 1]$. Jos $\dot{\mathcal{P}}$ on välin $[0, 1]$ δ-hieno merkitty jako, niin välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ osavälin joka sisältää luvun 0 merkkinä on oltava luku 0. Valitaan mitaksi pisteessä 0: $\delta(0) = \epsilon^2/16$. Tällöin

$$|f(0)(x_1 - 0) - 2\sqrt{x_1}| = 2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{\epsilon^2/16} = \epsilon/2,$$

aina kun $[0, x_1] \subset [-\epsilon^2/16, \epsilon^2/16]$. Kun $0 < u < v \leq 1$, kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala välillä $[u,v]$ on $2\sqrt{v}-2\sqrt{u}$ ja kun $u \le z \le v$, saadaan

$$\begin{aligned}
|f(z)(v-u)-(2\sqrt{v}-2\sqrt{u})| &= (v-u)\left|\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{2}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\right| \\
&= \frac{v-u}{z}\left|\frac{\sqrt{z}(\sqrt{v}+\sqrt{u})-2z}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\right| \\
&\le \frac{v-u}{z}\left|\frac{\sqrt{z}(\sqrt{v}+\sqrt{u})-2z}{\sqrt{z}}\right| \\
&= \frac{v-u}{z}|\sqrt{v}+\sqrt{u}-2\sqrt{z}| \\
&\le \frac{v-u}{z}(|\sqrt{v}-\sqrt{z}|+|\sqrt{u}-\sqrt{z}|) \\
&= \frac{v-u}{z}\left(\frac{v-z}{\sqrt{v}+\sqrt{z}}+\frac{z-u}{\sqrt{u}+\sqrt{z}}\right) \\
&\le \frac{v-u}{z}\left(\frac{v-z}{\sqrt{z}}+\frac{z-u}{\sqrt{z}}\right) = \frac{(v-u)^2}{z^{2/3}}.
\end{aligned}$$

Tämän perusteella määritellään mitta $\delta(z) = \epsilon z^{3/2}/4$, kun $z > 0$.

Olkoon $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i) : 0 \le i \le n\}$ välin $[0,1]$ δ-hieno jako. Nyt $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ja $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$. Tällöin Riemannin summassa ensimmäinen merkki $t_0 = 0$ ja saadaan

$$\begin{aligned}
|S(f;\dot{\mathcal{P}})-2| &= \left|\sum_{i=0}^{n}\{f(t_i)(x_{i+1}-x_i)-2(\sqrt{x_{i+1}}-\sqrt{x_i})\}\right| \\
&\le 2\sqrt{x_1}+\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)(x_{i+1}-x_i)-2(\sqrt{x_{i+1}}-\sqrt{x_i})| \\
&< \epsilon/2+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{t_i^{3/2}} \le \epsilon/2+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_{i+1}-x_i)}{t_i^{3/2}}2\delta(t_i) \\
&\le \epsilon/2+\sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon(x_{i+1}-x_i)}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Seuraava tuloksen mukaan, jos funktio on Riemann-integroituva, se on myös mittaintegroituva.

Lause 4.6. *Olkoon $I := [a,b]$ väli reaalilukujoukossa ja olkoon $f : I \to \mathbb{R}$. Jos f on Riemann-integroituva yli välin I, niin f on myös mittaintegroituva yli välin I.*

Todistus. Huomataan välittömästi, että kun valitaan mittafunktioksi vakio mittaintegraalin määritelmässä, määritelmä on sama kuin Riemannin integraalissa. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi tilanteita, joissa mittafunktio toimii paremmin välien jakajana kuin vakio.

Mittafunktion avulla pystytään sulkemaan äärellinen tai numeroituva joukko pisteitä sellaiseksi välien yhdisteeksi, jolla on pieni kokonaispituus, jolloin se antaa vain pienen osuuden Riemannin summaan.

Esimerkki 4.7 (Dirichletin funktio)**.** Osoitetaan, että Esimerkin 3.2 Dirichletin funktio on mittaintegroituva. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,1],\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in [0,1],\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funktio $f(x)$ on epäjatkuva jokaisessa pisteessä. Funktio ei ole Riemann-integroituva. Osoitetaan, että funktio $f(x)$ on mittaintegroituva ja $\int_0^1 f = 0$. Olkoon $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ kaikki rationaaliluvut väliltä $[0,1]$ ja olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Määritellään mitta

$$\delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \epsilon/2^{k+1}, & \text{kun } t = r_k \\ 1, & \text{kun } t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ δ_ϵ-hieno merkitty jako välillä $[0,1]$. Jos luku t_i on irrationaalinen niin $f(t_i) = 0$, joten tämä osuus Riemannin summassa on nolla. Jos luku t_i on rationaalinen, niin $f(t_i) = 1$. Välin pituus $l(I_i) = x_i - x_{i-1}$ on pieni, koska $I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Kun r_k on merkkinä välillä I_i, saadaan $I_i \subseteq [r_k - \delta_\epsilon(r_k), r_k + \delta_\epsilon(r_k)]$, joten $l(I_i) \leq 2 \cdot \delta_\epsilon(r_k) = 2 \cdot \epsilon/2^{k+1} = \epsilon/2^k$. Siis jokainen r_k antaa Riemannin summaan korkeintaan osuuden $\epsilon/2^k$. Saadaan $|S(f; \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{k=1}^\infty \epsilon/2^k = \epsilon$. Luku ϵ on mielivaltainen, joten Dirichletin funktio f on mittaintegroituva ja $\int_0^1 f = 0$.

Mittafunktion avulla voidaan pakottaa jokin tietty piste merkiksi. Jos jokin tietty piste tekee integroinnista haastavan, voidaan hankaluutta hallita pakottamalla piste merkiksi.

Esimerkki 4.8. Olkoon $g(x) := 1/\sqrt{x}$, kun $x \in (0,1]$. Nyt funktio $g(x) \to \infty$, kun $x \to 0$. Jotta funktio olisi määritelty kaikkialla välillä $[0,1]$, määritellään $g(0) = 0$. Funktio ei ole R-integroituva, koska se ei ole rajoitettu. Kun valitaan mittafunktio, kuten Esimerkissä 4.2(c), joka pakottaa ensimmäiseksi merkiksi pisteen $t_1 = 0$, niin ensimmäisen termin osuus Riemannin summassa on 0. Näin ollen funktio g on jäljellä olevalla välillä $[x_1, 1]$ rajoitettu ja jatkuva ja Esimerkin 4.5 nojalla se on mittaintegroituva.

4.1 Nollajoukot, nollafunktiot ja poikkeukselliset joukot

Nollajoukon ja nollafunktion käsitteet ovat jatkossa erittäin tärkeitä. Lisäksi tietyille pienille joukoille halutaan sallia poikkeuksellista käyttäytymistä.

Määritelmä 4.9. (a) Joukkoa $Z \subset \mathbb{R}$ sanotaan *nollajoukoksi*, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen avoimien välien numeroituva kokoelma $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, että

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) \leq \epsilon.$$

(b) Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ joukko. Funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ sanotaan *nollafunktioksi* jos joukko $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ on nollajoukko.

(c) Olkoon $Q(x)$ lauseke pisteelle $x \in I$ ja olkoon $E \subset I$. Joukko E on *poikkeuksellinen joukko* lausekkeelle Q, jos lauseke Q on voimassa kaikilla $x \in I \setminus E$.

(d) Jos joukko $E \subset I$ on nollajoukko (c)-kohdassa, sanotaan että $Q(x)$ pätee *melkein kaikkialla* joukossa I ja kirjoitetaan: $Q(x)$ pätee m.k. joukossa I.

(e) Jos joukko E on numeroituva (vastaavasti, äärellinen) joukko (c)-kohdassa, sanotaan että $Q(x)$ pätee numeroituvan (vastaavasti äärellisen) monella poikkeuksella ja kirjoitetaan: $Q(x)$ pätee n.p (vastaavasti, ä.p) joukossa I.

Esimerkki 4.10. (a) Mikä tahansa nollajoukon osajoukko reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ on nollajoukko.

(b) Mikä tahansa yhden alkion sisältävä joukko $\{p\}$ on nollajoukko. Tämä nähdään valitsemalla annetulla $\epsilon > 0$ jaot $J_1 :=]p - \frac{1}{2}\epsilon, p + \frac{1}{2}\epsilon[$ ja $J_2 = J_3 = \ldots = \emptyset$.

(c) Mikä tahansa numeroituva joukko reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ on nollajoukko. Jos $Z := \{p_1, p_2, \ldots\}$ on joukon Z luetelma ja jos $\epsilon > 0$, valitaan

$$J_k :=]p_k - \epsilon/2^{k+1}, p_k + \epsilon/2^{k+1}[\quad \text{kaikilla} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Koska $l(J_k) = \epsilon/2^k$ saadaan $\sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) \leq \epsilon$.

(d) Numeroituva yhdiste nollajoukkoja on nollajoukko. Olkoon $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$ numeroituva kokoelma nollajoukkoja reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Olkoon $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\{J_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ numeroituva kokoelma sellaisia avoimia välejä, että

$$Z_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{m,k} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(J_{m,k}) \leq \frac{\epsilon}{2^m}.$$

Kokoelma $\{J_{m,k}\}_{m,k=1}^{\infty}$ on numeroituva ja nähdään selvästi, että

$$Z \subseteq \bigcup_{m,k=1}^{\infty} J_{m,k} \quad \text{ja} \quad \sum_{m,k=1}^{\infty} l(J_{m,k}) \leq \epsilon.$$

Voidaan osoittaa, että kaikki nollafunktiot ovat mittaintegroituvia ja niiden integraalin arvo on nolla. Yleisen tapauksen sijaan tarkastellaan esimerkkiä.

Esimerkki 4.11. Olkoon Z mikä tahansa nollajoukko joka kuuluu välille $I := [a, b]$ ja olkoon $\varphi : I \to \mathbb{R}$ nollafunktio, joka on määritelty:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in Z \\ 0, & \text{kun} \quad x \in I \setminus Z. \end{cases}$$

Osoitetaan, että $\varphi \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\int_I \varphi = 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ numeroituva kokoelma avoimia välejä kuten Määritelmässä 4.9(a). Määritellään mitta välille I. Olkoon $\delta_\epsilon(t) := 1$, kun $t \in I \setminus Z$ ja kun $t \in Z$ olkoon $k(t)$ pienin indeksi k siten että $t \in J_k$ ja valitaan sellainen mitta $\delta_\epsilon > 0$, että $[t - \delta_\epsilon(t), t + \delta_\epsilon(t)] \subset J_{k(t)}$.

Nyt olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^{n}$ välin I δ_ϵ-hieno jako. Jos $t_i \in I \setminus Z$, niin $\varphi(t_i) = 0$, joten termien, joiden merkit kuuluvat joukkoon $I \setminus Z$, osuus summassa $S(\varphi; \dot{\mathcal{P}})$ on 0. Välien I_i osavälien, joiden merkit kuuluvat välille $Z \cap J_k$, kokonaispituus $\leq l(J_k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen termien, joiden merkit kuuluvat välille J_k, summan osuus summassa $S(\varphi; \dot{\mathcal{P}})$ on $\leq l(J_k)$. Saadaan epäyhtälö

$$0 \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) < \sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) \leq \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $\varphi \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\int_I \varphi = 0$.

4.2 Saks-Henstockin Lemma

Seuraavaksi esittelen yksinkertaisen ja tehokkaan apulauseen, jota hyödynnetään lähes kaikissa tärkeimmissä mittaintegraalin lauseiden todistuksissa. Lemman mukaan Riemannin summat eivät ainoastaan arvioi integraalin likiarvoa yli koko välin, vaan myös yli osavälien yhdisteiden. Saman asteinen likiarvo on voimassa minkä tahansa osavälien Riemannin summan ja funktion f integraalien summan erolle vastaavilla väleillä.

Määritelmä 4.12. Olkoon $I := [a,b], a < b$ kompakti väli.

(a) Välin I *osavälijako* on joukko $\{J_j\}_{j=1}^s$ suljettuja osavälejä väliltä I siten, että $J_i^0 \cap J_j^0 = \emptyset$, kun $i \neq j$. Osavälijakojen yhdiste ei välttämättä muodosta koko väliä I, eli on mahdollista että $\cup_{k=1}^s J_k \neq I$.

(b) Välin I *merkitty osavälijako* on järjestettyjen parien $\dot{\mathcal{P}}_0 := \{(t_j, J_j)\}_{j=1}^s$ joukko, joka muodostuu välin I osavälijaon väleistä $\{J_j\}_{j=1}^s$ ja merkeistä $t_j \in J_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, s$.

(c) Olkoon δ mitta välillä I. Merkitty osavälijako $\dot{\mathcal{P}}_0$ on δ-hieno, jos $J_j \subseteq [t_j + \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ kaikilla $j = 1, \ldots, s$.

(d) Olkoon δ on mitta välillä $E \subset I$. Merkitty osavälijako $\dot{\mathcal{P}}_0$ on (δ, E)-hieno, jos kaikki merkit $t_j \in E$ ja $J_j \subseteq [t_j + \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ kaikilla $j = 1, \ldots, s$.

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(t_j, J_j) : j = 1, \ldots, s\}$ välin I osavälijako ja olkoon $U(\dot{\mathcal{P}}_0) := \cup_{j=1}^s J_j$. Jos $f \in \mathcal{R}^*(I)$ määritellään, että

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}_0) := \sum_{j=1}^s f(t_j) l(J_j) \quad \text{ja} \quad \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f := \sum_{j=1}^s \int_{J_j} f.$$

Lemma 4.13 (Saks-Henstockin Lemma)**.** *Olkoon $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\epsilon > 0$. Olkoon δ_ϵ sellainen mitta välillä I, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on δ_ϵ-hieno välijako, niin*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Jos $\dot{\mathcal{P}}_0 := \{(t_j, J_j)\}_{j=1}^s$ on mikä tahansa välin I δ_ϵ-hieno merkitty osavälijako, niin

$$\left| \sum_{j=1}^s \left\{ f(t_j) l(J_j) - \int_{J_j} f \right\} \right| = \left| S(f; \dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f \right| \leq \epsilon.$$

Todistus. Olkoot $K_1, \ldots, K_m$ sellaisia suljettuja välin I osavälejä, että $\{J_j\} \cup \{K_k\}$ muodostaa välin I välijaon. Tarkoituksena on käyttää hyväksi tietoa, että f on mittaintegroituva jokaisella välillä $K_1, \ldots, K_m$ ja saada näiden välien välijaot, jotka ovat niin hienoja, että niiden osuus summassa on mielivaltaisen pieni.

Olkoon $\alpha > 0$ mielivaltainen. Seurauksen 2.20 mukaan funktion f rajoittuma jokaiselle välille K_k on mittaintegroituva, kun $k = 1, \ldots, m$. On siis olemassa sellainen mitta $\delta_{\alpha,k}$ välillä K_k, että jos $\dot{\mathcal{Q}}_k$ on välin K_k $\delta_{\alpha,k}$-hieno merkitty jako, niin

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{K_k} f \right| \leq \alpha/m. \tag{4.3}$$

Selvästi voidaan olettaa, että $\delta_{\alpha,k}(x) \leq \delta_\epsilon(x)$ kaikilla $x \in K_k$. Merkitään symbolilla $\dot{\mathcal{P}}^*$ välin I merkittyä välijakoa $\dot{\mathcal{P}}^* := \dot{\mathcal{P}}_0 \cup \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup \ldots \cup \dot{\mathcal{Q}}_m$. Koska $\dot{\mathcal{P}}^*$ on δ_ϵ-hieno, niin epäyhtälö (4.2) on voimassa myös välijaolla $\dot{\mathcal{P}}^*$. Lisäksi on selvää, että

$$\begin{aligned} S(f;\dot{\mathcal{P}}^*) =& S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) + S(f;\dot{\mathcal{Q}}_1) + \cdots + S(f;\dot{\mathcal{Q}}_m), \quad \text{joten} \\ \int_I f =& \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f + \int_{K_1} f + \cdots + \int_{K_m} f. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) -& \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f| \\ &= \left| \left\{ S(f;\dot{\mathcal{P}}^*) - \sum_{k=1}^{m} S(f;\dot{\mathcal{Q}}_k) \right\} - \left\{ \int_I f - \sum_{k=1}^{m} \int_{K_k} f \right\} \right| \\ &\leq \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}^*) - \int_I f \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| S(f;\dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{K_k} f \right|. \end{aligned}$$

Käyttämällä epäyhtälöitä (4.2) ja (4.3) summan ylärajan arvoimiseen, saadaan

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f| \leq \epsilon + m(\alpha/m) = \epsilon + \alpha.$$

Koska $\alpha > 0$ on mielivaltainen, niin $|S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f| \leq \epsilon$, josta saadaan väite. □

Seuraus 4.14. *Saks-Henstockin lemman 4.13 oletuksilla saadaan, että*

$$\sum_{j=1}^{s} \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| \leq 2\epsilon.$$

Todistus. Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_0^+$ sellaisten parien joukko merkitystä välijaosta $\dot{\mathcal{P}}_0$, joilla $f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \geq 0$, ja olkoon $\dot{\mathcal{P}}_0^-$ sellaiset parit, joilla $f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f < 0$. Käyttämällä Saks-Henstockin Lemmaa 4.13 kumpaankin välijakoon $\dot{\mathcal{P}}_0^+$ ja $\dot{\mathcal{P}}_0^-$, saadaan epäyhtälöt

$$\begin{aligned} \sum_{\dot{\mathcal{P}}_0^+} \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| &= \sum_{\dot{\mathcal{P}}_0^+} \left\{ f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right\} \leq \epsilon, \\ \sum_{\dot{\mathcal{P}}_0^-} \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| &= -\sum_{\dot{\mathcal{P}}_0^-} \left\{ f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right\} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Yhdistämällä termit saadaan $\sum_{j=1}^{s} |f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f| \leq 2\epsilon$. □

4.3 Funktion itseisarvon integraali

Jos funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva välillä $I := [a, b]$, niin funktio $|f|$ on myös Riemann-integroituva ja

$$\left| \int_I f \right| \le \int_I |f|. \tag{4.4}$$

Samaa johtopäätöstä ei voida tehdä mittaintegraalin tapauksessa, koska funktion f mittaintegroituvuudesta välillä I ei seuraa, että myös funktio $|f|$ on mittaintegroituva. Näytetään tämä myöhemmin vastaesimerkkinä Esimerkissä 5.6. Mittaintegraalin tapauksessa täytyy siis olettaa, että molemmat funktiot f ja $|f|$ ovat mittaintegroituvia, tällöin epäyhtälö (4.4) on voimassa.

Jos $|f|$ on mittaintegroituva, sanotaan että f on *itseisesti mittaintegroituva* tai *Lebesgue-integroituva.* Mittaintegroituvien funktioiden joukko siis sisältää funktiot, jotka ovat itseisesti integroituvia, mutta myös suuren määrän funktioita, joiden itseisarvofunktiot eivät ole mittaintegroituvia.

Seuraava tulos on tärkeä työkalu funktion itseisarvon integroituvuuden osoittamiseen.

Lause 4.15 (Vertailuperiaate)**.** *Olkoon $f, g \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $|f(x)| \le g(x)$ kaikilla $x \in I := [a, b]$, niin $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Lisäksi*

$$\left| \int_I f \right| \le \int_I |f| \le \int_I g.$$

Luku 5

Mittaintegraalin päätulokset

Korjataan lopuksi Riemann-integraalin epäkohdat mittaintegraalin päätuloksina.

5.1 Analyysin peruslause

Analyysin peruslause mittaintegraalille on merkittävästi vahvempi, kuin Riemannin integraalille. Seuraavaksi osoitetaan, että minkä tahansa funktion derivaattafunktio on aina mittaintegroituva, joten funktion integroituvuudesta tulee enemmänkin johtopäätös kuin oletus. Analyysin peruslauseen todistamiseen mittaintegraalille, tarvitaan seuraavaa apulausetta, joka on suora seuraus derivaatan määritelmästä.

Lemma 5.1 (Straddle lemma)**.** *Olkoon $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivoituva pisteessä $z \in [a, b]$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$, on olemassa sellainen vakio $\delta > 0$, että*

$$|F(v) - F(u) - F'(z)(v - u)| \leq \epsilon(v - u) \tag{5.1}$$

kun $u \leq z \leq v$ ja $[u, v] \subseteq [a, b] \cap (z - \delta, z + \delta)$.

Todistus. Koska funktio F on derivoituva pisteessä z, on olemassa sellainen vakio $\delta > 0$, että

$$\left| \frac{F(x) - F(z)}{x - z} - F'(z) \right| < \epsilon$$

kun $0 < |x - z| < \delta$ ja $x \in [a, b]$. Jos $z = u$ tai $z = v$, niin lemma pätee. Oletetaan siis, että $u < z < v$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&|F(v) - F(u) - F'(z)(v - u)| \\
&\leq |F(v) - F(z) - F'(z)(v - z)| + |F(z) - F(u) - F'(z)(z - u)| \\
&< \epsilon(v - z) + \epsilon(z - u) = \epsilon(v - u).
\end{aligned}$$

□

Seuraava analyysin peruslauseen versio takaa, että minkä tahansa funktion derivaatta välillä $I := [a, b]$ on aina mittaintegroituva, ilman mitään lisäoletuksia derivaattafunktiolle.

Lause 5.2 (Analyysin peruslause)**.** *Jos funktiolla $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ on derivaattafunktio $F'(x)$ välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin $F' \in \mathcal{R}^*([a, b])$ ja*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Kaikilla $z \in [a, b]$ olkoon $\delta_z > 0$ vakiomitta kuten Straddle Lemmassa ja määritellään mittafunktio välillä $[a, b] : \gamma(z) = (z - \delta_z, z + \delta_z)$. Oletetaan, että $\dot{\mathcal{P}} = \{(z_i, J_i) : 1 \leq i \leq n\}$ on δ_z-hieno merkitty jako välillä $[a, b]$. Järjestetään jakovälien $\dot{\mathcal{P}}$ osavälit siten, että $\max J_{i-1} = \min J_i$ ja $J_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n$. Huomataan, että

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Straddle Lemman nojalla saadaan

$$\begin{aligned} &|S(F', \dot{\mathcal{P}}) - [F(b) - F(a)]| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \{[F'(z_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})]\} \right| \\ &< \sum_{i=1}^{n} \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

□

Analyysin peruslause Riemann-integraalille vaatii lisäksi oletuksen, että derivaatan F' on oltava Riemann-integroituva. Mittaintegraalissa oletusta ei tarvitse tehdä, sillä kaikki derivaatat ovat mittaintegroituvia.

Palataan Esimerkkiin 3.5. Esimerkin funktiolle Analyysin peruslausetta Riemannin integraalille ei voida soveltaa, sillä derivaattafunktio ei ole Riemann-integroituva. Seuraavassa esimerkissä nähdään, että mittaintegraalille Analyysin peruslauseen todistusta voidaan muokata niin, että se hyväksyy yhden pisteen, jossa funktio ei ole derivoituva.

Esimerkki 5.3. Olkoon $g(x) := 1/\sqrt{x}$, kun $x \in]0,1]$ ja $g(0) := 0$. Funktio $g(x)$ ei ole rajoitettu välillä $[0,1]$. Olkoon $G(x) := 2\sqrt{x}$, kun $x \in [0,1]$. Nyt G on jatkuva välillä $[0,1]$ ja $G'(x) = g(x)$ kaikilla $x \in]0,1]$, mutta derivaattaa $G'(0)$ ei ole olemassa. Näin ollen G on sellainen funktion g integraalifunktio, jolle on olemassa äärellinen poikkeuksellinen joukko $E = \{0\}$, jossa $G'(x)$ ei ole olemassa.

Kuten Straddle Lemman 5.1 todistuksessa, kun $t \in]0,1]$ ja $\epsilon > 0$, olkoon $\delta_\epsilon(t) > 0$ sellainen mitta, että epäyhtälö (5.1) on voimassa funktiolle G. Määritellään mitta $\delta_\epsilon(0) := \epsilon^2/4$, jolloin $G(v) - G(0) = 1\sqrt{v} \leq \epsilon$, kun $0 \leq v \leq \delta_\epsilon(0)$. Nyt olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^n$ δ_ϵ-hieno välin I merkitty jako. Jos kaikki merkit kuuluvat välille $]0.1]$, niin Analyysin peruslausetta voidaan soveltaa ilman muutosta. Kuitenkin kun ensimmäinen merkki $t_1 = 0$, niin Riemannin summassa $S(g;\dot{\mathcal{P}})$ ensimmäinen termi on $g(0)(x_1 - x_0) = 0$. Lisäksi saadaan

$$G(x_1) - G(x_0) - g(0)(x_1 - x_0) = G(x_1) = 1\sqrt{x_1} \leq \epsilon.$$

Kun sovelletaan Analyysin peruslauseen todistusta jäljellä oleville termeille, saadaan

$$\left| \sum_{i=2}^{n} [G(x_i) - G(x_{i-1}) - g(t_i)(x_i - x_{i-1})] \right| \leq \epsilon(x_n - x_1) \leq \epsilon.$$

Kun lisätään kyseiset termit, saadaan

$$|G(1) - G(0) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, voidaan päätellä, että g on mittaintegroituva välillä $[0,1]$ ja, että $\int_0^1 g = G(1) - G(0) = 2$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $\int_0^1 1/\sqrt{x}dx = 2$, kun ymmärretään, että funktion derivaatan arvo on 0 pisteessä, jossa sitä ei ole määritelty.

Selvästi Analyysin peruslause voidaan yleistää mille tahansa sellaiselle derivaattafunktiolle f, että on olemassa sellainen jatkuva funktio F välillä $[a,b]$, että $f(x) = F'(x)$ kaikkialla paitsi äärellisessä määrässä pisteitä. Seuraavan parannetun Analyysin peruslauseen osan nojalla poikkeuksellisten pisteiden numeroituva määrä on sallittu.

Lause 5.4 (Analyysin peruslause*). *Jos funktiolla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on sellainen jatkuva fuktio F välillä $[a,b]$, että on olemassa numeroituva poikkeuksellinen joukko E, joka koostuu pisteistä $x \in I$, joissa joko funktiota $F'(x)$ ei ole olemassa, tai $F'(x) \neq f(x)$. Tällöin f on mittaintegroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Todistus. Olkoon $E = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ integraalifunkion F poikkeuksellinen joukko. Joukko E on numeroituvana joukkona nollajoukko. Koska $f(x) = F'(x)$ melkein kaikilla $x \in I$, voidaan olettaa, että $f(c_k) = 0$.

Määritellään seuraavaksi mitta δ välille I. Olkoon $\delta_\epsilon(t)$ Straddle lemman 5.1 mukainen mitta, kun $\epsilon > 0$ ja $t \in I \setminus E$. Kun $t \in E$, niin $t = c_k$ joillakin $k \in \mathbb{N}$. Koska integraalifunktio F on jatkuva pisteessä c_k, valitaan sellainen mitta $\delta_\epsilon(c_k) > 0$, että $|F(z) - F(c_k)| \leq \epsilon/2^{k+2}$ kaikissa pisteissä $z \in I$, jotka toteuttaa ehdon $|z - c_k| \leq \delta_\epsilon(c_k)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^{n}$ on välin I δ_ϵ-hieno merkitty jako. Jos mitkään merkeistä ei kuulu joukkoon E, Analyysin peruslauseen 5.2 todistusta voidaan soveltaa suoraan. Kuitenkin jos $c_k \in E$ on merkkinä osavälille $[x_{i-1}, x_i]$, niin

$$
\begin{aligned}
&|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\
\leq\ &|F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\
&\leq \epsilon/2^{k+2} + \epsilon/2^{k+2} + 0 = \epsilon/2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Nyt kukin joukon E piste voi olla merkkinä korkeintaan kahdella osavälillä merkityllä välijaolla $\dot{\mathcal{P}}$. Näin ollen termien, joilla $t_i \in E$, summan osuudeksi saadaan

$$\sum_{t_i \in E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k = \epsilon.$$

Lisäksi Straddle lemman 5.1 nojalla termien, joilla $t_i \notin E$ osuus summassa:

$$\sum_{t_i \notin E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \epsilon \sum_{t_i \notin E} (x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon(b - a).$$

Näin ollen, koska $\dot{\mathcal{P}}$ on välin I δ_ϵ-hieno jako saadaan

$$|F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}})| \leq \epsilon(1 + b - a).$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja sen integraalin arvo yli välin I on $F(b) - F(a)$. $\square$

Esimerkin 3.1 funktio f ei ole Riemann-integroituva millään välillä, joka sisältää pisteen 0. Funktio f on kuitenkin mittaintegroituva funktion F derivaattafunktiona kaikilla väleillä I.

Esimerkki 5.5. Olkoon funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{kun} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{kun} \quad x = 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{kun} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{kun} \quad x = 0. \end{cases}$$

Funktio f on mittaintegroituva kaikkialla välillä $I \subset \mathbb{R}$, poikkeuksellisella joukolla $E = \{0\}$ ja Analyysin peruslauseen avulla voidaan laskea funktion f integraali yli minkä tahansa välin $I := [a, b]$.

Esimerkin 3.4 ongelmana oli funktion F' Riemann-integroituvuus. Koska derivaattafunktio F' on aina mittaintegroituva, voidaan Analyysin peruslausetta soveltamalla laskea integraali yli välin $[0, 1]$.

Esimerkki 5.6. Asetetaan

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t = 0 \\ t^2 \cos(\pi/t^2), & \text{kun} \quad 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Tällöin

$$F'(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad t = 0 \\ 2t \cos(\pi/t^2) + (2\pi/t) \sin(\pi/t^2), & \text{kun} \quad 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Funktio F' on mittaintegroituva välillä $[0, 1]$ ja

$$\int_0^1 F'(t)dt = F(1) - F(0) = -1.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio $|F'|$ ei ole mittaintegroituva välillä $[0, 1]$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että $|F'| \in \mathcal{R}^*([0, 1])$ ja määritellään funktio $f_i(t) = |F'(t)|$ välillä $]a_i, b_i[:=]1/\sqrt{i+1}, 1/\sqrt{i}[$ ja $f_i(t) = 0$ muuten. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_0^1 f = \int_{a_i}^{b_i} = \int_{a_i}^{b_i} |F'| \geq \left| \int_{a_i}^{b_i} F' \right| \\ = |F(b_i) - F(a_i)| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \geq \frac{2}{i+1}. \end{aligned}$$

Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ on voimassa

$$|F'(t)| \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(t).$$

Näin ollen

$$\int_0^1 |F'| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i+1} \to \infty,$$

kun $n \to \infty$, joten saadaan ristiriita ja $|F'| \notin \mathcal{R}^*([0, 1])$.

5.2 Epäoleellinen integraali

Tässä kappaleessa todistettava merkittävä tulos osoittaa, että ei ole olemassa epäoleellista mittaintegraalia. Tällä tarkoitetaan sitä, että mikä tahansa funktio, jolla on olemassa "epäoleellinen"integraali, on mittaintegroituva. Raja-arvomenetelmä on kuitenkin hyödyllinen väline integraalin arvioimiseen.

Esimerkki 5.7. Osoitetaan, että

$$\int_0^A f(x)dx = 2\sqrt{A},$$

missä $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Määritellään mittafunktio $\delta(x) = \epsilon x$, kun $x \neq 0$ ja $\delta(0) = \epsilon^2$. Olkoon $0 < \epsilon < 1/2$ ja olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ välin $[0, A]$ δ_ϵ-hieno merkitty jako. Huomataan, että välijako asettaa ensimmäiseksi merkiksi $t_1 = 0$. Koska

$$f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{t_i}}(x_i - x_{i-1}) \leq 2\sqrt{\frac{x_i}{t_i}}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}})$$

ja

$$\sqrt{\frac{x_i}{t_i}} \leq \sqrt{\frac{t_i + \epsilon t_i}{t_i}} = \sqrt{1+\epsilon},$$

kun $y_i \neq 0$, saadaan

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) \leq 2\sqrt{1+\epsilon}\sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) = 2\sqrt{A}\sqrt{1+\epsilon}. \tag{5.2}$$

Seuraavaksi arvioidaan summalle alaraja. Huomataan, että

$$\sqrt{\frac{x_{i-1}}{t_i}} \geq \sqrt{\frac{t_i - \epsilon t_i}{t_i}} = \sqrt{1-\epsilon},$$

kun $i \geq 2$. Näin ollen

$$\begin{aligned} S(f; \dot{\mathcal{P}}) \geq &\sum_{i=2}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 2\sqrt{1-\epsilon}\sum_{i=2}^n (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \\ =&2\sqrt{1-\epsilon}(\sqrt{A} - \sqrt{x_1}) = 2\sqrt{1-\epsilon}(\sqrt{A} - \epsilon). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen ylärajasta (5.2) ja alarajasta (5.3) saadaan, että $\int_0^A f(x)dx = 2\sqrt{A}$.

Todistetaan varsinaisen tuloksen todistamista varten apulause, jonka mukaan funktion $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ rajoittuma välille $[a,c]$, kun $c \in [a,b]$, on mittaintegroituva.

Lemma 5.8. *Oletetaan, että $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on mittaintegroituva välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in]a,b[$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen mitta δ välillä $[a,b[$, että jos $c \in]a,b[$ ja $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa välin $[a,c]$ δ-hieno jako, niin*

$$\left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^c f \right| < \epsilon.$$

Todistus. Olkoon (a_n) kasvava jono välillä $]a,b[$, joka suppenee kohti pistettä b ja olkoon $a_0 = a$. Valitaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ sellainen mittafunktio δ_n välille $[a_{n-1}, a_n]$, että $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_{a_{n-1}}^{a_n} f| < \epsilon 2^{-n}$, kun $\dot{\mathcal{P}}$ on välin $[a_{n-1}, a_n]$ δ_n-hieno jako. Olkoon $I_n =]a_{n-1}, a_n[$ ja määritellään mittafunktio δ välillä $[a,b[$

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(a), a_1 - a\}, & \text{kun} \quad x = a, \\ \min\{\delta_n(x), \inf\{|y-x| : y \in I_n^C\}\}, & \text{kun} \quad x \in I_n, \\ \min\{\delta_n(a_n), \delta_{n+1}(a_n), l(I_n), l(I_{n+1})\}, & \text{kun} \quad x = a_n. \end{cases}$$

Olkoon $c \in]a,b[$ ja oletetaan, että $\dot{\mathcal{P}}$ on välin $[a,c]$ δ-hieno jako. Voidaan olettaa, että jaon $\dot{\mathcal{P}}$ merkkeinä on välien päätepisteet. Kiinnitetään sellainen indeksi $q \in \mathbb{N}$, että $a_q < c < a_{q+1}$ on voimassa. Huomataan, että a_n on merkkinä kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots, q$ ja, että kaikki välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ välit ovat välin $[a_{n-1}, a_n]$ osavälejä, jollain $1 \leq n \leq q+1$. Olkoon kaikilla $n = 1, 2, \ldots, q$ välijako $\dot{\mathcal{P}}_n$ sellainen välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ osajoukko, jonka välit ovat välillä $[a_{n-1}, a_n]$ ja olkoon $\dot{\mathcal{P}}_{q+1}$ sellainen välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ osajoukko, jonka välit ovat välillä $[a_q, c]$. Nyt $\dot{\mathcal{P}}_n$ on välin $[a_{n-1}, a_n]$ δ_n-hieno jako, kun $1 \leq n \leq q$ ja $\dot{\mathcal{P}}_{q+1}$ on välin $[a_q, c]$ δ_{q+1}-hieno jako. Saks-Henstockin lemman 4.13 nojalla

$$\begin{aligned} \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^c f \right| &\leq \sum_{n=1}^{q} \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}_n) - \int_{a_{n-1}}^{a_n} f \right| + \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}_{q+1}) - \int_{a_q}^{c} f \right| \\ &< \sum_{n=1}^{q} \epsilon 2^{-n} + \epsilon 2^{-q-1} < \epsilon. \end{aligned}$$

Tämä viimeistelee todistuksen. □

Lause 5.9 (Haken Lause). *Oletetaan, että funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on mittaintegroituva kaikilla väleillä $[c,d] \subseteq]a,b[$. Jos $\int_c^d f$ suppenee kohti äärellistä raja-arvoa, kun $c \to a^+$ ja $d \to b^-$, niin funktio $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\int_a^b f = \lim_{c \to a^+, d \to b^-} \int_c^d f$.*

Todistus. Tarkastellaan seuraavaa lauseen erikoistapausta. Jos f on mittaintegroituva välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in]a,b[$ ja $\int_a^c f$ suppenee kohti äärellistä raja-arvoa, kun $c \to b^-$, niin f on mittaintegroituva välillä $[a,b]$ ja $\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$. Todistus vasemmalle päätepisteelle on hyvin samanlainen ja yleinen tapaus seuraa näistä kahdesta tuloksesta.

Olkoon $L = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Edellisen lemman 5.8 nojalla on olemassa sellainen mitta δ_1 välillä $[a,b[$, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa δ_1-hieno jako välillä $[a,c]$, niin $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^c f| < \epsilon$. Valitaan sellainen luku $\eta > 0$, että $|\int_a^c f - L| < \epsilon$ kaikilla $c \in]b-\eta, b[$. Määritellään mittafunktio δ välillä $[a,b]$:

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), b-x\}, & \text{kun} \quad x \in [a,b[, \\ \min\{\eta, \epsilon/(1+|f(b)|\}, & \text{kun} \quad x = b. \end{cases}$$

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}$ välin $[a,b]$ δ-hieno jako. Koska pisteen b on oltava merkkinä, muotoa $(b,[c,b])$ oleva merkitty väli kuuluu merkittyyn välijakoon $\dot{\mathcal{P}}$, kun $b-\eta < c < b$. Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_a = \dot{\mathcal{P}} - \{(b,[c,b])\}$ ja lasketaan

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \leq & \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}_a) - \int_a^c f \right| + \left| \int_a^c f - L \right| + |f(b)|(b-c) \\ < & \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Näin ollen funktio $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$. □

Esimerkki 5.10. Tarkastellaan integraalia $\int_0^1 x^r dx$, kun $r \in \mathbb{R}$. Olkoon $g_r(x) := x^r$, kun $x \in]0,1]$ ja $g_r(0) := 0$. Kun $r+1 > 0$, niin funktioilla g_r on integraalifunktio $x \to x^{r+1}/(r+1)$ muualla paitsi poikkeuksellisissa joukoissa $\{0\}$ tai $\emptyset$. Näin ollen $g_r \in \mathcal{R}^*([0,1])$ ja

$$\int_0^1 x^r dx = x^{r+1}/(r+1)\Big|_0^1 = 1/(r+1), \quad \text{kun} \quad r > -1.$$

Huomautus 5.11. Jos funktion f rajoittuma jokaiselle osavälille $[a,\gamma]$, kun $\gamma \in]a,b[$ on mittaintegroituva ja jos raja-arvo $\lim_{\gamma\to b-} \int_a^\gamma f$ on äärellinen, niin $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$. Funktion mittaintegroituvuutta välillä $[a,b]$ voidaan siis arvioida tutkimalla sen käyttäytymistä osavälillä $[a,\gamma]$.

5.3 Integraali rajoittamattomien välien yli

Riemannin integraaliteoriassa integraali yli rajoittamattomien välien $[a,\infty[$ voidaan arvioida raja-arvona

$$\int_a^\infty f := \lim_{\gamma\to\infty} \int_a^\gamma f.$$

Myös muut rajoittamattomat välit $]-\infty, b]$ ja $]-\infty, \infty[$ määritellään samoin.

Mittaintegraaliteoriassa Määritelmää 4.4 voidaan muokata niin, että se sisältää myös integraalit yli rajoittamattomien välien.

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}$ välin $[a, \infty]$ merkitty välijako laajennetussa reaalilukujoukossa $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\dot{\mathcal{P}} := \{(t_1, [x_0, x_1]), \ldots, (t_n, [x_{n-1}, x_n],), (t_{n+1}, [x_n, x_{n+1}])\}$$

siten, että $x_0 = a$ ja $x_{n+1} = \infty$. Määritellään, että $f(\infty) = 0$. Määrätään δ-hieno merkitty välijako $\dot{\mathcal{P}}$ niin, että viimeisenä merkkinä on $t_{n+1} = \infty$, jolloin Riemannin summan $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ viimeinen termi on $f(\infty)(\infty - x_n) = 0$.

Olkoon mittafunktio välillä $[a, \infty]$ aidosti positiivinen reaaliarvoinen funktio δ, joka on määritelty välillä $[a, \infty]$. Sanotaan, että $\dot{\mathcal{P}}$ on δ-hieno välillä $[a, \infty]$, jos äärelliset osavälit

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{kun} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.5}$$

ja kun äärettömät osavälit $[x_n, \infty]$

$$[x_n, \infty] \subseteq [1/\delta(\infty), \infty], \tag{5.6}$$

tai vastaavasti, kun

$$1/\delta(\infty) \leq x_n.$$

Koska viimeinen osaväli $[x_n, \infty]$ on ainoa osaväli välijaolla $\dot{\mathcal{P}}$, joka sisältää alkion ∞ nähdään, että δ-hieno merkitty välijako $\dot{\mathcal{P}}$ pakottaa jaon viimeiseksi merkiksi $t_{n+1} = \infty$. Koska $f(\infty) = 0$, niin millä tahansa δ-hienolla välijaolla $\dot{\mathcal{P}}$ Riemannin summa sievenee muotoon

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ja kaikki jäljelle jäävät termit ovat äärellisiä reaalilukuja.

Olkoon $r > 0$. Määritellään

$$U[t; r] := \begin{cases} [t - r, t + r], \quad \text{kun} \quad t \in \mathbb{R}, \\ [1/r, \infty], \quad \text{kun} \quad t = \infty, \\ [-\infty, -1/r], \quad \text{kun} \quad t = -\infty. \end{cases}$$

Tällä merkinnällä ehdot (5.5) ja (5.6) voidaan esittää muodossa

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq U[t_i; \delta(t_i)], \quad \text{kun} \quad i = 1, \ldots, n + 1. \tag{5.7}$$

Määritelmä 5.12. Olkoon $I := [a, \infty]$ ja olkoon $f : I \to \mathbb{R}$. Funktio f on mittaintegroituva yli välin $[a, \infty[$ tai $[a, \infty]$, jos on olemassa sellainen luku $C \in \mathbb{R}$, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen mittafunktio δ_ϵ välillä $[a, \infty]$, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on välin $[a, \infty]$ δ_ϵ-hieno jako, niin

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - C| \leq \epsilon.$$

Jos f on mittaintegroituva välillä $I := [a, \infty]$, voidaan kirjoittaa

$$C = \int_I f = \int_a^\infty f = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Välit $]-\infty, b]$ **ja** $]-\infty, \infty]$ Jos $g :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ on annettu, laajennetaan funktio g joukkoon $[-\infty, b]$ määrittelemällä, että $g(-\infty) = 0$. Jos δ on mitta välillä $[-\infty, b]$ sanotaan, että välijako $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ on δ-hieno, jos (5.7) on voimassa. Tämä sisältää ehdon

$$I_1 = [x_0, x_1] \subseteq [-\infty, -1/\delta(-\infty)],$$

josta seuraa, että $x_0 = -\infty$ ja $x_1 \leq -1/\delta(-\infty)$. Funktion g integraalin määritelmä välillä $[-\infty, b]$ voidaan rinnastaa suoraan Määritelmään 5.12 ja integraali voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\int_{-\infty}^b g = \int_{-\infty}^b g(x)dx.$$

Vastaavasti, jos $h :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ on annettu, laajennetaan funktio f joukkoon $[-\infty, \infty]$ määrittelemällä, että $h(-\infty) := 0$ ja $h(\infty) := 0$. Jos δ on mitta välillä $[-\infty, \infty]$, niin välijako $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ on δ-hieno, jos $I_i = [x_{i-1}, x_i] \subseteq U[t_i; \delta(t_i)]$ on voimassa kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tämä sisältää ehdon

$$I_1 \subseteq [-\infty, -1/\delta(-\infty)] \quad \text{ja} \quad I_n \subseteq [1/\delta(\infty), \infty],$$

josta seuraa, että $x_0 = -\infty$ ja $x_1 \leq -1/\delta(-\infty)$ ja että $x_{n-1} \geq 1/\delta(\infty)$ ja $x_n = \infty$. Tästä seuraa myös, että ensimmäiset ja viimeiset termit häviävät Riemannin summassa $S(f; \dot{\mathcal{P}})$. Funktion h integraalin määritelmä välillä $[-\infty, \infty]$ voidaan rinnastaa suoraan Määritelmään 5.12. Integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{-\infty}^\infty h = \int_{-\infty}^\infty h(x)dx.$$

Esimerkki 5.13. Olkoon $f(x) := 1/x^2$, kun $x \in [1, \infty[$ ja olkoon $f(\infty) := 0$. Osoitetaan suoraan, että f on mittaintegroituva välillä $[1, \infty]$ ja, että integraalin arvo on 1. Tähän tarkoitukseen on kätevä käyttää funktiota $F(x) := -1/x$, kun $x \in [1, \infty[$ ja $F(\infty) := 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$ annettu ja olkoon $\delta_\epsilon(t) := \epsilon$, kun $t \in [1,\infty]$. Oletetaan, että $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^{n+1}$ on välin $[1,\infty]$ δ_ϵ-hieno välijako. Koska $f(\infty)l([x_n,\infty]) = 0$ nähdään, että

$$\begin{aligned} S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i^2} - \left(-\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{i-1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i} \right) (x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tarvitaan algebrallinen epäyhtälö. Huomataan, että jos $1 \le u \le t \le v$, niin saadaan $0 \le (1/u - 1/t)(1/v + 1/t)$, joten helpolla laskulla saadaan

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{uv} \le \frac{1}{t}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \le \frac{1}{u} - \frac{1}{v}.$$

Vastaavasti epäyhtälöstä $(1/u + 1/t)(1/v - 1/t) \le 0$ saadaan, että

$$\frac{1}{uv} - \frac{1}{t^2} \le \frac{1}{t}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \le \frac{1}{u} - \frac{1}{v}.$$

Näin ollen jos $1 \le u \le t \le v$, niin

$$\left| \frac{1}{t^2} - \frac{1}{uv} \right| \le \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right). \tag{5.9}$$

Koska $1 \le x_{i-1} \le t_i \le x_i$ ja $x_i - x_{i-1} \le 2\delta_\epsilon(t_i) = 2\epsilon$, kun $n = 1, \ldots, n$, voidaan epäyhtälöstä (5.9) päätellä, että

$$\left| \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i} \right| (x_i - x_{i-1}) \le \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \cdot 2\epsilon. \tag{5.10}$$

Arvioidaan seuraavaksi termejä yhtälössä (5.8). Viimeisen summan arvoimista varten, lisätään epäyhtälöt epäyhtälöstä (5.10), kun $i = 1, \ldots, n$ ja koska $\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(1) = 1 - \frac{1}{x_n}$, saadaan

$$\begin{aligned} \left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \right| &\le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{t^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i} \right| (x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \cdot 2\epsilon = \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \cdot 2\epsilon < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Tällöin koska välijako $\dot{\mathcal{P}}$ on δ_ϵ-hieno, niin $1/x_n \le \epsilon$, josta seuraa että

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - 1| < 2\epsilon + 1/x_n \le 3\epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin funktio $f(x) = 1/x^2$ on (absoluuttisesti) mittaintegroituva välillä $[1,\infty]$ ja $\int_1^\infty (1/x^2)dx = 1$.

Vasen-oikea-menetelmä Usein on hyödyllistä järjestää merkitty välijako niin, että osavälien päätepisteet tai osa päätepisteistä on merkkinä. Tämä saadaan järjestettyä käyttämällä niin sanottua *vasen-oikea-menetelmää*. Olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^n$ ja olkoon merkki t_k osavälin $[x_{i-1}, x_i]$ sisäpiste. Olkoon nyt $\dot{\mathcal{P}}^*$ välijaosta $\dot{\mathcal{P}}$ muokattu välijako, johon on lisätty sellainen jakopiste $\epsilon := t_k$, että

$$a = x_0 \leq \cdots \leq x_{k-1} < \epsilon < x_k \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Seuraavaksi merkitään molemmat osaväli $[x_{k-1}, \epsilon]$ ja $[\epsilon, x_k]$ käyttämällä merkkiä $t_k = \epsilon$. Tällöin ϵ on näiden ensimmäisten välien oikea päätepiste ja jälkimmäisten välien vasen päätepiste. Huomataan, että koska

$$f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(\epsilon - x_{k-1}) + f(t_k)(x_k - \epsilon),$$

niin Riemannin summat $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ ja $S(f; \dot{\mathcal{P}}^*)$ antavat saman arvon.

Seuraavaa tulosta voidaan käyttää sekä funktion mittaintegroituvuuden osoittamiseen välillä $[a, \infty]$, että integraalin arvon arvioimiseen. Tulos osoittaa, että äärettömille väleille ei ole epäoleellista laajennusta mittaintegraalille. Sen sijaan mittaintegraalin määritelmä sisältää äärettömät välit, eikä sitä pysty laajentamaan ottamalla raja-arvoja.

Lause 5.14 (Haken Lause äärettömille väleille)**.** *Olkoon $I := [a, \infty]$ ja olkoon $f : I \to \mathbb{R}$. Tällöin $f \in \mathcal{R}^*(I)$, jos ja vain jos $f \in \mathcal{R}^*([a, c])$ kaikilla kompakteilla väleillä $[a, c]$, missä $c \in [a, \infty[$, ja on olemassa sellainen luku $A \in \mathbb{R}$, että*

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f = A. \tag{5.11}$$

Tässä tapauksessa $\int_a^\infty f = A$.

Todistus. Olkoon $A := \int_a^\infty f$ ja olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen mitta η välillä I, että jos $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^{n+1}$ on mikä tahansa välin I η-hieno välijako, niin $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Olkoon x_n välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ toiseksi viimeinen jakopiste ja olkoon c mikä tahansa luku jolla $c \geq x_n$. Funktio f on mittaintegroituva välillä $[a, c]$, joten välillä $[a, c]$ on olemassa sellainen mitta η_c, että jos $\dot{\mathcal{P}}_c$ on mikä tahansa välin $[a, c]$ η_c-hieno välijako, niin $|S(f; \dot{\mathcal{P}}_c) - \int_a^c f| \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Lisäksi voidaan olettaa, että $\eta_c(t) \leq \eta(t)$ kaikilla $t \in [a, c]$. Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_c^*$ merkitty välijako $\dot{\mathcal{P}}_c$, johon on lisätty viimeiseksi pariksi $([c, \infty], \infty])$. Selvästi välijako $\dot{\mathcal{P}}_c^*$ on η-hieno ja

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}_c^*) = S(f; \dot{\mathcal{P}}_c) + f(\infty) l([c, \infty]) = S(f; \dot{\mathcal{P}}_c).$$

Näin ollen saadaan

$$\left|\int_a^c f - A\right| \leq \left|\int_a^c f - S(f;\dot{\mathcal{P}}_c)\right| + \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_c^*) - A\right| \leq \epsilon$$

kaikilla $c \geq x_n$. Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin (5.11) on voimassa.

Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa sellainen luku $A \in \mathbb{R}$, että kaikilla $c \in]a, \infty[$ funktion f rajoittuma on mittaintegroituva välillä $[a, c]$ ja (5.11) on voimassa. Nyt olkoon $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ aidosti kasvava jono, jolla $a = c_0$ ja $\infty = \lim_k c_k$. Annetulla $\epsilon > 0$ olkoon $r \in \mathbb{N}$ sellainen luku, että jos $b \geq c_r$, niin

$$\left|\int_a^b f - A\right| \leq \epsilon.$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja olkoon δ_k sellainen välin $I_k := [c_{k-1}, c_k]$ mitta, että jos $\dot{\mathcal{P}}_k$ on mikä tahansa välin I_k δ_k-hieno välijako, niin

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_k) - \int_{I_k} f\right| \leq \epsilon/2^k.$$

Määritellään pisteen x ja välin I etäisyys funktiolla

$$\mathrm{dist}(x, I) = \inf\{|x-y| | y \in I\}.$$

Rajoituksetta voidaan olettaa, että
(i) $\delta_1(c_0) \leq \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$,
ja jos $k \geq 1$, että
(ii) $\delta_{k+1}(c_k) \leq \min\{\delta_k(c_k), \frac{1}{2}\mathrm{dist}(c_k, \{c_{k-1}, c_{k+1}\})\}$.
(iii) $\delta_k(t) \leq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(t, \{c_{k-1}, c_k\})$, kun $t \in (c_{k-1}, c_k)$.
Määritellään mitta δ välillä I:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_k(t), & \text{kun} \quad t \in I_k, k \in \mathbb{N}, \\ 1/c_r, & \text{kun} \quad t = \infty. \end{cases}$$

Tällöin δ on välin I mitta ja olkoon $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^{n+1}$ sellainen välin I δ-hieno merkitty välijako, että sen rajoittamattoman osavälin $[x_n, \infty]$ merkkinä on ∞. Lisäksi $c_r \leq x_n$.

Nyt olkoon $s \in \mathbb{N}$ sellainen pienin positiivinen kokonaisluku, jolla $x_n \leq c_s$, siten että $r \leq s$. Kun $k = 1, \ldots, s-1$, niin ehdosta (iii) seuraa, että pisteen c_k on oltava merkkinä jokaisella välijaon $\dot{\mathcal{P}}$ osavälillä, joka sisältää pisteen c_k. Käyttämällä oikea-vasen-menetelmää, voidaan olettaa, että pisteet $c_0, \ldots, c_{s-1}$ ovat myös pisteitä välijaossa $\dot{\mathcal{P}}$. Olkoot

$$\dot{\mathcal{Q}}_1 := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_0, c_1], \ldots,\ \dot{\mathcal{Q}}_{s-1} := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_{s-2}, c_{s-1}],\ \dot{\mathcal{Q}}_s := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_{s-1}, x_n].$$

Koska kukin $\dot{\mathcal{Q}}_k (k = 1, \ldots, s-1)$ on välin I_k δ_k-hieno välijako, saadaan

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{I_k} f \right| \leq \epsilon / 2^k \quad \text{kun} \quad k = 1, \ldots, s-1.$$

Lisäksi koska $\dot{\mathcal{Q}}_s$ on välin I_s δ_s-hieno jako, Saks-Henstockin Lemmasta 4.13 seuraa, että

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{Q}}_s) - \int_{c_{s-1}}^{x_n} f \right| \leq \epsilon / 2.$$

Kun $\dot{\mathcal{Q}}_\infty := \{[x_n, \infty], \infty\}$, niin $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_\infty) = 0$. Koska $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup \ldots, \cup \dot{\mathcal{Q}}_s \cap \dot{\mathcal{Q}}_\infty$, saadaan

$$\begin{aligned}
|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| &= \left| \sum_{i=1}^{s} S(f; \dot{\mathcal{Q}}_i) + S(f; \dot{\mathcal{Q}}_\infty) - A \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{s} S(f; \dot{\mathcal{Q}}_i) - \int_a^{x_n} f \right| + |S(f; \dot{\mathcal{Q}}_\infty)| + \left| \int_a^{x_n} f - A \right| \\
&\leq \epsilon + 0 + \epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja integraalin arvo on A. □

Huomautus 5.15. Haken Lause on voimassa myös väleille $[-\infty, b]$ ja $[-\infty, \infty]$.

Esimerkki 5.16. Olkoon $f(x) := 1/x^2$, kun $x \in [1, \infty[$ ja $f(\infty) := 0$ kuten Esimerkissä 5.13. Kun $c \in]1, \infty[$, Analyysin peruslauseesta 5.4 seuraa, että

$$\int_1^c (1/x^2) dx = (-1/x) \Big|_1^c = 1 - 1/c.$$

Koska $\lim_{c \to \infty} (1/c) = 0$, Haken Lauseesta 5.14 seuraa, että $f \in \mathcal{R}^*([1, \infty])$ ja sen integraalin arvo on 1.

Osoitetaan, että Esimerkin 3.3 Dirichletin integraali voidaan määrittää mittaintegraalimenetelmällä.

Esimerkki 5.17. Olkoon $D(x) := \frac{\sin x}{x}$, kun $x \in]0, \infty[$ ja olkoon $D(0) := 1$. Tarkastellaan *Dirichletin integraalia*:

$$\int_0^\infty D(x) dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Koska funktion D rajoittuma jokaiselle välille $[0, \gamma]$ on jatkuva, niin tämä rajoittuma on mittaintegroituva välillä $[0, \gamma]$. Olkoon $0 < \alpha < \gamma < \infty$. Huomataan, että funktion $\sin x$ primitiivi on $(1 - \cos x)$ ja osittaisintegraalimenetelmällä saadaan

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1 - \cos x}{x} \Big|_\alpha^\gamma + \int_\alpha^\gamma \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Koska

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} = \sin 0 = 0$$

ja

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma} = 0,$$

saadaan

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\alpha \to 0} \lim_{\gamma \to \infty} \int_\alpha^\gamma \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

Integraali suppenee pisteessä 0, koska $\frac{\sin x}{x} \to 1$, kun $x \to 0$. Integraali suppenee myös, kun $x \to \infty$, koska

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq 2 \frac{1}{x^2}.$$

Näin ollen Dirichletin integraali suppenee ja Haken Lauseesta seuraa, että $D \in \mathcal{R}^*([0, \infty[)$.

5.4 Konvergenssilauseet

Mittaintegraalin tärkeä etu on sen tehokkaat ja helposti todistettavat lauseet mittaintegraalin raja-arvolle. Lauseet ovat tärkeitä käytännön ongelmien käsittelyssä, mutta myös työkaluna uusien lauseiden todistamiseksi. Tässä kappaleessa esittelen olosuhteita, joissa mittaintegroituvien funktioiden jonon raja-arvo on mittaintegroituva ja raja-arvofunktion integraalin arvo on yhtäsuuri kuin funktion integraalien jonon raja-arvo.

5.4.1 Tasainen suppeneminen

Osoitetaan seuraavaksi, että myös mittaintegraalille tasaisen suppenemisen ehto takaa rajafunktion f mittaintegroituvuuden.

Lause 5.18. *Jos jono $(f_k) \in \mathcal{R}^*(I)$ suppenee tasaisesti välillä $I := [a, b]$ kohti funktiota f, niin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja*

$$\int_I f = \lim_{k \to \infty} \int_I f_k.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Koska jono (f_n) suppenee tasaisesti, on olemassa sellainen luku K_ϵ, että jos $h, k \geq K_\epsilon$, niin

$$-2\epsilon \leq f_h(x) - f_k(x) \leq 2\epsilon, \quad \text{kun} \quad x \in [a, b].$$

Seurauksen 2.15 ja Lauseen 2.12 avulla saadaan

$$-2\epsilon(b-a) \leq \int_I f_h(x) - \int_I f_k(x) \leq 2\epsilon(b-a),$$

josta saadaan, että $|\int_I f_h - \int_I f_k| \leq 2\epsilon(b-a)$. Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, jono $(\int_I f_k)$ on Cauchyn jono reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ ja suppenee tällöin kohti jotain lukua $A \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja sen integraali yli välin I on A. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu ja olkoon K_ϵ kuten edellä. Jos $\dot{\mathcal{P}} := \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$ mikä tahansa välin I merkitty välijako ja $k \geq K_\epsilon$, niin

$$\begin{aligned} |S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| =& |\sum_{i=1}^n \{f_k(t_i) - f(t_i)\}l(I_i)| \leq \sum_{i=1}^n |f_k(t_i) - f(t_i)|l(I_i) \\ \leq& \sum_{i=1}^n \epsilon l(I_i) = \epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Nyt valitaan sellainen luku $r \geq K_\epsilon$, että $|\int_I f_r - A| < \epsilon$. Olkoon $\delta_{r,\epsilon}$ sellainen mitta välillä I, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on $\delta_{r,\epsilon}$-hieno välijako, niin

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - A| \leq& |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f_r;\dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_r| + |\int_I f_r - A| \\ \leq& \epsilon(b-a) + \epsilon + \epsilon = \epsilon(b-a+2). \end{aligned}$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja $\int_I f = A$. □

5.4.2 Monotoninen konvergenssi

Seuraavan lauseen nojalla rajafunktion mittaintegroituvuus säilyy, jos suppeneminen on pisteittäistä, mutta suppenemisen täytyy olla monotonista. Tulos on erittäin hyödyllinen, sillä se on voimassa myös äärettömille väleille ja lisäksi lauseen oletuksien varmentaminen on usein helpompaa kuin funktion tasaisen suppenemisen todistus.

Lause 5.19 (Monotonisen konvergenssin lause). *Olkoon*

(i) jono $(f_n(x))$ monotoninen melkein kaikilla $x \in I := [a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$,

(ii) funktiot $f_n \in \mathcal{R}^*(I)$ ja olkoon jono $(\int_I f_n)$ rajoitettu, eli $|\int_I f_n| < K$, jollakin arvolla K, kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ äärellinen melkein kaikkialla.

Tällöin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Todistus. Koska funktion arvo nollajoukossa ei vaikuta integraalin arvoon, eikä sen olemassaoloon, voidaan olettaa, että funktiot f ja f_n ovat määritelty ja äärellisiä kaikkialla välillä $[a,b]$. Tarkastelemalla funktioita $-f_n$ tai $f_n - f_1$ funktioiden f_n sijaan, saadaan tarvittaessa kasvava funktiojono (f_n) ja $f_n \geq 0$. Koska jono $(\int_I f_n)$ on monotoninen ja rajoitettu, niin raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ on olemassa. Olkoon tämä raja-arvo L. Annetulla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen luku N, että

$$\int_I f_N > L - \frac{\epsilon}{3}.$$

Haken Lauseen 5.14 todistuksesta nähdään, että on olemassa sellainen rajoitettu väli $[a_N, b_N]$, että

$$\int_{a_N}^{b_N} f_N > L - \frac{\epsilon}{3}.$$

Seuraavaksi kiinnitetään sellainen $n(x) \geq N$, että kun $n \geq n(x)$, niin

$$\frac{3L+3\epsilon}{3L+\epsilon} f_n(x) \geq f(x). \tag{5.12}$$

Kun $f(x) > 0$ epäyhtälö (5.12) on voimassa, koska sen vasen puoli on aidosti suurempi, kuin oikea puoli. Kun $f(x) = 0$, voidaan valita $n(x) = N$, koska epäyhtälö (5.12) pätee kaikilla n. Saks-Henstockin Lemman Seurauksen 4.14 nojalla on olemassa sellaiset mittafunktiot $\delta_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, että jos $\dot{\mathcal{P}}_0 := \{(t_j, J_j)\}_{j=1}^s$ on mikä tahansa välin I δ_n-hieno merkitty osavälijako, niin

$$\sum_{j=1}^{s} \left| f_n(t_j) l(J_j) - \int_{J_j} f_n \right| \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}. \tag{5.13}$$

Määritellään mitta

$$\delta(x) = \delta_{n(x)}(x).$$

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}_0$ välijako, joka sisältää välin $[a_N, b_N]$ ja olkoon $\dot{\mathcal{P}}_0$ δ-hieno. Todistus on valmis, kun saadaan osoitettua, että

$$\sum_{j=1}^{s} |f_n(t_j) l(J_j) - L| \leq \epsilon. \tag{5.14}$$

Funktion f Riemannin summa, joka lähestyy lukua L saadaan summista

$$\sum_{j=1}^{s} f_{n(t_j)}(t_j) l(J_j), \tag{5.15}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_{n(t_i)}. \tag{5.16}$$

On helppo nähdä, että summa (5.15) on lähellä funktion f Riemannin summaa ja summa (5.16) lähestyy lukua L, sillä

$$\sum_{j=1}^{s} f_{n(t_j)}(t_j)l(J_j) \leq \sum_{j=1}^{s} f(t_j)l(J_j) \leq \frac{3L+3\epsilon}{3L+\epsilon} \sum_{j=1}^{s} f_{n(t_j)}(t_j)l(J_j), \tag{5.17}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_{n(t_i)} \geq \sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_N \geq \int_{a_N}^{b_N} f_N > L - \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.18}$$

Olkoon $\bar{N}$ suurin $n(t_i)$, tällöin

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_{n(t_i)} \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_{\bar{N}} \leq \int_{a}^{b} f_{\bar{N}} \leq L. \tag{5.19}$$

Arvoioidaan vielä summien (5.15) ja (5.16) erotusta, toisin sanoen

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \left(f_{n(t_i)}(t_i)l(J_j) - \int_{J_j} f_{n(t_i)} \right) \right|. \tag{5.20}$$

Indeksit $n(t_i)$ eivät välttämättä ole erisuuria. Olkoot $i_1, \ldots, i_k$ sellaisia erillisiä indeksejä i, joilla $n(t_i) = k$. Ryhmitellään summassa (5.20) yhteen termit, joilla on sama indeksi $n(t_i) = k$ ja arvioidaan summaa käyttämällä Saks-Henstockin Lemmaa. Epäyhtälö (5.13) tulee muotoon

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f_k l(J_{j_i}) - \int_{J_{j_i}} f_k \right) \right| \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}.$$

Näin ollen

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \left(f_{n(t_i)}(t_i)l(J_j) - \int_{J_j} f_{n(t_i)} \right) \right| < \sum_{1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k} = \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.21}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (5.17), (5.18), (5.19) ja (5.21) saadaan

$$\sum_{j=1}^{s} f(t_j)l(J_j) \geq \sum_{j=1}^{s} f_{n(t_j)}(t_j)l(J_j) \geq \sum_{j=1}^{s} \int_{J_j} f_{n(t_i)} - \frac{\epsilon}{3} < L - \frac{2\epsilon}{3},$$

ja

$$\frac{3L+\epsilon}{3(L+\epsilon)}\sum_{j=1}^{s} f(t_j)l(J_j) \leq \sum_{j=1}^{s} f_{n(t_j)}(t_j)l(J_j) \leq \sum_{j=1}^{s}\int_{J_j} f_{n(t_i)} + \frac{\epsilon}{3} < \frac{3L+\epsilon}{3}.$$

Tästä seuraa (5.14). □

Huomautus 5.20. Edellä olemme olettaneet, että $f(x) = \lim f_k(x)$ *kaikilla* $x \in I$. Kuitenkin useissa tilanteissa on sopivampaa olettaa ainoastaan, että on olemassa sellainen jono (g_k), että $g(x) = \lim g_k(x)$ *melkein kaikkialla* välillä I. On siis olemassa sellainen nollajoukko $Z \subset I$, että $g(x) = \lim g_k(x)$ kaikilla $x \in I \setminus Z$. Siis funktion f arvo nollajoukossa, ei vaikuta integraalin arvoon eikä sen olemassaoloon. Lähes kaikki konvergenssiteoriat voidaan laajentaa hieman yleisimmiksi määrittelemällä $f_k(x) := g_k(x)$ kaikilla $x \in I \setminus Z$ ja $f_k(x) := 0$, kun $x \in Z$.

Palataan esimerkkiin 3.6.

Esimerkki 5.21. Olkoon $\mathbb{Q}_1 := \{r_1, \cdots, r_k\}$ rationaalilukujen luetelma väliltä $[0,1]$. Olkoon

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in \mathbb{Q}_1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Jono (f_k) suppenee pisteittäin kohti Dirichletin funktiota $f(x) := 1$, kun $x \in \mathbb{Q}_1$ ja $f(x) := 0$ muulloin. Vaikka kaikki funktiot f_k ovat R-integroituvia ja niiden integraalin arvo on 0, rajafunktio f ei ole R-integroituva. Esimerkin 4.7 nojalla $f \in \mathcal{R}^*([0,1])$ ja $\int_0^1 f = 0$.

Määritellään $\int_a^b f = \infty$, jos on olemassa sellainen funktiota f kohti suppeneva, kasvava jono mittaintegroituvia funktioita f_n, että $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \infty$. Hyväksymällä integraalille äärettömän arvon saadaan useat kaavat pysymään voimassa ilman rajoitteita.

Määritelmä 5.22. Jos on olemassa sellainen kasvava jono mittaintegroituvia funktioita f_n, joka suppenee kohti funktiota f m.k. ja että

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \infty, \quad \text{niin määritellään} \quad \int_a^b f = \infty.$$

Lisäksi, jos

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = -\infty, \quad \text{niin määritellään} \quad \int_a^b -f = \infty.$$

Hyväksymällä äärettömät integraalin arvot, väitteet "f on mittaintegroituva"ja "funktion f integraali on olemassa"saadaan äärellisellä arvolla ja jos $\int_a^b f = \infty$ tai $-\infty$, niin f ei ole mittaintegroituva. Jos $\int_a^b f$ on äärellinen, niin integraali suppenee.

5.4.3 Dominoitu ja keskeinen konvergenssi

Seuraavaksi saadaan tulos, jota voidaan hyödyntää, kun jono ei ole monotoninen. Dominoidun konvergenssin lauseen todistamiseksi esittelen hyödyllisiä apulauseita.

Lause 5.23 (Bebbo Levi). *Olkoon*

(i) jono $(f_n(x))$ monotoninen m.k. $x \in I := [a, b] \subset \bar{\mathbb{R}}$,

(ii) funktiot f_n mittaintegroituvia ja olkoon jono $(\int_I f_n)$ rajoitettu, eli $|\int_I f_n| < K$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ on

(a) äärellinen m.k.

(b) mittaintegroituva välillä $I := [a, b]$ ja

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Todistus. Riittää, että osoitetaan vain (a)-kohta. Oletetaan, että funktiot f_n on määritelty kaikkialla ja $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Kiinnitetyssä pisteessä x, funktioiden raja-arvo voi olla ääretön. Merkitään tätä pistejoukkoa $Z = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$. Olkoon $g_n = \min\left(\frac{1}{i} f_n, 1\right)$, kun i on välin I välijaon I_i indeksi. Monotonisen konvergenssin Lauseen 5.19 nojalla

$$h_i := \lim_{n\to\infty} g_n \in \mathcal{R}^*(I) \text{ ja } \int_I h_i \leq \frac{1}{i} K.$$

Jos $x \in Z$, niin $h_i(x) = 1$. Jos $x \notin Z$, niin $i > f(x)$ jollain i, joten $\lim_{i\to\infty} h_i(x) = 0$. Olkoon S joukko. Merkitään symbolilla 1_S joukon S *karakteristista funktiota.* Toisin sanoen

$$1_S(x) := \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in S \\ 0, & \text{kun} \quad x \notin S. \end{cases}$$

Näin ollen $\lim_{i\to\infty} h_i(x) = 1_Z$. Kun sovelletaan Monotonisen konvergenssin Lausetta uudestaan, saadaan

$$\int_I \lim_{i\to\infty} h_i = \int_I 1_Z = \lim_{i\to\infty} \int_I h_i \leq \lim_{i\to\infty} \frac{K}{i} = 0.$$

□

Seuraus 5.24. *Olkoot w_n mittaintegroituvia, ei-negatiivisia funktioita ja olkoon sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b w_n$ suppeneva. Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenee ja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b w_n = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Todistus. Väite seuraa, kun sovelletaan Bebbo Levin Lausetta 5.23 funktioille $f_n = \sum_{n=1}^{n} w_n$. $\square$

Esimerkki 5.25.

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\pi^2/6.$$

Siis funktio $\frac{\log(1-x)}{x}$ on mittaintegroituva välillä $[0,1]$ ja sen integraalin arvo yli välin $[0,1]$ on $-\pi^2/6$

Seuraus 5.26. *Jos w_n on itseisesti mittaintegroituvia ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |w_n|$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenee m.k. ja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b w_n = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Todistus. Sovelletaan Seurausta 5.24 funktion $w_n(x)$ *positiiviosalle*

$$w_n^+(x) := \begin{cases} w_n(x), & \text{kun} \quad w_n(x) \geq 0, \\ 0 & \text{muuten}, \end{cases}$$

ja *negatiiviosalle*

$$w_n^-(x) := \begin{cases} -w_n(x), & \text{kun} \quad w_n(x) \leq 0, \\ 0 & \text{muuten}. \end{cases}$$

$\square$

Esimerkki 5.27.

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Lemma 5.28 (Fatoun Lemma). *Olkoon $f_n \in \mathcal{R}^*(I)$, ei-negatiivisia funktioita välillä $I := [a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$, tällöin*

$$\int_I \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{5.22}$$

Todistus. Olkoot $g_{k,n} = \inf\{f_i; n \leq i \leq k\}$ ja $h_n = \lim_{k\to\infty} g_{k,n} = \inf\{f_i; i \geq n\}$. Koska $0 \leq \int_I g_{k,n} \leq \int_I f_n$, Monotonisen konvergenssin Lauseen 5.19 nojalla kaikki funktiot h_n ovat integroituvia. Koska $\int_I h_n \leq \int_I f_n$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_I h_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Jos vasemman puolen raja-arvo on ∞, niin kumpikin puoli epäyhtälössä (5.22) on ääretön, muuten Monotonisen konvergenssin Lauseen nojalla

$$\int_I \liminf_{n\to\infty} f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \int_I h_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

□

Huomautus 5.29. Jos epäyhtälön (5.22) oikea puoli on äärellinen, Fatoun Lemman mukaan $\liminf f_n$ on mittaintegroituva. Lemmaa käytetäänkin usein annetun funktion integroituvuuden osoittamiseen.

Dominoidun konvergenssin lausetta on helppo soveltaa ja se on ehkä eniten käytetty lause integraaliteoriassa.

Lause 5.30 (Dominoidun konvergenssin lause)**.** *Olkoot funktiot f_n, G ja $g \in \mathcal{R}^*(I)$ välillä $I := [a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$,*

$$g \leq f_n \leq G \tag{5.23}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad m.k.$$

Tällöin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{5.24}$$

Todistus. Sovelletaan Fatoun Lemmaa 5.28 jonoihin $f_n - g$ ja $G - f_n$, jolloin saadaan

$$\int_I (f-g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I (f_n - g) \leq \int_I (G-g) \quad \text{ja}$$

$$\int_I (G-f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I (G - f_n),$$

joten

$$\int_I f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n \quad \text{ja} \tag{5.25}$$

$$\int_I f \geq \limsup_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{5.26}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (5.25) ja (5.26) saadaan osoitettua, että epäyhtälön (5.24) oikea puoli on olemassa ja on yhtä suuri kuin vasen puoli. □

Seuraus 5.31. *Jos epäyhtälö (5.23) korvataan epäyhtälöllä*

$$|f_n| \leq G,$$

niin $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ ja f on absoluuttisesti mittaintegroituva.

Vaikka funktioiden f_n ja f ei tarvitse olla itseisesti mittaintegroituvia, Dominoidun konvergenssin Lause koskee erityisesti itseisesti mittaintegroituvien funktioiden suppenemista sillä funktiot $G - f$ ja $G - f_n$ ovat itseisesti mittaintegroituvia.

Lause 5.32 (Keskeinen konvergenssi)**.** *Olkoot funktiot $f_n, n = 1, 2, \ldots$ itseisesti mittaintegroituvia ja olkoon kaikilla $\epsilon > 0$ sellainen luku N, että*

$$\int_a^b |f_n - f_m| < \epsilon, \tag{5.27}$$

kun $n, m > N$. Tällöin

(i) on olemassa melkein kaikkialla suppeneva osajono $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Todistus. Oletuksen mukaan kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen n_k, että

$$\int_a^b |f_{n_k} - f_n| < \frac{1}{2^k}, \tag{5.28}$$

kun $n \geq n_k$ ja $n_k < n_{k+1}$. Koska sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$$

suppenee, niin Bebbo Levin Lauseen 5.23 nojalla sarja

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$$

suppenee itseisesti m.k. ja tämä todistaa (i) osan.

Seuraavaksi sovelletaan Fatoun Lemmaa 5.28 jonolle $j \to |f_{n_k} - f_{n_{k+j}}|$ ja saadaan epäyhtälö (5.28) muotoon

$$\int_a^b |f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Tällöin

$$\int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b (|f_{n_k} - f| + |f_{n_k} - f_n|) \leq \frac{2}{2^k},$$

kun $n \geq n_k$. Tämä todistaa kohdan (ii). Kohta (iii) on suora seuraus kohdasta (ii). □

Jos (ii)-kohta on voimassa, sanotaan että jono (f_n) *suppenee keskeisesti* kohti funktiota f. Keskeinen suppeneminen antaa luvan vaihtaa raja-arvo-operaation ja integroinnin järjestystä, mutta keskeisesti suppenevan itseisesti mittaintegroituvien funktioiden jonon ei tarvitse supeta missään pisteessä. Lauseen mukaan keskeisesti suppeneva jono sisältää melkein kaikkialla suppenevan osajonon.

Esimerkki 5.33. Olkoon $n = 2^{i-1} + k - 1$, missä $k = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$ ja $i = 1, 2, \ldots$. Asetetaan $f_n(x) = 1$, kun $x \in [(k-1)/2^{i-1}, k/2^{i-1}]$ ja 0 muualla. Toisin sanoen, funktiot $f_n, n = 1, 2, \ldots$ saavat arvon 1 väleillä

$$[0, 1], [0, 1/2], [1/2, 1], [0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1], \ldots$$

ja 0 muualla. Tällöin jono (f_n) suppenee keskeisesti kohti nollaa, mutta jono $(f_n(x))$ hajaantuu kaikilla $x \in [0, 1]$.

5.4.4 Yhtäintegroituvuus

Tasaisen suppenemisen Lauseen 5.18 oletukset ovat erittäin tiukkoja, joten ne rajoittavat Lauseen hyödyllisyyttä. Esittelen seuraavaksi toisen tyyppisen tasaisen olosuhteen, jota voidaan käyttää halutun raja-arvon saavuttamiseksi. Teorian mukaan sama mittafunktio δ_ϵ annetulla $\epsilon > 0$ on pätevä kaikkien jonon funktioiden mittaintegroituvuudelle, kun jonon mittaintegroituvuus on tasaista.

Määritelmä 5.34. Funktioiden joukon $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}^*(I)$ sanotaan olevan *yhtäintegroituva* välillä $I := [a, b]$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen mitta δ_ϵ, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa välin I δ_ϵ-hieno jako ja $f \in \mathcal{F}$, niin $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f| \leq \epsilon$.

Osoitetaan seuraavaksi, että yhtäintegroituvuudesta ja jonon pisteittäisestä suppenemisesta joukossa $\mathcal{R}^*(I)$ seuraa, että raja-funktio on integroituva ja $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

Lause 5.35. *Jos $(f_n) \in \mathcal{R}^*(I)$ on yhtäintegroituva välillä $I := [a, b] \subset \bar{\mathbb{R}}$ ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ kaikilla $x \in I$, niin $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ja*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{5.29}$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ on olemassa ja äärellinen. Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen mitta δ, että jos $\dot{\mathcal{P}}$ on mikä tahansa välin I δ-hieno välijako, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ saadaan

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_n| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.30}$$

Kiinnitetään δ-hieno välijako

$$\dot{\mathcal{P}} := \{(\epsilon_i, [u_i, v_i]); i = 1, 2, \ldots, p\}$$

ja etsitään sellainen n, että

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f_n(\epsilon_i)(v_i - u_i) - \sum_{i=1}^{p} f_m(\epsilon_i)(v_i - u_i) \right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.31}$$

Tämä on mahdollista, koska funktio f_n suppenee kohti funktiota f ja on olemassa vain yksi luku p, eli äärellinen määrä merkkejä ϵ_i. Saadaan

$$\left| \int_I f_n - \int_I f_m \right| \leq \left| \int_I f_n - S(f_n; \dot{\mathcal{P}}) \right| + \left| S(f_n; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_m; \dot{\mathcal{P}}) \right| + \left| S(f_m; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_m \right|.$$

Epäyhtälöstä (5.30) saadaan ensimmäisen ja viimeisen termin ylärajaksi $\epsilon/3$ ja keskimmäisen termin ylärajaksi saadaan $\epsilon/3$ epäyhtälöstä (5.31), joten jono $(\int_I f_n)$ on Cauchyn jono. Olkoon $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = L$.

Olkoon $\dot{\mathcal{P}}$ mikä tahansa δ-hieno välijako. Kun annetaan $n \to \infty$ epäyhtälössä (5.30) saadaan

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f(\epsilon_i)(v_i - u_i) - L \right| < \epsilon.$$

Näin ollen funktio f on mittaintegroituva ja $\int_I f = L$. $\square$

Esimerkki 5.36. Funktiojoukko, joka on muotoa

$$f_k(x) = x^{-1} e^{-kx} \sin x,$$

kun $k > 0$ on yhtäintegroituva välillä $[0, \infty]$, koska $\int_0^\infty x^{-1} \sin x dx$ on äärellinen Esimerkin 5.17 nojalla. Lauseen 5.35 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Yhtäintegroituvuus on merkittävä poikkeus teoriasta, jota ei voi laajentaa niin, että sallitaan $g(x) = \lim g_k(x)$ *melkein kaikkialla* välillä I. On mahdollista, että on olemassa kaksi sellaista jonoa (f_n) ja (g_n) välillä I, että $f_k(x) = g_k(x)$ m.k. välillä I, kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja että (f_k) on yhtäintegroituva, mutta (g_k) ei ole.

Esimerkki 5.37. Olkoon $f_k(x) := 0$, kaikilla $x \in [0,1]$ ja olkoon $g_k(0) := k$ ja $g_k(x) := 0$, kun $x \in]0,1]$. Funktiojonon $f_k(x)$ yhtäintegroituvuus on triviaalia. Osoitetaan, että jono (g_k) ei ole yhtäintegroituva välillä $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\left|S(g_k;\dot{\mathcal{P}}) - \int_I g_k\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} g_k(t_i)l(I_i) - 0\right| = \left|\sum_{t_i\in]0,1]} g_k(t_i)l(I_i) + g_k(0)l(I_1)\right| \\ &= |0 + k\cdot l(I_1)| = k\cdot l(I_1) \to \infty, \text{ kun } \quad k\to\infty.\end{aligned}$$

Kirjallisuutta

[1] Robert G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, American Mathematical Society, 2001.

[2] John DePree, Charles Swartz, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, 1988.

[3] Lee Peng Yee, Rudolf Výborný *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press , Cambridge 2000.

[4] Russell A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, 1994.

[5] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[6] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Fourth edition, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[7] Petteri Harjulehto, Riku Klén, Mika Koskenoja *Analyysiä reaaliluvuilla*,Unigrafia Oy, Helsinki 2014.

[8] Charles Swartz, *Introduction to Gauge integrals*, World Scientific Publishing Company, 2001.