"Miten nää pitäis tehä?"

Tapaustutkimus seitsemännen luokan pienryhmien ensikosketuksesta yhtälönratkaisuun

Pro gradu -tutkielma

Virpi Kostama
2117629
Luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan koulutusohjelma
Aineenopettajan suuntautumisvaihtoehto
Oulun yliopisto

Syksy 2016

Sisältö

1 Johdanto

Työskennellessäni Joustava yhtälönratkaisu -projektissa (JYR -projektissa) pääsin seuraamaan läheltä erilaisten yläkouluryhmien työskentelyä ensimmäisen asteen yhtälöiden parissa. Projektin aikana sain kosketuksen niin oppimateriaalin suunnittelemiseen kuin opettajan ja oppilaiden toimintaan luokkahuoneessa. Oppilaiden työskentelyn seuraaminen oli kaikista antoisinta, sillä siinä näki yhdessä työstetyn materiaalin ja käytävän asian toimivuutta oikeissa tilanteissa. Lisäksi ryhmien oppitunteja seuratessa näki niin vastoinkäymisiä kuin onnistumisen kokemuksia yhtälönratkaisun parissa.

JYR-projektissa keskitytään yläkoulun ensimmäisen asteen yhtälöiden opetuksen kattavan materiaalin luontiin. Tutkimusharjoittelijana toimiessani pystyin tutkimaan oppilaiden lähestymistapoja yhtälönratkaisuun. Siirtymisen aritmetiikasta algebraan on havaittu olevan haastavaa (Andrews & Sayers, 2012). Filloy ja Rojano referoivat artikkelissaan (Filloy & Rojano, 1989) aiempaa tutkimustaan yhtälönratkaisun lähestymistavoista todeten, että 12-13 –vuotiaat opiskelijat lähestyivät muotoa $Ax + B = Cx$ olevia yhtälöitä ensisijaisesti mieluummin *yritys-erehdys* metodeilla, kuin spontaanisti operoimalla muuttujatermin x sisältävillä termeillä. Eräässä toisessa tutkimuksessa tutkittiin kolmannen vuoden lukio-opiskelijoiden (Yhdysvaltojen "high-school") lähestymistapoja kolmen erityyppisen muotoa $ax \pm b = cx \pm d$ olevien yhtälöiden ratkaisemiseen parityöskentelynä. Tutkimuksessa yhdellä yhtälöllä oli yksi ratkaisu, toinen oli identtisesti tosi (eli toteutuu jokaisella muuttujan arvolla) ja kolmas epätosi kaikilla muuttujan arvoilla. Tutkimuksessa selvisi, että valtaosa pareista sai ratkaistua yhtälön, jolla oli yksi ratkaisu symbolisesti, graafisesti kuvaajasta tulkitsemalla tai laskinta hyödyntämällä, mutta kahdessa jälkimmäisessä yhtälössä oli samoja ratkaisutapoja hyödyntäen vaikeuksia oikean ratkaisun saavuttamisessa (Huntley, Marcus, Kahan & Miller, 2007).

Tämä tutkimus on tyypiltään laadullinen tapaustutkimus, joka pyrkii kokonaisvaltaisesti kuvaamaan tapauksen ja vastaa kysymykseen "kuinka"tai "miksi"(Saarela-Kinnunen & Eskola, 2001, 168). Tämän tutkimuksen tavoitteena on vastata kysymyksiin, kuinka yhtälönratkaisua lähestytään pienryhmissä ensimmäistä kertaa? Onko pienryhmillä ongelmia yhtälönratkaisussa, eteneekö yhtälönratkaisu ilman opettajan tukea ja lähestyvätkö eri pienryhmät yhtälönratkaisua erilaisin tavoin?

Tutkimuskohteena oli erään seitsemännen luokan neljä pienryhmää, jotka osallistuivat JYR-projektiin. Aineistonkeruu toteutettiin JYR -projektin yhteydessä videoimalla oppitunti, jolla pienryhmät ensimmäistä kertaa ratkaisivat yhtälöitä. Tutkimuskysymyksiin vastataan tutkimalla aineistoa sisällönanalyysimenetelmällä.

2 Joustava yhtälönratkaisu -kehittämisprojekti (JYR)

Joustava yhtälönratkaisu -kehittämisprojekti eli JYR-projekti on LUMA SUOMI -ohjelman, Suomen Opetus- ja kulttuuriministeriön (OKM) rahoittama kuusivuotinen hanke vuosille 2014-2019. LUMA SUOMI -ohjelmaan valituilla projekteilla pyritään varmistamaan LUMA-aineiden, eli luonnontieteiden ja matematiikan osaamisen perusta esi- ja perusasteilla. (LUMA SUOMI, 2016).

Pilottivaihe JYR-projektista toteutettiin keväällä 2015. Pilottivaiheessa projektiryhmään kuului viisi henkilöä Oulun yliopistosta. Seuraavaksi esitellään lyhyesti JYR-projektin tavoitteita, pilottivaiheeseen osallistujat sekä käytettyä oppimateriaalia.

2.1 Tavoitteet

JYR-projektin tavoitteena on kehittää yläkouluille opetuspaketti, joka kattaa ensimmäisen asteen lineaaristen yhtälöiden kokonaisuuden, ja jolla pystytään vastaavat osiot korvaamaan seitsemännen ja/tai kahdeksannen luokan oppikirjoista (kirjasarjasta riippuen). Kaikissa tavoitteissa on pyritty huomioimaan vuonna 2016 voimaan tullut uusi opetussuunnitelma, joten ohjelma on mahdollisimman ajantasainen.

Opetuspaketissa huomioidaan yhtälöiden niin käsitteellinen kuin proseduraalinen osaaminen. Käsitteellistä osaamista tuetaan käyttämällä aluksi aikaa tarpeellisten käsitteiden, kuten esimerkiksi *lauseke* ja *yhtälö* läpikäymiseen ja käsitteen oppimista tukeviin tehtäviin. Kun käsitteet on käyty lävitse huolellisesti kahdesta kolmeen oppitunnin aikana, siirrytään ensimmäisen asteen yhtälöiden ratkaisemiseen. Ratkaisemiseen liittyvät muunnokset (säännöt) käydään lävitse kerralla, yhden oppitunnin aikana. Tämän jälkeen ratkaistaan yhtälöitä ensin vaakamallin avustamana, mistä siirrytään yhtälöiden ratkaisemiseen ilman vaakamallia. Harjoiteltua aluksi yhtälönratkaisua ilman sulkulausekkeita otetaan sulut yhtälöihin mukaan. Sulkulausekkeita sisältävien tehtävien ratkaisemisen usealla ratkaisutavalla on huomattu tukevan oppilaiden joustavaa ajattelua ja lisäävän mahdollisuutta vertailla eri ratkaisuja (Star & Rittle-Johnson, 2008).

Ryhmätyöskentelylle ja matematiikasta keskustelulle on annettu JYR-projektissa painoarvoa. Tarkoitus on, että ohjelman ajan luokassa oppilaat toimivat pienryhmissä. He keskustelevat kohtaamistaan ongelmista, ratkaisutavoistaan, vertailevat ja oppivat näin myös kielentämään matematiikkaa, mitä myös materiaalin tehtävissä painotetaan. Opettajan osuutta opetuksessa ei kuitenkaan ole jätetty pois. Uudet käsitteet ja tehtävien koonnit on yhä suunnattu opettajan johdolla läpikäytäväksi.(OuLUMA, 2016.)

2.2 Pilottivaiheen osallistujat

Osallistuvia opettajia JYR-projektin pilottivaiheeseen keväällä 2015 löytyi yhteensä viisi, joista yksi oli Etelä-Suomen ja loput Pohjois-Pohjanmaan kouluilta. Osallistuvia ryhmiä oli kuusi kappaletta (yhdellä opettajalla oli kaksi opetettavaa 7. luokkaa) ja verrokkiryhmiä kyseisiltä kouluilta saatiin kolme kappaletta. Oppilaita osallistui pilottivaiheeseen 150 ja yhteistyötä tehtiin osallistuneiden opettajien lisäksi koulujen rehtorien ja luokkien kanssa toimineiden erityisopettajien kanssa. Osallistuneista ryhmistä neljä käytti JYR-projektin kehittelemää materiaalia sellaisenaan. Etelä-Suomen opettaja muokkasi saamaansa materiaalia itsenäisempään opiskeluun sopivaksi, mutta teetti samat materiaaliin kuuluneet testit kuin muillakin osallistuneilla ryhmillä.

Tässä tapaustutkimuksessa esiintyvä ryhmä on eräs Pohjois-Pohjanmaan ryhmistä. Ryhmä kuului ensimmäisiin, jotka JYR-projektin materiaalia testasivat ja käyttivät opetuksessaan.

2.3 JYR-projektin materiaali

Oppitunneilla käytetty materiaali suunniteltiin ja kehiteltiin pilottivaiheeseen JYR-projektin projektiryhmässä. Materiaalin kehittämistä varten tapaamisia kolmen opettajan kanssa oli säännölllisesti. Opettajat saivat vaikuttaa ja arvioida materiaalin toimivuutta sekä kertoa omia mielipiteitään. Materiaali oli monisteversio, jonka opettajat joko tulostivat itse oppilaille tunti kerrallaan oppilaiden kansioon tai jonka JYR-projektin jäsen toimitti opettajille.

Oppituntien materiaalit sisälsivät kokonaisuuden kahdeksalle oppitunnille ja yhdelle kertaustunnille. Nämä pitivät sisällään opettajan ohjeen, oppilaan materiaalit, kotitehtävät, ryhmätehtävät ja suurimman osan tehtävien ratkaisuista. Materiaaliin kuuluivat tohtorikoulutettavien laatimat testit, kuten alku- ja lopputestit. Lisäksi itsearviointiin liittyviä lomakkeita, kuten hymiötestejä kerättiin oppituntien päätteeksi seuratuilta ryhmiltä (eli materiaalia käyttäneiltä ryhmiltä). Tutkimukseen osallistuneiden opettajien etenemisnopeudesta riippuen materiaaliin käytettiin yleensä enemmän kuin suunnitellut 10 oppituntia.

3 Teoriaa tutkimuksen taustalla

Tutkimuskysymykseni liittyy ensimmäisen asteen lineaaristen yhtälöiden ratkaisemisen lähestymiseen oppilailla, jotka eivät aiemmin yhtälöitä ole ratkaisseet. Aluksi teoriaosuudessa tarkastellaan ensimmäisen asteen yhtälöä, mikä se on ja millaisia ratkaisualgoritmeja niiden ratkaisemiseksi on. Seuraavaksi pohditaan haasteita, joita opiskelijat kohtaavat siirtyessään aritmetiikasta algebraan. Teoriaosuuden lopuksi luodaan vielä katsaus ryhmätyöskentelyn käyttöön osana matematiikan opetusta. Teoriassa ei käsitellä, kuinka matematiikkaa tulisi opettaa tai miten matematiikkaa opitaan. Poikkeuksena on lyhyt esitys erilaisista tavoista kuinka yhtälöitä koulussa opetetaan, jossa kuitenkaan yhtälöiden opetustapojen paremmuuteen ei oteta kantaa. Tutkimus pyrkii kuvaamaan lähestymistapoja yhtälönratkaisuun yhdellä oppitunnilla, ottamatta kantaa oppilaiden oppimiskäsitykseen.

3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Lukion pitkän matematiikan oppikirja *Pyramidi 1* (Kontkanen, Liira, Luosto, Nurmi, Nurmiainen, Ronkainen,& Savolainen, 2005, 41) määrittelee ensimmäisen asteen lineaarisen yhtälön seuraavasti:
*"**Ensimmäisen asteen yhtälöksi** sanotaan yhtälöä, joka voidaan esittää muodossa $ax+b=0$, jossa $a \neq 0$ ja ensimmäisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu".* Todistus yhdelle ratkaisulle: aluksi vähennetään yhtälön $ax+b=0$ molemmilta puolilta luku b. Kun muodostuneet laskutoimitukset suoritetaan yhtälölle, muodostonutta yhtälöä $ax=-b$ jaetaan puolittain luvulla a. Ensimmäisen asteen lineaarisen yhtälön $ax+b=0$ yhdeksi ratkaisuksi saadaan $x=-\frac{b}{a}$. Jatkossa puhuttaessa yhtälöistä tarkoitetaan nimenomaan ensimmäisen asteen lineaarisia yhtälöitä, ellei toisin mainita.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) sanotaan matematiikassa vuosiluokilla 6–9 algebran keskeisiksi sisällöiksi yhtälöön liittyen:
- *lauseke ja sen sieventäminen*
- *muuttuja-käsite, lausekkeen arvon laskeminen*
- *yhtälö, epäyhtälö, määrittelyjoukko, ratkaisujoukko*
- *ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen*

Toisaalta saadakseen päättöarvioinnissa arvosanaksi 8 sanotaan perusopetuksen opetussuunnitelmassa 2004, että oppilas osaa yhtälöön liittyen muun muassa:
- *ratkaista ensimmäisen asteen yhtälön*
- *sieventää yksinkertaisia algebrallisia lausekkeita*
- *muodostaa yksinkertaisesta arkielämään liittyvästä ongelmasta yhtälön ja*

ratkaista sen algebrallisesti tai päättelemällä
- arvioida tuloksen järkevyyttä sekä tarkastaa ratkaisunsa eri vaiheet
(OPS 2004.)

Voimaan astuvassa perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2014) on vastaavanlaiset keskeiset sisällöt ja osaamistavoitteet yhtälöön liittyen. Ainoana selvänä poikkeuksena on, ettei uusimmassa opetussuunnitelmassa suoraan vaadita oppilaan osaavan muodostaa arkielämän ongelmasta yhtälöä ja tämän ratkaisemista päättelemällä tai algebrallisesti.

Seuraavaksi luodaan katsausta erilaisiin tapoihin aloittaa yhtälönratkaisun opetus koulussa. Samalla esitellään yhtälönratkaisuun liittyviä algoritmeja sekä strategioita. Lisäksi luodaan lyhyt katsaus matemaattiseen ongelmaan sekä ongelmanratkaisuun.

3.1.1 Yhtälöiden ratkaisemisen opettaminen

Yhtälöiden opetus opetussuunnitelman perusteella alkaa varsinaisesti vuosiluokilla 7–9. Matemaattisissa tavoitteissa ei vuosiluokilla 3–6 ole mainintaa mistään tavoitteista yhtälön käsitteen tai tämän ratkaisemisen osaamiseen. Ainoa maininta on 3–6 luokkien algebran sisällöissä, joissa sanotaan, että yhtälölle voidaan ratkaisu löytää päättelemällä. Sillä tämän osaamista ei vaadita, jotta päättöarvioinnissa saisi arvosanan 8. (OPS 2004; OPS 2014.)

Jos lähestytään yhtälöitä käytössä olevien oppikirjojen pohjalta (esim. Kuutio 7, Pointti 1 tai Pii 7), käytetään yhtälönratkaisussa sallittavien muunnosten läpikäymiseen useampi oppitunti. Esimerkiksi *Laskutaito 7* –kirjassa on omat kappaleet sille, kuinka ratkaista yhtälö lisäämällä ja vähentämällä, jakamalla ja kertomalla sekä koontina kappale yhtälön vaiheittain ratkaisemisesta. Jokaisessa näissä kolmessa kappaleessa on harjoitustehtäviä tietyn tai tiettyjen muunnosten harjoittelua varten. Toisin sanoen oppikirjat esittelevät yhtälönratkaisussa sallitut muunnokset usein paloittain. Yleensä suomalaisen koulun matematiikan oppitunnit pohjautuvat käytössä olevaan oppikirjaan (Niemi, 2008, 8). Silti on otettava huomioon, että opettaja tekee lopulta päätöksen, kuinka käytävän asian luokalleen esittää.

Toinen tapa lähteä opettamaan muunnoksia on esittää yhtälönratkaisuun liittyvät muunnokset kerralla, yhden oppitunnin aikana. Näin toimitaan JYR-projektissa. Vastaavaa lähestymistapaa yhtälönratkaisussa muunnosten opettamiseen käyttivät Star ja Seifert (2006) tutkimuksessaan. JYR-projektissa tai Starin ja Seifertin (2006) tutkimuksessa ei myöskään oteta kantaa ratkaisustrategioihin, joita oppilaan tulisi käyttää, vaan annetaan vapaus oppilaalle valita ja soveltaa esitettyjä muunnoksia haluamallaan tavalla. Tämä mahdollistaa kokonaisvaltaisempaa muunnosten ymmärtämistä.

Yleisellä tasolla tarkastellessa on kahdentyylistä lähestymistä yhtälönratkaisun opettamiseen: matemaattisin käsittein tai reaalielämään sidottuna eli ongelmalähtöisesti (Filloy & Rojano, 1989). Oppikirjoissa ja JYR-materiaalissa esitetyt lähestymistavat ovat esimerkkejä matemaattisin käsittein etenevästä lähestymisestä yhtälönratkaisuun. Reaalielämään sidottuna yhtälönratkaisu alkaa usein jonkun sanallisen tehtävän esittelyllä ja tämän ratkaisemisella. Esimerkiksi Andrewsin ja Sayersin tutkimuksessa (Andrews & Sayers, 2012) Pauline lähestyy yhtälönratkaisua Simpsoneihin liittyvällä tehtävällä, jossa lasten iät olivat seitsemän, viisi ja nolla ja kysymys kuului kuinka monen vuoden kuluttua lasten ikien summa on sama kuin lasten äidin ikä? Vasta Ongelmanesittelyn jälkeen edetään tarkastelemaan yhtälöiden käsitteellistä puolta ja matemaattisia termejä. Lähestymisen tukena saatetaan käyttää erilaisia tukevia metodeita ("cover-up method") (Andrews ja Sayers, 2012 viittaavat artikkelissaan Wijers, 2001), kuten oppikirjoissa esiintyvä vaakamalli, havainnollistamaan yhtälön käsitettä.

3.1.2 Erilaisia yhtälönratkaisutapoja

Yhtenä yhtälönratkaisutapana voidaan pitää yhtälön ratkaisun etsimistä kokeilemalla ja päättelemällä (OPS 2004; OPS 2014). Päätelty yhtälön ratkaisun arvo sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön tai muuten perustellaan saatu ratkaisu. Tästä käytetään käsitettä *arvaus-tarkistus (guess and check)-menetelmä*, ja tiedetään, että arvaus on systemaattinen arvio satunnaisen (random) arvauksen sijaan (Herscovics & Linchevski, 1994). Päättelemällä tai kokeilemalla tehty yhtälönratkaisutapa on kuitenkin puutteellinen verrattuna algoritmin mukaisesti tehtyyn yhtälönratkaisuun. Tulkitsen itse, että päättelyllä tarkoitetaan vastauksen keksimistä, jota ei matemaattisesti välivaihein paperille ole esitetty. Tässä itse *proseduraalinen osuus* eli yhtälön välivaiheittain ratkaiseminen on jätetty merkitsemättä ja ratkaisu on saatu selville jollain ajatustyöllä, jota voi perustella.

Kun yhtälöitä ratkaistaan proseduraalisesti eli välivaiheittain, kirjoittaen paperille, liittyy siihen erilaisia algoritmeja. Yhtälönratkaisun erilaisia algoritmeja esitetään muun muassa oppikirjoissa. Matemaattisella algoritmilla tarkoitetaan menetelmää, joka antaa järjestyksessä olevat ohjeet tehtävän ratkaisulle (Haapasalo, 1994, 58). Alla on esitetty yksi oppikirjoissa esiintyvästä ratkaisualgoritmista yhtälönratkaisemiseksi.

1. *Sievennetään yhtälön vasen ja oikea puoli.*

2. *Siirretään kirjaintermit vasemmalle ja vakiotermit oikealle puolelle.*

3. *Yhdistetään samanmuotoiset termit.*
4. *Jaetaan yhtälön molemmat puolet kirjaintermin kertoimella tai kerrotaan kirjantermin jakajalla.*
5. *Tarkistetaan yhtälön ratkaisu tarvittaessa alkuperäisestä yhtälöstä.* (Pii 7, 2006.)

Suomessa käytettävien oppikirjasarjojen (kuten *Pointti 1, Pii 7* ja *Kartio 1*) välillä on eroavaisuuksia. Sisällöltään oppikirjoissa esitetyt ratkaisualgoritmit ovat samankaltaisia. Star & Seifert ovat artikkelissaan (2005) määritelleet standardialgoritmin ensimmäisen asteen yhtälönratkaisulle.

1. *Avaa yhtälössä esiintyvät sulkulausekkeet. (EXPAND)*
2. *Yhdistä yhtälön termejä yhtälön molemmilla puolilla siten, että yhtälö on standardimuodossaan eli* $ax + b = cx + d$ *(COMBINE)*
3. *Siirrä muuttujatermit yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiot yhtälön oikealle puolelle. (SUBSTRACT FROM BOTH)*
4. *Jaa yhtälö puolittain muuttujan edessä olevalla kertoimella. (DIVIDE)*

3.1.3 Yhtälö ongelmana

Leppäaho ja Haapasalo ovat teoksissaan (Leppäaho, 2007, 38-39; Haapasalo, 1994, 17) pohtineet ongelman määritelmää. Ongelmasta puhuttaessa tarkoitetaan tässä tilanteessa matemaattista ongelmaa. Leppäaho määrittelee ongelman seuraavasti: *"Ongelma on sellainen tehtävätilanne, jota yksilö ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla"*. Leppäaho jatkaa määritelmää huomioimalla ongelmanratkaisuun kuluvaa aikaa seuraavasti: *"Ratkaisun saavuttaminen voi kestää muutamista sekunneista viikkoihin tai jopa vuosiin"*. Vastaavasti Haapasalo määrittelee ongelman seuraavasti : *"Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä, tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä, juuri sillä hetkellä, tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintoa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja"*.

Ongelma on siis suhteellinen käsite, joka riippuu pitkälti henkilöstä ja ajanhetkestä. Tehtävä voi jollekin henkilölle olla rutiinitehtävä, kun toiselle se on sillä hetkellä ongelma. (Haapasalo, 1994, 17). Esimerkiksi tehtävä, jossa pyydetään ratkaisemaan yhtälö, on lukiolaiselle rutiinitehtävä, mutta ensimmäistä kertaa näitä tehtäviä lähestyvälle yläkoululaiselle ongelma, johon rutiinia vasta opetellaan. Yhtälön voidaan ajatella olevan interpolaatio-ongelma, jonka alku- ja lopputilanne (eli yhtälön ratkaisun muoto $x =$ jokin luku) ovat tunnettu, mutta näiden välissä oleva polku eli strategia ongelman ratkaisemiseksi puuttuu (Haapasalo, 1994, 38).

Ongelmanratkaisuprosessi sisältää oppilaan strategian ratkaisuun pääsemiseksi. Strategia voi pitää sisällään mm. tehtäväanalyysia, teorioiden mieleenpalauttamista sekä tiedon tuottamista. (Haapasalo, 1994, 17-25). Ongelmanratkaisuprosessin vaiheet voidaan Polyan mukaan jakaa neljään vaiheeseen. Ensimmäinen osa koostuu ongelman ymmärtämisestä. Toinen osa sisältää ongelman ratkaisemiseksi tehtävän suunnitelman eli kuinka esimerkiksi aiemmin opittuja tietoja käytetään ongelman selvittämiseksi. Kolmanneksi toteutetaan luotu suunnitelma ongelman ratkaisemiseksi. Viimeisessä eli neljännessä vaiheessa tulkitaan saatu ongelman ratkaisu eli tarkastellaan ongelmanratkaisuprosessin vaiheita, testataan tämän toimivuutta ja tarkistetaan saatu ongelman ratkaisu. (Polya, 1973, 5-6.) Ensimmäisellä kerralla yhtälöitä ratkaistaessa voi tulla vastaan edellä mainitun ratkaisuprosessin kaltaista lähestymistä yhtälönratkaisuun.

3.2 Siirtyminen aritmeettisista yhtälöistä algebrallisiin yhtälöihin

Aritmeettisilla yhtälöillä tarkoitetaan muotoa $Ax + B = C$ olevia yhtälöitä, joita voi operoida laskennallisin keinoin numeroiden avulla. Algebrallisilla yhtälöillä puolestaan tarkoitetaan yhtälöitä, jotka ovat muotoa
$Ax + B = Cx + D$.
Jotta tuntemattoman eli muuttujan saa selvitettyä algebrallisten yhtälöiden tapauksessa, on yhtälöä operoitava muutenkin, kuin laskennallisin keinoin.(Andrews & Sayers, 2012; Filloy & Rojano, 1989.)

Aritmeettisista yhtälöistä siirtyminen algebrallisten yhtälöiden ratkaisemiseen on merkittävä käännekohta. Puhutaan niin sanotusta *kognitiivisesta kuilusta* (cognitive gap), jolla tarkoitetaan sitä, etteivät oppilaat spontaanisti osaa operoida muuttujalla tai muuttujaa sisältävillä termeillä (Herscovics & Linchevski, 1994).

Kieran luettelee artikkelissaan (2004) että oppilaalta vaaditaan algebrallisen ajatteluun viittä asiaa:

1. *Näkee relaatiot, eikä vain laskutoimituksia.*

2. *Operaatioiden ja käänteisoperaatioiden hallinta.*

3. *Kykyä sekä esittää, että ratkaista ongelma.*

4. *Numerot ja kirjaimet*
    - *Kirjaimet nähdään tuntemattomina, muuttujina tai parametreina.*
    - *Vastauksina suljetut kirjalliset ilmaisut.*
    - *Vastausten vertailua yhtäsuuruuspainoitteisesti, numeeristen arvioiden sijaan.*
5. *Yhtäsuuruusmerkin ymmärrys rakenteellisena dynaamisen sijaan.* (Kieran, 2004.)

Lyhyt koonti erilaisista haasteista aritmeettisista algebrallisiin yhtälöihin siirtymisestä viittaa siihen, että sujuva siirtyminen on haastavaa. Oppilaiden algebralliseen ajattelun kehittymiselle vaaditaan laskutoimitusten ja matemaattisten merkintöjen hyvää hallintaa (Kieran, 2004). Jos aritmeettisen puolen hallinnassa on puutteita, heijastuu se algebrallisen ajattelun kehittymiseen myöhemmin (Herscovics & Linchevski, 1994).

3.3 Ryhmätyöskentely osana matematiikan opiskelua

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) kerrotaan monipuolisten työtapojen tukevan muun muassa oppilaan luovaa toimintaa ja ajattelua, motivaatiota, käsitteellistä ja menetelmistä oppimista sekä kykyä ottaa vastuuta omasta oppimisesta. Ryhmätyöskentelyssä oppilasta ohjataan erilaisiin rooleihin, jakamaan tehtäviä keskenään sekä ottamaan vastuuta yhteisistä tavoitteista. (OPS, 2014.)

Ryhmätyöskentelyn kerrotaan olevan yksi keinoista rohkaista opiskelijoita olemaan aktiivisia ja saamaan itseluottamusta. Ryhmätyöskentely rohkaisee opiskelijoita keskustelemaan, jakamaan mielipiteitä sekä ideoita, mikä parhaillaan kasvattaa ja luo uutta tietoutta koko ryhmälle.(Koçak, Bozan & Isik, 2009). Ryhmissä vallitseva yhteisvaikutus ("syn-energy") on myös ratkaisevassa merkityksessä onnistuneisiin ongelmaratkaisu-yrityksiin (Clark, James & Montelle, 2014). Varhaisessa vaiheessa matematiikan oppitunneilla aloitettu ryhmätyöskentelyn harjoittelu hyödyttää tämän onnistumista myöhemmin oppitunneilla ja sosiaalisessa elämässä (Koçak, Bozan & Isik, 2009).

Ryhmätyöskentelyssä on omat haasteensa ja haittapuolensa. Onnistunut ryhmätyöskentely vaatii ryhmän sitoutumista tiettyihin työskentelytapoihin ja päämääriin. Yksittäisen henkilön mielipide tai taito voi jäädä vähemmälle huomiolle. Opettajalle ryhmätyöskentelyn toteuttamiseen ei ole annettu esimerkiksi opetussuunnitelmassa selkeitä ohjeita ja hän toteuttaa oman harkintansa mukaan ryhmätyöskentelyä opetuksessa.(Haapasalo, 1994, 232-233.)

4 Tutkimuksen esittely

Kappaleessa esitellään tutkimusta ohjaava tutkimuskysymys. Tämän lisäksi esitellään tarkemmin itse tutkimuskohdetta sekä tutkittavan oppitunnin tuntisuunnitelmaa.

4.1 Tutkimuskysymys

Oppilaiden toiminta ja heidän tekemänsä itsenäiset valinnat kiinnostavat minua. Siksi tutkimuksen suuntaaminen kuvaamaan oppilaiden toimintaa ja tämän syvällisempää ymmärrystä tuntui luontevalta.

Tutkimuksen tarkoitus on kokonaisvaltaisesti kuvata ensimmäinen oppitunti, jolla yhtälöitä käsitellään. Kuvatulla oppitunnilla esiintyvät yhtälöt olivat pääosin aritmeettisia (esim. $4x+6=22$), mutta myös algebrallisia (esim. $15x+10=5x+20$). Mielenkiinto tutkimuksessa keskitetään kuitenkin erittelemättä sekä aritmeettisten että algebrallisten yhtälöiden lähestymiseen.

Tähän pyritään vastaamaan mahdollisimman kattavasti kuvaamalla yhden seitsemännen luokan neljän pienryhmän lähestymistä yhtälöiden ratkaisuun. Tutkittava luokka on lähestynyt yhtälönratkaisua JYR-projektin materiaalien avulla pienryhmissä työskennellen. Tutkimuskysymys on:

Kuinka pienryhmät lähestyivät yhtälönratkaisua ensimmäistä kertaa?

Seuraavissa kappaleissa esitellään tarkemmin tutkimuksen kohteena olevaa luokkaa, luokan taustatiedot yhtälönratkaisusta sekä tutkittavan tunnin tuntisuunnitelma.

4.2 Tutkittava 7. luokka

Tutkittavaan yläkoulun seitsemänteen luokkaan kuului tutkittavan oppitunnin aikana 16 oppilasta. Myöhemmin luokan ryhmäkoko kasvoi yhdellä oppilaalla. Luokka oli tasoltaan hyvä, 16 oppilaan viimeisimpien matematiikan todistusarvosanojen keskiarvon perusteella. Keskiarvoksi luokalle saatiin tasan 8, joka perustuu alkutestissä kysytyistä tiedoista laskettuun keskiarvoon. Alkutestissä teetetyn kyselyn mukaan oppilaat eivät aiemmin olleet opiskelleet yhtälönratkaisua koulussa. Osa käsitteistä, kuten *muuttuja* ja *samanmuotoinen termi* oli opiskeltu lausekkeiden yhteydessä.

Oppilaat istuivat JYR-projektin oppitunneilla pienryhmissä. Pienryhmissä oli kaksi tai kolme oppilasta. Poikkeuksena olivat henkilöt, joilla ei ollut kuvauslupaa. He istuivat omana ryhmänään takana.

Seuratulla oppitunnilla ei-kuvattavassa ryhmässä istui neljä oppilasta ja yksi oppilas oli poissa, joten tutkimuksen kohteena oli kuvatut neljä pienryhmää. Näissä pienryhmissä oli yhteensä 11 oppilasta, joista kahdeksan oli poikia ja kolme tyttöjä.

4.3 Tutkittavan oppitunnin tuntisuunnitelma

Tutkimuksen kohteena oleva 45 minuutin pituinen oppitunti koostui kolmesta osiosta. Ensimmäinen osio sisälsi edellisen oppitunnin kotitehtävän, yhtälön $x + 7 = 10$ vaakamallin avulla tehdyn ratkaisun tarkistamisen.

Toinen osio oli varsinainen oppitunnin aihe. Oppilaille jaettiin oppitunnin monistemateriaalit. Materiaali koostui kolmesta eritasoisesta sarjasta yhtälöitä. Ensimmäinen sarja oli perustehtäviä, toinen sarja helppoja yhtälöitä ja kolmas sarja vaativia yhtälöitä. Opettaja ohjasi tässä vaiheessa pienryhmän valitsemaan tasolleen sopivan sarjan ja ratkaisemaan yhtälöitä lopputunnin pienryhmissä. Pienryhmille jaettiin vain yksi ruutupaperiarkki, jolle ryhmän oli yhteistuumin tuotettava yhtälöille ratkaisut. Taulukossa 1 on esitetty oppilaille jaetut yhtälösarjat.

Taulukko 1: Oppitunnin yhtälösarjat

Sarja 1	**Sarja 2**	**Sarja 3**
$x + 7 = 10$	$2x + 4x = 12 + 6$	$0,3y + 0,2 = 1,1$
$2x + 4 + 8 = 20$	$4x + 6 = 22$	$4x + 3x + 5x + 4 = 3x + 5x + 16$
$4x + 3x = 21$	$15x + 10 = 5x + 20$	$\frac{x}{2} - 3 = 10$
$5x = 45$	$6x - 5 - 37 = 0$	$6y + 5 = 10y + 3$
$\frac{x}{2} = 4$	$\frac{x}{3} - 9 = 2$	$3 - \frac{x}{4} = 3 + 4 - 8$
$x + 30 = 120 + 50$	$2 = x - 3$	$99 - 3x - 111 = -75 - 4x$
	$20x + 4 = 15 + 9$	

Tämän lisäksi jos oppilailla oli aikaa ja valittu tehtäväsarja saadaan laskettua loppuun, oli tehtäväsarjojen lisäksi yksi jokeritehtävä. Jokeritehtävä oli esitetty tehtäväsarja taulukon perässä seuraavasti:"Ratkaise yhtälöstä $\frac{x}{a} + b = c$ muuttuja x, kun kirjaimet a, b ja c ovat vakioita (eli joitakin lukuja)". Yhtälönratkaisemisen tueksi oppilaille jaettiin edellisellä oppitunnilla läpikäydyistä muunnoksista moniste (kuva 1), jossa kuvattiin mitä yhtälöille saa tehdä.

Lopputunti eli kolmas osio koostui hymiötestien jakamisesta sekä niiden täyttämisestä. Hymiötestiin vastattiin aina käydyn oppitunnin perusteella.

Yhtälönratkaisijan muunnokset

Yhtälöä ratkaistessasi voit tehdä vain niitä muunnoksia, jotka säilyttävät yhtälön tasapainon:

Muunnos 1: Yhtälön vasemmalle ja oikealle puolelle voidaan LISÄTÄ tai VÄHENTÄÄ sama termi.

Muunnos 2: Yhtälön vasen ja oikea puoli voidaan JAKAA tai KERTOA samalla nollasta eroavalla termillä.

Muunnos 3: Samanmuotoiset termit voidaan YHDISTÄÄ eli laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

Muunnos 4: SULKULAUSEKKEET kerrotaan auki tai jätetään kertomatta auki, tilanteesta riippuen.

Eri ratkaisutavoissa muunnoksia käytetään eri järjestyksissä.

Kuva 1: Muunnosmoniste

Seuraavan tunnin kotitehtävät jaettiin oppilaille hymiötestien täytön yhteydessä.

5 Tutkimuksen toteutus

Tutkimus on *kvalitatiivinen* eli laadullinen tapaustutkimus, joka pyrkii kiinnostavan tapauksen kokonaisvaltaiseen kuvaukseen (mm. Syrjälä, Ahonen, Syrjäläinen & Saari, 1994; Tuomi, 2010). Tässä tutkimuksessa kiinnostava tapaus on yksi JYR-projektiin osallistunut seitsemäs luokka, jonka yhdestä oppitunnsta pyritään luomaan mahdollisimman yksityiskohtainen kuvaus.

5.1 Aineiston keruu

Tutkimuksen aineisto on hankittu yhdeltä JYR-projektiin osallistuneen yhteistyökoulun seitsemänneltä luokalta työskennellessäni JYR-projektissa tutkimusharjoittelijana keväällä 2015. Luokka oli yhteistyökoulujen luokista ainoa, jonka oppitunteja havainnoin koko JYR -projektin ajan. JYR-projekti kesti kyseisellä luokalla 12 oppituntia.

5.1.1 Havannointi ja videointi

Luokan JYR-projektin oppitunnit videoitiin käyttämällä yhtä kameraa luokan ja opettajan toiminnan kuvaamista varten. Tämän lisäksi pienryhmiä kuvattiin käytössä olevilla neljällä pienkameralla. Kamerat oli asetettu kuvaamaan ryhmien toimintaa, mutta kirjoitettu teksti ei ollut videolta nähtävissä. Kameroiden mikrofonit oli asetettu pöydän keskelle siten, että keskustelu kuului selkeästi pöydän äärellä keskustellessa.

Oppituntia havainnoitiin *osallistuvana havainnoijana* (Grönfors, 2001, 131), mikä käytännössä tapahtui siten että havannoinnin lisäksi tutkija auttoi oppitunnilla pienryhmää etenemään yhtälönratkaisussa apuopettajan tavoin. Havainnoinnilla saatiin muistiinpanoja ja muistikuvia käydystä oppitunnista, jotka olivat tukena pienryhmien työskentelyn tarkempaa analyysia tehdessä. Videomateriaaleilta eivät esimerkiksi oppilaiden tekemät yhtälönratkaisut näkyneet, siksi havainnoinnen tehdyt muistiinpanot ja muistikuvat oli tärkeänä tukena selkeän kuvan pienryhmien yhtälälönratkaisun vaiheista luomiseen.

Havannointi paikan päällä keskittyy usein vain johonkin tiettyyn asiaan, ja siksi videointi on hyvä tapa saada kokonaiskuvaa. Videointi antaa lahjomattoman kokonaiskuvan tapahtumista ja niiden kulusta, mutta sillä on myös haittapuolensa. Oppilaiden käyttäytyminen tai keskittyminen voi muuttua kuvattaessa enemmän kuin tutkijan läsnäolon vaikutuksesta. (Vienola, 2005). Kameroiden aiheuttamaa haittavaikutusta pyrittiin vähentämään asentamalla ne valmiiksi oppituntia edeltävän välitunnin aikana. Tutkimuksen kohteena ollut oppitunti oli JYR -projektiin liittyvistä neljäs, joten oppilaat olivat ehtineet tottua ajatukseen, että heitä videoitiin ja tutkijat seurasivat heidän työskentelyään.

5.2 Tutkimusmetodit

Tutkimuksen tarkoituksena on luoda mahdollisimman perusteellinen kuvaus aiheesta (Eskola & Suoranta 1998, 18). Kattavaa kuvausta tavoitellessa keskitytään yhteen oppituntiin.

Pienryhmien keskustelut litteroitiin pienkameroiden videoaineiston pohjalta. Keskustelut litteroitiin puhekielellä, kuten oppilaat itse olivat sanoneet. Osa keskusteluista jätettiin litteroimatta, jos ne eivät liittyneet oppituntiin. Esimerkiksi yhden pienryhmän jäsenet keskustelivat mopojen viritysmahdollisuuksista. Tapaustutkimuksen kannalta merkittäviä asioita eivät myöskään olleet äänenpainot tai voimakkuudet, joten näitä ei litterointiin erikseen merkitty. Videoita litteroitiin yksi pienryhmä kerrallaan. Litteroidessa merkittiin, mistä yhtälöstä oli keskustelussa kyse, keskustelun kokonaiskesto ja lopuksi rinnakkain käyty keskustelu ja tutkijan siitä tekemät matemaattiset havainnot. Seuraavassa taulukossa 2 on esimerkki aineiston litteroinnista ryhmän C kahden pojan Masin ja Pasin käymästä keskustelusta liittyen yhtälöön $\frac{x}{3} - 9 = 2$. Oppilaiden nimet keskusteluun on muutettu.

Taulukko 2: Pienryhmän C keskustelu yhtälöstä $\frac{x}{3} - 9 = 2$

Litteroitu puhe	**Matemaattiset havainnot**
Pasi: Mitää? **Masi**: Nii-i **Pasi**: Siitä pitää jotenkin saada 11. kolme kertaa 11 . . . 33. Ei ei voi olla. . . Eikun on se. **Masi**: Häh? **Pasi**: Se on 33. x on yhtä kuin 33. **Masi**: Oletko sinä 33? **Pasi**: On se. x on 33. **Masi**: Okei, jos Pasi niin sanoo.	Yhtälön ratkaisuksi päätellään luku 33, kun muunnoksia on puheesta päätellen käytetty oikein. Huom! Paperille kirjoitettiin ainoastaan yhtälön alle ratkaisuksi $x = 33$.

5.2.1 Videoiden sisällönanalyysi

Aineistolähtöisessä analyysissä teoria nostetaan esille aineistosta, eikä se ole etukäteen sovittavissa. Aineistolähtöistä analyysia tehdään tutkimalla alkuperäistä aineistoa käyttäen apuna eri analyysiyksiköitä, jotka valitaan tutkimuskysymykselle sopivasti. Aluksi aineistosta haetaan kaikki tutkimuskysymykseen liittyvät kiinnostavat kohdat ja näitä aletaan pelkistämään sekä yhdistelemään yhteisiin ryhmiin. Ryhmille eli alaluokille annetaan kuvaava nimi, joita aletaan yhdistellä yläluokiksi. Yläluokat nimetään näitä kuvaavasti ja lopulta yläluokat yhdistetään pääluokkiin, joka voi olla tutkimuksen tulos. (Tuomi, 2007, 129-130.)

Tässä tutkimuksessa aineistolähtöistä sisällönanalyysia neljältä pienryhmältä litteroituihin keskusteluihin toteutettiin seuraavasti. Aluksi jaoteltiin pienryhmien yhtälöihin liittyvät keskustelut yksi yhtälö kerrallaan. Kun keskustelua tietystä yhtälöstä tutkittiin, alettiin pelkistämään siitä tutkijan havainto yhtälönratkaisun matemaattisesti etenemisestä sekä keskusteluun kulunut kokonaisaika.

Pelkistettyä kaikkien yhtälöiden matemaattiset havainnot alettiin näitä tarkastella lähemmin. Pelkistettyjä matemaattisia havaintoja luokiteltiin omiksi luokikseen. Joihinkin yhtälöihin liittyi useampi erilainen matemaattinen havainto. Matemaattisen havainnon muuttuessa merkittiin tämä tietyn yhtälön yhtälönratkaisuun kuluneeseen ajan aikajanalle. Toisin sanoen lähestymistapoja tietylle yhtälölle pystyy samassa keskustelussa olemaan useampia.

Lopuksi löydettyjä, nimettyjä luokkia analysoitiin lisää ja ne yhdistettiin, jos mahdollista, niitä kuvaaviin pääluokkiin. Tässä tutkimuksessa ei Tuomen mainitsemaa luokittelua alaluokasta, yläluokan kautta pääluokkaan jouduttu tekemään (Tuomi, 2007, 130), vaan alaluokat tai mahdollinen yläluokka olivat suoraan tutkimuksen lopputuloksia. Lopputulokset aineistolähtöisessä analyysissa kuvasivat erilaisia lähestymistapoja, joita pienryhmät kuvatulla oppitunnilla käyttivät.

5.3 Tutkimuksen eettisyyden huomioonottaminen

JYR-projektin pilottivaiheen toteuttamiselle oli haettu Oulun kaupungilta tutkimuslupaa, joka oli hyväksytty. Tämän lisäksi tutkimukseen osallistuneilta niin opettajilta kuin tutkittavien luokkien oppilailta sekä heidän huoltajiltaan oli kirjallisesti hankittu lupa tutkimukseen osallistumisesta. Oppilaiden kohdalla lupaa kysyttiin videoimiseen, äänittämiseen, observointiin, JYR-projektin aikana tehtyjen aineistojen keräämiseen sekä näin hankitun aineiston hyödyntämiseen esimerkiksi joko opetuksellisessa tarkoituksessa tai tutkimuksissa.

Osallistuneelta ryhmältä kaikilta oli lupa osallistua tutkimukseen ja tuotettujen aineistojen käyttöön tutkimusta tehdessä. Videoinnin oli osa tutkittavan ryhmän oppilaista kieltänyt, joten he olivat JYR-projektin ajan omana ryhmänään luokassa siten, etteivät esiintyneet kuvatuilla videoilla. Kun lupa tutkittavilta ja oppilaiden tapauksessa myös huoltajilta on saatu, on varmistettu tutkittavien vapaaehtoisuus ja tietoisuus käynnistyvästä JYR-projektista (vrt. Tuomi, 2007, 15).

Tutkimuksessa noudatetaan tutkittavien anonymiteetin suojaamista ja tietojen luottamuksellista käyttöä ja säilytystä (Eskola & Suoranta, 1998, 56-57). Tutkimusaineistoa säilytetään siten, että siihen pääsy on ainoastaan tutkimusta tekevillä henkilöillä tarvittaessa. Erilaisissa otteissa keskusteluista tai JYR-projektin esittelyssä ei käytetä tutkittavien nimiä tai koulua. Tutkimusta tehdessä aineistoista ei huomioitu kuin tutkimuskysymykseen liittyvät keskustelut ja yksityisasioihin liittyvät keskustelut jätettiin huomiotta ja litteroimatta.

6 Tutkimustulokset ja analysointi

Luvussa kootaan tutkimuskysymykseen nojaten seuratun luokan pienryhmien ensimmäisiä lähestymistapoja yhtälönratkaisuun. Pienryhmien sisällä oleviin vuorovaikutussuhteisiin tai rooleihin ei tutkimuksessa oteta kantaa, vaan pyritään keskittymään matemaattiseen aspektiin. Matemaattisessa puolessa huomiotta jätetään pienryhmien lähestymistapojen oikeellisuus tässä vaiheessa. Oppitunnilla oli opettajan lisäksi kaksi JYR-projektin jäsentä seuraamassa ja tukemassa pienryhmien ensilähestymistä yhtälönratkaisuun, jonka johdosta lopputulokset olivat lähes poikkeuksetta oikein.

6.1 Pienryhmien lähestyminen yhtälönratkaisuun

Tutkimuksen kohteena olevan oppitunnin alusta kului alkuhälinään sekä edellisen tunnin kotitehtävän tarkastamiseen aikaa noin 15 minuuttia. Tämän jälkeen pienryhmät saivat yhden ruutupaperiarkin, jolle he voivat ratkaista yhtälöitä, sekä kolme yhtälösarjaa sisältävän monisteen ratkaistavaksi (Taulukko 1). Pienryhmät ratkaisivat sarjan 2 kaikkia seitsemää yhtälöä sekä sarjassa 1 esiintyviä yhtälöitä $4x + 3x = 21$ ja $\frac{x}{2} = 4$, eli yhteensä yhdeksää erilaista yhtälöä. Yhtälöihin liittyen oli neljällä pienryhmällä yhteensä 21 keskustelua. Osa pienryhmistä saattoi ratkaista muitakin kuin edellä mainittuja yhtälöitä. Huonon kuuluvuuden tai matemaattisen havainnon puutteen vuoksi nämä yksittäistapaukset jätettiin huomiotta. Yhtälöiden ratkaisemiseen pienryhmät käyttivät koko jäljellä olevan lopputunnin (n. 30 minuuttia) ja hymiötestien täyttö sekä seuraavan kotitehtävän saaminen tapahtui jo välitunnin alettua.

6.1.1 Pienryhmä A *"Miksi?"*

Pienryhmä A muodostui kolmesta pojasta, Niilo, Ossi ja Matti. He käyttivät yhtälöiden ratkaisemiseen lähes koko sille varatun ajan eli 30 minuuttia. Yhtälöitä he ratkaisivat tänä aikana kuusi kappaletta sarjan 2 yhtälöistä, eli kaikki paitsi yhtälön $20x + 4 = 15 + 9$.

Pienryhmän toimintaa oppitunnilla kuvaa hyvin *yritys ja erehdys*-taktiikka. Pienryhmä valitsi ensimmäisen yhtälön $2x + 4x = 12 + 6$, jota he yrittivät ratkaista yhtälöä aktiivisesti erilaisilla lähestymistavoilla. Yhtälön ratkaisemiseksi seuraavaksi lähestymistapa, joista keskusteltiin.
Ossi:*Että vähennetään nelonen noista molemmista.*
Matti:*Miksei sitä voi vain tehdä, että kaksi kertaa kolme plus neljä kertaa kolme.*
Ossi:*Eikun otetaan* $4x$ *pois ja toisesta* 12*. Ei me voida tehä sillä lailla. Me*

ei voida ottaa molemmista $4x$ *tai* 12 *pois.*
Keskustelusta oli havaittavissa monia erilaisia lähestymistapoja, joita ryhmä yhdessä pohti ja hylkäsi sitten kokeilun jälkeen. He käyttivät siis niin sanottua yritystä ja erehdystä, jota kutsun *ongelmalähtöiseksi lähestymistavaksi.* Pienryhmä yrittää ja kokeilee useita lähestymistapoja ja osoittavat sinnikkyyttä sopivien välivaiheiden löytämiseksi. Sinnikkyyttä havainnollistaa keskustelun eräs pätkä, jossa aluksi Niilo toteaa, että *"No sehän on kolmonen, miten siitä saisi kolmosen?".* Tähän ehdotetaan joko yhtälön alle kirjoitettavaksi lukua kolme tai yhtälön kertomista, koska x:n arvo tiedetään, johon Niilo vastaa: *"Mutta ei me vielä tiedetä sitä, me ollaan päätelty se".* Loppujen lopuksi tutkija saapuu pienryhmän avuksi opastamaan muunnosten käyttöä yhtälölle ja yhtälö saadaan ratkaistua tutkijan johdolla matemaattisia välivaiheita käyttäen.

Opettajan antama ohjeistus muunnosten käytöstä ensimmäisessä yhtälössä auttoi pienryhmää. He saivat ilman avustusta laskettua kaikki samantyyliset yhtälöt, joissa yhtälön ratkaisemiseen tarvittiin muunnoksia termien yhdistäminen, termien vähentäminen ja yhtälön jakaminen puolittain. Tällaista lähestymistapaa, jossa käytettiin muunnoksia ja matemaattisia välivaiheita yhtälönratkaisemiseksi kutsutaan *täydelliseksi lähestymistavaksi.* Ryhmä käytti jossain vaiheessa onnistuneesti välivaiheita myös useampi kerralla, kuten yhtälön $15x + 10 = 5x + 20$ keskustelusta voidaan huomata:
Niilo ja Ossi: *Miinustetaan kummastakin 10.*
Niilo: *Eka laita 15x... miinus viisi.*
Ossi: *Määkin tajusin tuon... miinus 5x, plus 10.*
Niilo: *Plus 10...*
Ossi: *Sitten on yhtä suuri kuin*
Niilo:*Miinus 10, miinus 10!*
Matti: *Miinus 10 on yhtä suuri kuin...*
Ossi: *Yhtä suuri kuin...*
Matti: *Tuleeko yhtä suuri kuin?*
Niilo ja Ossi: *Joo joo...*
Niilo ja Ossi: *5x miinus 5x ja sitten plus 20 miinus 10.*

Yhtälöiden $6x - 5 - 37 = 0$ ja $\frac{x}{3} - 9 = 2$ lähestymisessä oli vastaavanlaisia piirteitä kuin ensimmäisen yhtälön tapauksessa. Sopivan lähestymistavan löytymiseksi kokeiltiin useampaa muunnosta ja jossain vaiheessa oikea ratkaisu yhtälön ratkaisemiseksi oli saatu pääteltyä. Kummankin yhtälön tapauksessa tutkija tai opettaja kävi ohjeistamassa pienryhmää muunnosten käyttöön ja yhtälöt saatiin ratkaistua.

Pienryhmän toiminta oppitunnilla vaikutti hyvin toimivalta. Omatoimista yritystä yhtälöiden ratkaisemiseen löytyi ja keskusteluissa lähestymistapoja kyseenalaistettiin *"miksi?"*-kysymyksillä.

6.1.2 Pienryhmä B *"Onko tuo nyt se vastaus?"*

Pienryhmässä B oli kolme tyttöä Anni, Sini ja Kaisa. Pienryhmä ratkaisi oppitunnin aikana kolmea sarjan 2 ensimmäistä yhtälöä. Yhtälönratkaisun aikana pienryhmä B:tä muun muassa naapuriryhmä keskeytti, joten itse eri yhtälöiden ratkaisemiseen käytettiin aikaa hieman reilu 24 minuuttia. Pienryhmällä oli vaikeuksia edetä itsenäisesti ja tämän vuoksi opettaja tai projektin työryhmän jäsen oli usein ohjaamassa toimintaa. Apu oli läsnä pienryhmälle hieman vajaan 19 minuutin ajan. Loppujen lopuksi pienryhmä käytti itsenäiseen työskentelyyn aikaa reilun 10 minuuttia.

Keskusteluista oli havaittavissa virheellisiä tapoja yhtälönratkaisuun. Esimerkiksi yhtälön $2x + 4x = 12 + 6$ ratkaisussa ensimmäinen lähestymistapa oli ratkaisun päätteleminen seuraavasti:

Sini:*Eli kaksi kertaa kaksi on neljä plus neljä kertaa kaksi on kahdeksan eli siitä tulee 12.*

Tähän toinen ryhmäläinen kommentoi seuraavasti:

Kaisa:*Joo...Hyvin laskettu, minä en itse jaksa yhtään.*

Yhtälönratkaisemisen taustalla on siis ollut osittainen päättely, jossa päätelty vastaus on sijoitettu alkuperäiseen yhtälöön, mutta yhtäsuuruusmerkin merkitys on pienryhmälle ilmeisesti puutteellinen. Ensimmäinen yhtälö saadaan lopulta ratkaistua opettajan avustuksella välivaiheita käyttäen, että $x = 3$, josta eräs ryhmäläinen kysyy *"Onko tuo nyt se vastaus?"*

Seuraavassa yhtälössä opettaja auttaa pienryhmää pääsemään alkuun yhtälön $4x + 6 = 22$ ratkaisussa. Opettaja kyselee aluksi mitä yhtälölle sai tehdä, miinustamista ehdotetaan. Tarkemmin aluksi ehdotetaan x:n miinustamista, mutta tästä ajatuksesta opettaja ohjaa pienryhmää tutkimaan materiaalia ja miettimään, mitä otetaan pois. Tässä vaiheessa eräs ryhmäläinen ehdottaa yhtälön ratkaisuksi luvun neljä, perustellen sen sijoittaen päätellyn luvun alkuperäiseen yhtälöön. Opettaja ohjeistaa kuitenkin käyttämään välivaiheita tämän varmistamiseksi ja kertoo että luku kuusi olisi vähennettävä yhtälöstä puolittain. Pienryhmällä on vaikeuksia tämän kirjoittamisessa, joten opettaja varmistaa ja lähes sanelee tämän välivaiheen pienryhmälle. Kun yhtälö oli saatu muotoon $4x = 16$ opettajan avustuksella tytöt jäävät yksin ja huomio keskittyy muuhun toimintaan ja yksinkertaisen yhtälön ratkaisua lähestytään osittaisella lähestymistavalla, missä valtaosa yhtälönratkaisusta tapahtui keskustelussa ilman välivaiheita paperille. Pienryhmä toteaa, että lukua neljä pitäisi kertoa luvulla neljä, jotta tulokseksi saataisiin luku 16. Tämän ratkaiseminen välivaihein ei tahdo onnistua ja ainoa ehdotus tähän on yhtälön jakaminen puolittain luvulla kuusi, koska edellisessä tehtävässäkin lopussa oli jaettu luvulla kuusi. Tämän jälkeen ryhmä keskittyy toisessa ryhmässä vierailuun ja muihin asioihin. Tutkija käy lopulta selvittämässä pienryhmältä, miksi nämä ovat olleet jakamassa yhtälöä luvulla kuusi ja selventää parhaansa mukaan, miksi lopussa jaetaan x:ää sisältävän termin kertoimella.

Vastaava lähestymistapa jatkui kolmannessa yhtälössä $15x+10 = 5x+20$. Pienryhmä lähtee itsenäisesti osittaisella päättelyllä miettimään, mikä x:n arvo pitäisi olla. Eräs pienryhmän jäsenistä laskee, että molempien puolien arvoksi saadaan 25 tai $25x$, josta yhtälönratkaisuksi arvellaan joko 0, 25 tai 1. Opettaja saapuu tässä vaiheessa ohjeistamaan pienryhmää ja selventämään ettei erimuotoisia termejä pysty alussa yhdistämään ja tätä kautta lähestymään yhtälönratkaisua. Erinäisten opettajan ohjeistuksen ja poissaolon aikana pienryhmä ei etene itsenäisesti, muuten kuin kirjoittamalla välivaiheen, jotka opettaja on ennen siirtymistään toiseen pienryhmään opastanut pienryhmälle.

Pienryhmällä oli hankaluuksia kaikkien kolmen yhtälön kohdalla. Etenemistä itsenäisesti ei tapahtunut lainkaan sallittuja muunnoksia käyttäen ilman opettajan tai tutkijan apua. Pienryhmällä oli välillä ongelmanratkaisullista lähestymistä, kuten yhtälössä $4x + 6 = 22$ oli havaittavissa, kun yhtälönratkaisua itse pohdittiin päättelemällä ja miettimällä, miten edettiin. Ilmeisesti pienryhmä koki yhtälöt vaikeiksi, koska kolmannen yhtälön jälkeen Sini totesi, että *"Sitten joku helppo"*. Enempää yhtälöitä pienryhmä ei kuitenkaan ehditty lopputunnin aikana alkaa ratkaisemaan.

6.1.3 Pienryhmä C *"No mistä sen niin päättelit?"*

Pienryhmässä C oli kaksi poikaa, Masi ja Pasi. Keskusteluita saatiin litteroitua seitsemälle eri yhtälölle. Masin ja Pasin lähestymistä yhtälönratkaisuun kuvaa hyvin *osittainen päättely*. Tällä tarkoitetaan lähestymistapaa, jossa litteroinnissa on havaittavissa yhtälölle ratkaisu. Yhtälölle saatua ratkaisua ei kuitenkaan matemaattisesti välivaihein muunnoksilla paperille perustella. Osittainen päättely on voitu litterointien perusteella jakaa kahteen erilaiseen luokkaan. Aiemmin esitetyssä taulukossa 2 on esimerkki heidän lähestymisestään yhtälönratkaisuun. Esimerkissä päättelyn taustalla on kuitenkin havaittavissa muunnosten oikeaoppista käyttämistä, voidaan ajatella, että luku kaksi on aluksi lisätty yhtälön molemmille puolille oikein. Tämän jälkeen on yksinkertaisempaan yhtälöön pohdittu oikeaa ratkaisua esimerkiksi hyödyntämällä apukysymystä: "Jotta saadaan luku kolme, pitää luku 11 jakaa luvulla, mikä?". Tämä on tutkijan ehdotus yhtälönratkaisun taustalla olevasta päättelystä. Pienryhmä on saanut pääteltyä yhtälölle ratkaisuksi luvun 33 ja kirjoittaa ainoastaan tämän $x = 33$ yhtälön ratkaisuksi. Voidaan siis ajatella, että lähestymistapana on ollut osittaista päättelyä, jossa on muunnoksien käyttö ollut keskustelun tausta-ajatuksena.

Toisaalta poikakaksikko käytti myös toisentyyppistä osittaista päättelyä. Esimerkiksi yhtälölle $15x + 10 = 5x + 20$ ovat pojat päätelleet ratkaisuksi $x = 1$, jota Pasi perustelee Masille seuraavasti:”*No voihan se, ku kato tuohon laittaa yks, niin tosta tulee* 25 *ja tostakin tulee* 25”. Tässä osittaisessa päättelytavassa päätelty ratkaisu on sijoitettu alkuperäiseen yhtälöön, jolla päätellyn ratkaisun oikeellisuutta on perusteltu.

Saatuaan perussarjan eli sarjan 2 laskettua he siirtyvät tarkastelemaan helpon sarjan eli sarjan 1 tehtäviä eli yhtälöitä $x + 7 = 10$ ja $x - 2 = 0$. Molempien yhtälöiden keskimääräinen ratkaisuaika oli viidestä kymmeneen sekuntia, mutta koska pienryhmä ei tarkemmin perustellut lähestymistapaansa keskusteluissaan, jätettiin nämä suppeat keskustelut huomiotta yhteenvedossa pienryhmien ratkaisemista yhtälöistä. Litterointien perusteella he käyttivät vajaan kymmenisen minuuttia itse yhtälöiden ratkaisemiseen ensimmäisellä kerralla ennen uudelleentarkasteluja.

Pienryhmän edetessä vauhdilla jäi pienryhmällä myös paljon aikaa muuhun keskusteluun tehtävien välillä. Välillä opettaja tai JYR-projektin jäsen kävi ohjeistamassa kaksikkoa palaamaan ratkaisemiensa yhtälöiden pariin ja kirjoittamaan perustelut sille, kuinka olivat löytämäänsä ratkaisuun päätyneet. Pasi ja Masi palasivat tarkastelemaan muutamia sarjan 2 yhtälöitä, mutta lähestymistavat eivät muuttuneet aiemmista. Opettaja toteaa aivan tunnin lopussa pienryhmän vastauspaperin vilaisemisen jälkeen, että *"joo, mutta meidän pitää sun kanssa vielä miettiä tuota, että millä systeemillä me ruvetaan merkkaamaan niitä, kun ei voi vaan yhtäkkiä vetästä sitä pääteltyä numeroa sinne, kun siellä ei näy sitä..."*. Tähän pienryhmän Pasi toteaa perusteluksi, että *"Voihan, kun rupee testaamaan sen numero, numero kerrallaan ja sitten kun se oikea numero löytyy niin ympyröi sen ja laittaa että oikein! Ding ding ding!"* Tässä vaiheessa jaettiin jo kotitehtävämonisteita ja Pasin perusteluun heidän pääsääntöiselle lähestymistavalle eli osittaiselle päättelylle ei annettu palautetta.

6.1.4 Pienryhmä D *"Pitääkö nää kaikki tehä tälä lailla?"*

Neljänteen pienryhmään D kuului kolme poikaa Risto, Jussi ja Miko. Pienryhmä ratkaisi oppitunnin aikana viittä yhtälöä, kolmea ensimmäistä sarjan 2 yhtälöä, joiden jälkeen ryhmä ohjattiin opettajan toimesta laskemaan helpon sarjan eli sarjan 1 tehtäviä. Näistä pienryhmä ehti ratkaista yhtälöitä $3x + 4x = 21$ ja $\frac{x}{2} = 4$.

Opettaja käy aluksi varmistamassa ryhmältä lähtevätkö he käyttämään yhtälölle $2x + 4x = 6 + 12$ suoraan matemaattisia välivaiheita vai vielä edellisellä tunnilla esimerkeissä esiintynyttä vaakamallia. Tähän pienryhmässä todetaan, että *"Me osataan tehdä se itsenäisesti."*. Opettaja poistuu paikalta ja muun toiminnan jälkeen pienryhmä pääsee alkuun yhtälöiden ratkaisemisessa vaiheeseen, että $6x = 18$. Paperille tämä on esitetty vaakamallin avulla oikeaoppisesti. Tästä kuitenkin täydellinen lähestymistapa siirtyy arvailuksi, mitä x:llä tarkoitetaan ja heitellään lukuarvoja perustelematta niitä tarkemmin. Muun toiminnan jälkeen pienryhmä palaa vielä "viimeistelemään"yhtälön paperille seuraavasti:

Risto:*Okei paljon kuusi plus 18?*

Miko: *24...24x.*

Risto: *24.*

Miko: *24x.*

Risto: *Noniin, sun vuoro ratkaista seuraava!*

Tähän yhtälöön ei palattu enää missään vaiheessa myöhemmin, vaan yhtälön ratkaisuksi pienryhmällä oli yhdelle vaa'alle esitetty palikka 24x.

Toiseen yhtälöön $4x + 6 = 22$ liittyi lyhyt keskustelu. Tässä Miko lähestyy yhtälönratkaisua piirtämällä vaakamallin esitystä alkutilanteesta. Yhtälönratkaisua ei kuitenkaan jatketa paperille, vaan lähestymistapa on osittaista lähestymistapaa, sillä Miko perustelee muille ryhmille yhtälönratkaisuksi *"Siis x on niin kuin.. 22 miinus kuus on 16.* $4x$ *eli x on neljä."* Paperille kirjoitetaan yhtälölle ratkaisuksi $x = 4$ ja keskustelusta päätellen osittaisen päättelyn tukena on muunnoksia käytetty.

Toisaalta osittaista päättelyn toista tapaa on käytetty yhtälön $15x+10 = 5x + 20$ ratkaisemiseen. Tätä yhtälöä ratkaistessaan Miko päättelee keskustelun hyvin alussa x arvon olevan yksi. Tätä hän perustelee seuraavassa keskusteluotteessa:

Miko: *Eli x on yksi. Ja kun viisi kertaa yksi on viisi plus 20 on 25. Kato minä näytän*

Jussi: *Meikä ei pysynyt yhtään kärryllä.*

Risto: *Mä en kyllä yhtään tajunnut tuota sun juttua.*

Miko: $15x$...10...$15x$ *plus* 10 *on yhtä suurta kuin* 25 *ja sitten* $5x$ *plus 20 on yhtä kuin 25... x on yksi.*

Tämän jälkeen yhtälön ratkaisuksi Risto ehdottaa vielä lukua nolla, mutta tämä ajatus hylätään. Keskustelu siirtyy hetkeksi muuhun, minkä jälkeen opettajaa pyydetään katsomaan, onko yhtälö ratkaistu oikein. Opettaja toteaa perustelun päätteeksi, että päättelylle tarvitaan matemaattiset operaatiot, jotta tiedetään, mistä tämä juttu on saatu. Jutulla tässä tarkoitetaan yhtälön ratkaisua. Opettajan ohjeistamana käydään yhtälö välivaiheittain lävitse, Miko ja Risto osallistuvat kohtuullisesti vuoropuheluun opettajan johdatellessa etenemään, että pelkkiä x sisältäviä termejä on vasemmalla puolella ja vakioita oikealla puolella. Keskustelun välillä kuuluu kuitenkin kommentteja **Miko**:Liian vaikeeta... ja **Risto**: *Miks matikassa ees opetetaan yhtälöitä, kun ei niitä tarvii missään työelämässä?*. Kaikesta huolimatta yhtälön ratkaisuksi saadaan lopulta $x = 1$, johon Miko toteaa *"Noniin, mä tiesin! Että x on yks!*

Lopputunniksi opettaja ohjaa pienryhmän tekemään helpon sarjan tehtäviä. Hän ohjeistaakin yhtälön $3x+4x = 21$ alkuun. Keskustellessa pienryhmä pääsee tilanteeseen, että $7x = 21$, mutta opettajan poistuessa paikalta kaikkia välivaiheita ei aivan saada kirjoitettua. Yhtälölle saadaan kuitenkin tästä välivaiheesta selvitettyä, että $x = 3$, kun opettaja käy avustamassa ryhmää. Muuten lopputunti kuluu omiin keskusteluihin ja tutkijan kanssa keskustellen välivaiheilla selvitetään ratkaisu yhtälölle $\frac{x}{2} = 4$, joka ei ilman edennyt lainkaan.

Loppujen lopuksi pienryhmä ratkaisi viittä eri yhtälöä, monipuolisesti erilaisilla lähestymistavoilla. Kommenteista päätellen pitkien matemaattisten välivaiheiden kirjoittamiseen turhauduttiin. Itsenäiseen työskentelyyn käytettiin aikaa noin neljä minuuttia, kun avustuksella yhtälöitä ratkottiin vajaan viidentoista minuutin ajan. Kokonaiskestoltaan pienryhmä käytti yhtälöiden ratkaisemiseen aikaan vajaa 20 minuuttia ja aikaa kului muihin keskusteluihin aikaa, kun yhtälö aina toisinaan oli saatu valmiiksi ellei toimintaa oltu seuraamassa.

6.2 Yhteenveto eri pienryhmien lähestymistavoista ja ajankäytöstä

Ajankäyttö ja työskentelytavat poikkesivat toisistaan eri pienryhmillä. Seuraavaan taulukkoon 3 on koottu pienryhmien käyttämä aika varsinaiseen yhtälönratkaisuun sekä kuinka paljon opettaja tai JYR-projektin jäsen tuki heitä.

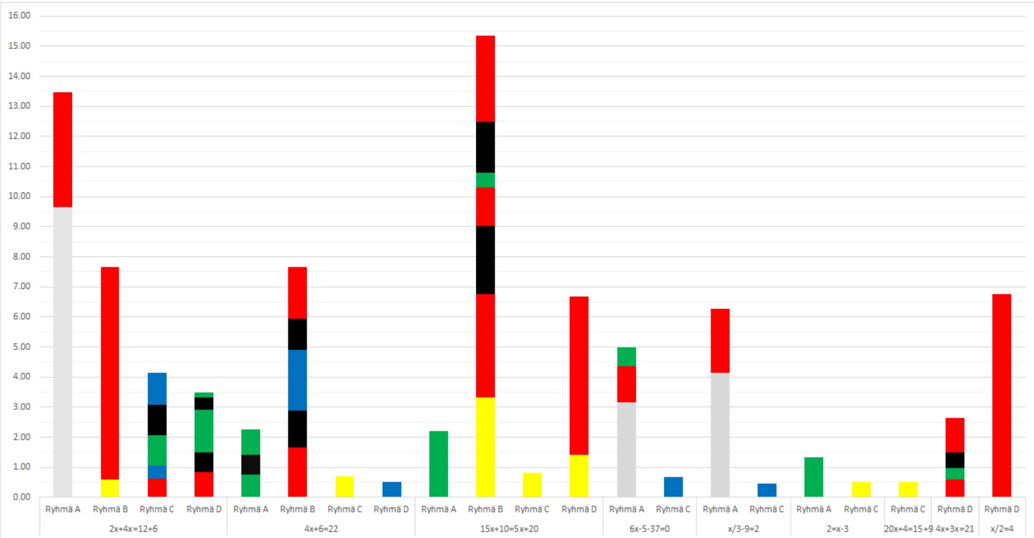
Taulukko 3: Pienryhmien yhtälönratkaisuun käytetyt ajat (muodossa min:s)

Pienryhmä	Yhtälönratkaisuun käytetty aika	Avustettu
A	29:40	7:09
B	24:24	18:53
C	6:15	0:37
D	18:27	14:35

Pienryhmät A ja B käyttivät työskentelyyn varatusta ajasta eli 30 minuutista lähes koko ajan yhtälöiden parissa työskentelyyn. Pienryhmällä C työskentelyaikaan ei ole huomioitu kaikkia yhtälöiden uudelleen tarkasteluun kulunutta aikaa, joka olisi ollut vastaava kuin itse yhtälöihin kulunut aika.

Kyseisellä pienryhmällä aikaa kului huomattavasti aikaa muuhun toimintaan, kuten harrastuksista keskusteluun. Siksi yhtälöidenratkaisuun käytetty aika jäi erittäin pieneksi pienryhmällä C. Vastaavasti pienryhmällä D yhtälöidenratkaisuun kulunut aika vähentyi muun toiminnan johdosta, muttei niin paljon kuin pienryhmällä C.

Kuvaan 2 on työskentelyaika pienryhmäkohtaisesti sidottu lähestymistapaan, jota yhtälöä ratkaistessa on käytetty. Tämän lisäksi käytetty aika sekä lähestymistapa on jaoteltu yhtälöittäin, jota pienryhmä oppitunnin aikana ratkaisi.



Kuva 2: Ajankäyttöä

Pylväsdiagrammin pystyakselina on esitetty yhtälönratkaisuun käytetty aika muodossa (minuutit.sekunnit). Vaaka-akselilla puolestaan on esitetty 7 erilaista yhtälöä, joita oppitunnin aikana ratkaistiin. Lisäksi vaaka-akselilla omilla palkeilla on kuvattu eri pienryhmien käyttämä aika kunkin ratkaisemansa yhtälön kohdalla. Oppilaat etenivät yhtälöiden ratkaisemisessa vasemmalta oikealle (eli esimerkiksi kaikki ratkaisivat ensimmäisenä yhtälöä $2x + 4x = 6 + 12$ ja ratkaisivat sitten niin montaa yhtälöä, kuin oppitunnilla ehtivät). Palkkien värityksellä on kuvattu, millaista työskentelytapaa pienryhmä on käyttänyt eri vaiheessa tietyn yhtälön ratkaisua. Seuraavassa taulukossa 4 on jokaista väriä kuvaavat lyhyet kuvaukset, joita jo aiemmin eri pienryhmien oppitunnin kuvauksissa esiteltiin.

Taulukko 4: Kuvan 3 lähestymistapojen kuvaukset

Väri	**Työskentelytapa**	**Lyhyt kuvaus**
Musta	Muu toiminta	Pienryhmän muuta toimintaa, joka ei liity matematiikkaan.
Punainen	Ohjattu	Opettaja tukee pienryhmää yhtälönratkaisussa ja ohjaa muunnosten käyttöön sekä yhtälönratkaisun ymmärtämiseen.
Sininen	Osittainen lähestymistapa muunnosten avulla	Pienryhmä on saanut yhtälölle ratkaisun, joka on perusteltu sanallisesti. Keskustelussa havaittavissa muunnosten käyttöä.
Keltainen	Osittainen lähestymistapa sijoitusmenetelmällä	Pienryhmä on saanut yhtälölle ratkaisun, joka on perusteltu sanallisesti. Keskustelussa saatu ratkaisu on sijoitettu alkuperäiseen yhtälöön.
Vihreä	Täydellinen lähestymistapa	Pienryhmä käyttää muunnoksia ja välivaiheita yhtälönratkaisussa.
Harmaa	Ongelmalähtöinen lähestymistapa	Yhdistelmä osittaista sekä täydellistä lähestymistapaa. Pienryhmä on tehnyt useamman ratkaisuyrityksen päästäkseen lopulta ratkaisuun.

Pienryhmien lähestymistavat oppitunnilla voidaan jaotella kolmeen suurempaan yläluokkaan: osittainen, täydellinen sekä ongelmanlähtöinen päättely. Näistä osittaisella päättelyllä oli lisäksi kaksi alaluokkaa, joko muunnoksia hyödyntävä tai alkuperäiseen yhtälöön sijoittamista, perustelua tukena käyttävä tapa. Pienryhmien itsenäisissä lähestymistavoissa oli havaittavissa, että jokin lähestymistavoista oli ryhmällä ominainen, pääsääntöinen lähestymistapa yhtälönratkaisuun.

7 Tutkimuksen luotettavuudesta

Pohditaan tässä kappaleessa tutkimuksen luotettavuutta sen *validiteetin* ja *reliabiliteetin* sijaan, sillä ne soveltuvat lähinnä määrällisen eli kvantitatiivisten tutkimusten tarkasteluun (Tuomi, 2007, 150). Laadullisen tutkimuksen luotettavuutta selvittäessä korostuu ennemminkin sen sisäinen johdonmukaisuus eli *koherenssi* eri osioiden välillä sekä näiden yksittäisten osioiden, kuten aineiston keruun, kohteen sekä analyysin luotettavuus (Tuomi, 2007, 150-152). Näin ollen tutkimuksen luotettavuutta pohtiessa on pohdittava koko tutkimusprosessia, sekä tutkijan valintoja (Eskola & Suoranta, 1998, 211).

Tutkimuksen aineistonkeruu toteutettiin työskennellessäni JYR-projektissa. Aineistonkeruun aikana oman tutkimukseni tutkimuskysymys ei ollut vielä muotoutunut. Aineistonkeruun aikana päätettiin kuitenkin, että seuraisin yhden koulun JYR-projektin etenemistä koko projektin ajan. Tutkimuskohteen valinta oli näin ollen selkeä, koska ryhmä oli tuttu ja tottui läsnäolooni JYR-projektin aikana.

Laadullisessa tutkimuksessa yksikin tapaus voi olla riittävä (Tuomi, 2007, 142). Tässä tutkimuksessa useamman pienryhmän tarkastelu oli järkevää. Kaikilta JYR-projektin oppitunnin pienryhmiltä, videomateriaalit olivat tutkittavalta oppitunnilta käytössä, joten useamman pienryhmän tutkiminen oli myöhemmin mahdollista.

Videomateriaalin luotettavuuteen liittyy omat haittansa. Kuvattavien käytös voi videoinnin aikaan muuttua tai rikkoa intimiteettisuojaa (Vienola, 2005). Videointi oli tässä tutkimuksessa valtaosin onnistunutta. Neljän pienryhmän keskustelut lähestymistavoista eri yhtälöiden ratkaisuun olivat pääosin litteroitavissa videoiden perusteella. Aineistoon pystyi palaamaan aina tarvittaessa, mikä oli suuri etu videoinnissa (Tuomi, 2007, 139). Pienryhmät eivät myöskään osoittaneet merkkiä, että kamerat vaivaisivat heitä. Päinvastoin kameran kuullen puhuttiin matematiikkaan liittymättömistä asioista, jotka jätettiin tutkimuksessa omaan arvoonsa.

Tutkimuskohteeseen liittyvän aineiston laajuuden vuoksi tarkka tutkimuksen rajaus oli oleellista. JYR-projektin johdosta ryhmältä löytyi 12 oppitunnin videomateriaaleja sekä projektiin liittyneitä testejä. Tutkijan oman mielenkiinnon vuoksi keskityttiin yhteen oppituntiin, jossa yhtälöiden ratkaiseminen oli ensimmäistä kertaa pienryhmien tehtävänä. Oppitunnin pienryhmien videoiden keskustelut litteroitiin ja aineistoon palattiin useampia kertoja, jotta varmuus sen sisällöstä ja siitä tehdystä analyysista vastasivat toisiaan. Litteroinnista jätettiin pois epäselviä sekä henkilökohtaisia keskusteluosioita, joita ei tutkimuksessa pystynyt tai ollut oleellista hyödyntää.

8 Pohdinta ja johtopäätökset

Tutkimuksessa pyrittiin laadullisen tapaustutkimuksen avulla lisäämään ymmärrystä yhtälönratkaisun aloittamisesta. Mukana oli neljä pienryhmää, joiden ensimmäistä lähestymistä yhtälöiden ratkaisuun seurattiin yhden oppitunnin ajan. Aineiston sisällönanalyysissa voitiin luokitella kolme erilaista lähestymistapaa yhtälönratkaisuun. Täydellisessä lähestymistavassa yhtälönratkaisun muunnoksia ja välivaiheita kirjoitettiin matemaattisesti. Osittaisessa lähestymistavassa muunnoksien käyttöä havaittiin pääosin pienryhmän keskusteluissa ilman tarkempia välivaiheita paperille. Tähän liittyi kaksi alaluokkaa, jossa toisessa keskusteluissa ilmeni muunnosten käyttöä ja toisessa käytettiin sijoittamista alkuperäiseen yhtälöön perusteluna päätellylle vastaukselle. Ongelmalähtöisessä lähestymistavassa havaittiin useampaa ratkaisuyritystä sisältäen yrityksen ja erehdyksen kautta lähestymisestä. Tämä oli yhdistelmä osittaista ja täydellistä lähestymistapaa, ja siinä oli piirteitä ongelmanratkaisuprosessista. Filloy ja Rojano (1989) esittivät omassa tutkimuksessaan, että yhtälöitä lähestytään ensisijaisesti yritys-erehdysmetodeilla. Tässä tutkimuksessa se oli kuitenkin vain osa ongelmalähtöistä lähestymistapaa, eikä tätä esiintynyt kaikilla pienryhmillä. Yhtälönratkaisussa oli haasteita, mutta kaikki pienryhmät onnistuivat joidenkin yhtälöiden ratkaisussa vähintään opettajan avustamana.

Erilaiset yhtälönratkaisussa ilmenneet haasteet voivat liittyä siirrosvaiheeseen aritmetiikasta algebraan. Varhaisessa vaiheessa hyvin käydyt aritmeettiset operaatiot voivat helpottaa myöhemmin siirtymistä operoimaan algebrallisesti (Herscovics & Linchevski, 1994). Aritmeettisten taitojen hyvä hallinta on lähtökohta algebrallisen ajattelun kehittymiselle (Kieran, 2004), mutta pienryhmien lähestymistapojen vähäisten laskutoimitusten käytön ja esiintyvien virheiden johdosta algebraan siirtymisessä voidaan olettaa nyt olleen haasteita. Tutkimuksessa havaittiin pienryhmällä B puutteita yhtäsuuruusmerkin ymmärtämisessä ja samanmuotoisten termien yhdistämisessä. Esimerkiksi nämä on mainittu tyypillisiksi käsitteellisiksi virheiksi, joita yhtälönratkaisuun liittyy (Booth, Barbieri, Eyer & Paré-Blagoev, 2014).

Pienryhmien keskusteluissa oli havaittavissa, että pienryhmät olivat keskittyneet yhtälön vastaukseen ratkaisuprosessin sijaan. Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen käskynä suorittaa lasku, kahden puolen yhtäsuuruuden sijaan (Sherman & Bisanz, 2009), voi olla yksi syy pienryhmien lähestymistapojen vastauskeskeisyyteen. Osittaisessa lähestymistavassa vain yhtälön vastaus kirjoitettiin paperille ja esimerkiksi pienryhmä D vaikutti vastauskeskeiseltä, sillä he kokivat iloa vain vastauksen löytymisestä ja olettivat pelkän vastauksen riittävän yhtälönratkaisuksi. Toinen syy lähestymistapojen vastauskeskeisyyteen on saattoi olla kognitiivinen kuilu (Herscovics & Linchevski, 1994), jonka johdosta opiskelijat eivät spontaanisti ole osanneet käyttää muunnoksia yhtälönratkaisussa. Kolme ryhmistä tosin käytti muunnoksia yhtälöille spontaanisti vähintään pienryhmissä keskustellessaan. Pienryhmällä B muunnosten käyttö tapahtui vain tuetusti, mikä viittaa kognitiivisen kuilun olemassaoloon.

Pienryhmätyöskentelyllä saattoi olla vaikutusta yhtälönratkaisuprosessin löytymiselle. Pienryhmän A keskusteluista oli havaittavissa motivoituneisuus ja sinnikkyys koko prosessin löytymiselle pelkän vastauksen sijaan. Kyseinen pienryhmä lähestyi yhtälönratkaisua ongelmalähtöisesti ja ratkaisuprosesseissa oli havaittavissa kaikkia Pólyan (1973) ongelmaratkaisuprosessiin liittyvää neljää vaihetta. Pienryhmässä tarkasteltiin edellisellä oppitunneilla saatuja materiaaleja, jonka jälkeen kokeiltiin erilaisia vaihtoehtoja yhtälön ratkaisemiseksi. Saatuja ratkaisuja analysoitiin, esitettiin ”miksi”-kysymyksiä ja aluksi ratkaisuyritys useimmiten hylättiin sen ollessa väärin. Yhteiset tavoitteet ja toisten ratkaisujen huomioiminen ovat esimerkkejä ryhmätyöskentelystä, jotka kehittävät ongelmanratkaisutaitoja (Haapasalo, 1994, 233), eli tässä tapauksessa yhtälönratkaisussa onnistumista. Toisaalta vaikutus on myös päinvastainen (Haapasalo, 1994, 233), joten yhtälönratkaisuprosessiin yhdessä paneutuminen voi kehittää ryhmätyöskentelytaitoja. Pienryhmätyöskentelyn vaikutuksesta lähestymistapoihin ei kuitenkaan sen suuremmin voida ottaa kantaa. Toimivien pienryhmien aikaansaaminen on vaikeaa, ryhmän tavoitteet eivät välttämättä kohtaa sekä opettajan työskentely voi olla hämmentävää ja poistumista omalta mukavuusalueelta (Star & Kokka, 2013).

Tutkimusta tehdessä heräsi uusia kysymyksiä ja kehitysideoita. Vastauskeskeisyyttä lähestymistavoissa esiintyi eniten osittaisessa lähestymistavassa, mutta myös ongelmalähtöisessä. Pienryhmä C ratkaisi osittaisella lähestymistavalla eniten yhtälöitä ja käytti itse työskentelyyn vähiten aikaa verrattuna muihin pienryhmiin. Kiinnostavaa olisi tutkia, säilyikö vastauskeskeisyys JYR-projektin loppuun asti. Kantaa ei otettu eri pienryhmien oppimiseen, joten eri lähestymistapojen vaikutuksista oppimistuloksiin ei tiedetä. Pienryhmien osaamisen kehitystä lopputestien avulla olisi ollut mielenkiintoista tutkia. Vertaaminen verrokkiryhmään olisi ollut kiintoisaa niin lähestymistapojen kuin oppimisen osalta.

Tutkimuksen selkeä rajaaminen oli välttämätöntä laajan aineiston vuoksi. Laadullisen tutkimuksen tulokset antoivat mielenkiintoista tietoa yksittäistapauksesta yhtälönratkaisusta pienryhmissä. Tämän tutkimuksen tulosten pohjalta opetuksessa olisi hyvä huomioida esitietojen merkitys, erilaiset lähestymistavat ja vastauskeskeisyys, joita pienryhmillä (tai oppilailla) voi ilmetä. Tuloksia ei voida yleistää laajemmin, mutta ne kertovat mahdollisista piirteistä ja haasteista, joita yhtälönratkaisun aloittamiseen liittyy, ja joita omassa opetuksessaan voi huomioida.

Lähdeluettelo

[1] Andrews, P. & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland,Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior 31*, 476– 488.

[2] Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving, 7*(1), 3.

[3] Clark, K., James, A., & Montelle, C. (2014). "We definitely wouldn't be able to solve it all by ourselves, but together…": group synergy in tertiary students' problem-solving practices. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 306-323.

[4] Eskola, J. & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen.* Tampere: Vastapaino.

[5] Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19-25.

[6] Grönfors, M. (2001). *Havaintojen teko aineistokeräyksen menetelmänä.* Teoksessa Aaltola, J. & Valli, R. (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin I metodin valinta ja aineiston keruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle,* 124-141. Jyväskylä: PS-kustannus.

[7] Haapasalo, L. (1994). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

[8] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L. & Tikka, T. (2008) Pii 7, Matematiikka. Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy.

[9] Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics, 27*(1), 59-78.

[10] Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 115-139.

[11] Järvinen, R., Latva, O. & Makkonen, J-P. (2005). *Kartio 1, Uudistettu laitos, Perusopetuksen matematiikkaa kurssit 1-3.* Toimitus: Kustanneosakeyhtiö Tammi, Painatus: Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

[12] Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

[13] Koçak, Z. F., Bozan, R., & Isik, Ö. (2009). The importance of group work in mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 2363-2365.

[14] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. (2005) *Pyramidi 1, Lukion pitkä matematiikka, Funktiot ja yhtälöt.* Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

[15] Latva, O., Hassinen, S., Makkonen, J-P. & Tolvanen, A. (2014). *Kuutio 7.* Helsinki: Sanoma Pro Oy.

[16] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-Aho, E., Sankisalmi, T., Selenius, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. (2014). *Laskutaito 7.* Helsinki: Sanoma Pro Oy.

[17] Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa, Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House.

[18] LUMA SUOMI, Valtakunnallinen luonnontieteiden ja matematiikan esi- ja perusopetuksen kehittämisohjelma 2014–2019: `http://www.luma.fi/suomi/` (Viitattu 21.9.2016)

[19] Malinen, K., Pietiläinen, J., Pitkänen, T., Rantanen, M. & Sihvonen, E. (2012). *Pointti 1, Yläkoulun matematiikkaa.* Helsinki: Sanoma Pro Oy.

[20] Niemi, E. K. (2008). *Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007.* Oppimistulosten arviointi, 1, 2008.

[21] Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.* Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy. Saatavissa: `http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf` (Viitattu 20.10.2016)

[22] Opetushallitus (2016). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* (4.painos). Helsinki: Next Print Oy. Saatavissa: `http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf` (Viitattu 14.10.2016)

[23] OuLUMA - Oulun yliopiston LUMA-keskus, Joustava yhtälönratkaisu: `https://ouluma.fi/joustava-yhtalonratkaisu/` (Viitattu 22.9.2016)

[24] Polya, G. (1973). *How to solve it, A new Aspect of Mathematical method, Second edition.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[25] Saarela-Kinnunen, M. & Eskola, J. (2001) *Tapaus ja tutkimus = tapaustutkimus?* Teoksessa: Aaltola J, Valli R, (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin I. Metodin valinta ja aineiston keruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*,158-169. Jyväskylä: PS-kustannus.

[26] Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 101*(1), 88.

[27] Star, J. R., & Kokka, K. (2013). Using Strategic Interruptions to Effectively Integrate Whole Class and Small Group Instruction in Mathematics. *The Mathematics Educator 14*, no. 1 & 2, 1-20.

[28] Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*(6), 565-579.

[29] Star, J. R. & Seifert, C. (2006) The delevopment of fexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology 31*, 280-300.

[30] Syrjälä, L., Ahonen, S., Syrjäläinen, E. & Saari, S. (1994). *Laadullisen tutkimuksen työtapoja.* Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

[31] Tuomi, J. (2007). *Tutki ja lue.* Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

[32] Vienola, V. (2005). *Videoiden käyttö tutkimuksen apuvälineenä* Teoksessa Enkelberg, J., Savolainen, E., & Väisänen, P. (toim.) textitTutkiva opettajankoulutus - Taitava opettaja. Savonlinnan opettajakoulutuslaitos 2004. Saatavissa: `http://sokl.uef.fi/verkkojulkaisut/tutkivaope/pdft/vienola.pdf`. (Viitattu 28.9.2016)