Lineaarinen yhtälöpari ja sen ratkaiseminen lukion lyhyessä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Maija Peltola
2264912
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2016

Tiivistelmä

Tämä Pro gradu -tutkielma liittyy osana Oulun yliopiston matematiikan laitoksen projektiin luoda kaikille avoin oppikirja lukion lyhyen ja pitkän matematiikan kursseista MAB2 ja MAA2. Oppikirja on toteutettu Opetushallituksen lukion uuden opetussuunnitelman mukaan ja kirja on tarkoitus julkaista sähköisesti Internetissä.

Oppikirja pitää sisällään siis sekä lukion lyhyen että pitkän matematiikan kakkoskurssit. Tämän työn lopussa oleva opetusmateriaali on järjestyksessään kolmas osa lyhyen matematiikan kirjaa ja tässä aiheena on lineaarinen yhtälöpari sekä sen erilaiset ratkaisumenetelmät. Tutkielmassa käsitellään lineaarisia yhtälöpareja yleisellä tasolla sekä perehdytään graafisen ratkaisumenetelmän lisäksi kahteen algebralliseen ratkaisumenetelmään: sijoitus- ja eliminointimenetelmään.

Opetusmateriaali on koottu aiheeseen liittyvien tieteellisten artikkeleiden pohjalta. Yhtälöparin opettamista on tutkittu hyvin vähän, joten sisällön tuottamisessa on huomioitu oppimiseen ja etenkin oppimisvaikeuksiin liittyviä tutkimustuloksia. Tutkimusten mukaan opiskelijoilla on esimerkiksi vaikeuksia ymmärtää yhtäsuuruusmerkin transitiivisuus, mikä heijastuu välittömästi sijoitusmenetelmän oppimiseen. Lisäksi on osoitettu, ettei opiskelijoiden keskuudessa ole selvää, mitä tarkoitetaan yhtälöparin ratkaisulla.

Opetusmateriaalin sisältöön on vaikuttanut lisäksi projektiryhmän projektille yhdessä sopimat tavoitteet. Oppikirjassa on kauttaaltaan tutkiva luonne ja sosiaalista ulottuvuutta on korostettu tehtäviä laadittaessa. Mukaan on liitetty tehtävien vastaukset sekä lyhyt opettajan opas, jossa opettaja perehdytetään kirjan pohdintatehtäviin yksityiskohtaisemmin.

Opetusmateriaalin tarkoitus on kerrata jo yläkoulussa opittuja yhtälöparin mekaanisia ratkaisutaitoja, mutta myös syventää yhtälöparin ymmärtämistä erityylisten pohdintatehtävien avulla. Tavoitteena on, että opiskelija osaa kappaleen jälkeen käyttää yhtälöparia apuvälineenä ongelmanratkaisussa ja valita tehtäväkohtaisesti tehokkaimman tavan ratkaista yhtälöpari.

Sisältö

Johdanto

Internet on sähköistä opetusmateriaalia pullollaan. Esimerkiksi useat kirjankustantajat tarjoavat perinteisen oppikirjan lisäksi materiaalia myös sähköisesti. Usein tällainen materiaali on kuitenkin maksullisten tunnusten takana. Maksullisen materiaalin vastakohtana on alettu julkaista avoimia oppikirjoja, jotka ovat kaikkien vapaasti käytettävissä. Tämä pro gradu -tutkielma liittyy osana Oulun yliopiston projektiin, jonka tarkoituksena on luoda avoin oppikirja lukion matematiikan kursseista MAB2 ja MAA2.

Oppikirja toteutetaan opetushallituksen uuden opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. Uusi opetussuunnitelma otetaan käyttöön aloittavilla lukiolaisilla syksyllä 2016 [20]. Oppikirjaprojekti käynnistettiin syksyllä 2015 ja siinä on mukana kahdeksan matematiikan pääaineopiskelijaa sekä kolme ohjaajaa Oulun yliopistosta. Tarkoitus on, että oppikirjaa voitaisiin käyttää lukion matematiikan kakkoskurssien opetuksessa syksystä 2016 alkaen.

Tämän tutkielman lopussa oleva oppimateriaaliosa on osa avointa oppikirjaa lukion lyhyen matematiikan kurssista MAB2 Lausekkeet ja yhtälöt. Oppimateriaalin aiheena on lineaarinen yhtälöpari ja sen graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen. Aiheen pitäisi olla opiskelijoille tuttua jo yläkoulun puolelta, mutta tässä oppimateriaalissa on kertauksen lisäksi tarkoitus syventää oppimista ja hakea yläkoulussa opetettuihin ratkaisumenetelmiin matemaattisia perusteluita.

Tutkielmassa on lisäksi opettajan opas, jossa pohjustetaan hieman opetusmateriaalia. Opas on nimensä mukaisesti suunnattu opettajille, mutta sekin tullaan julkaisemaan avoimesti Internetissä. Mukana tutkielmassa on myös vastaukset kaikkiin tämän opetusmateriaalin tehtäviin.

Tutkielma alkaa osiolla, jossa esitellään projektiryhmän oppikirjalle asettamat tavoitteet sekä perustellaan valinnat opetusmateriaaliin. Opetusmateriaalin kokoamisessa on käytetty apuna aiheeseen liittyviä tieteellisiä artikkeleita ja tutkimuksia. Yhtälöparin opettamista on kuitenkin tutkittu hyvin vähän, joten opetusmateriaalin tekemisessä on enemmänkin huomioitu oppimiseen ja oppimisvaikeuksiin liittyviä tutkimustuloksia. Opiskelijoilla on esimerkiksi tutkittu olevan haasteita ymmärtää sijoitusmenetelmän käyttö yhtälöparin ratkaisussa, koska ei ymmärretä edes yhtäsuuruusmerkin transitiivisuutta [23]. On myös osoitettu, että yhtälöparin ratkaisun määrittäminen ja ymmärtäminen tuo päänvaivaa ainakin osalle opiskelijoista [22].

1 Oppikirjan tavoitteet

Työn tarkoituksena on tehdä käyttövalmis osa avointa oppikirjaa lyhyen matematiikan kurssista MAB2 Lausekkeet ja yhtälöt. Tässä työssä käsitellään kurssista aihealuetta lineaariset yhtälöparit. Oppikirjaosassa on huomioitu Opetushallituksen luoman lukion uuden opetussuunnitelman perusteiden kyseiselle kurssille asettamat tavoitteet sekä saman opetussuunnitelman tavoitteet koko lyhyen matematiikan oppimäärälle. Lisäksi projektiryhmän sisällä on asetettu omia tavoitteita oppikirjalle. Omat spesifisemmät tavoitteeni kerron seuraavissa kappaleissa, joissa myös oppikirjan osan sisältö perustellaan.

Tässä kappaleessa tullaan siis kertomaan oppikirjalle asetetuista tavoitteista. Samalla kerrotaan, kuinka nämä tavoitteet on huomioitu tässä työssä.

1.1 Opetushallituksen asettamat tavoitteet

Opetushallitus päätti lukion uusista opetussuunnitelman perusteista lokakuussa 2015. Näiden perusteiden mukaan laadittu opetussuunnitelma otetaan käyttöön aloittavilla opiskelijoilla tulevana syksynä, tarkalleen 1.8.2016 lähtien. Lukion uudessa opetussuunnitelmassa kerrotaan lukion lyhyen matematiikan kurssin MAB2 tavoitteista seuraavaa:

> Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
>
> - harjaantuu käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä
> - ymmärtää lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen polynomifunktion käsitteet
> - vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan ja oppii ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä
> - osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. [20]

Näistä tavoitteista tätä oppikirjan osaa koskee oikeastaan suoraan vain ensimmäinen ja kolmas kohta. Opiskelija on pyritty huomioimaan tässä oppikirjan osassa käyttämällä teoriassa ja tehtävissä mahdollisimman paljon arkikieltä vaikeiden matemaattisten termien sijaan. Matemaattiset termit määritellään mahdollisimman yksinkertaisesti ja ymmärrettävästi, jotta kirjan luettavuus olisi mielekästä. Jokapäiväisen elämän ongelmat tuodaan mukaan etenkin yhtälöparin sanallisissa tehtävissä: valtaosa tehtävistä on tehty tilanteista, joihin jokainen opiskelija voi itse törmätä.

Yhtälönratkaisutaidot ovat suuressa roolissa koko oppikirjan osassa. Jokaisessa kappaleen tehtävässä nimittäin tarvitaan yhtälönratkaisutaitoja ja tavoite huomioiden käytettäviksi yhtälöiksi on valittu mahdollisimman vaihtelevia yhtälöitä. Esimerkiksi mallitehtävissä ja muissa tehtävissä on käytetty sellaisia yhtälöpareja, joissa tulee ratkaisuksi negatiivinen luku tai murtoluku. Myös ratkaistavissa yhtälöpareissa esiintyy kertoimina murtolukuja ja desimaalilukuja. Näillä halutaan varmistaa, että opiskelija oppii käsittelemään ja operoimaan yhtälöitä monipuolisesti, eli vahvistaa yhtälönratkaisutaitojaan.

Lukion opetussuunnitelmassa on lisäksi yleisiä tavoitteita lyhyen matematiikan oppimäärän suhteen. Tavoitteissa korostetaan, että opetuksen tulisi antaa selkeä kuva siitä, mikä merkitys matematiikalla on yhteiskunnan kehityksessä sekä arkielämässä. Tavoitteena on oppia käyttämään matematiikkaa apuvälineenä eri tilanteissa ja saada positiivisia oppimiskokemuksia matematiikasta. Yleisissä tavoitteissa mainitaan myös matemaattisen itseluottamuksen kehittyminen sekä se, että opiskelija osaisi tarvittaessa käyttää apunaan oikeanlaisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä. [20]

Tavoitteiden mukaan lyhyen matematiikan opetus on pitkään matematiikkaan verrattuna enemmän käytännönläheistä. Kuten aiemmin mainittiin, käytännönläheisyys on huomioitu koko työssä pyrkimällä tuottamaan mahdollisimman selkokielistä tekstiä. Yhtälöpareilla on myös selkeä linkki arkielämän tilanteisiin, joissa etsitään ratkaisua kahdelle tuntemattomalle. Oppikirjan tässä osassa käytetään lisäksi matematiikkaa nimenomaan apuvälineenä ratkaisemaan näitä arkielämän ongelmia. Yhtälöparin eri ratkaisumenetelmät ovat työkaluja, joista ongelmanratkaisija voi valita mieluisimman. Teknisten apuvälineiden käytön tavoitteet otetaan huomioon GeoGebra-tehtävissä.

1.2 Projektiryhmän oppikirjalle asettamat yleiset tavoitteet

Oppikirjaprojektissa on tärkeää sopia kirjan yhteisistä tavoitteista. Yhteiset tavoitteet ovat tärkeitä siksi, että kirja noudattaisi alusta loppuun samaa ideologiaa. Oppikirjaan on yhdessä valittu tutkimuksellinen luonne ja tämän lisäksi kirjaan on haluttu tuoda graafisia perusteluja. On tutkittu, että graafinen esitys auttaa oppilaita parempaan ymmärrykseen [4].

Tutkimuksellisuuden eli tutkivan oppimisen tarkoituksena on kehittää opiskelijan omia ongelmanratkaisutaitoja. Tutkivan oppimisen perusideologiana on, että tietoa ei löydetä tai kopioida, vaan se rakentuu oppijan oman toiminnan tuloksena. Tutkivassa oppimisessa suuressa roolissa on kysymykset tai ongelmat, joita ei osata ratkaista olemassa olevalla tiedolla. Tavoitteena on synnyttää uutta tietoa erilaisten tiedonlähteiden ja ratkaisumallien avulla. [5]

Graafisuus näkyy tässä oppikirjan osassa luonnollisesti kappaleessa, jossa käsitellään yhtälöparien graafista ratkaisumenetelmää. Graafinen painotus on tuotu esille myös neuvomalla opiskelijoita tarkistamaan yhtälöparien ratkaisuja GeoGebran avulla.

Tutkimuksellinen luonne on pääroolissa kaikissa oppikirjaosan kappaleissa. Välineitä ei anneta yhteenkään ratkaisumenetelmään suoraa, vaan opiskelijoita ohjataan itse kehittelemään ratkaisumenetelmät johdattelevilla pohdinnoilla. Lisäksi oppimateriaaliin on sisällytetty yksi laajempi tutkimustehtävä, jossa apuvälineenä käytetään GeoGebraa. Myös kappaleiden tehtävissä on nähtävillä tutkimuksellinen luonne, sillä mekaanisia tehtäviä on harvakseltaan.

1.3 Yhteiset tavoitteet *Habits of Mind* -artikkelista

Yleisten tavoitteiden lisäksi kirjalle poimittiin sopivia tavoitteita artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Kyseinen artikkeli kertoo siitä, kuinka lukio-opetuksessa tulisi mekaanisten laskujen sijaan keskittyä opiskelijoiden matemaattisen ongelmanratkaisukyvyn kehittämiseen. [8]

1.3.1 *"Pattern sniffers"*

Yhdeksi tavoitteeksi valittiin, että oppikirjassa toistuisi tietty malli, jonka perusteella opiskelija voisi tehdä omia johdopäätöksiä. Artikkelissa tällaisia toistuvia malleja tunnistavia opiskelijoita kutsuttiin englanninkielisellä käsitteellä "pattern sniffers" eli nuuskija. Tällaisten henkilöiden tulisi havaita toistuvista asioista niiden laajempi merkitys. [8]

Tämä säännönmukaisuusaspekti on huomioitu esimerkiksi graafisen ratkaisumenetelmän kappaleessa, jossa opiskelijan tehtävänä on yhden esimerkin perusteella päätellä itse, kuinka yhtälöparin ratkaisu liittyy yhtälöiden kuvaajiin. Lisäksi tietynlaista mallien tarkastelua vaatii myös GeoGebralla toteutettava pienimuotoinen tutkimus, jossa opiskelijan on pääteltävä millaisissa tapauksissa yhtälöparilla ei ole ratkaisua ja milloin ratkaisuja on ääretön määrä. Tässä pohdintatehtävässä tehtävänanto itsessään on suppea, mikä tarkoittaa sitä, että opettaja voi toiminnallaan ohjata opiskelijaa tällaiseksi nuuskijaksi.

1.3.2 *"Experimenters"*

Toinen artikkelista poimittu tavoite on se, että kirjaa käyttävät opiskelijat pääsisivät kokeilemaan erilaisia arvoja tehtäviin. Esimerkiksi yhtälön ratkaisussa opiskelijat voisivat sijoittaa muuttujan paikalle lukuja ääripäistä ja niiden avulla tehdä johtopäätöksiä, missä kohtaa lukusuoraa lopullinen ratkaisu sijaitsee tai missä se ei ainakaan sijaitse. Tällaisesta kokeilevasta opiskelijasta käytettiin englanninkielisessä artikkelissa nimeä "experimenter". [8]

Tämä tavoite on otettu huomioon etenkin oppikirjan osan ensimmäisessä kappaleessa. Pohdintatehtävässä A.2 tehtävänä on keksiä lukupareja, jotka toteuttavat annetut ehdot. Tässä pohdintatehtävässä kokeilu lienee tapa, jolla opiskelijat lähtevät tehtävää ratkomaan. Voisi olettaa, että tehtävän c)-kohdassa opiskelijat ensin miettivät, minkä kahden luvun summa on 19, ja sitten kokeilevat tulisiko lukujen erotukseksi 9. Tehtävässä haetaan nimenomaan kokeiluja.

Kokeilun kautta oppiminen on huomioitu myös saman kappaleen tehtävissä. Tehtävät 2 ja 4 perustuvat siihen, että opiskelija kokeilee annettuja lukuarvoja yhtälöihin. Etenkin tehtävässä 4 opiskelija joutuu päättelemään sijoitusten perusteella, mikä voisi olla yhtälön yksi ratkaisu.

Kokeilua ilmenee myös graafisen ratkaisumenetelmän pohdintatehtävässä A.7, jossa päätellään yhtälöparin ratkaisujen määrä. Kuten aiemmin mainitsin, tässä tehtävässä opettajalla on mahdollisuus ohjata opiskelijaa haluamallaan tavalla löytämään ratkaisujen määrät.

1.3.3 *"Describers"*, *"visualizers"* ja *"conjecturers"*

Oppikirjaan on artikkelista poimittu opiskelijoiden tavoitteeksi olla myös kuvailijoita ("describers") eli heidän tulisi osata selittää, mitä ovat tekemässä, sekä visualisoijia ("visualizers") eli ymmärtämään asioita visuaalisesti mielessään. Tavoitteeksi on asetettu myös, että opiskelija osaisi arvailujen tai tutkimusten perusteella muodostaa konjektuureja eli matemaattisia väitteitä, joiden arvelee olevan tosia ("conjecturers"). [8]

Koen, että perusteluilla on iso rooli matematiikassa. Mielestäni on osattava perustella esimerkiksi tehtävän ratkaisun vaiheet, sillä ellei osaa perustella, ei ole todennäköisesti myöskään ymmärtänyt tekemäänsä. Tätä yhteistä tavoitetta eli ratkaisujen perustelua onkin painotettu tässä oppikirjan osioissa. Opiskelijoita vaaditaan perustelemaan tekemäänsä lähes jokaisessa pohdintatehtävässä, joko kirjallisesti vihkoon tai suullisesti vierustoverille. Halutaan painottaa, että opiskelijat todella ymmärtäisivät tekemänsä ja yleensä perusteluista huomaa, onko ymmärrys mennyt perille.

Visuaalisuus näkyy oppikirjan osassa etenkin kappaleessa, jossa käsitellään yhtälöparin graafista ratkaisumenetelmää. Koko tämän kappaleen on tarkoitus visualisoida yhtälöparin ratkaisua kuvaajien avulla ja toivottavasti viimeistään tässä kappaleessa opiskelija oivaltaa yhtälöparin ratkaisun tarkoituksen. Eräänlaista visuaalista lähestymistapaa käytetään lisäksi algebrallisten ratkaisumenetelmien alussa, kun opiskelija johdatellaan kumpaankin ratkaisumenetelmään vaakamallin avulla. Jokainen vaakamalli visualisoi yhtälöitä, sillä punnuksina vaaoissa on muuttujia ja vakioita.

Konjektuureja opiskelija voi muodostaa tästä tuotoksesta esimerkiksi pohdintatehtävässä, jossa mietitään, voiko yhtälöparilla olla enemmän kuin yksi ratkaisu tai onko tilanteita, että ratkaisua ei löydy. Tässä opiskelija itse GeoGebran avulla tutkii ratkaisua ja muodostaa arveluistaan mielestään paikkansapitävän väitteen. Konjektuureja saattaa kehittyä opiskelijan toimesta myös pohdintatehtävistä, joissa tulisi vaakojen avulla ymmärtää algebralliset ratkaisumenetelmät.

2 Lineaarinen yhtälöpari

Lineaarinen yhtälöpari on määritelty eräässä lukion lyhyen matematiikan oppikirjassa seuraavasti:

> Lineaarinen yhtälöpari sisältää kaksi ensimmäisen asteen yhtälöä ja kaksi tuntematonta, jotka molemmat on ratkaistava. Yhtälöpari voidaan ratkaista graafisesti tai laskemalla eli algebrallisesti. Algebrallisessa ratkaisussa käytämme eliminointimenetelmää tai sijoitusmenetelmää. Yhtälöparin ratkaisuna saadaan lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt. [14]

Yhtälöparit kuuluvat koulumatematiikassa algebran osa-alueeseen. On olemassa tutkimuksia ongelmista, joihin algebran opiskelijat törmäävät. Ylipäätään on olemassa useita algebran oppimiseen ja ymmärtämiseen liittyviä tutkimuksia, mutta sen sijaan algebran opettamisesta on tehty varsin vähän tutkimuksia. [16]

Yhtälöryhmien ja yhtälöiden ratkaisua pidetään tärkeässä roolissa algebran oppimisessa [6]. Yhtälöpari ei kuitenkaan ole ollut mukana varhaisissa algebran käsitteissä missään opetussuunnitelmassa, joten osin siitä syystä aiheeseen liittyviä tutkimuksia on olemassa hyvin vähän verrattuna muihin algebran aihealueisiin [12]. Tutkimusten puuttumisen vuoksi olenkin kiinnittänyt oppikirjaa tehdessäni huomiota erityisesti ongelmiin, joita opiskelijoiden on tutkittu kohdanneen yhtälöpareja opiskeltaessa.

Tässä kappaleessa tulen perustelemaan valintoja, joita tein luodessani oppikirjan ensimmäistä kappaletta. Olen käyttänyt lähteinä useita tieteellisiä artikkeleita ja viittaan niihin perusteluissani. Ensimmäisen kappaleen tarkoituksena on ennen kaikkea kerrata yhtälöparin määritelmää ja saada opiskelija pohtimaan, mitä yhtälöparin ratkaisulla käytännössä tarkoitetaan. Lisäksi kappaleen tavoitteena on tehtävien kautta saada opiskelija ymmärtämään, miksi yhtälöpareissa esiintyy yleensä kahta eri muuttujaa.

2.1 Muuttuja vai tuntematon?

> Muuttuja, jonka arvoa ei tunneta, on nimeltään tuntematon. [15]

On tutkittu, että opiskelijoilla on hankaluuksia ymmärtää eroa termien *muuttuja* ja *tuntematon* välillä. Tämä eron ymmärtämättömyys haittaa jopa opiskelijoita käsittämästä, että yhtälöparilla voi olla yksi tietty ratkaisu tai toisaalta sillä voi olla myös äärettömän monta ratkaisua. [22]

Ramirezin artikkelin mukaan opiskelijoilla on todettu olevan ongelmia ymmärtää, että kahden muuttujan yhtälö on ikään kuin objekti, joka määrittelee äärettömän määrän lukupareja. Kun käsitellään yhtälöitä yhtälöpareina, usein tehtävillä on kuitenkin yksikäsitteinen ratkaisu. Tämä lisää hämmennystä muuttujan ja tuntemattoman termien välillä. [22]

Käytän oppikirjaosassa ratkaistavista suureista termiä *muuttuja*. Vaikka muuttujan alatermi *tuntematon* sopisi joihinkin oppikirjan kohtiin hyvin, sekaannusten välttämiseksi en käytä sitä lainkaan.

2.2 Yleistä yhtälöpareista

Tutkimusten mukaan yläkoulun oppilailla on hankaluuksia ymmärtää, mitä tarkoitetaan yhtälöparin ratkaisulla. Ramirezin tutkimuksessa kerrotaan esimerkiksi, kuinka oppilailla on vaikeuksia käsittää, että yhtälöparin ratkaisuna saatu lukupari ratkaisee molemmat yhtälöparin yhtälöt. Ei ymmärretä mikä ero on yksittäisillä yhtälöillä ja yhtälöryhmällä, jossa yhtä muuttujaa vastaa sama tietty lukuarvo kaikissa yhtälöissä. Ajatellaan, että muuttujilla on omat arvot yhtälöparin eri yhtälöissä. [22]

Ramirez'n artikkelissa korostetaankin, että ennen yhtälöparin ratkaisumenetelmien opettamista opiskelijoilta tulisi kysyä, mitä yhtälöparin ratkaisu tarkoittaa [22]. Paitsi että lisäsin kysymyksen sellaisenaan pohdintojen jälkeen ensimmäiseksi varsinaiseksi tuntitehtäväksi, otin tämän asian huomioon myös oppikirjani ensimmäisissä pohdintatehtävissä. Oppikirjan osani ensimmäisessä pohdinnassa tehtävänantona on ratkaista kuvioiden massat, kun saman kuvion massa säilyy molemmissa kohdan yhtälöissä. Kuvioiden olisi tässä tarkoitus vahvistaa sitä ajatusta, että kunkin saman kuvion tilalle tulee sama lukuarvo. Sama kuvio symboloi siis tässä tehtävässä tiettyä massaa.

Lisäksi, valitsin kyseisen pohdintatehtävän, koska Texasissa tehdyn tutkimuksen mukaan ainakin yläkoululaisten keskuudessa kuvitetut yhtälöparit ratkeavat helpommin kuin perinteiset algebralliset yhtälöparit. Kyseisessä tutkimuksessa kävi ilmi, että osa oppilaista ratkaisi kuvitetut yhtälöparit sijoitus- ja eliminointimenetelmillä, vaikkei kyseisiä menetelmiä vielä edes oltu käsitelty. [9] Tehtävässä eriyttävänä tekijänä toimii viimeinen kysymys, jossa opiskelijan onkin mietittävä erilaisia ratkaisutapoja massojen selvittämiselle.

Mielestäni kuvitetut yhtälöparit sopivat hyvin kappaleen alkuun, kun tarkoitus on johdatella opiskelijaa yhtälöparien pariin. Yhtä hyvin olisin voinut merkitä kuvioita muuttujilla, mutta koska oppilaiden on helpompi hahmottaa kuvioita, valitsin ne muuttujien sijaan.

Myös oppikirjan osan pohdintatehtävä A.2 liittyy tutkittuun ongelmaan ymmärtää yhtälöparin ja erillisten yhtälöiden ero. Haluan kyseisellä tehtävällä tuoda esille sitä, että yhtälöpari pitää sisällään kaksi yhtälöä, joiden molempien tulee olla voimassa yhtä aikaa. Tarkoitus on siis löytää ratkaisuna lukupari, joka toteuttaa nimenomaan molemmat yhtälöt.

Oppilaille ei tutkimuksen mukaan ole selvää, että yhtälöryhmässä tulisi mahdollisen yksikäsitteisen ratkaisun löytämiseksi olla yhtä monta yhtälöä, kuin niissä esiintyviä muuttujia on [22]. Tämän vuoksi kehittelin aiheesta tehtävän, jossa opiskelijat voivat miettiä, millaisesta yhtälöstä tai yhtälöparista voidaan ratkaista yksikäsitteinen ratkaisu, mikäli sellainen on olemassa. Lisäksi halusin lisätä oppikirjaan mukaan lisätietoruudun yhtälöryhmästä, koska vaikka lukion lyhyen matematiikan oppimäärään ei useamman muuttujan yhtälöryhmät sisälly, on opiskelijan mielestäni hyvä tietää että muuttujia voi olla yhtälössä enemmänkin.

2.3 Ratkaisun tarkistaminen ja perustelut

Kyseessä olevaan lukion lyhyen matematiikan kurssiin kuuluu aihealueena myös ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen. Päätimme jakaa tämän osa-alueen mukaan jokaiseen kurssin kappaleeseen. Itse olen huomioinut ratkaisujen arvioimisen tehtävissä siten, että lähes jokaisen pohdintatehtävän jälkeen opiskelijaa kehotetaan keskustelemaan ratkaisusta parin kanssa. Kuten Hähkiöniemi ja Leppäaho artikkelissaan kertovat, varsinainen oppiminen tapahtuu usein ongelmia ratkaisemalla ja ratkaisumenetelmistä keskustelemalla [13]. Keskustelussa pari voi avoimesti osoittaa toisen ratkaisulle tarpeen mukaan kritiikkiä tai kehuja, ja sitä kautta ratkaisumalleja voidaan yhdessä kehittää paremmiksi. Keskustelu parin tai opettajan kanssa matemaattisista asioista vaikuttaa myös positiivisesti opiskelijan identiteettiin matematiikan oppijana [1].

On myös tutkittu, että etenkin yläkoululaiset pitävät matematiikkaa tylsänä yksinpuurtamisena [21]. Tämä aspekti on tarkoitus huomioida läpi koko oppikirjan, sillä tarkoituksenamme oli luoda kirjan myötä oppitunneille paljon keskustelua sekä paritöitä. Tässä osasyy siihen, miksi vaadin perusteluita ja keskustelua useissa tehtävissä.

Lisäksi on tarkoitus, että opiskelija oppisi tulkitsemaan saatuja vastauksia. Tulkintaa varten on tässä tapauksessa ymmärrettävä, mitä yhtälöparin ratkaisu tarkoittaa. Olen vahvasti painottanut kyseistä asiaa kuten edellä jo kerroin. Ratkaisun tulkinta onnistuu myös GeoGebran avulla, sillä kuvaajien avulla on kätevä tarkistaa, sijaitseeko suorien leikkauspiste algebrallisin menetelmin lasketussa pisteessä.

Kerron myös oppikirjan alkukappaleessa, kuinka yhtälöparin ratkaisu on yksinkertainen tarkistaa sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin. Tarkoituksena on rutinoida opiskelijaa alati tarkastelemaan tehtävistä saatuja vastauksia ja saada heidät tarkistamaan vastaukset sijoittamalla tai graafisesti esimerkiksi GeoGebran avulla. Jokaisessa mallitehtävässäkin käyn läpi vastauksen tarkistamisen, jotta opiskelija omaksuisi tavan mukaan omaan laskemiseensa.

2.4 Tehtävät

Ensimmäisen kappaleen tehtävissä olen huomioinut yhdessä sovitut tavoitteet sekä yhtälöiden ratkaisuun liittyvät ongelmat. Lisäksi halusin tehdä mahdollisimman monipuolisia tehtäviä siten, että haastetta löytyisi sopivasti jokaiselle.

Kuten olen jo tavoitteissa selittänyt, tehtävän 1 tarkoitus on painottaa yhtälöparin ratkaisun ymmärtämisen merkitystä. Tehtävän 2 ensimmäisessä kohdassa puolestaan hyödynnetään ratkaisun määritelmää käytännössä ja tehtävän toisessa kohdassa tilanne pyöräytetään toisin päin eli tarkoitus on siinä muodostaa itse yhtälöpari, jonka ratkaisu on annettu lukupari. Kahden ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on siis vahvistaa käsitystä siitä, mikä on yhtälöparin ratkaisu ja mitä se käytännössä tarkoittaa. Tehtävät pohjautuvat teoriaan tutkituista vaikeuksista ymmärtää ratkaisun merkitys [22].

Tehtävän 3 tekemisen jälkeen opiskelijan tulisi olla tietoinen, että yhtälöparin mahdolliseen yksikäsitteiseen ratkaisuun tarvitaan yhtä monta yhtälöä kuin on muuttujaakin. Tehtävä 4 sen sijaan perustuu yhteiseen tavoitteeseemme, että opiskelija saisi tehdä päätelmiä kokeilun kautta. Tehtävän on tarkoitus harjaannuttaa myös yhtälön ratkaisun määritelmän oppimista, sillä opiskelijan on ymmärrettävä, milloin lukupari on yhtälön ratkaisu.

Tämän osion viimeisen tehtävän 5 on tarkoitus johdatella asiassa eteenpäin eli kohti yhtälöparin ratkaisua. Tehtävässä ei vielä lasketa mitään vaan yhtälöparin ratkaisu on tarkoitus löytää päättelemällä ja kokeilemalla. Tässäkin näkyy siis yhteisesti sovitut tavoitteet. Tehtävän on samalla tarkoitus toimia haasteena kurssin taitavimmillekin opiskelijoille. Haastetta tuo tehtävän luonteen lisäksi negatiiviset luvut ratkaisussa.

3 Graafinen ratkaisumenetelmä

Graafisen esityksen on tutkittu auttavan oppilaita ymmärtämään yhtälöitä [4]. Tämän vuoksi lähden ratkaisumenetelmien opettamisessa liikkeelle juuri graafisesta ratkaisumenetelmästä. Uskon, että yhtälöiden kuvaajat ja kuvaajien leikkauspisteet havainnollistavat yhtälöparin ratkaisua huomattavasti paremmin, kuin yhtälöiden algebrallinen käsittely.

Kappaleen tavoitteena on vahvistaa opiskelijan ymmärrystä siitä, kuinka yhtälöparin ratkaisu löytyy yhtälöiden kuvaajien avulla. Lisäksi tarkoituksena on, että opiskelija osaa perustella, miksi tietyissä tilanteissa yhtälöparilla ei ole ratkaisua tai miksi sillä on äärettömästi ratkaisuja. Tilanteet tulee osata lukea sekä kuvaajista että yhtälöiden algebrallisista esityksistä.

3.1 Opetusmateriaali

Kuten aiemmin tavoitteissa kerroin, en suoraa paljasta graafista ratkaisumenetelmää vaan annan opiskelijan itse päätellä, kuinka ratkaisu löytyy kuvaajien avulla. Tarkoitus on, että opiskelijat toimivat nuuskijoina. Koska koen graafisen ratkaisun olevan tärkeässä roolissa yhtälöparien ratkaisun ymmärtämistä ajatellen, olen pohdinnan jäljessä kertonut mihin graafinen ratkaisu perustuu ja miten kuvaajista luetaan yhtälöparin ratkaisu. Lisäksi opetuskokemuksesta lisäsin kappaleeseen määritelmän siitä, milloin yhtälö on muuttujan suhteen ratkaistussa muodossa.

Jotta opiskelijat kohtaisivat kappaleessa enemmän haastetta, lisäsin oppikirjaan toisen pohdintatehtävän. Tämä pohdintatehtävä on tutkimusluontoinen ja sen tarkoituksena on, että opiskelijat GeoGebraa apunaan käyttäen määrittelisivät yhtälöparin ratkaisujen lukumäärät erilaisissa yhtälöpareissa. Teoria tehtävän taustalla pohjautuu Ramirezin artikkeliin jossa kerrotaan, kuinka opiskelijoilla on tutkittu olevan hankaluuksia hahmottaa, että yhtälöparilla voi olla äärettömästi ratkaisuja tai ratkaisua ei välttämättä ole ollenkaan [22].

Tehtävänanto on jätetty tarkoituksella suppeaksi, jotta opettaja voisi suhteuttaa tehtävän haasteellisuuden oman ryhmänsä tason mukaisesti. Tarkoitus olisi, että opettaja antaisi opiskelijoiden osaamistason mukaan erilaisia vinkkejä, joiden avulla opiskelija onnistuisi yleistämään tilanteet, joissa yhtälöparilla ei ole ratkaisua tai on ääretön määrä ratkaisuja. Vinkit on koottu opettajan oppaaseen.

Kyseinen pohdintatehtävä vastaa siis tavoitteisiin etenkin kokeellisuudesta sekä siitä, että opiskelijat voivat toimia nuuskijoina. Tavoitteena myös on, että opiskelijat pääsevät lopulliseen ratkaisuun konjektuurien avulla.

Haluan graafisen ratkaisumenetelmän kappaleessa korostaa, että kyseisellä menetelmällä saadaan usein vain likimääräinen ratkaisu yhtälöparille [12]. Lisäksi vastauksen arvioimisen tavoitteen huomioiden lisäsin kappaleen loppuun toisen huomautuksen, jossa muistutetaan opiskelijaa siitä, että yhtälöparin ratkaisu on kätevä tarkistaa GeoGebralla.

3.2 Tehtävät

Tämänkin kappaleen tehtävissä on huomioitu oppikirjalle asetetut tavoitteet. Ainoastaan toinen tehtävä on puhtaasti mekaaninen ja sen tarkoituksena onkin harjoittaa graafisen ratkaisun rutiinia.

Tehtävässä 6 opiskelija pääsee syventämään ymmärrystä siitä, kuinka yhtälöistä voidaan päätellä yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä. Tehtävässä punnitaan opetussuunnitelman perusteiden tavoitteita noudattaen yhtälönratkaisutaitoja, sillä yhtälöt on osattava muuttaa ratkaistuun muotoon ennen yhtälöparien muodostamista.

Ratkaisujen määrän käsittelyä jatketaan tehtävässä 8. Paitsi että opiskelija osaa määritellä, milloin yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja, niin tässä tehtävässä hänen tulee osata myös tuoda käytäntöön tämä määritelmä ja keksiä itse sellainen yhtälöpari. Tehtävän tarkoitus on jatkaa oppikirjan tutkimuksellista luonnetta ja tarkastella teoriassa opittuja asioita toiseen suuntaan. Lisäksi tehtävässä yhdistyy yhteistyö parin kanssa, minkä on tarkoitus poistaa sitä käsitystä, että matematiikka on tylsää yksinpuurtamista [21].

Tehtävän 9 tavoitteena on soveltaa ymmärrystä siitä, että yhtälöparin ratkaisu löytyy kuvaajien leikkauspisteistä. Lisäksi tarkoituksena on linkittää yhtälöpari-kappaletta jo sitä seuraavaan asiaan, toisen asteen yhtälöihin.

Kappaleen viimeisen tehtävän eli tehtävän 10 on tarkoitus tuottaa opiskelijalle todellista haastetta. Tehtävässä opiskelijan on osattava paitsi käsitellä yhtälöitä, niin tässäkin on myös ymmärrettävä, milloin yhtälöparilla on ratkaisu ja milloin ratkaisua ei ole. Ratkaisut molempiin kohtiin löytynevät kokeilun kautta, mikä onkin yksi tavoitteistamme.

4 Algebralliset ratkaisumenetelmät

Yhtälöparin ratkaiseminen graafisesti on hyvä keino löytää likimääräinen ratkaisu, mutta se ei ole luotettava keino tarkan ratkaisun löytämiseksi. Siksi tarvitaan myös algebrallisia ratkaisumenetelmiä. [12]

Otan oppimateriaalissa esille kaksi hieman toisistaan poikkeavaa menetelmää ratkaista yhtälöpari algebrallisesti: sijoitusmenetelmä ja eliminointimenetelmä. Perusteluita useamman kuin yhden menetelmän opettamiselle löytyy muun muassa Lynchin ja Starin artikkelista, joka käsittelee useiden ratkaisumenetelmien hyötyjä ja haittoja. Artikkelin mukaan opiskelijan on hyvä osata useita ratkaisumenetelmiä, koska yksilöiden välillä on eroja: jollekin toinen menetelmä voi olla helpompi käyttää kuin toinen. Toisaalta useiden ratkaisumenetelmien osaaminen kehittää opiskelijan matemaattista ymmärrystä ja opettaa, että erilaisiin ongelmiin voi sopia erilaiset ratkaisumenetelmät. Parhaimmillaan ongelmanratkaisusta tulee tehokkaampaa ja onnistumisen todennäköisyys kasvaa. [19]

Toisaalta, usean menetelmän opettaminen lisää sekaannuksen riskiä. Opiskelijat voivat sekoittaa eri ratkaisumenetelmiä keskenään ja epäonnistua näin ratkaisussa. Myös ajan puute oppitunneilla puolustaisi yhden menetelmän opettamista. [19]

Usean menetelmän opettamisen hyödyt olivat artikkelin mukaan silti suuremmat kuin haitat [19]. Siksi otan oppikirjan osaani mukaan kaksi algebrallista ratkaisumenetelmää. Lähden molempien näiden ratkaisukeinojen opettamisessa liikkeelle havainnollistavasta vaakamallista, koska tutkimukset ovat osoittaneet, että opiskelijoiden on helpompi ymmärtää kuvia, graafeja ja taulukoita, kuin symbolisia yhtälöitä ja verbaalisia selityksiä [16].

Miksi sitten valitsin juuri vaakamallin? Yhtälöparien opettamisesta ei löytynyt ainoatakaan tieteellistä artikkelia, joten ainoat perustelut vaakamallin valinnalle ovat omat kokemukseni yhtälöparien opettamisesta. Opettaessani yhtälöparin ratkaisumenetelmiä yläkoulun yhdeksäsluokkalaisille huomasin, kuinka vaikeaa keskitason oppilaan on hahmottaa, miksi kussakin ratkaisumenetelmässä saa toimia niin kuin toimitaan. Oppilaiden on vaikea esimerkiksi ymmärtää, kuinka eliminointimenetelmässä yhtälöiden summaaminen ei vaikuta ratkaisun oikeellisuuteen tai kuinka sijoitusmenetelmässä lauseke voidaan sijoittaa muuttujan paikalle. Kaikki tämä onnistui parhaiten perustella vaakamallia hyväksi käyttäen. Samalla vaakamallin käyttö tukee sitä Kieranin kertomaa teoriaa, jonka mukaan kuvat auttavat ymmärtämään algebraa [16].

Kappaleen alkuun listasin kolme asiaa, joihin molemmat algebralliset ratkaisumenetelmät perustuvat. Periaatteessa riittää, kun opiskelija osaa kyseiset kolme asiaa, koska niiden avulla hän voi itse päätellä sekä sijoitus- että eliminointimenetelmän käytön. Tarkoitus on säästää opiskelijan muistia. Muutenkin läpi työn on ideana toistaa tiettyjä malleja sekä pohdintatyyppejä, jotta kappaleissa olisi opiskelijoille valmiiksi jotain tuttua.

Tämän kappaleen tärkeimpänä tavoitteena on siis kerrata jo yläkoulun puolella opitut yhtälöparin algebralliset ratkaisumenetelmät. Tavoitteena on, että jatkossa opiskelija osaisi käyttää menetelmiä tehokkaasti ongelmanratkaisutilanteissa ja valita yhtälöparin luonteen perusteella hyödyllisemmän menetelmän ratkaista ongelma. Tarkoituksena on myös vahvistaa menetelmien sujuvaa käyttöä.

4.1 Sijoitusmenetelmä

Sijoitusmenetelmän kappale on kaksiosainen. Aluksi tuon esille tapaukset, joissa molemmat yhtälöparin yhtälöt ovat saman muuttujan suhteen ratkaistussa muodossa ja siitä oppikirja etenee haastavampien yhtälöparien ratkaisemiseen sijoitusmenetelmällä.

Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että oppilailla on vaikeuksia sijoittaa lauseke toiseen yhtälöön, vaikka he olisivatkin aikaisemmin opiskelleet yhden muuttujan yhtälöitä [10]. Tämä johtuu mahdollisesti ainakin osaksi siitä, ettei yhtäsuuruusmerkin transitiivisuutta ymmärretä. Ei siis ymmärretä, että esimerkiksi jos A = C ja A = B, niin C = B. Ellei opiskelija ymmärrä yhtäsuuruusmerkin transitiivisuutta edes edellä mainituissa yksinkertaisissa yhtälöissä, ei voida olettaa, että opiskelija osaisi sijoittaa muuttujan tilalle lausekkeen. Esimerkiksi jos on annettu $y = 6x + 7$, ei osata sijoittaa lauseketta "$6x + 7$" toiseen yhtälöön muuttujan y tilalle. [23].

Tämä Sfardin kuvailema ongelma heijastuu sijoitusmenetelmän käyttämisessä yhtälöparin ratkaisemiseen. Ellei transitiivisuutta ymmärrä sellaisenaan, koen, että opiskelija tarvitsee konkreettisia apuvälineitä sen hahmottamiseen. Konkreettisena apuvälineenä käytän tässä siis vaakamallia, koska tasapainon avulla opiskelija voi hahmottaa punnusten välisen yhtäsuuruuden jopa ilman ajatusta yhtälöparista. Ensimmäisen vaakamallin A.9 tarkoitus on auttaa opiskelijaa ymmärtämään, miksi saman muuttujan suhteen ratkaistujen yhtälöiden toiset puolet voidaan asettaa yhtä suuriksi.

Vaakapohdinnan jälkeen valitsin kappaleeseen toisen pohdintatehtävän, jossa opiskelijan tulee tutkia edellisen pohdintatehtävän vaaoista muodostettua yhtälöparia. Tehtävänannossa ei kuitenkaan kerrota, että yhtälöpari on suoraa kahdesta ensimmäisestä vaa'asta muodostettu vaan yhtäläisyyden hoksaaminen jää opiskelijan itsensä varaan. Tehtävässä testataan opiskelijan taitoja käsitellä yhtälöparin yhtälöitä, mutta ennen kaikkea tehtävän tarkoituksena on kartoittaa, selviääkö opiskelija vaakamallia vastaavasta tehtävästä, joka on nyt kuvan sijaan algebrallisessa muodossa. On nimittäin tutkittu, että opiskelijoilla on vaikeuksia yhdistää eri muodossa olevia yhtälöitä toisiinsa [16]. Tehtävän c)-kohdassa punnitaan suoraa transitiivisuuden ymmärtämistä.

Koska transitiivisuuden hahmottamisen on tutkittu olevan opiskelijoille haastavaa, halusin oppimateriaaliin esimerkin A.11, jossa kaksi y:n lauseketta on asetettu yhtäsuuriksi annetun yhtälöparin perusteella. Huomioiden opiskelijoiden ongelmat yhdistää eri muodossa esitettyjä yhtälöitä [16], valitsin tähän esimerkin yhtälöpariin yhtälöt edellä olevista pohdintatehtävistä. Tarkoitus olisi, että tässä vaiheessa opiskelija voisi palata alun vaakoihin ja vertailla niitä esimerkissä annettuun yhtälöpariin varsinkin, jos ei ymmärrä kuinka vaaoista muodostetaan yhtälöitä.

Toisen kappaleen vaakapohdintatehtävän A.13 tarkoituksena on saada opiskelija ymmärtämään, kuinka jokin muuttuja voidaan korvata sitä vastaavalla lausekkeella. Toisin sanoen tarkoitus on selventää Sfardin kuvailemaa ongelmaa ymmärtää yhtäsuuruusmerkin transitiivisuutta [23]. Vaakatehtävän viimeisessä kohdassa huomioidaan sosiaalinen dimensio, kun tehtävää pohditaan yhdessä parin kanssa. Tarkoituksena tässä kohdassa on miettiä, kuinka viimeiseen vaakaan muodostunut yhtälö liittyy tehtävän ensimmäisessä kohdassa kahdesta ensimmäisestä vaa'asta muodostettuun yhtälöpariin. Tehtävän pyrkimys olisi saada opiskelijat huomaamaan, että kyseessä on yhden muuttujan yhtälö, jonka he osaavat ratkaista.

Molemmissa kappaleen mallitehtävässä on jälleen huomioitu tavoitteet kehittää opiskelijan yhtälönratkaisua. Tällä kertaa yhtälöparin yhtälöihin on valittu rationaalilukukertoimia, jotka tuovat hieman lisähaastetta yhtälöparin ratkaisemiseen [12]. Mallitehtävissä on käyty sijoitusmenetelmän ratkaisumalli yksityiskohtaisesti läpi vaihe vaiheelta ja ratkaisun löytymisen jälkeen tässäkin on tarkistettu ratkaisu sijoittamalla saatu lukupari alkuperäiseen yhtälöön.

Kuten aiemmin jo mainitsin, on algebrallisesti ratkaistut yhtälöparit myös kätevä tarkistaa GeoGebran avulla. Graafisen tarkistamisen myötä opiskelija osaisi paremmin yhdistää eri esitysmuodossa olevia yhtälöitä, sillä tutkimusten mukaan opiskelijoilla on vaikeuksia yhdistää yhtälöiden algebrallisia ja graafisia esityksiä [16].

Kappaleen tehtävistä 11 on puhtaasti mekaaninen. Tehtävän tarkoitus on, että jokainen ryhmän opiskelija selviytyisi siitä ja saisi onnistumisen tunteita. Yhtälöihin ei ole haluttu lisähaastetta, koska kuten jo useaan otteeseen on mainittu, opiskelijoilla on tutkittu olevan ongelmia ymmärtää sijoittamisen oikeellisuus [23].

Tehtävässä 12 opiskelijan on tarkoitus pysähtyä miettimään, milloin käsitelty ratkaisumenetelmä on hyödyllinen apuväline. Tehtävässä on tarkoitus myös miettiä juuri opitun menetelmän hyödyntämistä jossain arkielämän ongelmassa. Tehtävä vastaa samalla projektiryhmän oppikirjalle yhdessä asettamaa vaatimusta, että jokaiseen oppikirjaan osaan lisätään tehtävä, jossa opiskelija keksii itse tehtävän kaverilleen ratkaistavaksi.

Tehtävä 13 on sanallinen. Tehtävä ei ole tyypillinen ”muodosta yhtälöpari ja ratkaise se” -tehtävä, vaan tehtävässä tulee yhtälöparia apuvälineenä käyttäen ratkaista annetuilla tiedoilla aivan uusi tieto. Turun Matikkamaan julkaisussa painotettiin, että lisäämällä elementtejä sanallisiin tehtäviin saadaan niihin lisää ongelmanratkaisun syvyyttä [17]. Tässä tehtävässä haen juuri tätä syvyyttä, lukion lyhyen matematiikan vaatimustason huomioiden.

Yhtälöiden muodostaminen sanallisista tehtävistä on tutkittu olevan haasteellista opiskelijoille [7]. Osittain tämän vuoksi lisäsin tehtävään 14 vaihtoehdoiksi neljä yhtälöparia, joista kaksi johtaa tehtävän oikeaan ratkaisuun. Kahteen muuhun yhtälöpariin on tuotu mukaan mahdollisimman paljon oikeaa yhtälöparia muistuttavia asioita tuomaan tehtävään lisähaastetta. Näissä kahdessa yhtälöpareissa näkyy virheitä, joiden uskon olevan tyypillisiä tällaisessa tehtävässä.

Tehtävä 15 puolestaan on soveltava mekaaninen tehtävä, jossa pitää paitsi löytää suorien ja akseleiden leikkauspisteet, niin on myös muistettava, kuinka kolmion pinta-ala lasketaan. Omat opetuskokemukseni ovat osoittaneet, että pinta-alakaavat eivät ole lyhyen matematiikan opiskelijoille itsestään selviä.

4.2 Eliminointimenetelmä

Kuten mainittua, myös kappale eliminointimenetelmästä lähtee liikkeelle vaakamallilla. Jos opiskelija pystyy ymmärtämään että kolmaskin vaaka pysyy tasapainossa, on hän oletettavasti ymmärtänyt eliminointimenetelmän idean. Tässäkin tehtävässä on huomioitu myös tavoitteet laittaa opiskelijat perustelemaan päätelmiään.

Tämän kappaleen pohdintatehtävä A.16 on lähes identtinen sijoitusmenetelmäkappaleen pohdintatehtävään A.10, jossa opiskelijan tavoitteena on vahvistaa yhtälönratkaisutaitojaan sekä sisäistää opetettavaa ratkaisumenetelmää. Tässäkin pohdintatehtävässä yhtälöpari on muodostettu edellisen pohdintatehtävän vaaoista sen takia, että opiskelija osaisi paremmin yhdistää algebrallisia esityksiä eri esitysmalleihin. Sen on tutkittu olevan yleinen ongelma opiskelijoiden keskuudessa [16].

Pohdintatehtävässä punnitaan siis yhtälönratkaisutaitojen lisäksi sitä, ymmärtääkö opiskelija, että yhtäsuuruus säilyy vaikka yhtälöitä lasketaan puolittain yhteen tai vähennetään puolittain toisistaan. Tässäkin tehtävässä on tarkoitus jakaa ajatukset parin kanssa, koska tutkimuksen mukaan keskustelu kehittää ja tukee opiskelijoiden identiteettiä matemaattisena oppijana [1].

Mallitehtäviä valitsin oppikirjaan siksi kaksi, että molemmat eliminointimenetelmän tapaukset tulisivat esitellyksi. Molemmissa tehtävissä käsitellään erilaisia yhtälönratkaisutilanteita, joiden tarkoitus on vahvistaa yhtälönratkaisutaitoja.

Eliminointimenetelmän kappaleen tehtävä 17 noudattaa projektiryhmän yhdessä sopimaa tehtävätyyppiä, jossa opiskelijan on tarkoitus löytää väärin ratkaistusta tehtävästä virheet. Tehtävässä 18 puolestaan opiskelijan tavoitteena on selvittää itselleen, milloin eliminointimenetelmä on hyvä apuväline. Viimeisessä tehtävässä eli tehtävässä 20 sen sijaan täytyy tutkailla yhtälöä, jossa on jo nähtävillä kirjan seuraavan kappaleen asioita. Tässä tehtävä kuitenkin ratkeaa yhtälöparin avulla.

5 Lisätehtävät

Lisätehtävien tarkoituksena on harjoittaa yhtälöparin muodostamista sekä eri menetelmien oikea-aikaista käyttöä. Tavoitteena on lisätä laskurutiinia sekä vahvistaa opiskelijan yhtälönratkaisutaitoja, kuten opetussuunnitelman perusteissa tältä kurssilta haluttiin [20]. Lisäksi tarkoituksena on tuoda matematiikan tunneille mukaan sosiaalinen dimensio.

Valitsin lisätehtäviin mahdollisimman soveltavia tehtäviä ja etenkin sanallisia tehtäviä halusin paljon mukaan. Turun yliopiston Akatemiaprofessori Erno Lehtinen toteaa Turun Matikkamaan julkaisussa *Matematiikan sanalliset tehtävät - tehtävän ymmärrys* sanallisista tehtävistä seuraavaa:

> Sanallisten tehtävien kautta voidaan myös rakentaa siltaa puhtaan luvuilla ja symboleilla harjoitettavan koulumatematiikan ja matemaattisen tiedon käytännöllisen soveltamisen välille. [17]

Myös artikkelissa *Translating words into equations: a cognitive load theory approach* kerrotaan, kuinka kyky muodostaa lauseista yhtälöitä on tärkeä taito monella matematiikan osa-alueella [3]. Kuten mainittua, tutkimusten mukaan opiskelijat kuitenkin kokevat yhtälöiden algebrallisen muodostamisen sanallisista tehtävistä haasteellisena [7]. Tämän ongelman tiedostaen lisäsin tehtäviin useita hieman erityylisiä sanallisia tehtäviä, jotta opiskelijat saisivat rutiinia muodostaa lauseista yhtälöitä ja tässä tapauksessa myös yhtälöpareja.

Lisäsin lisätehtäviin myös mekaanisen tehtävän, jossa opiskelijan on ensin ratkaistava yhtälöpari ja sen jälkeen osattava yhdistää yhtälöpari sitä vastaavaan kuvioon. Jokaisesta yhtälöparista tulee eri määrä ratkaisuja: yksi, ei yhtään tai äärettömän monta. Tutkimuksen mukaan opiskelijoilla on vaikeuksia ratkaista sellaisia yhtälöitä, jotka ovat identtisesti tosia tai jonka vastauksena saadaan ristiriita. Sen sijaan yhtälöt, joista saadaan yksi ratkaisu, ratkeavat helpommin. Tehtävässä on yhdistettävä yhtälöparien algebralliset esitykset niitä vastaaviin kuvaajiin, koska saman tutkimuksen mukaan näiden esitysten yhteneväisyys on usein epäselvää. [11]

6 Opettajan opas

Tähän oppaaseen on koottu muutamia vinkkejä oppikirjan pohdintatehtäviin liittyen.

6.1 Ajankäyttösuunnitelma

Tuntijako on tehty 45 minuutin oppitunneille. Suunnitelma on suuntaa-antava eli opettajan valittavaksi jää, kuinka painottaa mitäkin kappaletta.

Lineaarinen yhtälöpari (1 h)

Graafinen ratkaisumenetelmä (1 h)

Algebralliset ratkaisumenetelmät (2 h)

- Sijoitusmenetelmä
- Eliminointimenetelmä

Yhtälöparin sovelluksia (1 h)

6.2 Pohdintatehtävät

Tässä kappaleessa kerrotaan tarkemmin oppikirjan pohdintatehtävistä, jotta niistä saataisiin paras hyöty irti oppitunnilla.

Pohdinta A.1

- Pohdinnan idea on, että opiskelija ymmärtää saman kuvion vastaavan samaa massaa kohdan molemmissa yhtälöissä
- Tehtävää voi eriyttää kysymyksellä, montako keinoa keksii tehtävän ratkaisuun
- Perustelut vieruskaverille sitä varten, koska perusteluista pystyy varmistamaan, että tehtävä on ymmärretty
- Vastaus: a) 3 kg ja 1 kg, b) 2 kg ja 5 kg

Pohdinta A.2

- Tarkoitus vahvistaa sitä ymmärrystä, että yhtälöparin yhtälöiden tulee olla voimassa yhtä aikaa
- Voi eriyttää ylöspäin ohjaamalla opiskelijaa muodostamaan c)-kohdasta yhtälöparin ja mahdollisesti jopa ratkaisemaan sen
- Vastaus: c) luvut 5 ja 14

Pohdinta A.5

Tehtävän tavoitteena on, että opiskelija

- osaa yhdistää suorien leikkauspisteen ja yhtälöparin ratkaisun
- ymmärtää, että yhtälöparin ratkaisupiste toteuttaa yhtälöparin molemmat suoran yhtälöt, eikä ratkaisu siten voi olla jokin piste ainoastaan toiselta suoralta

Pohdinta A.7

- Tarkoituksena on, että opiskelija päättelee itse kuvaajien avulla, montako ratkaisua yhtälöparilla voi olla
- Tehtävänanto on suppea, joten opiskelijalle voi antaa seuraavanlaisia vinkkejä (vinkit helpottuvat loppua kohti):
  1. *Yhtälöparin ratkaisu on lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt, kuvaajien leikkauspisteen koordinaatit on yhtälöparin ratkaisu.*
  2. Yhtälöparin ratkaisu löytyy kuvaajien leikkauspisteestä. Miten käy, kun yhtälöiden kuvaajat eivät leikkaa? Millaisia yhtälöt silloin ovat?
  3. Voiko kahdella suoralla olla useita leikkauspisteitä? Millaisia kuvaajat silloin ovat? Entä yhtälöt?
  4. Tutki seuraavia yhtälöitä yhtä aikaa: $y = 2x + 4$, $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = 2x - 1$. Mitä huomaat? Onko yhtälöillä jotain yhteistä? Jos on, miten se vaikuttaa kuvaajiin? Millaisia yhtälöpareja yhtälöistä muodostuisi?
- Ratkaisu pohdintaan löytyy sivun 33 kuvioista

Pohdinta A.9

- Tavoitteena on, että opiskelija perehtyisi vaakoihin yksin tai yhdessä parin kanssa ja pohdinnan ja keskustelun jälkeen osaisi perustellen osoittaa ymmärtävänsä, miksi kolmaskin vaaka on tasapainossa
- Työkalut tasapainon ymmärtämiseen annetaan kappaleessa A.2

Pohdinta A.10

- Tarkoitus testata opiskelijan kykyä hahmottaa sijoitusmenetelmän käyttöä, kun molemmat yhtälöt ratkaistussa muodossa saman muuttujan suhteen
- Harjoittaa myös yhtälönratkaisua
- Yhdistää vaakamallin sen algebralliseen esitykseen eli tuo sijoitusmenetelmän käytön yhtälöiden algebralliseen laskentaan

Pohdinta A.13

- a)-kohdassa tarkoitus harjoittaa yhtälöparin muodostamista
- Koko tehtävän tarkoitus auttaa ymmärtämään, että muuttuja voidaan korvata sitä vastaavalla lausekkeella (katso b) -kohta)
- Tavoitteena myös saada opiskelija huomaamaan, kuinka sijoitusmenetelmän avulla yhtälöparin toiseen yhtälöön muodostuu yhden muuttujan yhtälö, joka osataan ratkaista

Pohdinta A.15

- Pohdinnan tarkoitus on, että opiskelija ymmärtää eliminointimenetelmän käytön eli sen, että yhtälöitä voidaan laskea puolittain yhteen tai vähentää yhtälöitä puolittain toisistaan
- Työkalut menetelmän ymmärtämiseen on annettu kappaleessa A.2
- Annettujen työkalujen ja kahden ensimmäisen vaa'an avulla voidaan perustella, että kolmas vaaka säilyy tasapainossa

Pohdinta A.16

- Tässä on esitetty edeltävää vaakapohdintaa algebrallisesti
- Opiskelijan olisi huomattava, että yhtälöparin yhtälöt ovat samat kuin edeltävän vaakapohdinnan kahdessa ensimmäisessä vaa'assa
- Tavoitteena saada opiskelija ymmärtämään eliminointimenetelmän oikeellisuus myös algebrallisissa yhtälöissä
- Harjoittaa myös yhtälönratkaisua

Pohdinta A.19

- Tavoitteena on, että opiskelija kokoaa molemmista käsitellyistä yhtälöparin algebrallisista ratkaisumenetelmistä itselleen tiivistelmän, milloin kannattaa käyttää kumpaakin ratkaisumenetelmää
- Pareittain tai pienissä ryhmissä
- Mikäli ei ehditä toteuttaa oppitunnilla, voi opiskelijoille jakaa valmiit tiivistelmät seuraavalta sivulta

Sijoitusmenetelmä on hyödyllinen silloin, kun ainakin toinen yhtälöistä on ratkaistu tai helposti ratkaistavissa toisen muuttujan suhteen.

Esim.

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

tai

$$\begin{cases} 5y = -3x + 7 \\ x = 4 \end{cases}$$

Eliminointimenetelmä on hyödyllinen käyttää, kun

- yhtälöissä toisen tuntemattoman kertoimissa on vastaluvut
- tuntemattoman kertoimet helposti kerrottavissa/jaettavissa vastaluvuiksi.

Lähdeluettelo

[1] Anderson, R. (2007). Being a Mathematics Learner: Four Faces of Indentity. *The Mathematics Educator, 17*(1), 7–14.

[2] Andrews-Larson, C. (2015). Roots of Linear Algebra: An Historical Exploration of Linear Systems. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 25*(6).

[3] Ayres, P., Cooper, M., Pawley, D. & Sweller, J. (2005). Translating words into equations: a cognitive load theory approach. *Educational Psychology, 25*(1), 75–97.

[4] Ben-Chaim, D. & Stupel, M. (2003). Absolute value equations – what can we learn from their graphical representation? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(6), 923–928.

[5] Bollström-Huttunen, M., Hakkarainen, K., Lonka, K. & Pyysalo, R. (2005). *Tutkiva oppiminen käytännössä. Matkaopas opettajille.* Helsinki: WSOY.

[6] Cai, J., Nie, B. & Moyer, J. (2010). The teaching of equation solving: approaches in Standards-based and traditional curricula in the United States. *Pedagogies: An International Journal, 5*(3), 170–186.

[7] Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly, 88*, 286–289.

[8] Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375–402.

[9] Falcon, R. (2009). *Algebraic Reasoning in the Middle Grades: A View of Student Strategies in Pictorial and Algebraic System of Equations*. El Paso: University of Texas at El Paso.

[10] Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). *Arithmetic/algebraic problemsolving and the representation of two unknown quantities*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 391–398.

[11] Huntley, M. A., Kahan, J., Marcus, R. & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

[12] Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?*Ph.D. Göteborg: Göteborgs universitetet.

[13] Hähkiöniemi, M., & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 19*(2), 45–58.

[14] Isotalo, S., Peräsalo, M., Soro, R. & Wuolijoki, H. (2005). *MAB Lukiolaisen matematiikka 3, Matemaattisia malleja I.* 1. painos. Helsinki: WSOY/Sanoma Pro.

[15] Kerkkänen, J.-P. (2007). http://opinnot.net/matematiikka/yhtalo/index.php. Luettu 4.5.2016.

[16] Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Teoksessa Lester, F. K. (Ed.) Second Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning (s. 707–762). Charlotte: Information Age.

[17] Turun Matikkamaan julkaisu. (2013). *Matematiikan sanalliset tehtävät - TEHTÄVÄN YMMÄRRYS*.

[18] Lin, Y.-C. & Yang, D.-C. (2015). Examining the Differences of Linear Systems between Finnish and Taivanese Textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1265–1281.

[19] Lynch, K. & Star, J. R. (2014). Teachers' Views About Multiple Strategies in Middle and High School Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(2), 85–108.

[20] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus.

[21] Portaankorva-Koivisto, P. & Silfverberg, H. (2012). *Matematiikka kouluaineena - yläkoulun oppilaiden tekemien oppiainevertailujen paljastamia matematiikkakäsityksiä.* Teoksessa Juuti, K., Krzywacki, H. & Lampiselkä, J. (Ed.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta (s 183–200). Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry.

[22] Ramirez, A. A.(2009). *A cognitive approach to solving systems of linear equations*. Ph.D. Illinois State University.

[23] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

A Lineaarinen yhtälöpari

Pohdinta A.1 Alla on kaksi kohtaa, joissa molemmissa on kaksi yhtälöä. Päättele annettujen tietojen perusteella, mitkä ovat tuntemattomien kuvioiden massat, kun saman kuvion massa säilyy kohdan molemmissa yhtälössä. Montako keinoa keksit ratkaista tehtävän?

Selitä päätelmäsi vieruskaverille.

a)

$$\clubsuit + \clubsuit = 6 \text{ kg}$$
$$\triangle + \clubsuit = 4 \text{ kg}$$

b)

$$\spadesuit + \spadesuit + \diamondsuit = 9 \text{ kg}$$
$$\diamondsuit - \spadesuit = 3 \text{ kg}$$

Pohdinta A.2 a) Keksi lukupareja, joiden lukujen summa on 19

b) Keksi lukupareja, joiden lukujen erotus on 9

c) Keksi lukupari, jonka lukujen summa on 19 ja erotus 9.

Vertaile vastauksia kaverin kanssa. Pohtikaa yhdessä, voisitteko hyödyntää yhtälönratkaisua c)-kohdassa. Miten?

Edellisessä kappaleessa tutustuttiin yhden muuttujan yhtälöihin ja niiden ratkaisemiseen. Tarkastellaan tässä kappaleessa tilannetta, jossa yhdessä yhtälössä onkin yhden sijaan kaksi muuttujaa.

Määritelmä: *Lineaarinen yhtälöpari* muodostuu kahdesta ensimmäisen asteen yhtälöstä, missä voi olla useampia muuttujia. Yhtälöparin ratkaisu on saatu lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt. Yhtälöpari merkitään aaltosulkeella.

Esimerkki A.3

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

on pohdintatehtävän A.1 b)-kohdasta muodostuva yhtälöpari, jossa muuttujina on x ja y. Tämän yhtälöparin ratkaisu on

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} .$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista graafisesti tai algebrallisesti eli laskemalla. Algebrallisessa ratkaisussa käytetään vertailumenetelmää, sijoitusmenetelmää tai eliminointimenetelmää.

Huomautus: Yhtälöparin ratkaisu on helppo tarkistaa sijoittamalla saatu lukupari alkuperäiseen yhtälöpariin:

- Jos sijoituksen jälkeen kumpaankin yhtälöön saadaan yhtäsuuruusmerkin molemmille puolille samat luvut, on ratkaisu oikein.
- Jos vähintään toisessa yhtälössä on eri luvut yhtäsuuruusmerkin eri puolilla, on ratkaisu väärä.

Lisätietoa: Yhtälöparien tapaan voidaan ratkaista myös useamman yhtälön ryhmiä. *Lineaarinen yhtälöryhmä* on sellainen yhtälöryhmä, jossa esiintyy kaksi tai useampi ensimmäisen asteen yhtälöä. Yhtälöpari on siis myös yhtälöryhmä.

Pohdinta A.4 Voiko seuraavalla yhtälöryhmällä olla yksikäsitteistä ratkaisua?

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

Tehtävät

1. Mitä tarkoitetaan yhtälöparin ratkaisulla?

2. a) Toteuttaako lukupari (4,2) yhtälöparin $\begin{cases} 4y = -2x + 16 \\ -x + y = 2 \end{cases}$?

b) Keksi ja muodosta yhtälöpari, jonka ratkaisu on $x = 2$ ja $y = 1$.

3. Voidaanko seuraavat yhtälöt ja yhtälöpari ratkaista annetuilla tiedoilla niin, että ratkaisu on yksikäsitteinen? Perustele vastauksesi.

a) $10x = 700$

b) $y + 2x = 8$

c) $\begin{cases} y + 2x = 8 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

4. Tarkastellaan kahden muuttujan yhtälöä $2y = -x+5$. Tutki yhtälöä sijoittamalla siihen muuttujien paikalle lukuparit (4,2), (2,2), (0,2) ja (-2,2). Päättele sijoitusten perusteella, millainen lukupari toteuttaisi yhtälön. Perustele.

5. Päättele x:n ja y:n arvot, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt.

a) $x + y = 6$ ja $4x = -y$

b) $y = 2x + 9$ ja $y = -4x - 9$.

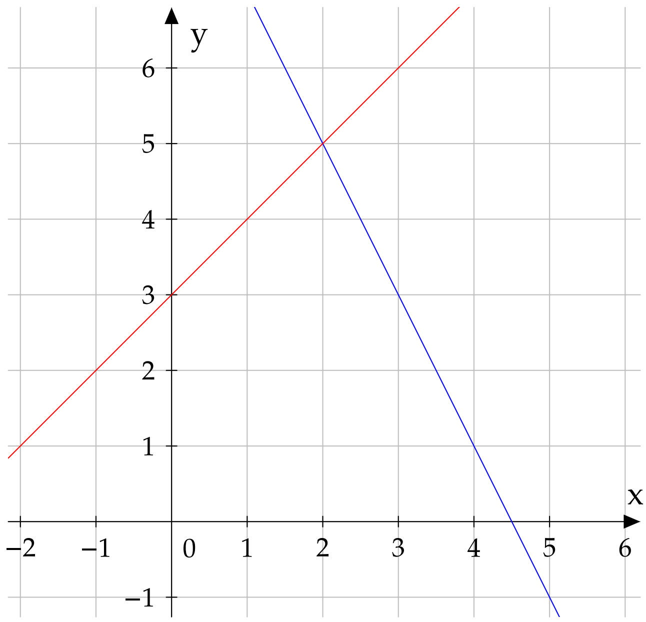
Piirrä näiden yhtälöiden kuvaajat GeoGebran avulla ja tarkastele suoria.

A.1 Graafinen ratkaisumenetelmä

Yhtälöparin ratkaisu on siis lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöparin yhtälöt. Piirretään koordinaatistoon yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

suorien kuvaajat:



Esimerkin A.3 mukaan kyseisen yhtälöparin ratkaisu on

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Pohdinta A.5 Missä kohdassa yhtälöparin ratkaisu on edellisessä kuviossa? Miksi ratkaisu on juuri kyseisessä kohdassa? Miksi esimerkiksi piste (1,4) ei ole yhtälöparin ratkaisu?

Pohdi kysymyksiä parin kanssa.

Määritelmä: Yhtälö on *ratkaistussa muodossa* tietyn *muuttujan suhteen*, kun kyseinen muuttuja esiintyy yksin yhtälön vasemmalla puolella eikä kyseistä muuttujaa esiinny lainkaan yhtälön oikealla puolella.

Esimerkki A.6 Yhtälö

$$x = -2y - 3$$

on ratkaistu muuttujan x suhteen.

Yhtälöparin *graafinen ratkaisu* perustuu siihen, että yhtälöitä vastaavat suorat piirretään samaan koordinaatistoon ja kuvasta luetaan suorien leikkauspisteen koordinaatit. Kuvaajien leikkauspiste toteuttaa molemmat yhtälöt, joten *leikkauspisteen koordinaatit on yhtälöparin ratkaisu*.

Pohdinta A.7 Onko mahdollista, että yhtälöparille ei löydy ratkaisua? Voiko jollain yhtälöparilla olla äärettömästi ratkaisuja?

Pohdi yhtälöparin määritelmän avulla edellä mainittuja kysymyksiä ja tutki havaintojasi GeoGebraa apuna käyttäen. Kirjaa havainnot ylös vihkoosi mahdollisimman monipuolisesti.

Pyydä opettajalta tarvittaessa lisävinkkejä.

Mallitehtävä A.8 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2y = 4x + 6 \\ y - x = 2 \end{cases} .$$

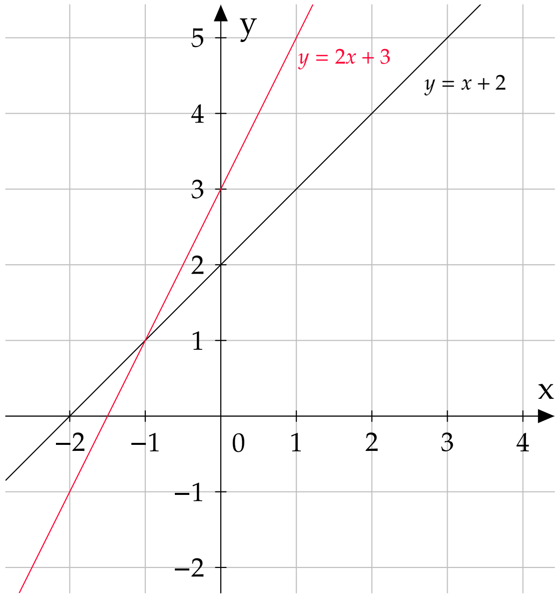
Ratkaisu: Ratkaistaan ensin molemmat yhtälöt muuttujan y suhteen.

$$\begin{aligned} 2y &= 4x + 6 && \| :2 \\ y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y - x &= 2 && \| +x \\ y - x + x &= 2 + x \\ y &= x + 2. \end{aligned}$$

Piirretään seuraavaksi suorat samaan koordinaatistoon.



Kuviosta nähdään, että suorat leikkaavat pisteessä $(-1, 1)$.

Vastaus:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Tarkistus:
Sijoitetaan saatu lukupari alkuperäiseen yhtälöpariin.

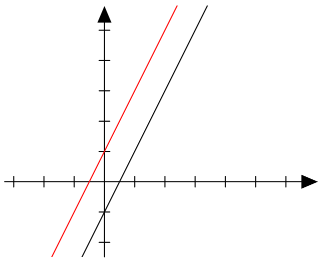
$$\begin{aligned} 2y &= 4x + 6 && \parallel x = -1, y = 1 \\ 2 \cdot 1 &= 4 \cdot (-1) + 6 \\ 2 &= -4 + 6 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y - x &= 2 && \parallel x = -1, y = 1 \\ 1 - (-1) &= 2 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

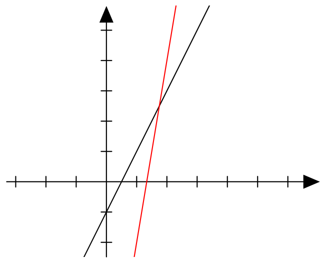
Yhtälöt ovat tosia eli ratkaisu on oikein.

Suorien kuvaajista voidaan päätellä montako ratkaisua yhtälöparilla on, koska ratkaisuna ovat kaikkien suorien yhteisten pisteiden koordinaatit.



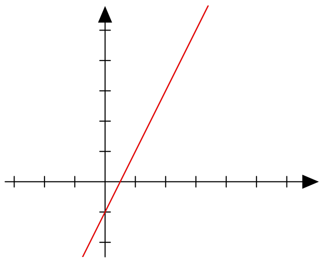
Kun suorat ovat *yhdensuuntaisia, mutta erillään* toisistaan, yhtälöparilla *ei ole yhtään ratkaisua*.

$k_1 = k_2$



Kun suorat *leikkaavat toisensa*, on yhtälöparilla *täsmälleen* yksi ratkaisu (leikkauspisteessä).

$k_1 \neq k_2$



Kun suorat *yhtyvät*, on yhtälöparilla *äärettömän monta ratkaisua* (kaikki pisteet suoralla).

$k_1 = k_2, b_1 = b_2$

Huomautus: Koska graafinen ratkaiseminen perustuu piirtämiseen, sen avulla saadaan usein vain likimääräinen ratkaisu.

Huomautus: Voit tarkistaa yhtälöparien ratkaisut GeoGebran avulla.

Tehtävät

6. Alla on annettu neljä yhtälöä.

$3y = -9x + 3$	$\frac{1}{3}(y - 3x - 1) = 0$	$y + 3x - 1 = 0$	$y = 3x + 5$

Muodosta yhtälöistä kaikki sellaiset yhtälöparit,

a) joilla on ainoastaan yksi ratkaisu

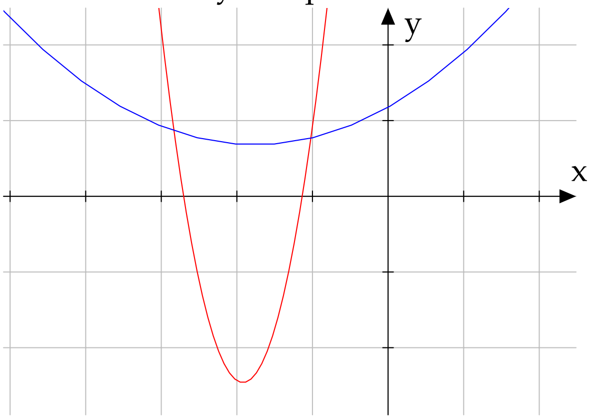
b) joilla ei ole ratkaisua

c) joilla on äärettömän monta ratkaisua.

7. Ratkaise edellisessä tehtävässä muodostamistasi yhtälöpareista ainakin kolme.

8. Keksi oma esimerkki yhtälöparista, jolla on ääretön määrä ratkaisuja. Anna tämän jälkeen keksimäsi yhtälöpari parille tarkistettavaksi.

9. Montako ratkaisua alla olevalla koordinaatistoon piirretyllä toisen asteen yhtälöistä muodostetulla yhtälöparilla on?



10. Korvaa tuntematon n jollain kokonaisluvulla siten, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -10x + 5ny = 11 \end{cases}$$

a) on yksi ratkaisu

b) ei ole ratkaisua.

A.2 Algebralliset ratkaisumenetelmät

Algebrallisessa menetelmässä yhtälöpari ratkaistaan ilman kuvaajaa. Tässä yhtälöparin ratkaiseminen palautuu sellaisen yhtälön ratkaisemiseen, jossa on ainoastaan yksi muuttuja. Yhtälöitä siis muokataan niin, että toinen muuttujista voidaan eliminoida. Näin saadaan yhtälö, jossa on yksi muuttuja.

Algebrallisia ratkaisumenetelmiä on sijoitusmenetelmä ja eliminointimenetelmä. Molemmat ratkaisumenetelmät perustuvat seuraaviin asioihin, joita on sallittua tehdä yhtälöpareille ilman, että ratkaisu kärsii.

Yhtälöparin yhtälöissä:

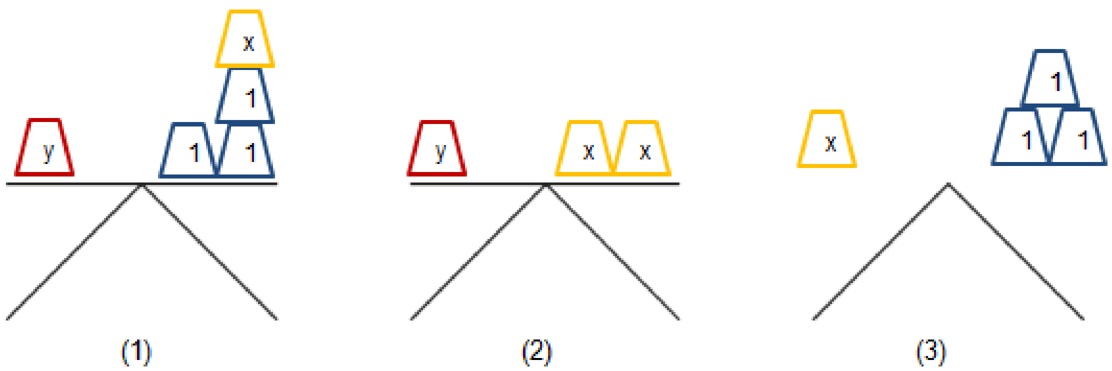
- muuttujan suhteen ratkaistussa yhtälössä yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle jäävän lausekkeen voi sijoittaa sellaisenaan toiseen yhtälöön kyseisen muuttujan paikalle
- yhtälöt voidaan laskea puolittain yhteen
- yhtälöt voidaan vähentää puolittain toisistaan.

Sen sijaan yhtälöitä ei esimerkiksi saa kertoa eikä jakaa luvulla 0, eikä yhtälöitä saa käsitellä niin, että operoi ainoastaan yhtälön toista puolta.

Huomautus: Myös algebrallisesti ratkaistut yhtälöparit voidaan tarkistaa GeoGebran avulla.

A.2.1 Sijoitusmenetelmä

Pohdinta A.9 Alla olevat kaksi ensimmäistä vaakaa ovat tasapainossa. Miten vaaka asettuu kolmannessa kohdassa? Perustele.



Pohdinta A.10 Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Päättele yhtälöparin perusteella oikea merkki = tai ≠ laatikon paikalle.

a) $y \square 2x$

b) $y \square x + 2$

c) $x + 3 \square 2x$

d) $x \square 3.$

Keskustele vastauksista vieruskaverin kanssa. Huomaatteko yhtäläisyyksiä pohdintatehtävään A.9?

Koska molemmissa yhtälöissä *muuttujien arvojen tulee olla samat*, täytyy yhtälöiden toisella puolella olevien *lausekkeidenkin olla yhtäsuuret*, kun yhtälöparin molemmat yhtälöt on ratkaistu saman muuttujan suhteen.

Esimerkki A.11 Pohdintatehtävässä A.10 yhtälöparin molemmat yhtälöt

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2x. \end{cases}$$

on ratkaistu muuttujan y suhteen. Näin ollen on oltava

$$x + 3 = 2x.$$

Kun esimerkin A.10 yhtälöiden oikeat puolet asetetaan yhtä suuriksi, saadaan ratkaistua yhden muuttujan yhtälöstä jäljelle jäänyt muuttuja eli tässä tapauksessa x. Sijoittamalla saatu x:n arvo toiseen alkuperäisistä yhtälöistä voidaan laskea myös toisen muuttujan eli y:n arvo.

Mallitehtävä A.12 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 5(\frac{2}{5}x + 1) \\ y = -5(\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}) \end{cases} .$$

Ratkaisu: Molemmat yhtälöt ovat valmiiksi ratkaistussa muodossa muuttujan y suhteen. Asetetaan yhtälöiden toiset puolet eli tässä tapauksessa oikeat puolet yhtä suuriksi ja ratkaistaan muodostunut yhtälö.

$$\begin{aligned}
5(\tfrac{2}{5}x+1) &= -5(\tfrac{3}{5}x-\tfrac{1}{5}) & & \\
2x+5 &= -3x+1 & & \| +3x \\
5x+5 &= 1 & & \| -5 \\
5x &= -4 & & \| :5 \\
x &= -\tfrac{4}{5}. & &
\end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu x:n arvo yhtälöön $y = 2x + 5$ ja ratkaistaan siitä y.

$$\begin{aligned}
y &= 2x+5 & & \| \, x = -\tfrac{4}{5} \\
y &= 2\cdot(-\tfrac{4}{5})+5 & & \\
y &= -\tfrac{8}{5}+5 & & \\
y &= 3\tfrac{2}{5}. & &
\end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} x = -\tfrac{4}{5} \\ y = 3\tfrac{2}{5} \end{cases}$$

Tarkistus:
Sijoitetaan saadut arvot yhtälöparin molempiin yhtälöihin.

$$\begin{aligned}
y &= 2x+5 & & \| \, x = -\tfrac{4}{5}, y = 3\tfrac{2}{5} \\
3\tfrac{2}{5} &= 2\cdot(-\tfrac{4}{5})+5 & & \\
3\tfrac{2}{5} &= -\tfrac{8}{5}+5 & & \\
3\tfrac{2}{5} &= 3\tfrac{2}{5} & &
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
y &= -3x+1 & & \| \, x = -\tfrac{4}{5}, y = 3\tfrac{2}{5} \\
3\tfrac{2}{5} &= -3\cdot(-\tfrac{4}{5})+1 & & \\
3\tfrac{2}{5} &= \tfrac{12}{5}+1 & & \\
3\tfrac{2}{5} &= 3\tfrac{2}{5} & &
\end{aligned}$$

Yhtälöt ovat tosia eli ratkaisu on oikein.

Edellä tarkasteltiin tilannetta, jossa molemmat yhtälöparin yhtälöt olivat valmiiksi ratkaistussa muodossa saman muuttujan suhteen. Kuinka toimia, kun vähintään toinen yhtälö ei ole ratkaistussa muodossa?

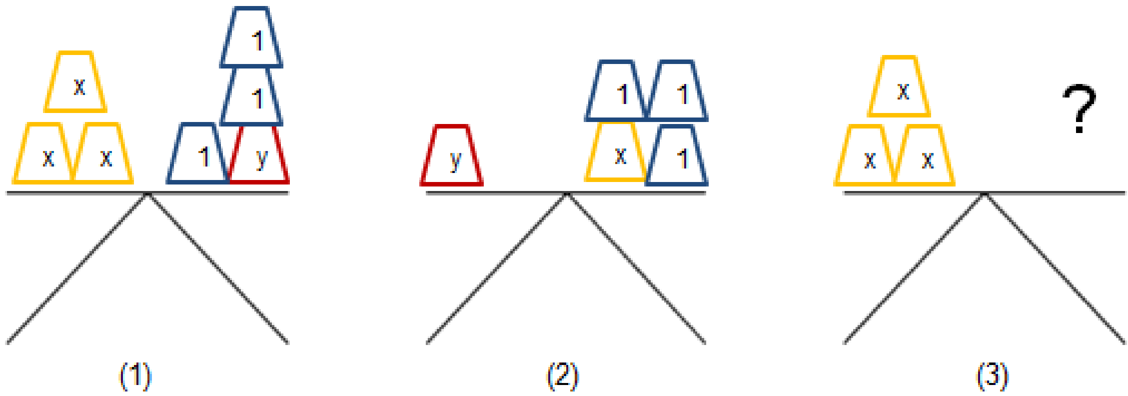
Pohdinta A.13 Alla on kolme vaakaa. Vaa'at (1) ja (2) ovat valmiita ja tasapainossa, mutta vaa'asta (3) puuttuu kaikki oikeanpuoleiset punnukset.

a) Muodosta yhtälöpari vaaoista (1) ja (2).

b) Piirrä vaakaan (3) oikealle puolelle puuttuvat punnukset niin, että vaaka on tasapainossa. Käytä ainoastaan punnuksia x ja 1 (punnuksen y käyttö on kielletty).

c) Muodosta vaa'asta (3) yhtälö.

d) Pohdi, miten voisit ratkaista kohdassa a) muodostamasi yhtälöparin. Mieti, voisitko käyttää ratkaisussa apunasi edellisen kohdan yhtälöä. Jaa ajatuksesi parin kanssa.



Pohdintatehtävässä A.13 on tarkoituksena keksiä, kuinka punnus y voitaisiin korvata punnuksia x ja 1 käyttäen. Aiemmin pohdintatehvässä A.9 tuli puolestaan osata sijoittaa saman muuttujan lausekkeet yhtäsuuriksi. Kyseessä on *sijoitusmenetelmä*, jossa yhtälöparin toisessa yhtälössä toinen muuttuja pyritään kirjoittamaan ainoastaan toisen muuttujan avulla niin, että yhtälö muokkautuu yhden muuttujan yhtälöksi. Yhtälöstä voidaan ratkaista jäljelle jäänyt muuttuja, jonka avulla ratkeaa myös aluksi korvattu muuttuja.

Mallitehtävä A.14 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 3t = \frac{4}{5}s + 1 \\ t = \frac{1}{3}s + \frac{1}{6} \end{cases} .$$

Ratkaisu: Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä, koska jälkimmäinen yhtälö on ratkaistussa muodossa muuttujan t suhteen. Sijoitetaan tässä yhtälössä annettu

t:n lauseke $\frac{1}{3}s + \frac{1}{6}$ ensimmäiseen yhtälöön muuttujan t paikalle.

$$\begin{aligned}
3t &= \tfrac{4}{5}s + 1 && \| \; t = \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{6} \\
3 \cdot (\tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{6}) &= \tfrac{4}{5}s + 1 \\
s + \tfrac{1}{2} &= \tfrac{4}{5}s + 1 && \| - \tfrac{4}{5}s \\
s - \tfrac{4}{5}s + \tfrac{1}{2} &= 1 && \| - \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{1}{5}s &= \tfrac{1}{2} && \| \; : \tfrac{1}{5} \\
s &= \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{5} \\
s &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{1} \\
s &= \tfrac{5}{2} \\
s &= 2\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu s:n arvo yhtälöön $t = \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}$ ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{6} && \| \; s = \tfrac{5}{2} \\
t &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} \\
t &= \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \\
t &= \tfrac{6}{6} \\
t &= 1.
\end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} s = 2\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

Tarkistus:
Sijoitetaan saadut arvot yhtälöparin molempiin yhtälöihin.

$$\begin{aligned}
3t &= \tfrac{4}{5}s + 1 && \| \; s = \tfrac{5}{2}, t = 1 \\
3 \cdot 1 &= \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{2} + 1 \\
3 &= \tfrac{20}{10} + 1 \\
3 &= 3
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{6} && \| \; s = \tfrac{5}{2}, t = 1 \\
1 &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} \\
1 &= \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

Yhtälöt ovat tosia eli ratkaisu on oikein.

Tehtävät

11. Ratkaise seuraavat yhtälöparit.

a) $\begin{cases} s = 5t + 8 \\ s = -2t - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = 0,1n + 0,8 \\ n = 2m \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 3 = 6x \\ \frac{1}{3}y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

12. Millainen yhtälöpari ratkeaa kätevästi sijoitusmenetelmällä? Keksitkö arkipäivän elämästä ongelmaa, jonka ratkaisemiseen voisi käyttää apuvälineenä yhtälöparia? Keksi tällainen tehtävä ja anna se parillesi ratkaistavaksi.

13. Oivan pituus on 188 cm ja Ainon 160 cm. Yhdysvalloissa Oivan pituudeksi mitattiin 6 jalkaa ja 2 tuumaa ja Ainon pituudeksi 5 jalkaa ja 3 tuumaa. Mikä on sinun pituutesi esitettynä jalkoina ja tuumina?

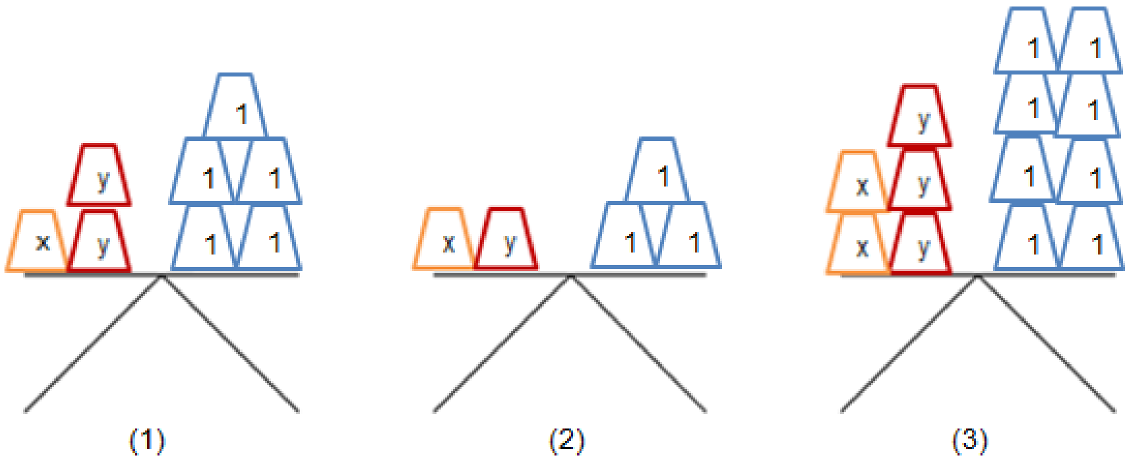
14. Aino lähtee kävelemään nopeudella 5 km/h. Oiva lähtee samasta paikasta tunnin myöhemmin Ainon perään mopolla. Kuinka kauan Oivan on ajettava nopeudella 45 km/h ennen kuin hän saa Ainon kiinni? Käytä apunasi alla olevia yhtälöpareja 1 - 4, joista vähintään yksi vastaa kyseistä tilannetta. Muuttuja t kuvaa aikaa ja muuttuja s matkaa.

$1\begin{cases} s = 5t + 1 \\ s = 45t \end{cases}$ $\quad 2\begin{cases} s = 5t + 5 \\ s = 45t \end{cases}$ $\quad 3\begin{cases} s = 45t + 5 \\ s = 5t \end{cases}$ $\quad 4\begin{cases} s = 5t \\ s = 45t - 5 \end{cases}$

15. Suorat $y = x + 11$ ja $y = -2x - 7$ rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

A.2.2 Eliminointimenetelmä

Pohdinta A.15 Alla olevat kaksi ensimmäistä vaakaa ovat tasapainossa. Pysyykö kolmas vaaka tasapainossa? Perustele päätelmäsi.



Pohdinta A.16 Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} 2y + x = 5 \\ y + x = 3. \end{cases}$$

Päättele yhtälöparin yhtälöitä muokkaamalla, kumpi merkki = tai ≠ sopii laatikon paikalle.

a) $y + x \,\square\, 5$

b) $2y \,\square\, 5 - x$

c) $3y + 2x \,\square\, 8$

d) $4y + 3x \,\square\, 11$

e) $2y + 2x \,\square\, 6$

Keskustele vastauksista vieruskaverin kanssa. Verratkaa tehtävän yhtälöitä pohdintatehtävän A.15 vaakoihin. Löydättekö yhteneväisyyksiä?

Huomataan, että *yhtälöiden tasapaino ei muutu, vaikka yhtälöparin yhtälöitä lasketaan puolittain yhteen*. Toisaalta tasapaino säilyy myös, kun yhtälöt vähennetään toisistaan. *Elimi-*

nointimenetelmässä on oleellista laskea yhtälöitä yhteen tai vähentää yhtälöitä toisistaan toisen muuttujan eliminoimiseksi.

Ennen yhtälöiden summaamista tai vähentämistä ne on muokattava kertomalla tai jakamalla sellaiseen muotoon, että toinen muuttuja saadaan laskutoimituksella eliminoitua. Yhtälöitä yhteen laskettaessa tämä tarkoittaa sitä, että toisen muuttujan kertoimissa on vastaluvut. Vähennettäessä yhtälöitä toisistaan täytyy toisella muuttujalla olla sama kerroin molemmissa yhtälöissä.

Mallitehtävä A.17 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x + 2y = -15 \end{cases} .$$

Ratkaisu: Käytetään eliminointimenetelmää. Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla 2 ja toinen yhtälö luvulla 3 , jotta muuttujan y kertoimiksi saadaan vastaluvut eli y-termien summaksi tulee 0. Lasketaan tämän jälkeen yhtälöt puolittain yhteen ja ratkaistaan yhden muuttujan yhtälö.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 & \| \cdot 2 \\ 5x + 2y = -15 & \| \cdot (-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 8x + 6y = 22 \\ 15x - 6y = -45 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8x + 6y + 15x + (-6y) &= 22 + (-45) \\ 23x &= -23 && \| : 23 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu x:n arvo yhtälöön $4x + 3y = 11$ ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 11 && \| x = -1 \\ 4 \cdot (-1) + 3y &= 11 \\ -4 + 3y &= 11 && \| + 4 \\ 3y &= 15 && \| : 3 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Vastaus:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Tarkistus:

Sijoitetaan saadut arvot yhtälöparin molempiin yhtälöihin.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 11 && \| \, x = -1, y = 5 \\ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 &= 11 \\ -4 + 15 &= 11 \\ 11 &= 11 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= -15 && \| \, x = -1, y = 5 \\ 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 &= -15 \\ -5 - 10 &= -15 \\ -15 &= -15. \end{aligned}$$

Yhtälöt ovat tosia eli ratkaisu on oikein.

Mallitehtävä A.18 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} -3(a+2) + 2(a+2) = -3b \\ 6(b-1) - (b-1) = a - 1 \end{cases}.$$

Ratkaisu: Käytetään eliminointimenetelmää. Poistetaan ensin molemmista yhtälöistä poistaa sulut.

$$\begin{cases} -3(a+2) + 2(a+2) = -3b \\ 6(b-1) - (b-1) = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3+2)(a+2) = -3b \\ (6-1)(b-1) = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(a+2) = -3b \\ 5(b-1) = a - 1 \qquad \| -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - 2 = -3b \\ 5b - 5 - a = -1 \end{cases}.$$

Huomataan, että muuttujassa a on sama kerroin molemmissa yhtälöissä. Vähentämällä yhtälöt puolittain toisistaan voidaan kyseinen muuttuja eliminoida ja ratkaista muodostunut yhden muuttujan yhtälö.

$$- \begin{cases} -a - 2 = -3b \\ 5b - 5 - a = -1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
-a-2-(5b-5-a) &= -3b-(-1) \\
-a-2-5b+5+a &= -3b+1 \\
-5b+3 &= -3b+1 && \parallel +3b \\
-2b+3 &= 1 && \parallel -3 \\
-2b &= -2 && \parallel :(-2) \\
b &= 1.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan saatu b:n arvo yhtälöön $5b-5-a=-1$ ja ratkaistaan a.

$$
\begin{aligned}
5b-5-a &= -1 && \parallel b=1 \\
5\cdot 1-5-a &= -1 \\
-a &= -1 && \parallel :(-1) \\
a &= 1.
\end{aligned}
$$

Vastaus:

$$
\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}
$$

Tarkistus:
Sijoitetaan saadut arvot yhtälöparin molempiin yhtälöihin.

$$
\begin{aligned}
-3(a+2)+2(a+2) &= -3b && \parallel a=1, b=1 \\
-3(1+2)+2(1+2) &= -3\cdot 1 \\
-3\cdot 3+2\cdot 3 &= -3 \\
-9+6 &= -3 \\
-3 &= -3
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
6(b-1)-(b-1) &= a-1 && \parallel a=1, b=1 \\
6(1-1)-(1-1) &= 1-1 \\
6\cdot 0-0 &= 0 \\
0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Yhtälöt ovat tosia eli ratkaisu on oikein.

Tehtävät

16. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$.

17. Onko seuraava tehtävä ratkaistu sallittuja keinoja käyttäen? Onko lopputulos oikein? Korjaa tarvittaessa pieleen menneet kohdat.

Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$. *Käytetään eliminointimenetelmää. Kerrotaan ensin ylempi yhtälö luvulla* -3, *niin vähennyslaskussa eliminoituu muuttuja* x*:*

$$\begin{cases} x + 3y = 7 & \| \cdot (-3) \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} -3x - 9y = 7 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -9y - (-4y) &= 7 + 6 \\ -9y + 4y &= 13 \\ -5y &= 13 \qquad \| : (-5) \\ y &= -\tfrac{13}{5} \\ y &= -2\tfrac{3}{5}. \end{aligned}$$

Lasketaan x: $x = 7 - 3y = 7 - \frac{39}{5} = -\frac{4}{5}$.

Vastaukseksi saadaan $\begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -2\frac{3}{5} \end{cases}$.

18. Millaisissa tapauksissa eliminointimenetelmä on hyödyllinen käyttää yhtälöparin ratkaisumenetelmänä?

19. Kupari-nikkeliseoksessa on 75 % kuparia ja 25 % nikkeliä. Toisessa kupari-nikkeliseoksessa on kuparia 80 % ja nikkeliä 20 %. Näistä valmistetaan sulattamalla 300 g kupari-nikkeliseosta, jonka nikkelipitoisuus on 22 %. Kuinka paljon kumpaakin seosta tähän tarvitaan? [s08/6]

20. Yhtälöllä $x^2 + ax + b = 0$ on kaksi ratkaisua -1 ja 3. Määritä a ja b.

A.3 Yhtälöparin sovelluksia

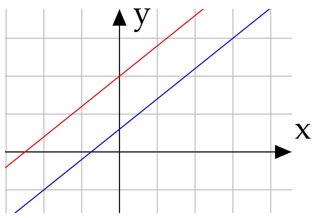
Pohdinta A.19 Palauta mieleesi molemmat opetellut yhtälöparin algebralliset ratkaisumenetelmät. Tee itsellesi kertauksena muistiinpanot, milloin on hyödyllistä käyttää kumpaakin menetelmää. Voit miettiä yhdessä vierustoverin kanssa.

21. Ratkaise yhtälöparit ja yhdistä oikeaan kuvaajaan alla.

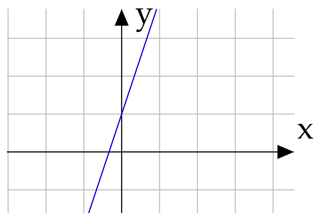
a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 6x - 2y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 2 = \frac{4}{5}x \\ 5y = 4x + 3 \end{cases}$

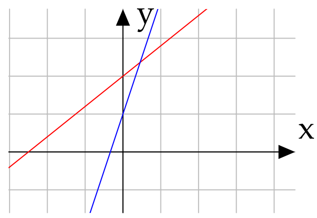
c) $\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$



1



2



3

22. Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1 : 3 ja halutaan 6,0 litraa mehua? [s93/1]

23. a) Piirrä kaksi suoraa, jotka leikkaavat pisteessä (1,5).

b) Muodosta yhtälöpari, jonka ratkaisu on $x = 1$, $y = 5$.

24. Määritä suorien $x + 2y = 3$ ja $2x - 3y = 1$ leikkauspiste. Piirrä kuvio. [s98/2]

25. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 0,1x + 0,1y = 0,5 \\ -0,5x - 1,5y = -0,5 \end{cases}$.

26. Ainon (A) ja Oivan (O) ikien summa on 36 vuotta. Valitse sopiva yhtälöpari 1 - 4, kun

a) Aino on kuusi vuotta Oivaa vanhempi

b) Oiva on kuusi vuotta vanhempi kuin Aino

c) Oiva on kolme kertaa niin vanha kuin Aino

d) Oivan ikä on kolmasosa Ainon iästä.

$$1\begin{cases} O = A + 6 \\ O + A = 36 \end{cases} \qquad 2\begin{cases} A = 3O \\ 36 = A + O \end{cases} \qquad 3\begin{cases} O = 3A \\ A = 36 - O \end{cases} \qquad 4\begin{cases} A - O = 6 \\ A = 36 - O \end{cases}$$

27. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 7x + 3(y - 3) - 5(x + y) = 0 \\ 7(x - 1) - 6y + 5(y - x) = 0 \end{cases}$. Vertaa ratkaisun vaiheita parin kanssa. Ratkaisitteko eri tavalla?

28. Tietokoneella, johon voidaan kytkeä joko kirjoitin A tai kirjotiin B, valmistetaan 1200 kappaleen erä mainoslehtisiä. Käyttämällä ensin kirjoitinta A 1 h 55 min ja sitten kirjoitinta B 1 h 30 min tulee työ tehtyä. Sama työ saadaan tehdyksi käyttämällä ensin kirjoitinta B 1 h 20 min ja sitten kirjoitinta A 2 h 10 min. Kuinka monta mainoslehteä kirjoittimet A ja B tulostavat minuutissa? Kuinka kauan työ kestää, jos käytetään vain nopeampaa kirjoitinta? [k98/9]

29. Ratkaise yhtälöpari valitsemallasi menetelmällä. Perustele, miksi valitsit kyseisen menetelmän.

a) $\begin{cases} 5a + 7b = 22 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} m + n = 10 \\ 3m + 4n = 38 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{5}y = \frac{1}{10}x + 3 \\ -\frac{2}{3}y = \frac{5}{6}x + 8 \end{cases}$

30. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 5(x + y) - 2(x - y) = 15 \\ 7(x + y) - 3(x - y) = 21 \end{cases}$. [k93/3a]

31. Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg? [s07/8]

32. Millä vakion a arvolla yhtälöparilla $\begin{cases} 2x + (a + 1)y = 5 \\ 3x + (a - 2)y = a \end{cases}$ ei ole ratkaisua? [s10/13]

Vastaukset tehtäviin

2.

a) Ei toteuta, koska jälkimmäisestä yhtälöstä tulee ristiriita -2 = 2

3.

a) Voidaan ratkaista, $x = 70$

b) Ei ratkea yksikäsitteisesti, koska kaksi muuttujaa yhdessä yhtälössä

c) Koska kyseessä on kahden muuttujan yhtälöpari, on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, mikäli yhtälöiden suorat leikkaavat

4. (1,2)

5.

a) $x = -2, y = 8$

b) $x = -3, y = 3$

6. ja 7.

a) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 3y = -9x + 3 \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y + 3x - 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y = -9x + 3 \\ \frac{1}{3}(y - 3x - 1) = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y + 3x - 1 = 0 \\ \frac{1}{3}(y - 3x - 1) = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ \frac{1}{3}(y - 3x - 1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y + 3x - 1 = 0 \\ 3y = -9x + 3 \end{cases}$

9. Kaksi ratkaisua, koska kaksi leikkauspistettä

10.

a) $n \neq 3$

b) $n = 3$

11.

a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

d) Suorat ovat samat, joten ratkaisuja on ääretön määrä

13. Jalka on 30,5 cm ja tuuma 2,5 cm

14. 7 min 30 s (yhtälöparit 2 ja 4 ovat oikein)

15. 54 pinta-alayksikköä

16. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

17. *Ratkaistaan yhtälöpari* $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$ *. Käytetään eliminointimenetelmää. Kerrotaan ensin ylempi yhtälö luvulla* -3*, niin* ***yhteenlaskussa*** *eliminoituu muuttuja x:*

$$\begin{cases} x + 3y = 7 & \| \cdot (-3) \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -3x - 9y = \boldsymbol{-21} \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -9y\boldsymbol{+}(-4y) &= \boldsymbol{-21} + 6 \\ -9y - 4y &= -15 \\ -13y &= -15 && \| \ : (\boldsymbol{-13}) \\ y &= \tfrac{15}{13} \\ y &= 1\tfrac{2}{13}. \end{aligned}$$

Lasketaan x: $x = 7 - 3y = 7 - \frac{45}{13} = 3\frac{7}{13}$.

Vastaukseksi saadaan $\begin{cases} x = 3\frac{7}{13} \\ y = 1\frac{2}{13} \end{cases}$.

19. Ensimmäistä seosta tarvitaan 120 g ja toista 180 g

20. $a = 4$ ja $b = 3$

21.

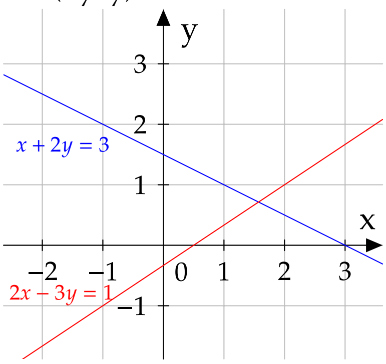
a) Ratkaisuja ääretön määrä, kuvaaja 2

b) Ei ratkaisua, kuvaaja 1

c) $\begin{cases} x = \frac{5}{11} \\ y = 2\frac{4}{11} \end{cases}$, kuvaaja 3

22. Tiivistettä 1,5 l ja vettä 4,5 l

24. $(1\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$



25. $\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$

26.

a) 4

b) 1

c) 3

d) 2

27. $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

28. A : 4,8 lehteä/min ja B : 7,2 lehteä/min. Nopeammalla kirjoittimella kestäisi 2 h 47 min.

29.

a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -13 \\ y = 4\frac{1}{4} \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$

31. Maalia A 22 l ja maalia B 12 l

32. Muuttujan x eliminointi johtaa yhtälöön $(-a-7)y = 2a - 15$, joka ratkeaa jos $a \neq -7$, ja on ristiriitainen, jos $a = -7$. Vastaus kysymykseen siis on $a = -7$.

Oppimateriaalin hakemisto