Diskreetin LTI-systeemin stabiilisuus

LuK-tutkielma
Johannes Ylitalo
2372956
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2016

Sisältö

Johdanto **2**

Merkintöjä **2**

1 Kompleksifunktiot **3**

2 Signaalianalyysi **9**
2.1 Signaali 9
2.2 Z-muunnos 9
2.3 Systeemi 15
2.4 Stabiilisuus 18

Lähdeluettelo **24**

Johdanto

Tutkielman tarkoituksena on esittää, kuten otsikkokin hieman kertoo, tapa määrittää diskreetin LTI-systeemin stabiilisuus. Tätä varten tarvitaan kompleksianalyysin tuloksia, joten käytämme apuna teoksia [3] ja [4]. Teosta [2] käytetään apuna vain viimeisen lauseen todistukseen. Signaalianalyysin teoriaa varten käytämme teosta [1].

Systeemien määritelmä on hyvin yleinen, mutta systeemien avulla voidaan mallintaa esimerkiksi fysikaalisia prosesseja. Huomaa, että jos systeemiin ei syötetä minkäänlaista signaalia, ei systeemi ole käytössä. Näin ollen signaalit ja systeemit ovat erottamattomia.

Sellaiset systeemit, jotka eivät ole BIBO-stabiileja, ovat käytännössä kelvottomia. Esimerkiksi, jos sähköjärjestelmä ei ole stabiili, niin voi tapahtua ylikuumenemista. Tästä syystä on tärkeää esittää tapa määrittää systeemin BIBO-stabiilisuus, mihin keskitymme tutkielman loppuosassa.

Keskitymme tutkielmassa kausaalisiin signaaleihin, sillä ne helpottavat tarkastelua ja systeemiin syötettynä signaalin syöttäminen alkaa jostakin ajan hetkestä, jonka voi ajatella olevan 0. Lisäksi tarkastelemme lähinnä kausaalisia systeemejä, koska fysikaaliset järjestelmät eivät voi olla ei-kausaalisia. Palaamme loppuosassa tutkielmaa siihen, että mistä tämä johtuu.

Lukijan oletetaan tuntevan perustiedot kompleksianalyysistä. Erityisesti sarjat ja niihin liittyvä teoria on hyvä olla tuttuja. Kuitenkin edellä mainittuja asioita, kuten signaalin, systeemin ja kausaalisuuden määritelmiä, otetaan esille myöhemmässä osassa tutkielmaa.

Tutkielman alkupuolella käsitellään tarvittavia kompleksianalyysin tuloksia ja siirrymme myöhempänä signaaleihin ja systeemeihin. Lopuksi perehdymme systeemin stabiilisuuteen, kuten aiemmin hieman vihjattiin.

Merkintöjä

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -2, -1\}$.
$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

1 Kompleksifunktiot

Lause 1.1. *Olkoon P polynomi, jonka aste on $n \in \mathbb{N}$. Tällöin polynomilla P on n nollakohtaa ja se voidaan esittää muodossa*

$$P(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

missä $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ovat polynomin P nollakohdat.

Todistus. Katso [3, s. 99-101 ja s. 216, Theorem 22]. □

Lause 1.2. *Jos*

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}}$$

on rationaalifunktio, missä $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $b_i \neq b_j$ kaikilla $i \neq j$ ja $\deg(\prod_{i=1}^{r} (z - b_i)^{d_i}) = \sum_{i=1}^{r} d_i > m$, niin rationaalifunktiolla R on osamurtokehitelmä *muodossa*

$$R(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{d_i} \frac{k_{il}}{(z - b_i)^l}$$

joillakin $k_{il} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, d_i$.

Todistus. Katso [3, s. 105, Theorem 2]. □

Huomautus 1.3. Jos

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}}$$

ja $\deg(\prod_{i=1}^{r} (z - b_i)^{d_i}) = \sum_{i=1}^{r} d_i = m$, niin on olemassa sellaiset $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, että $a_m \prod_{k=1}^{r} (z - b_k)^{d_k} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i z^i = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$ ja

$$\begin{aligned} R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}} &= \frac{a_m \prod_{k=1}^{r} (z - b_k)^{d_k} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}} \\ &= a_m + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} c_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}}. \end{aligned}$$

Näin ollen rationaalifunktioon

$$\frac{\sum_{i=0}^{m-1} c_i z^i}{\prod_{j=1}^{r} (z - b_j)^{d_j}}$$

voidaan soveltaa osamurtokehitelmää. Siis jos

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{l} p_i z^i}{\prod_{j=1}^{n} (z - q_j)^{s_j}}$$

on sellainen rationaalifunktio, että $\deg(\prod_{j=0}^{n} (z - q_j)^{s_j}) \geq l$, niin edellä mainitun ja osamurtokehitelmän avulla saadaan, että

$$H(z) = a_m + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{s_i} \frac{k_{il}}{(z - q_i)^l}$$

joillakin $k_{il} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, s_i$. Jos $\deg(\prod_{j=0}^{n} (z - q_j)^{s_j}) > l$, niin $a_m = 0$.

Lause 1.4. *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ jollakin $R \in \mathbb{R}_+$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin f voidaan esittää potenssisarjana*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, missä kertoimet $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots$, ovat yksikäsitteiset.

Todistus. Katso [4, s. 84, Theorem 4]. □

Määritelmä 1.5. Lauseen 1.4 antamaa sarjaesitystä kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi* pisteessä z_0.

Lause 1.6. *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, missä $0 \leq r < R$, ja $z_0 \in \mathbb{C}$. Jos $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset kertoimet $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, että*

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j.$$

Todistus. Katso [4, s. 89, Theorem 1]. □

Määritelmä 1.7. Lauseen 1.6 antamaa sarjaesitystä kutsutaan analyyttisen funktion f *Laurentin sarjaksi* joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, missä $0 \leq r < R$.

Määritelmä 1.8. Olkoon $r, R \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $0 \leq r < R$, ja olkoon analyyttisen funktion f Laurentin sarja joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j.$$

Jos $c_{-m} \neq 0$ jollekin $m \in \mathbb{Z}_+$, mutta $c_j = 0$ kaikilla $j < -m$, niin z_0 on funktion f kertalukua m oleva *napa.*

Lause 1.9. *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Jos funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, niin*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Todistus. Määritelmän nojalla

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Nyt

$$F(z) := (z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z - z_0)^{j+m} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j-m} (z - z_0)^j.$$

Koska edellä olevan perusteella $F(z)$ voidaan esittää potenssisarjana, joka suppenee, kun $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$, niin

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Siis on olemassa sellainen $0 < \delta < r$, että

$$|F(z) - c_{-m}| < \frac{|c_{-m}|}{2}$$

kaikilla $0 < |z - z_0| < \delta$. Edelleen

$$|c_{-m}| - |F(z)| < |F(z) - c_{-m}| < \frac{|c_{-m}|}{2},$$

mistä saadaan, että

$$0 < \frac{|c_{-m}|}{2} < |F(z)|$$

kaikilla $0 < |z - z_0| < \delta$. Näin ollen

$$|f(z)| > \frac{|c_{-m}|}{2}|z - z_0|^{-m}$$

kaikilla $0 < |z-z_0| < \delta$. Olkoon $R > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{r}{2}, \sqrt[m]{\frac{|c_{-m}|}{2R}}\}$, jolloin

$$|f(z)| > \frac{|c_{-m}|}{2}|z - z_0|^{-m} > R$$

kaikilla $0 < |z - z_0| < \delta$. Siis $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. □

Lause 1.10. *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Tällöin funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$, missä g on analyyttinen funktio joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ ja $g(z_0) \neq 0$.

Todistus. Oletetaan, että funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä z_0. Määritelmän nojalla

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Nyt

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j(z - z_0)^{j+m} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j-m}(z - z_0)^j =: g(z),$$

jolloin

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ ja $\delta = r$. Siis $g(z)$ voidaan esittää potenssisarjana, ja se suppenee, kun $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Navan määritelmän nojalla $c_{-m} \neq 0$, joten asettamalla $g(z_0) := c_{-m}$ saadaan, että $g(z_0) \neq 0$. Lisäksi potenssisarjana funktio g on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.

Oletetaan sitten, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$, missä g on analyyttinen funktio joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ ja $g(z_0) \neq 0$. Tällöin funktion g Taylorin sarja pisteessä z_0 on

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j,$$

kun $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$. Siis

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^{j-m} \\ &= \sum_{j=-m}^{\infty} b_{j+m} (z - z_0)^j \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$, missä $b_0 = g(z_0) \neq 0$. Koska

$$\sum_{j=-m}^{\infty} b_{j+m} (z - z_0)^j$$

on Laurentin sarja funktiolle f ja se on yksikäsitteinen, niin z_0 on funktion f kertalukua m oleva napa. □

Seuraus 1.11. *Olkoon $H(z)$ jokin rationaalifunktio. Tällöin piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion H kertalukua m oleva napa jos ja vain jos z_0 on funktion*

$$G(z) := \frac{1}{H(z)}$$

m-kertainen nollakohta.

Todistus. Oletetaan, että z_0 on funktion H kertalukua m oleva napa. Merkitään

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

missä P ja Q ovat polynomeja. Voidaan olettaa, että polynomeilla P ja Q ei ole yhteisiä tekijöitä. Rationaalifunktiona H on analyyttinen kaikkialla paitsi polynomin Q nollakohdissa. Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$, että H on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Siis Lauseen 1.9 perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$H(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$, missä g on analyyttinen funktio joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ ja $g(z_0) \neq 0$. Edelleen

$$G(z) := \frac{1}{H(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)},$$

joten koska $g(z_0) \neq 0$, niin z_0 on funktion G m-kertainen nollakohta.

Oletetaan sitten vastaavasti, että z_0 on funktion

$$G(z) := \frac{1}{H(z)}$$

m-kertainen nollakohta. Merkitään taas

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

missä P ja Q ovat polynomeja. Voidaan olettaa, että polynomeilla P ja Q ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska funktiolla

$$G(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

on m-kertainen nollakohta pisteessä z_0, niin $P(z_0) \neq 0$ ja

$$Q(z) = (z - z_0)^m q(z),$$

missä q on sellainen polynomi, että $q(z_0) \neq 0$. Siis

$$H(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{P(z)}{q(z)}.$$

Merkitään

$$g(z) = \frac{P(z)}{q(z)}.$$

Nyt g on analyyttinen kaikkialla paitsi polynomin q nollakohdissa ja $g(z_0) \neq 0$, joten on olemassa sellainen $\delta > 0$, että funktio g on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$. Siis

$$H(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$, missä $g(z_0) \neq 0$. Lisäksi rationaalifunktiona H on analyyttinen kaikkialla paitsi polynomin Q nollakohdissa. Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$, että H on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. Siis Lauseen 1.9 nojalla funktiolla H on pisteessä z_0 kertalukua m oleva napa. $\square$

2 Signaalianalyysi

2.1 Signaali

Määritelmä 2.1. *Signaalit* ovat ajasta riippuvia funktioita, jotka sisältävät informaatiota. Signaaleja merkitään $u(k)$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Signaali $u(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, on *kausaalinen*, jos $u(k) = 0$, kun $k < 0$.

Huomautus 2.2. Käsittelemme tekstissä vain *diskreettejä signaaleja*, jotka ovat signaaleja määritelty aikamuuttujan kokonaislukuarvoilla. Lisäksi diskreetit signaalit ovat periaatteessa jonoja, mutta suosimme kuitenkin edellä määriteltyä esitystapaa.

Esimerkki 2.3. Funktiot

$$q(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

$$u_1(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k q(k)$$

ja

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

ovat diskreettejä signaaleja.

Huomautus 2.4. Edellä esiteltyä diskreettiä signaalia

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

kutsutaan *yksikköimpulssiksi.*

Määritelmä 2.5. Diskreetin signaalin $u(k)$ sanotaan olevan *rajoitettu*, jos on olemassa sellainen $K \in \mathbb{R}_+$, että $|u(k)| \leq K$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Z-muunnos

Määritelmä 2.6. Kausaalisen signaalin $u(k)$ *z-muunnos* määritellään

$$U(z) := \mathcal{Z}[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla sarja suppenee.

Lause 2.7. *Olkoot* $u_1(k)$ *ja* $u_2(k)$ *kausaalisia signaaleja sekä* $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ *sellaisia, että z-muunnos*

$$U_1(z) = \mathcal{Z}[u_1(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) z^{-k}$$

suppenee, kun $|z^{-1}| < R_1$, *ja hajaantuu, kun* $|z^{-1}| > R_1$, *sekä*

$$U_2(z) = \mathcal{Z}[u_2(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) z^{-k}$$

suppenee, kun $|z^{-1}| < R_2$, *ja hajaantuu, kun* $|z^{-1}| > R_2$. *Jos* $U_1(z) = U_2(z)$ *kaikilla sellaisilla* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *että* $|z^{-1}| < \min\{R_1, R_2\}$, *niin* $u_1(k) = u_2(k)$ *kaikilla* $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Merkitään $w = z^{-1}$ sekä

$$U_3(w) = \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k$$

ja

$$U_4(w) = \sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) w^k$$

kaikilla $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, jolloin

$$U_3(w) = \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) w^k = U_4(w)$$

kaikilla sellaisilla $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, että $|w| < \min\{R_1, R_2\}$. Kun $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, niin sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) w^k$$

suppenevat tasaisesti. Tällöin

$$\lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{w \to 0} u_1(k) w^k = u_1(0)$$

ja

$$\lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{w \to 0} u_2(k) w^k = u_2(0)$$

sekä

$$\lim_{w \to 0} U_3(w) = \lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k = u_1(0) = u_2(0) = \lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} u_2(k) w^k = \lim_{w \to 0} U_4(w).$$

Näin ollen

$$U_3(0) = U_4(0).$$

Todistetaan induktiolla, että kun $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, niin

$$\frac{d^m U_3}{dw^m}(w) = \frac{d^m U_4}{dw^m}(w)$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Koska

$$U_3(w) = U_4(w)$$

kaikilla $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, niin

$$\frac{dU_3}{dw}(w) = \frac{dU_4}{dw}(w)$$

kaikilla $|w| < \min\{R_1, R_2\}$. Siis väite on voimassa, kun $m = 1$. Oletetaan, että

$$\frac{d^l U_3}{dw^l}(w) = \frac{d^l U_4}{dw^l}(w)$$

kaikilla $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, kun $m = l$. Tällöin

$$\frac{d^{l+1} U_3}{dw^{l+1}}(w) = \frac{d}{dw} \frac{d^l U_3}{dw^l}(w) = \frac{d}{dw} \frac{d^l U_4}{dw^l}(w) = \frac{d^{l+1} U_4}{dw^{l+1}}(w)$$

kaikilla $|w| < \min\{R_1, R_2\}$. Siis väite on voimassa, kun $m = l + 1$. Induktioperiaatteen nojalla

$$\frac{d^m U_3}{dw^m}(w) = \frac{d^m U_4}{dw^m}(w)$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, kun $|w| < \min\{R_1, R_2\}$. Erityisesti

$$\frac{d^m U_3}{dw^m}(0) = \frac{d^m U_4}{dw^m}(0)$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Kun $|w| < \min\{R_1, R_2\}$, niin sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_1(k) w^k$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_2(k)w^k$$

voidaan derivoida termeittäin. Näin ollen, koska

$$\frac{d^n U_3}{dw^n}(0) = \frac{d^n U_4}{dw^n}(0),$$

niin

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_1(k)0^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} u_2(k)0^{k-n}$$

eli

$$u_1(n) = u_2(n).$$

Siis $u_1(k) = u_2(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska signaalit $u_1(k)$ ja $u_2(k)$ ovat kausaalisia, niin $u_1(k) = u_2(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. □

Määritelmä 2.8. Olkoon $U(z)$ jokin funktio ja $u(k)$ sellainen kausaalinen signaali, että on olemassa sellainen $R \in \mathbb{R}_+$, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

suppenee, kun $|z^{-1}| < R$, ja

$$\mathcal{Z}[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = U(z)$$

kaikilla sellaisilla $z \in \mathbb{C}$, että $|z^{-1}| < R$. Tällöin signaalia $u(k)$ merkitään

$$\mathcal{Z}^{-1}[U(z)] = u(k)$$

ja sanotaan, että $u(k)$ on funktion $U(z)$ *z-käänteismuunnos*.

Huomautus 2.9. Lauseen 2.7 nojalla z-käänteismuunnos on hyvin määritelty. Lisäksi jonkin funktion $U(z)$ z-käänteismuunnos saadaan etsimällä sellainen signaali $u(k)$, että se toteuttaa Määritelmän 2.8 ehdot.

Lause 2.10. *Olkoon $u(k)$ ja $v(k)$ kausaalisia signaaleja, $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)]$, $V(z) = \mathcal{Z}[v(k)]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin*

$$\mathcal{Z}[\alpha_1 u(k) + \alpha_2 v(k)] = \alpha_1 U(z) + \alpha_2 V(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $U(z)$ ja $V(z)$ ovat määriteltyjä, sekä

$$\mathcal{Z}[ku(k)] = -z\frac{dU(z)}{dz}$$

ja

$$\mathcal{Z}[u(k-m)] = \mathcal{Z}[u(k-m)q(k-m)] = z^{-m}U(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $U(z)$ on määritelty.

Todistus. Kun $z \in \mathbb{C}$ on sellainen, että $U(z)$ ja $V(z)$ ovat määriteltyjä, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\alpha_1 u(k) + \alpha_2 v(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1 u(k) + \alpha_2 v(k)) z^{-k} \\ &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} \\ &= \alpha_1 U(z) + \alpha_2 V(z).\end{aligned}$$

Todistetaan sitten seuraava väite. Sarjalle

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

voidaan määritellä suppenemissäde $R \in \mathbb{R}$ niin, että edellä oleva sarja suppenee, kun $|z^{-1}| < R$, mutta hajaantuu, kun $|z^{-1}| > R$. Kun $|z^{-1}| < R$, niin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

voidaan derivoida termeittäin, jolloin

$$\frac{dU(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-ku(k) z^{-k-1}).$$

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain termillä $-z$ saadaan

$$-z\frac{dU(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} ku(k) z^{-k}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{Z}[ku(k)] = -z\frac{dU(z)}{dz}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $U(z)$ on määritelty. Todistetaan seuraavaksi viimeinen väitteistä. Koska signaali $u(k)$ on kausaalinen, niin korostamalla kausaalisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[u(k-m)] &= \mathcal{Z}[u(k-m)q(k-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k-m)q(k-m)z^{-k} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} u(k-m)z^{-k} = z^{-m}\sum_{k=m}^{\infty} u(k-m)z^{-(k-m)} \\
&= z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = z^{-m}U(z)
\end{aligned}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $U(z)$ on määritelty. □

Lause 2.11. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ sekä $\delta(k)$ ja $q(k)$ kuten Esimerkissä 2.3. Kausaalisten signaalien $\delta(k)$ ja*

$$u_m(k) = \frac{\prod_{n=1}^{m}(k-n)}{m!}a^{k-m-1}q(k-m-1)$$

z-muunnokset ovat

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$

kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja

$$\mathcal{Z}[u_m(k)] = \frac{1}{(z-a)^{m+1}}$$

kaikilla $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$.

Todistus. Nyt

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = 1 \cdot z^0 = 1$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Todistetaan jälkimmäinen väite induktiolla. Kun $|az^{-1}| < 1$ eli $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$, niin

$$\mathcal{Z}[a^k q(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k q(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$

Lauseen 2.10 nojalla

$$\mathcal{Z}[u_0(k)] = \mathcal{Z}[a^{k-1}q(k-1)] = z^{-1}\mathcal{Z}[a^k q(k)] = z^{-1}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$$

kaikilla $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$. Siis väite on voimassa, kun $m = 0$. Oletetaan seuraavaksi, että väite pätee, kun $l \in \mathbb{N}$ ja $m = l$. Merkitään

$$U(z) = \mathcal{Z}[u_l(k)] = \frac{1}{(z-a)^{l+1}},$$

jolloin käyttämällä Lausetta 2.10 uudestaan saadaan

$$\mathcal{Z}[ku_l(k)] = (-z)\frac{dU(z)}{dz} = (-z)\frac{-(l+1)}{(z-a)^{l+2}} = \frac{(l+1)z}{(z-a)^{l+2}}$$

kaikilla $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
(k-1)u_l(k-1) &= (k-1)\frac{\prod_{n=1}^{l}(k-1-n)}{l!}a^{k-1-l-1}q(k-1-l-1)\\
&= (k-1)\frac{\prod_{n=1}^{l}(k-(n+1))}{l!}a^{k-(l+1)-1}q(k-(l+1)-1)\\
&= (k-1)\frac{\prod_{n=2}^{l+1}(k-n)}{l!}a^{k-(l+1)-1}q(k-(l+1)-1)\\
&= (l+1)\frac{\prod_{n=1}^{l+1}(k-n)}{(l+1)!}a^{k-(l+1)-1}q(k-(l+1)-1)\\
&= (l+1)u_{l+1}(k),
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[u_{l+1}(k)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{l+1}(k-1)u_l(k-1)\right] = \frac{1}{l+1}\mathcal{Z}[(k-1)u_l(k-1)]\\
&= \frac{1}{l+1}z^{-1}\mathcal{Z}[ku_l(k)] = \frac{1}{l+1}z^{-1}\frac{(l+1)z}{(z-a)^{l+2}}\\
&= \frac{1}{(z-a)^{l+2}}
\end{aligned}$$

kaikilla $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$. Näin ollen väite on voimassa, kun $m = l+1$. Induktioperiaatteen nojalla

$$\mathcal{Z}[u_m(k)] = \frac{1}{(z-a)^{m+1}}$$

pätee kaikilla $|z^{-1}| < \frac{1}{|a|}$, kun $m \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 Systeemi

Määritelmä 2.12. Tässä tekstissä *systeemin* ajatellaan olevan musta laatikko, jolla on yksi tuloportti ja yksi lähtöportti. Laatikon sisällöstä tai sisäisestä struktuurista ei välttämättä ole tietoa, mistä johtuu nimitys musta laatikko.

Herätteeksi kutsutaan systeemiin syötettävää signaalia ja *vasteeksi* systeemin herätteen tuottamaa signaalia.

Määritelmä 2.13. Olkoon $u_1(k)$ sellainen heräte, että kun se syötetään johonkin tiettyyn systeemiin, niin se tuottaa vasteen $y_1(k)$, ja vastaavasti heräte $u_2(k)$ sellainen, että se tuottaa kyseiseen systeemiin syötettynä vasteen $y_2(k)$. Edellä olevaa voidaan merkitä

$$u_1(k) \to y_1(k)$$

ja

$$u_2(k) \to y_2(k).$$

Systeemin sanotaan olevan *lineaarinen*, jos

$$\alpha_1 u_1(k) + \alpha_2 u_2(k) \to \alpha_1 y_1(k) + \alpha_2 y_2(k)$$

kaikilla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. *Aikainvariantti* systeemi toteuttaa ehdon

$$u_1(k + k_1) \to y_1(k + k_1)$$

kaikilla $k_1 \in \mathbb{Z}$. Jos systeemiin syötettävä diskreetti heräte $u(k)$ tuottaa aina yksikäsitteisen diskreetin vasteen $y(k)$, niin systeemiä kutsutaan *diskreetiksi*. Näin voidaan määritellä *diskreetti lineaarinen aikainvariantti systeemi* eli *diskreetti LTI-systeemi*.

Määritelmä 2.14. Diskreetin LTI-systeemin *impulssivaste* $h(k)$ on vaste yksikköimpulssiin $\delta(k)$. Toisin sanoen, $\delta(k) \to h(k)$.

Huomautus 2.15. Yksikköimpulssin avulla voidaan diskreetin LTI-systeemin heräte $u(k)$ esittää

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)\delta(k - i).$$

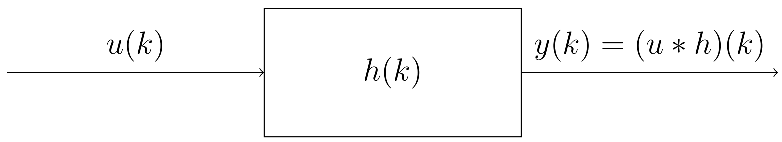
Koska edellä olevassa yhtälössä $u(i)$ ei riipu ajasta k, niin LTI-systeemin lineaarisuutta ja aikainvarianttisuutta hyväksi käyttäen saadaan

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)\delta(k - i) \to \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k - i).$$

Jos herätteen $u(k)$ vaste on $y(k)$, niin

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k - i) =: (u * h)(k).$$

Edellä $(u * h)(k)$ on herätteen $u(k)$ ja impulssivasteen $h(k)$ *diskreetti konvoluutio*. Siis herätteen vaste on esitettävissä herätteen ja impulssivasteen diskreettinä konvoluutiona.



Kuva 1: Diskreetti LTI-systeemi, jonka impulssivaste on $h(k)$.

Määritelmä 2.16. Diskreetti systeemi on *kausaalinen*, jos herätteen arvot $u(k_0 + n)$, $n = 1, 2, \ldots$, eivät vaikuta vasteen arvoon $y(k_0)$, kun $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Huomautus 2.17. Jos diskreetti systeemi ei olisi kausaalinen eli vasteen arvo $y(k_1)$ jollakin ajanhetkellä $k_1 \in \mathbb{Z}$ riippuisi herätteen arvosta $u(k_2)$ tulevaisuudessa hetkellä $k_2 > k_1$, niin systeemi pystyisi ennustamaan ajanhetkellä k_1, mitä syötetään hetkellä k_2. Tämä ei ole mahdollista millekään fysikaaliselle järjestelmälle. Tästä syystä tarkastelemme pelkästään kausaalisia systeemejä.

Lemma 2.18. *Diskreetin LTI-systeemin herätteen $u_0(k) \equiv 0$, vaste on $y_0(k) \equiv 0$.*

Todistus. Merkitään herätteen $u_0(k)$ vastetta $y_0(k)$. LTI-systeemin lineaarisuuden nojalla

$$u_0(k) = 0 \cdot u_0(k) \to 0 \cdot y_0(k) = 0.$$

Siis $y_0(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. □

Lause 2.19. *Diskreetti LTI-systeemi on kausaalinen jos ja vain jos $h(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_-$, missä $h(k)$ on systeemin impulssivaste.*

Todistus. Oletetaan, että systeemi on kausaalinen. Olkoon $k_0 \in \mathbb{Z}_-$. Koska kausaalisen systeemin määritelmän nojalla yksikköimpulssin arvot $\delta(k_0 + n)$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, eivät vaikuta sen vasteen arvoon $h(k_0)$ ja $\delta(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_-$, niin Lemman 2.18 nojalla $h(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_-$.

Oletetaan sitten, että $h(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_-$. Olkoon $u(k)$ jokin systeemin heräte ja $y(k)$ sitä vastaava vaste. Tällöin Huomautuksen 2.15 perusteella

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{k} u(i)h(k-i)$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten vasteen arvo $y(k_0)$ ei riipu herätteen arvoista $u(k_1)$, $k_1 = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$, kun $k_0 \in \mathbb{Z}$. Siis systeemi on kausaalinen. □

Lause 2.20. *Olkoon kausaalisen diskreetin LTI-systeemin impulssivaste $h(k)$ sekä $u(k)$ kyseisen systeemin kausaalinen heräte ja $y(k)$ sitä vastaava vaste. Merkitään $H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$, $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)]$ ja $Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$. Tällöin $Y(z) = H(z)U(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $H(z)$ ja $U(z)$ ovat määriteltyjä.*

Todistus. Koska systeemi on kausaalinen ja $u(k) = 0$, kun $k < 0$, niin Lauseen 2.19 nojalla

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k-i) = \sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i).$$

Cauchyn tulosarjan [3, s. 247, Definition 4, ja s. 248, Theorem 6] perusteella

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}[\sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i)] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i)(z^{-1})^{k} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u(i)z^{-i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} h(j)z^{-j}\right) \\ &= U(z)H(z) = H(z)U(z) \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $H(z)$ ja $U(z)$ ovat määriteltyjä. □

Huomautus 2.21. Kausaalisen diskreetin LTI-systeemin impulssivasteen $h(k)$ z-muunnosta $H(z)$ kutsutaan *siirtofunktioksi*. Lauseen 2.19 nojalla

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

kun $U(z) \neq 0$.

2.4 Stabiilisuus

Määritelmä 2.22. Systeemin sanotaan olevan *BIBO-stabiili* (bounded-input bounded-output), jos vaste on rajoitettu jokaisella rajoitetulla herätteellä.

Lause 2.23. *Diskreetti LTI-systeemi, jonka impulssivaste on $h(k)$, on BIBO-stabiili jos ja vain jos pätee*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M$$

jollakin $M \in \mathbb{R}_{+}$.

Todistus. Oletetaan, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M$$

jollakin $M \in \mathbb{R}_+$. Systeemin vaste voidaan esittää muodossa

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k-i).$$

Jos heräte $u(k)$ on rajoitettu eli on olemassa sellainen $K \in \mathbb{R}_+$, että $|u(k)| \leq K$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k-i) \right| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u(i)||h(k-i)| \leq K \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(k-i)| \\ &\leq K \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(i)| \leq K \cdot M. \end{aligned}$$

Siis vaste on rajoitettu jokaisella rajoitetulla herätteellä. Edelleen systeemi on BIBO-stabiili.

Oletetaan sitten, että systeemi on BIBO-stabiili. Tällöin vaste on rajoitettu jokaisella rajoitetulla herätteellä. Valitaan rajoitetuksi herätteeksi

$$u(k) = \begin{cases} 1, & h(-k) \geq 0 \\ -1, & h(-k) < 0, \end{cases}$$

jolloin $|u(k)| \leq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin on olemassa sellainen $K \in \mathbb{R}_+$, että

$$|y(0)| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(-i) \right| = \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(i)| \right| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(i)| \leq K.$$

□

Esimerkki 2.24. Olkoon jonkin diskreetin LTI-systeemin impulssivaste $h(k)$ sellainen, että

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Tällöin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq M$$

jokaisella $M \in \mathbb{R}_+$. Siis tällainen systeemi ei ole BIBO-stabiili.

Lause 2.25. *Olkoon kausaalisen diskreetin LTI-systeemin siirtofunktio rationaalifunktio*

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$

missä polynomeilla N *ja* D *ei ole yhteisiä tekijöitä sekä* $\deg N(z) \leq \deg D(z)$*. Systeemi on stabiili jos ja vain jos jokainen siirtofunktion* $H(z)$ *napa on kompleksitasossa yksikköympyrän sisällä.*

Todistus. Oletetaan, että systeemi on stabiili eli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \leq M$$

jollakin $M \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k},$$

missä $h(k)$ on systeemin impulssivaste. Jos $|z| \geq 1$, niin

$$\begin{aligned} |H(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k) z^{-k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)||z^{-k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)||z|^{-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| 1^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty. \end{aligned}$$

Koska $\lim_{z \to z_0} |H(z)| = \infty$, kun $z_0 \in \mathbb{C}$ on siirtofunktion $H(z)$ napa, niin edellä olevan nojalla kaikille siirtofunktion $H(z)$ navoille $z_1 \in \mathbb{C}$ pätee $|z_1| < 1$. Siis jokainen siirtofunktion $H(z)$ napa on kompleksitasossa yksikköympyrän sisällä.

Oletetaan sitten, että jokainen siirtofunktion $H(z)$ napa on kompleksitasossa yksikköympyrän sisällä eli kaikille siirtofunktion $H(z)$ navoille $z_0 \in \mathbb{C}$ pätee $|z_0| < 1$. Merkitään siirtofunktion H napoja a_i, $i = 1, \ldots, m$, ja kunkin navan a_i kertalukua $d_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, m$. Olkoon $\deg D(z) = n$, jolloin Lauseen 1.1 mukaan polynomilla D on n kompleksista nollakohtaa. Polynomin D johtokertoimen $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan olettaa olevan 1, sillä jos $a \neq 1$, niin polynomit N ja D voidaan jakaa luvulla a, jolloin saadaan

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

missä

$$A(z) = \frac{N(z)}{a}$$

sekä

$$B(z) = \frac{D(z)}{a}$$

ja polynomin B johtokerroin on 1. Koska $z_0 \in \mathbb{C}$ on siirtofunktion H napa jos ja vain jos z_0 on polynomin D nollakohta, niin saadaan

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^{m}(z-a_i)^{d_i}}.$$

Huomautuksen 1.3 nojalla

$$H(z) = c_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{d_i}\frac{c_{il}}{(z-a_i)^l},$$

missä $c_{il} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, d_i$. Nyt systeemin impulssivaste $h(k)$ on kausaalinen, sillä tarkasteltava systeemi on kausaalinen. Edelleen Lauseen 2.11 ja Huomautuksen 2.9 perusteella systeemin impulssivaste on

$$\begin{aligned} h(k) &= c_0\delta(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{d_i}\frac{c_{il}\prod_{n=1}^{l-1}(k-n)}{(l-1)!}a_i^{k-(l-1)-1}q(k-(l-1)-1) \\ &= c_0\delta(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1}\frac{c_{i,l+1}\prod_{n=0}^{l}(k-n-1)}{l!}a_i^{k-l-1}q(k-l-1), \end{aligned}$$

jonka z-muunnos on siirtofunktio H. Koska $h(k)$ on kausaalinen signaali, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| &= \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left| c_0\delta(k) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{c_{i,l+1}\prod_{n=0}^{l}(k-n-1)}{l!} a_i^{k-l-1} q(k-l-1) \right| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} |c_0\delta(k)| + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \left| \frac{c_{i,l+1}\prod_{n=0}^{l}(k-n-1)}{l!} a_i^{k-l-1} q(k-l-1) \right| \\
&\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_{i,l+1}|\prod_{n=0}^{l}|k-n-1|}{l!} |a_i|^{k-l-1} q(k-l-1) \\
&\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{|c_{i,l+1}|}{l!} \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} |k-n-1||a_i|^{k-l-1} q(k-l-1) \\
&\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{|c_{i,l+1}|}{l!} \sum_{k=l+1}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} |k-n-1||a_i|^{k-l-1} \\
&\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{|c_{i,l+1}|}{l!} \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} (k+l-n)|a_i|^{k}.
\end{aligned}$$

Edellä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} (k+l-n)|a_i|^{k}$$

suppenemissäde on 1, sillä

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\prod_{n=0}^{l}(k+l-n)}{\prod_{n=0}^{l}((k+1)+l-n)} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+l+1} = 1.$$

Koska lisäksi oletuksen nojalla $|a_i| < 1$, niin

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} (k+l-n)|a_i|^{k} \le M_{il}$$

jollakin $M_{il} \in \mathbb{R}_+$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| &\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{|c_{i,l+1}|}{l!} \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{l} (k+l-n)|a_i|^{k} \\
&\le |c_0| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{d_i-1} \frac{|c_{i,l+1}|}{l!} M_{il} \le L
\end{aligned}$$

jollakin $L \in \mathbb{R}_+$. Siis systeemi on BIBO-stabiili. $\square$

Esimerkki 2.26. Oletetaan, että differenssiyhtälö

$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-2) + u(k) + u(k-1) - u(k-2)$$

kuvaa jotakin tiettyä diskreettiä LTI-systeemiä, missä $u(k)$ on heräte ja $y(k)$ vaste. Tällöin, kun $k_0 \in \mathbb{Z}$, niin vasteen arvo $y(k_0)$ ei riipu herätteen arvoista $u(k_1)$, missä $k_1 = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$. Siis tarkasteltava LTI-systeemi on kausaalinen. Z-muuntamalla saadaan

$$Y(z) = -\frac{1}{4}z^{-2}Y(z) + U(z) + z^{-1}U(z) - z^{-2}U(z),$$

missä $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)]$ ja $Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$. Näin ollen systeemin siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z^2 + z - 1}{z^2 + \frac{1}{4}}.$$

Koska $z^2 + \frac{1}{4} = 0$ jos ja vain jos $z = \pm\frac{i}{2}$, niin siirtofunktion $H(z)$ navat ovat $z_1 = -\frac{i}{2}$ ja $z_2 = \frac{i}{2}$. Edelleen $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{2} < 1$ eli siirtofunktion $H(z)$ navat ovat kompleksitasossa yksikköympyrän sisällä. Siis tarkasteltava systeemi on BIBO-stabiili.

Lähdeluettelo

[1] C. Chen: *System and signal analysis*. Saunders College Publishing, New York, 1989.

[2] K. Ruotsalainen: *Kompleksianalyysi*. Oulun yliopisto, Oulu, 2015.

[3] E. B. Saff, A. D. Snider: *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science*. Upper Saddle River: Pearson / Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[4] V. S. Serov: *Complex analysis*. University of Oulu, Oulu, 2015.