Cantorin joukon affiinit upotukset

Pro Gradu -tutkielma
Arttu Eemeli Perälä
2257547
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2016

Sisältö

Johdanto

Työ perustuu De-Jun Fengin, Wen Huangin ja Hui Raon kirjoittamaan artikkeliin "Affine embeddings and intersections of Cantor sets" (katso [5]). Työssä pyritään käyttämään samoja merkintöjä kuin artikkelissa, muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta.

Työ koostuu viidestä päälauseesta. Oletetaan, että $E, F \subset \mathbb{R}^d$ ovat itsesimilaareja joukkoja. Lauseessa 2.1 todistetaan, lievien säännöllisyysoletusten ollessa voimassa, että F voidaan C^1-upottaa joukkoon E, jos ja vain jos se voidaan upottaa affiinisti joukkoon E. Jos joukkoa F ei voida upottaa affiinisti joukkoon E, niin tällöin joukon $f(F) \cap E$ Hausdorffin dimensio on aidosti pienempi kuin joukon F Hausdorffin dimensio kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^d$ C^1-diffeomorfismeilla f. Lauseessa 2.2 tarkastellaan kontraktiosuhteiden logaritmista suhdetta, kun F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E. Seuraavaksi siirrymme tutkimaan Cantorin joukkojen affiineja upotuksia. Lause 2.3 tarkentaa edellisen lauseen tulosta tapauksessa, jossa E ja F ovat Cantorin joukkoja. Lauseen 2.4 erikoistapaus puolestaan antaa meille työkalun tarkastella affiineja upotuksia, kun ainakin toisen iteraatiofunktiosysteemin attraktori on Cantorin joukko jonkin luvun p suhteen. Viimeinen päälause 2.5 saadaan aiempien lauseiden seurauksena ja se liittyy erääseen Furstenbergin muotoilemaan konjektuuriin (katso [6]).

Lukijan tulisi hallita matematiikan peruskurssien sisältö. Lisäksi lukijan olisi hyvä olla perehtynyt metrisiin avaruuksiin, topologiaan ja erityisesti mittateoriaan, sekä fraktaaligeometriaan. Työn täysi ymmärtäminen vaatii myös Fourier-analyysin, differentiaaligeometrian, lukuteorian ja Galois'n teorian perusteiden tuntemista. Työssä tarvittavien esitietojen määrä on laaja, joten kaikkia perusteita ei käydä läpi. Esimerkiksi lukijan tulisi tietää mitan ja mitallisuuden määritelmät jo entuudestaan. Jos lukija on valmis sivuuttamaan osan toisen päälauseen todistuksesta, niin differentiaaligeometrian hallinnan puute ei vaikuta työn ymmärtämiseen. Galois'n teoriaa tarvitaan työssä vain lyhyesti neljännen lauseen todistuksessa. Viitteistä löytyy lähteitä, joista lukijan on mahdollista etsiä lisää tietoa ja yksityiskohtia.

Luvussa 1 käydään läpi tarvittavat esitiedot ja merkinnät. Erityisesti luvuissa 1.1, 1.3 ja 1.4 esitellään tärkeitä merkintöjä, joita käytetään työssä toistuvasti. Seuraavassa luvussa 2 esitellään työssä todistettavat päälauseet. Loput kappaleet sisältävät joko yhden tai useamman päälauseen todistuksen.

1 Esitietoja

1.1 Yleistä

Tässä luvussa määrittelemme useita työssä tarvittavia käsitteitä ja esitämme muutamia niiden ominaisuuksia. Määrittelemme affiinin kuvauksen, C^1-diffeomorfismin, Lipschitz-kuvauksen ja reaaliarvoisen analyyttisen funktion. Tarvitsemme myös matriisin singulaariarvojen ja ehtoluvun, sekä Hausdorffin metriikan ja erotusjoukon käsitteitä.

Aluksi käymme läpi muutamia yleisiä määritelmiä sekaannusten välttämiseksi. Symbolilla $\mathbb{N}$ tarkoitamme positiivisia kokonaislukuja, joten nolla ei kuulu joukkoon $\mathbb{N}$. Tämä sopimus on käytössä, koska useimmat tulokset ovat triviaaleja tai huonosti määriteltyjä arvolla 0. Merkitsemme x-keskeistä r-säteistä suljettua palloa symbolilla $B(x, r)$. Vastaavasti x-keskeistä r-säteistä avointa palloa merkitään symbolilla $U(x, r)$. Merkintä $|\cdot|$ tarkoittaa Euklidista normia.

Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Sanomme kuvausta $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ affiiniksi, jos se on muotoa $f(x) = Mx + a$, missä M on kääntyvä $d \times d$-matriisi ja $a \in \mathbb{R}^d$. Joukko A voidaan upottaa affiinisti joukkoon B, jos $f(A) \subseteq B$ jollain affiinilla kuvauksella f.

Jatkuva bijektiivinen kuvaus $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on homeomorfismi, jos sen käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on jatkuva. Jos kuvaukset f ja f^{-1} ovat lisäksi jatkuvasti differentioituvia kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}^d$, niin sanomme, että kuvaus f on C^1-diffeomorfismi. Kuvauksen f differentiaalia pisteessä x merkitään $D_x(f)$. Sanomme, että joukko A voidaan C^1-upottaa joukkoon B, jos on olemassa sellainen C^1-diffeomorfismi f, että $f(A) \subseteq B$. Avoimessa joukossa $V \subseteq \mathbb{R}^d$ mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukkoa merkitään symbolilla $C^\infty(V)$.

Olkoon $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Kuvaus $f : X \to \mathbb{R}^d$ on Lipschitz-kuvaus, jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq c < \infty$, että $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ kaikilla $x, y \in X$. Lukua c kutsutaan Lipschitz-vakioksi. Kuvaus f on bi-Lipschitz-kuvaus, jos on olemassa sellaiset vakiot $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, että $c_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq c_2|x - y|$ kaikilla $x, y \in X$. Sanotaan, että kuvaus f on lokaalisti Lipschitz-kuvaus, jos jokaisella pisteellä $x \in \mathbb{R}^d$ on olemassa sellainen avoin ympäristö B, että kuvaus f rajoitettuna joukkoon B on Lipschitz-kuvaus. Vastaavalla tavalla voimme määritellä myös lokaalin bi-Lipschitz-kuvauksen.

Olkoon A $d \times d$-matriisi. Matriisia A sanotaan antisymmetriseksi, jos $A^T = -A$. Kääntyvän reaaliarvoisen $d \times d$-matriisin M suurin singulaariarvo on $\delta_{\max}(M) := \max\{|Mv| \colon v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}$ ja matriisin M pienin singulaariarvo on $\delta_{\min}(M) := \min\{|Mv| \colon v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}$. Matriisin M ehtoluku $\kappa(M)$

määritellään seuraavasti:

$$\kappa(M) = \frac{\delta_{\max}(M)}{\delta_{\min}(M)}.$$

Lemma 1.1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ kompakti joukko ja oletetaan, että $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on C^1-diffeomorfismi. Tällöin $f : E \to \mathbb{R}^n$ on bi-Lipschitz-kuvaus.*

Todistus. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ kompakti joukko. Tällöin on olemassa sellainen luku $r > 0$, että $E \subset U(0,r)$. Tunnetusti avoimet ja suljetut pallot ovat konvekseja avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on C^1-diffeomorfismi ja kirjoitetaan $f = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$, missä f_i tarkoittaa funktion f i:ttä koordinaattifunktiota. Tällöin funktiot $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti differentioituvia kaikilla $1 \leq i \leq d$. Olkoon $x, y \in U(0,r)$. Nyt väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $t \in U(0,r)$, että

$$f_i(x) - f_i(y) = \nabla f_i(t) \cdot (x - y),$$

missä $\nabla f_i(t)$ tarkoittaa funktion f_i gradienttia pisteessä t ja operaatio $\cdot$ on tavallinen pistetulo. Koska f_i on jatkuvasti differentioituva, niin ∇f_i saavuttaa maksimiarvonsa kompaktissa joukossa $\overline{U(0,r)}$. Näin ollen on olemassa sellainen luku $M_i > 0$, että $|\nabla f_i(z)| \leq M_i$ kaikilla $z \in \overline{U(0,r)}$. Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq |\nabla f_i(t)||x - y| \leq M_i|x - y|.$$

Olkoon $c_2 := \max\{dM_i \colon 1 \leq i \leq d\}$. Nyt

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{d} |f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y| \sum_{i=1}^{d} M_i \leq c_2|x - y|$$

kaikilla $x, y \in U(0,r)$. Erityisesti tämä on voimassa kaikilla $x, y \in E$.

Koska f on C^1-diffeomorfismi, niin f^{-1} on C^1-diffeomorfismi. Näin ollen on olemassa sellainen luku $c_1 > 0$, että

$$|f^{-1}(v) - f^{-1}(w)| \leq c_1|v - w|$$

kaikilla $v, w \in f(E)$. Nyt

$$|x - y| = |f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| \leq c_1|f(x) - f(y)|$$

kaikilla $x, y \in E$. Täten f on bi-Lipschitz-kuvaus kompaktissa joukossa. $\square$

Joukon $\mathbb{R}$ osaväliä sanotaan aidoksi väliksi, jos sen pituus on aidosti positiivinen. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ epätyhjiä. Joukon A halkaisijaksi kutsutaan lukua $\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x-y|: x, y \in A\}$. Joukkojen A ja B väliseksi etäisyydeksi sanotaan lukua $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{|x-y|: x \in A, y \in B\}$. Olkoon $\delta > 0$. Joukon A δ-ympäristöksi kutsutaan joukkoa

$$A_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d: |x-y| \leq \delta \text{ jollain } y \in A\}.$$

Vastaavasti joukon A avoin δ-ympäristö on

$$A_{\delta^\circ} := \{x \in \mathbb{R}^d: |x-y| < \delta \text{ jollain } y \in A\}.$$

Joukon A sulkeuma määritellään tavalliseen tapaan leikkauksena kaikista suljetuista joukoista, jotka sisältävät joukon A. Sulkeumaa merkitään symbolilla $\overline{A}$. Olkoon $\mathcal{K} := \{K \subset \mathbb{R}^d: K \text{ on kompakti ja } K \neq \emptyset\}$. Hausdorffin metriikka määritellään seuraavasti:

$$d(A, B) = \inf\{\delta > 0: A \subseteq B_\delta \text{ ja } B \subseteq A_\delta\}$$

kaikilla $A, B \in \mathcal{K}$. Joukkoa $A - A := \{a - b: a, b \in A\}$ sanotaan joukon A erotusjoukoksi.

Oletetaan että $f \in C^\infty(V)$, missä $V \subseteq \mathbb{R}^d$ on avoin. Funktiota $f : V \to \mathbb{R}^d$ sanotaan analyyttiseksi, jos kaikilla $x \in V$ on olemassa sellainen avoin ympäristö B, että funktion f Taylorin sarja suppenee itseisesti ja se suppenee kohti funktiota f ympäristössä B.

Esimerkki 1.2. Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analyyttinen. Tällöin funktio f voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

kaikkien pisteiden x_0 jossakin ympäristössä. Tunnetusti f on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. Oletetaan, että funktio f on lisäksi positiivinen ja $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Huomaa, että f ei voi olla vakiofunktio joukossa $\mathbb{R}$, koska f on positiivinen, mutta $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Merkitään $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Jos f on vakiofunktio jollain aidolla välillä, niin on olemassa sellainen piste x_0 ja ympäristö U_{x_0}, että

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = c$$

kaikilla $x \in U_{x_0}$. Nyt $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in U_{x_0}$. Erityisesti $f'(x_0) = 0$ eli $a_1 = 0$. Induktion avulla näemme, että $f^{(n)}(x_0) = 0$ eli $a_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon B maksimaalinen väli, jolla $f(x) = c$. Koska f on jatkuva, niin väli B on suljettu. Merkitään $B = [d, e]$, missä $d < e$. Nyt pisteellä e on avoin ympäristö $U_e :=]e - \epsilon_1, e + \epsilon_2[$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, jossa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - e)^n$$

joillain $b_n \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $x \in U_e$. Nyt joukossa $U_e \cap B =]e - \epsilon_1, e]$ on voimassa, että $f(x) = c$ kaikilla $x \in U_e \cap B$, joten

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - e)^n = c$$

kaikilla $x \in U_e \cap B$. Näin ollen $f'(x) = 0$ kaikilla $]e - \epsilon_1, e[$. Koska $f^{(n)}(x)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f'(x) = 0$ kaikilla $]e - \epsilon_1, e]$. Erityisesti $f'(e) = 0$, joten $b_1 = 0$. Jatkamalla päättelyä induktiivisesti saadaan, että $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $b_0 = c$. Tällöin $f(x) = c$ kaikilla $x \in U_e$, mikä on ristiriidassa välin B maksimaalisuuden kanssa. Näin ollen $f(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten f ei voi olla vakiofunktio millään aidolla välillä.

1.2 Mittateoriaa

Seuraavaksi käymme läpi muutamia mittoihin liittyviä ominaisuuksia. Aluksi määrittelemme Hausdorffin mitan ja Hausdorffin dimension. Tämän jälkeen määrittelemme muutamia erilaisia mittoja ja käsitteitä.

Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $s \geq 0$. Jokaisella luvulla $\delta > 0$ määritellään

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ \operatorname{diam}(U_i) \leq \delta,\ U_i \subseteq \mathbb{R}^d \right\}.$$

Arvoa

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

kutsutaan joukon A s-ulotteiseksi Hausdorffin mitaksi.

Huomautus 1.3. Yleensä kirjallisuudessa äsken määriteltyä Hausdorffin mittaa kutsutaan Hausdorffin ulkomitaksi. Yksinkertaisuuden vuoksi kutsumme kyseistä käsitettä mitaksi.

Joukon A Hausdorffin dimensioksi kutsutaan lukua

$$\dim_H(A) := \inf\{s \geq 0 \colon \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Lipschitz-kuvaus f voi ainoastaan pienentää joukon Hausdorffin dimensiota, eli $\dim_H f(A) \leq \dim_H A$ kaikilla $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ja bi-Lipschitz-kuvaus g ei muuta joukon Hausdorffin dimensiota, eli toisin sanoin $\dim_H g(A) = \dim_H A$ kaikilla $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Väitteiden todistukset löytyvät lähteestä [4, propositio 3.3].

Tarkastellaan seuraavaksi avaruuden $\mathbb{R}^d$ mittaa μ.

1. Mitta μ on lokaalisti äärellinen, jos kompaktien joukkojen mitat ovat aina äärellisiä.

2. Mitta μ on Borel-mitta, jos kaikki Borel-joukot ovat μ-mitallisia.

3. Borel-mitta μ on Borel-todennäköisyysmitta, jos $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$.

Borel-mitan kantajaksi sanotaan pienintä suljettua joukkoa F, jolle $\mu(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$, eli toisin sanoin

$$\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \{V : V \text{ avoin}, \ \mu(V) = 0\}.$$

Pistettä $x \in \mathbb{R}^d$ sanotaan mitan μ atomiksi, jos $\mu(\{x\}) > 0$. Kaikkien mitan μ atomien joukkoa merkitään symbolilla A_μ.

Huomautus 1.4. Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s$, $0 \leq s < \infty$, on Borel-mitta (katso [3], luku 2, lause 1), ja lisäksi se ei sisällä atomeita, kun $0 < s < \infty$.

1.3 Iteraatiofunktiosysteemit

Tässä luvussa käymme läpi iteraatiofunktiosysteemin (IFS) ja similaarikuvauksen määritelmät. Käymme läpi myös tärkeimpiä niihin liittyviä ominaisuuksia. Luvun loppupuolella määrittelemme kaksi iteraatiofunktiosysteemiä Φ ja Ψ, sekä niihin liittyviä merkintöjä, mitä käytämme työssä jatkuvasti.

Kuvausta $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sanotaan kontraktioksi, jos on olemassa sellainen luku $0 < \alpha < 1$, että $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^d$. Banachin kiintopistelauseen nojalla jokaista kontraktiota ϕ kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen piste x_0, että $\phi(x_0) = x_0$. Pistettä x_0 kutsutaan kontraktion ϕ kiintopisteeksi. Lineaarista kuvausta $O : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sanotaan ortogonaaliseksi, jos sisätulolle on voimassa $\langle x, y \rangle = \langle Ox, Oy \rangle$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^d$. Ortogonaalikuvaukset säilyttävät vektorien pituudet ja vektorien väliset kulmat, joten $|Ox - Oy| = |x - y|$. Kaikkien avaruuden $\mathbb{R}^d$ ortogonaalisten kuvausten joukkoa merkitään symbolilla $\boldsymbol{O}(d)$. Sanomme, että kuvaus $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on kontraktiivinen similariteetti tai yksinkertaisemmin similariteetti, jos se voidaan esittää muodossa $\phi(x) = \alpha R(x) + a$, missä $a \in \mathbb{R}^d$, $0 < \alpha < 1$ ja $R \in \boldsymbol{O}(d)$. Lukua α sanotaan suhdeluvuksi tai kontraktiosuhteeksi. Huomaa, että similariteetille ϕ on voimassa $|\phi(x) - \phi(y)| = \alpha|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Olkoon $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^l$ kokoelma kontraktiokuvauksia avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Tällöin kokoelmaa Φ kutsutaan iteraatiofunktiosysteemiksi (IFS). Jokaista iteraatiosysteemiä kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen epätyhjä kompakti joukko $E \subset \mathbb{R}^d$, että

$$E = \bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(E)$$

(katso [4], lause 9.1). Kyseistä joukkoa E sanotaan iteraatiofunktiosysteemin Φ attraktoriksi. Vastaavasti Φ on joukon E generoiva IFS. Huomaa, että E on yksiö jos ja vain jos kaikilla kontraktiokuvauksilla ϕ_i on sama kiintopiste. Sanotaan, että Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon, jos on olemassa sellainen rajoitettu epätyhjä avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^d$, että

$$\bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(V) \subseteq V,$$

missä joukot $\phi_i(V)$ ovat erillisiä. Jos joukot $\phi_i(E)$ ovat erillisiä joukon E osajoukkoja, niin sanomme, että Φ toteuttaa voimakkaan erotteluehdon.

Lause 1.5. *Jos IFS toteuttaa voimakkaan erotteluehdon, niin tällöin se toteuttaa myös avoimen joukon ehdon.*

Todistus. Olkoot $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^l$ IFS, α_i kontraktion ϕ_i suhdeluku kaikilla $i = 1, \ldots, l$ ja E iteraatiofunktiosysteemin Φ attraktori. Oletetaan, että Φ toteuttaa voimakkaan erotteluehdon. Osoitamme aluksi, että $\phi_i(E_{\delta^\circ}) \subseteq \phi_i(E)_{\delta^\circ}$ kaikilla $i = 1, \ldots, l$. Olkoon $x \in \phi_i(E_{\delta^\circ})$. Tällöin on olemassa sellainen $y \in E_{\delta^\circ}$, että $x = \phi_i(y)$. Lisäksi on olemassa sellainen $z \in E$, että $|z - y| < \delta$. Nyt

$$|\phi_i(z) - x| = |\phi_i(z) - \phi_i(y)| \leq \alpha_i |z - y| \leq |z - y| < \delta.$$

Täten $x \in \phi_i(E)_{\delta^\circ}$, eli $\phi_i(E_{\delta^\circ}) \subseteq \phi_i(E)_{\delta^\circ}$ kaikilla $i = 1, \ldots, l$.

Koska Φ toteuttaa voimakkaan erotteluehdon, niin

$$a := \min\{\mathrm{dist}(\phi_i(E), \phi_j(E)) \colon i \neq j\} > 0.$$

Jos $\phi_i(E_{\delta^\circ}) \cap \phi_j(E_{\delta^\circ}) \neq \emptyset$ kaikilla $\delta > 0$, kun $i \neq j$, niin $\phi_i(E)_{\delta^\circ} \cap \phi_j(E)_{\delta^\circ} \neq \emptyset$ kaikilla $\delta > 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska valitsemalla esimerkiksi $\delta = a/3$ saadaan, että leikkaus on tyhjä. Näin ollen on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $\phi_i(E_{\delta^\circ}) \cap \phi_j(E_{\delta^\circ}) = \emptyset$, kun $i \neq j$. Lisäksi

$$\bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(E_{\delta^\circ}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(E)_{\delta^\circ} = \left(\bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(E) \right)_{\delta^\circ} = E_{\delta^\circ}.$$

Täten E_{δ° toteuttaa avoimen joukon ehdon. $\square$

Jos kaikki iteraatiofunktiosysteemin Φ kuvaukset ovat similariteetteja, niin sitä vastaavaa attraktoria E kutsutaan itsesimilaariksi joukoksi. Tässä tapauksessa attraktorin E similariteetti dimensio on luku $s > 0$, joka ratkaisee yhtälön $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i^s = 1$, missä α_i on kuvauksen ϕ_i kontraktiosuhde kaikilla $i = 1, \dots, l$. On mahdollista osoittaa, että jos similariteeteista koostuva IFS Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon, niin tällöin $\dim_H E = s$ (katso [4], lause 9.3).

Ellei toisin mainita, niin jatkossa oletamme aina, että kontraktiivisista similariteeteistä koostuvat iteraatiofunktiosysteemit $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^{l}$ ja $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ ovat muotoa

$$\phi_i(x) = \alpha_i R_i(x) + a_i, \ \psi_j(x) = \beta_j O_j(x) + b_j, \ i = 1, \dots, l, \ j = 1, \dots, m, \quad (1.1)$$

missä $0 < \alpha_i, \beta_j < 1$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}^d$ ja $R_i, O_j \in \boldsymbol{O}(d)$. Merkitsemme iteraatiofunktiosysteemin Φ attraktoria symbolilla E ja iteraatiofunktiosysteemin Ψ attraktoria symbolilla F. Oletamme aina, että E ja F eivät ole yksiöitä. Yksinkertaisuuden vuoksi kirjoitamme usein $\phi_I := \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}$ ja $\alpha_I := \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n}$, kun $I := i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, l\}^n$. Merkinnät ψ_J ja β_J, missä $J \in \{1, \dots, m\}^n$, määritellään vastaavasti. Indeksijonoja I ja J kutsutaan usein sanoiksi.

1.4 Cantorin joukon ominaisuuksia

Tässä luvussa määrittelemme Cantorin joukon ja käymme läpi siihen liittyviä tuloksia, joita työssä tarvitaan. Lukijan on syytä huomata, että Cantorin α-joukko ja Cantorin joukko luvun p-suhteen ovat eri käsitteitä.

Olkoon $0 < \alpha < 1/2$. Merkitään $I_{0,1} := [0, 1]$. Seuraavaksi poistamme välin $I_{0,1}$ keskeltä $1 - 2\alpha$ pituisen välin, eli jäljelle jää kaksi väliä $[0, \alpha] =: I_{1,1}$ ja $[1-\alpha, 1] =: I_{1,2}$. Nyt poistamme saatujen välien keskeltä $\alpha(1-2\alpha)$ pituisen välin. Jatkamme tällä periaatteella, jolloin jokainen uusi väli jaetaan aina kahteen pienempään osaväliin. Jos olemme määritelleet välit $I_{i-1,1}, \dots, I_{i-1,2^{i-1}}$, niin saamme välit $I_{i,1}, \dots, I_{i,2^i}$ poistamalla jokaisen välin $I_{i-1,j}, 1 \le j \le 2^{i-1}$, keskeltä $\alpha^{i-1}(1 - 2\alpha)$ pituisen välin. Konstruktiovaiheessa i jokaisen jäljelle jäävän välin pituus on α^i ja lyhimmän poistetun välin pituus on $\alpha^{i-1}(1-2\alpha)$. Cantorin α-joukoksi kutsutaan joukkoa

$$C_\alpha = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^i} I_{i,j}.$$

Seuraavaksi mainitsemme muutamia Cantorin joukon hyvin tunnettuja ominaisuuksi ilman todistuksia. Cantorin joukko on ylinumeroituva kompakti joukko. Cantorin joukolla ei ole myöskään sisäpisteitä ja sen jokainen piste on kasautumispiste. Cantorin α-joukko on iteraatiofunktiosysteemin $\{\alpha x, \alpha x + 1 - \alpha\}$ attraktori, kun $0 < \alpha < 1/2$ (katso [2], propositio 1.1.9). Lisäksi Cantorin α-joukko toteuttaa voimakkaan erotteluehdon.

Seuraavaksi osoitamme lemman, jonka avulla voimme esittää Cantorin joukon alkiot sarjoina.

Lemma 1.6. *Olkoon* $0 < \alpha < 1/2$. *Tällöin*

$$C_\alpha = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k \colon \epsilon_k \in \{0,1\} \text{ kaikilla } k \geq 0 \right\}.$$

Todistus. Osoitetaan aluksi induktiolla, että kaikki pisteet $\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k$ ovat Cantorin α-joukon konstruktiovälien alkupisteitä ja täten kuuluvat Cantorin α-joukkoon. Kun $n = 0$, niin mahdolliset summan arvot ovat 0 ja $1-\alpha$, jotka ovat selvästi konstruktiovälien $I_{1,1}$ ja $I_{1,2}$ alkupisteet. Oletetaan siis, että tulos on voimassa arvolla n jolloin olemme konstruoineet välit $I_{n+1,j}$, $1 \leq j \leq 2^{n+1}$. Konstruktiovaiheessa $n+2$ konstruktiovälien pituus on α^{n+2} ja lyhimmän poistetun välin pituus on $\alpha^{n-1}(1-2\alpha)$. Konstruktiovaiheen $n+2$ uudet alkupisteet ovat siis muotoa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k + \alpha^{n+2} + \alpha^{n+1}(1-2\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k + (1-\alpha)\alpha^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k,\end{aligned}$$

joten väite on totta kun $\epsilon_{n+1} = 1$. Jos $\epsilon_{n+1} = 0$, niin väite seuraa induktio-oletuksesta.

Nyt $\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nyt koska Cantorin α-joukko on suljettu niin $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k \in C_\alpha$. Jos $x \in C_\alpha$, niin jokaista lukua $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kohti on olemassa sellainen konstruktioväli $I_{n+1,j}, 1 \leq j \leq 2^{n+1}$, että $x \in I_{n+1,j}$. Merkitään näiden konstruktiovälien alkupisteitä symboleilla x_n. Tällöin $x_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k$, joillakin $\epsilon_k \in \{0,1\}$. Nyt $|x - x_n| \leq \alpha^{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, eli luku x voidaan esittää summana $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k$. $\square$

Huomautus 1.7. Koska

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^k = (1-\alpha)\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \alpha^{n+1} < (1-\alpha)\alpha^n,$$

niin muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k (1-\alpha)\alpha^k$ olevat luvut ovat erisuuria, jos lukujen esityksissä yksikään termi ϵ_k on erisuuri.

Olkoon $p \in \mathbb{N}$ ja $p \geq 3$. Kutsumme joukkoa $A \subset \mathbb{R}$ Cantorin joukoksi luvun p suhteen, jos joukko A on iteraatiofunktiosysteemin $\{x/p + a_i\}_{i=1}^{l}$ attraktori, joukko $A_i := \{a_i \in \mathbb{R} \colon 1 \leq i \leq l\}$ sisältää ainakin kaksi alkiota ja joukko A_i on joukon $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ aito osajoukko.

1.5 Algebraa ja Galois'n teoriaa

Tässä luvussa kertaamme lyhyesti ryhmän, renkaan ja kunnan määritelmät. Määrittelemme myös ryhmä- ja kuntahomomorfismin. Seuraavassa luvussa tarvitsemme ryhmiin liittyviä käsitteitä määritellessämme topologisen ryhmän ja Lien ryhmät. Kunnan käsitettä tarvitsemme Galois'n teoriassa, jota hyödynnämme Lauseen 2.4 todistuksessa.

Olkoot $G \neq \emptyset$ ja $\cdot$ joukon G binäärinen operaatio, eli $a \cdot b \in G$ kaikilla $a, b \in G$. Paria $(G, \cdot)$ sanotaan ryhmäksi, mikäli seuraavat kolme ehtoa toteutuvat:

1. Operaatio $\cdot$ on assosiatiivinen, eli $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ aina, kun $a, b, c \in G$;

2. On olemassa sellainen $e \in G$, että $a \cdot e = e \cdot a = a$ kaikilla $a \in G$. Alkiota e kutsutaan ykkösalkioksi;

3. Jokaista alkiota $a \in G$ kohti on olemassa sellainen alkio $a^{-1} \in G$, että $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$. Alkiota a^{-1} kutsutaan alkion a käänteisalkioksi.

Jos lisäksi on voimassa, että $a \cdot b = b \cdot a$ kaikilla $a, b \in G$, eli operaatio $\cdot$ on kommutatiivinen, niin paria $(G, \cdot)$ sanotaan Abelin ryhmäksi.

Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, $H \subseteq G$ ja $H \neq \emptyset$. Jos $(H, \cdot)$ on ryhmä, sitä sanotaan ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmäksi. Aliryhmää H sanotaan normaaliksi, jos $gHg^{-1} = H$ kaikilla $g \in G$.

Olkoot $(G, \cdot)$ ja $(H, *)$ ryhmiä. Kuvausta $f : G \to H$ sanotaan ryhmähomomorfismiksi, jos

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

kaikilla $a, b \in G$.

Kolmikko $(R, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1. $(R, +)$ on Abelin ryhmä. Ryhmän $(R, +)$ ykkösalkiota merkitään symbolilla 0;

2. Operaatio $\cdot$ on assosiatiivinen kommutatiivinen binäärinen operaatio joukossa R ja joukossa R on olemassa ykkösalkio operaation $\cdot$ suhteen;

3. Kaikilla $a, b, c \in R$ on voimassa: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Kommutatiivista rengasta $(K, +, \cdot)$ sanotaan kunnaksi, mikäli $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä. Mikäli operaatiosta $\cdot$ ei ole epäselvyyttä käytämme merkinnän $a \cdot b$ sijasta merkintää ab.

Oletetaan jatkossa, että K ja L ovat kuntia. Kuvausta $f : L \to K$ sanotaan kuntahomomorfismiksi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ kaikilla $a, b \in L$;
2. $f(ab) = f(a)f(b)$ kaikilla $a, b \in L$;
3. $f(1_L) = 1_K$.

Joukon

$$L[x] := \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \colon a_i \in L, n \geq 0\}$$

alkioita kutsutaan L-kertoimisiksi polynomeiksi. Joukkoa $L[x]$ varustettuna polynomien yhteen- ja kertolaskulla sanotaan polynomirenkaaksi kunnan L suhteen. Oletetaan, että $K \supseteq L$. Alkion $\theta \in K$ määräämä polynomirengas kunnan L suhteen on joukko

$$L[\theta] := \{a_n \theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_1 \theta + a_0 \colon a_i \in L, n \geq 0\}.$$

Selvästi $L[\theta] \subseteq K$, kun $\theta \in K$. Erityisesti $L[\theta] \subseteq L$, kun $\theta \in L$.

Isomorfismi $\chi : K \to K$ on automorfismi, eli toisin sanoin $\chi : K \to K$ on automorfismi jos ja vain jos se on bijektiivinen kuntahomomorfismi. Jos $L \subseteq K$, niin kuvausta χ sanotaan kunnan K L-automorfismiksi, jos $\chi(a) = a$ kaikilla $a \in L$. Kaikkien kunnan K L-automorfismien muodostamaa joukkoa kutsutaan kunnan K Galois'n ryhmäksi joukon L suhteen ja sitä merkitään $\mathrm{Gal}(K/L)$.

Olkoon $f(x) \in L[x]$. Pienintä sellaista kuntaa $K \supseteq L$, missä $f(x) \in K[x]$ voidaan esittää 1. asteen polynomien tulona, sanotaan polynomin $f(x)$ hajoamiskunnaksi. Jos $f(x) \in L[x]$ ja K on polynomin $f(x)$ hajoamiskunta, niin tällöin sanotaan, että $\mathrm{Gal}(K/L)$ on polynomin $f(x)$ Galois'n ryhmä.

Lemma 1.8. *Olkoon $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in L[x]$ ja oletetaan, että K on polynomin $f(x)$ hajoamiskunta, sekä $\alpha \in K$ on polynomin $f(x)$ nollakohta. Jos $\chi \in \mathrm{Gal}(K/L)$, niin tällöin $\chi(\alpha)$ on polynomin $f(x)$ nollakohta.*

Todistus. Nyt χ on kuntahomomorfismi, joten $\chi(f(\alpha)) = \chi(0) = 0$. Lisäksi $\chi(a_i) = a_i$ kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\chi(f(\alpha)) &= \chi(a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0) \\
&= \chi(a_n)\chi(\alpha)^n + \cdots + \chi(a_1)\chi(\alpha) + \chi(a_0) \\
&= a_n \chi(\alpha)^n + \cdots + a_1 \chi(\alpha) + a_0 \\
&= f(\chi(\alpha)).
\end{aligned}$$

Täten $\chi(\alpha)$ on polynomin $f(x)$ nollakohta. $\square$

Lause 1.9. *Olkoon $p(x) \in L[x]$ jaoton ja olkoot α ja β polynomin $f(x)$ nollakohtia hajoamiskunnassa K. Tällöin on olemassa sellainen $\chi \in \mathrm{Gal}(K/L)$, että $\chi(\alpha) = \beta$.*

Todistus. Katso [13], propositio 10.2. $\square$

1.6 Lukuteoriaa

Lauseiden 2.3 ja 2.4 todistuksissa tarvitsemme joitain lukuteoriaan liittyviä määritelmiä ja tuloksia. Erityisen tärkeitä ovat Pisot'n luvun määritelmä ja lemma 1.10.

Kompleksiluku r on algebrallinen kokonaisluku, jos se on kokonaislukukertoimisen pääpolynomin nollakohta, eli on olemassa sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi $P(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, että $P(r) = 0$. Alkion r minimipolynomiksi kutsutaan sitä yksikäsitteistä pienintä astetta olevaa pääpolynomia, jonka nollakohta luku r on. Luvun r minimipolynomin muita nollakohtia sanotaan luvun r algebrallisiksi konjugaateiksi. Reaalista algebrallista kokonaislukua r sanotaan Pisot'n luvuksi, jos $r > 1$ ja kaikkien luvun r algebrallisten konjugaattien itseisarvot ovat aidosti pienempiä kuin 1. Lukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1, kutsutaan suhteellisiksi alkuluvuiksi. Lattiafunktio $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ määritellään seuraavasti:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}.$$

Jatkossa tarvitsemme useasti seuraavaa lukujen tiheyteen liittyvää lemmaa:

Lemma 1.10. *Olkoon $a > 0$ irrationaaliluku, ja merkitään luvun murto-osaa symbolilla $\{\cdot\}$. Tällöin joukko $A_0 := \{\{ma\} \colon m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ on tiheä joukossa $[0, 1]$. Lisäksi joukko $A_{\mathbb{R}} := \{ma - n \colon m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että $\{ma\}$ ei saa samaa arvoa kahdesti. Jos $\{ma\} = \{na\}$, joillain $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $m \neq n$, niin tällöin $\{ma - na\} = 0$ eli $\{(m - n)a\} = 0$. Näin ollen $(m - n)a \in \mathbb{Z}$, eli $a \in \mathbb{Q}$. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten $\{ma\} = \{na\}$ jos ja vain jos $m = n$.

Olkoon $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jaetaan väli $[0, 1]$ osaväleihin $[0, \frac{1}{n}[, [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[, \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$. Väli $[0, 1]$ on rajoitettu, joten jonolla $(\{ia\})_{i=0}^{\infty}$ on kasautumispiste Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla. Täten jollakin välillä $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}[$, missä $m \in$

$\{1,2,\ldots n-1\}$, on ainakin kaksi jonon $(\{ia\})_{i=0}^{\infty}$ pistettä, eli $0 < \{ia\}-\{ja\} < \frac{1}{n}$, joillain $i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nyt

$$\begin{aligned}\{ia\} - \{ja\} &= \{\{ia\} - \{ja\}\}\\ &= \{ia - \lfloor ia \rfloor - ja + \lfloor ja \rfloor\}\\ &= \{(i-j)a\}.\end{aligned}$$

Olkoon M suurin positiivinen kokonaisluku, jolle $M(\{ia\} - \{ja\}) < 1$. Huomaa, että yhtäsuuruus ei ole mahdollinen, koska a on irrationaalinen ja $\{ia\} \neq \{ja\}$. Koska $\operatorname{dist}(q(\{ia\} - \{ja\}), (q+1)(\{ia\} - \{ja\})) \leq \frac{1}{n}$ kaikilla $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, niin jokaista lukua $m \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ kohti löytyy sellainen luku $k \in \{1,2,\ldots,M\}$, että $k(\{ia\} - \{ja\}) \in [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}[$. Lisäksi, koska $0 < k(\{ia\} - \{ja\}) < 1$, niin

$$\begin{aligned}k(\{ia\} - \{ja\}) &= k(ia - \lfloor ia \rfloor - ja + \lfloor ja \rfloor)\\ &= k(i-j)a - k(\lfloor ia \rfloor - \lfloor ja \rfloor)\\ &= k(i-j)a - z\\ &= \{k(i-j)a - z\}\\ &= \{k(i-j)a\} \in \Big[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\Big[,\end{aligned}$$

missä $z := k(\lfloor ia \rfloor - \lfloor ja \rfloor) \in \mathbb{Z}$. On kuitenkin mahdollista, että $i - j < 0$. Jos $j > i$, niin tällöin aiemman nojalla on olemassa sellainen luku $k_0 \in \{1,2,\ldots,M\}$, että $\{k_0(i-j)a\} \in [\frac{n-1}{n}, 1[$. Nyt

$$\{k_0(j-i)a\} = \{-k_0(i-j)a\} = 1 - \{k_0(i-j)a\} \in \Big]0, \frac{1}{n}\Big].$$

Näin ollen jokaista lukua $m \in \{1,2,\ldots n-1\}$ kohti on olemassa sellainen luku $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, että $\{la\} \in [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}[$ Tämä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, joten A_0 on tiheä joukossa $[0,1]$.

Olkoon $[k, k+1] \subset \mathbb{R}$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tarkastellaan pareja $(m,n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$, joille $ma - n \in [k, k+1]$. Huomaa, että näitä pareja on aina ääretön määrä, koska valitsemalla M tarpeeksi suureksi saadaan, että $ma > |k|$ kaikilla $m \geq M$. Valitaan $n = \lfloor ma \rfloor - k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jolloin $ma - n = \{ma\} + k \in [k, k+1]$ kaikilla $m \geq M$. Koska joukko A_0 on tiheä välillä $[0,1]$, niin joukko $A_0 + k := \{\{ma\} + k \colon m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset A_{\mathbb{R}}$ on tiheä välillä $[k, k+1]$. Nyt $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1]$, joten joukko $A_{\mathbb{R}}$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$. □

Seuraus 1.11. *Tunnetusti kuvaus $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ on jatkuva. Nyt $f([0,1]) = \mathbb{S}^1$. Olkoon joukko A_0 määritelty kuten edellisessä lemmassa. Koska A_0 on tiheä joukossa $[0,1]$, niin $f(A_0)$ on tiheä joukossa $\mathbb{S}^1$. Toisin sanoin, kun $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin joukko $\{e^{2\pi i n \gamma} \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ on tiheä joukossa $\mathbb{S}^1$.*

1.7 Topologiaa, Haarin mitta ja Lien ryhmät

Tässä luvussa olevia tuloksia tarvitsemme lauseen 2.2 todistuksessa. Käymme läpi tarvittavia määritelmiä ja tuloksia, mutta esimerkiksi Haarin mitan, Lien ryhmien ja eksponentiaalikuvauksen tarkka määritteleminen vaatisi työkaluja, joita emme käy läpi tässä työssä.

Topologinen avaruus on lokaalisti kompakti, jos jokaisella pisteellä on olemassa ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Topologinen ryhmä on topologinen avaruus G, jolla on ryhmärakenne, sekä jatkuvat ryhmäoperaatiot $(g, h) \mapsto gh$ ja $g \mapsto g^{-1}$. Jos G on lisäksi lokaalisti kompakti, niin on mahdollista osoittaa, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen vasemmalta siirtoinvariantti mitta μ, joka on lokaalisti äärellinen. Kyseistä mittaa sanotaa vasemmalta siirtoinvariantiksi Haarin mitaksi. Edelleen, jos G on kompakti tai Abelin ryhmä, niin mitta μ on myös oikealta siirtoinvariantti (katso [7], luku XI). Tällöin mittaa μ sanotaan Haarin mitaksi. Haarin mitalla μ on siis seuraavat ominaisuudet:

1. μ on Borel-mitta;
2. $\mu(xE) = \mu(E)$ ja $\mu(Ex) = \mu(E)$ kaikilla $x \in G$ sekä jokaisella μ-mitallisella joukolla $E \subseteq G$;
3. $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subseteq G$;
4. $\mu(V) > 0$ kaikilla avoimilla joukoilla $V \subseteq G$.

Sivuutamme yksinkertaisuuden vuoksi sileän moniston määritelmän (katso [10], luku 1 tai [11], luku 1.1). Lien ryhmä on sileä monisto, joka on lisäksi ryhmä, jolla on sileät ryhmäoperaatiot $(g, h) \mapsto gh$ ja $g \mapsto g^{-1}$. Lien ryhmän G Lien aliryhmä H on ryhmän G aliryhmä varustettuna aliavaruuden topologialla ja moniston G sileällä rakenteella.

Esimerkki 1.12. Käymme läpi muutamia tarvitsemiamme Lien ryhmiä (katso [10], esimerkit 7.3 ja 7, 27).

1. Kääntyvien reaalisten $d \times d$-matriisien joukko varustettuna matriisien tulo-operaatiolla on Lien ryhmä.
2. Avaruuden $\mathbb{R}^d$ ortogonaalisten kuvausten joukko $\boldsymbol{O}(d)$ muodostaa kompaktin Lien ryhmän.
3. Olkoon $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$. Nyt $\mathbb{S}^1$ varustettuna kompleksilukujen tulo-operaatiolla on Lien ryhmä.

Topologisen avaruuden X yhtenäiseksi komponentiksi sanotaan joukkoa, joka on maksimaalinen yhtenäinen joukon X osajoukko, eli se ei ole minkään yhtenäisen joukon aito osajoukko. Yhtenäiset komponentit ovat aina suljettuja avaruudessa X. Avaruuden X sanotaan olevan lokaalisti yhtenäinen, jos kaikilla $x \in X$ ja kaikilla avoimilla joukoilla V joille $x \in V$, on olemassa sellainen avoin yhtenäinen joukko U, että $x \in U \subseteq V$. Jos G on Lien ryhmä, niin joukon G yhtenäistä komponenttia, joka sisältää ryhmän G ykkösalkion, sanotaan identiteettikomponentiksi.

Lien algebra on reaalinen vektoriavaruus $\mathfrak{g}$ varustettuna kuvauksella $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, joka täyttää seuraavat ehdot kaikilla $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

1. Bilineaarisuus: Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin
$$\begin{aligned}[aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z],\\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y];\end{aligned}$$

2. Antisymmetrisyys:
$$[X, Y] = -[Y, X];$$

3. Jacobin identiteetti:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Kuvausta $[\cdot,\cdot]$ sanotaan hakatuloksi.

Huomautus 1.13. Lien ryhmää G vastaava Lien algebra voidaan samaistaa ryhmän G ykkösalkion tangenttiavaruuden kanssa (katso [10], lause 8.37).

Eksponentiaalikuvauksen yleinen määritelmä vaatii työkaluja, joita työssä ei käydä läpi. Yksinkertaisuuden vuoksi määrittelemme eksponentiaalikuvauksen kahdessa poikkeustapauksessa:

1. Eksponentiaalikuvaus $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ Lien ryhmän $\mathbb{S}^1$ suhteen määritellään seuraavasti:
$$\exp(t) = e^{it}.$$

2. On mahdollista osoittaa, että jos A on antisymmetrinen $d \times d$-matriisi, niin tällöin
$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{1.2}$$

on ortogonaalinen matriisi (katso [10], esimerkki 20.4). Antisymmetristen matriisien summa on edelleen antisymmetrinen ja skalaarilla kertominen ei muuta matriisin antisymmetrisyyttä, joten antisymmetriset matriisit muodostavat reaalisen vektoriavaruuden. Varustetaan tämä vektoriavaruus tavallisella hakatulolla $[A, B] = AB - BA$. Nyt kahden antisymmetrisen matriisin A ja B hakatulo on antisymmetrinen, koska

$$[A, B]^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B].$$

Näin ollen antisymmetriset matriisit muodostavat ortogonaalikuvauksia vastaavan Lie algebran. Yhtälö (1.2) määrittelee siis eksponentiaalikuvauksen Lien ryhmän $\boldsymbol{O}(d)$ suhteen.

Lisää yksityiskohtia ja tarkemmat määritelmät löytyvät lähteistä [10] ja [11].

Lemma 1.14. *Olkoon G_0 topologisen ryhmän G identiteettikomponentti. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

1. *G_0 on joukon G suljettu normaali aliryhmä;*
2. *G_0 on avoin, kun G on Lien ryhmä. Lisäksi G on lokaalisti yhtenäinen;*
3. *G_0 on Lien ryhmä, jos ja vain jos G on Lien ryhmä.*

Todistus. Katso [11], Lemma 2.1.4. □

Lause 1.15. *Olkoon G Lien ryhmä ja $\mathfrak{g}$ sitä vastaava Lien algebra. Tällöin kaikilla $X \in \mathfrak{g}$ kuvaus $t \mapsto \exp(tX)$ on analyyttinen homomorfismi.*

Todistus. Katso [11], Lause 2.2.10. □

Lause 1.16. *Eksponentiaalikuvaus on analyyttinen.*

Todistus. Katso [11], Lause 2.2.12. □

Lause 1.17. *Olkoon H Lien ryhmän G suljettu aliryhmä. Jos joukolle H annetaan joukon G indusoima topologia, niin tällöin H on Lien ryhmä.*

Todistus. Katso [11], Lause 3.3.1. □

Huomautus 1.18. Oletamme jatkossa, että Lien aliryhmät ovat vähintään 1-ulotteisia sileitä monistoja. Tämä sopimus otetaan käyttöön, koska 0-ulotteisessa avaruudessa sileyden määritteleminen ei ole mielekästä.

Esimerkki 1.19. Olkoon O ortogonaalikuvaus. Tarkastellaan joukkoa $A := \overline{\{O^n : n \in \mathbb{N}\}}$. Selvästi A on suljettu joukon $\boldsymbol{O}(d)$ osajoukko. Seuraavaksi osoitamme, että A on ryhmä. Erityisesti jos A on ääretön joukko, niin lauseen 1.17 nojalla A on Lien ryhmä.

Varustetaan joukko A matriisien kertolaskulla. Selvästi kertolasku on binäärinen ja assosiatiivinen operaatio joukossa A. Jos A on äärellinen, niin tulos on selvä. Oletetaan siis, että A on ääretön. Olkoon I ryhmän $\boldsymbol{O}(d)$ identiteettialkio. Kompaktin joukon $\boldsymbol{O}(d)$ suljettuna osajoukkona A on kompakti. Kompaktiuden nojalla jonolla $(O^n)_{n=1}^{\infty}$ on kasautumispiste $\widetilde{O}$. Jokaista lukua $k \in \mathbb{N}$ kohti on siis olemassa sellainen luku $n_k \in \mathbb{N}$, että $n_k < n_{k+1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\left\|O^{n_k} - \widetilde{O}\right\| < \frac{1}{2k}$. Nyt

$$\left\|O^{n_{k+1}-n_k}O^{n_k} - O^{n_k}\right\| \leq \left\|O^{n_{k+1}} - \widetilde{O}\right\| + \left\|\widetilde{O} - O^{n_k}\right\| < \frac{1}{k}$$

eli $\|O^{n_{k+1}-n_k}O^{n_k} - O^{n_k}\| \to 0$, kun $k \to \infty$. Toisin sanoin $O^{n_{k+1}-n_k} \to I$, kun $k \to \infty$. Olkoon $O^n \in A$. Aiemman nojalla jokaista lukua $k \in \mathbb{N}$ kohti voidaan valita sellainen indeksi $i_k \in \mathbb{N}$, että $i_k > k$, $n_{i_k} - n_k > n$ ja $O^{n_{i_k}-n_k} \to I$, kun $k \to \infty$. Nyt $O^{n_{i_k}-n_k-n}O^n = O^{n_{i_k}-n_k} \to I$, kun $k \to \infty$. Näin ollen $O^{n_{i_k}-n_k-n} \to (O^n)^{-1}$, kun $k \to \infty$. Koska A on suljettu, niin $I \in A$ ja $(O^n)^{-1} \in A$. Täten A on ryhmä.

1.8 Siirtoavaruus

Tarvitsemme lauseen 2.3(2) todistuksessa joitain siirtoavaruuden ominaisuuksia, jotka käymme tässä luvussa läpi.

Olkoot $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Jos $z \in \Sigma$, niin voidaan kirjoittaa $z = (z_i)_{i=0}^{\infty}$, missä $z_i \in \{0,1\}$. Operaatiota $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ sanotaan siirroksi vasemmalle, jos $\sigma\big((z_i)_{i=0}^{\infty}\big) = (z_i)_{i=1}^{\infty}$. Paria $\big(\Sigma, \sigma\big)$ kutsutaan siirtoavaruudeksi. Määritellään metriikka d avaruuteen $\big(\Sigma, \sigma\big)$ seuraavasti:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \sup\{2^{-k} : x_k \neq y_k\}, & \text{jos } x \neq y \end{cases}$$

(katso [2], propositio 2.1.8).

Lause 1.20. *Avaruus $\big(\Sigma, \sigma\big)$ on täydellinen ja kompakti metriikan d suhteen.*

Todistus. Avaruuden täydellisyyden todistusta varten katso [2, propositio 2.1.32]. Avaruuden kompaktius seuraa Tychonoffin lauseesta, koska diskreetti avaruus $\{0,1\}$ on kompakti ja metriikka d indusoi tulotopologian avaruuteen $\big(\Sigma, \sigma\big)$. $\square$

1.9 Uniikit joukot ja mitan Fourier-muunnos

Tämän luvun määritelmiä ja tuloksia tarvitaan lauseiden 2.3(3) ja 2.4 todistuksissa. Määrittelemme uniikit joukot ja mitan Fourier-muunnoksen. Esitämme myös muutamia tarvitsemiamme lauseita.

Määritelmä 1.21. Joukkoa $E \subseteq [0, 2\pi]$ sanotaan uniikiksi, jos jokainen muotoa $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$ oleva trigonometrinen sarja, joka suppenee kohti nollaa joukossa $[0, 2\pi] \setminus E$, on identtisesti nolla, eli $a_n = b_n = 0$ kaikilla $n \geq 0$. Muulloin joukkoa E sanotaan multiplikatiiviseksi.

Huomautus 1.22. Joukkojen, jotka eivät ole välin $[0, 2\pi]$ osajoukkoja, uniikkiutta voidaan tutkia tarkastelemalla niitä tekijäryhmän $\mathbb{R}/2\pi$ suhteen.

Lemma 1.23. *Jokainen uniikin joukon osajoukko on uniikki.*

Todistus. Oletetaan, että E on uniikki joukko ja $F \subseteq E$. Olkoon $S := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$ mielivaltainen trigonometrinen sarja, joka suppenee kohti nollaa joukossa $[0, 2\pi] \setminus F$. Nyt $[0, 2\pi] \setminus E \subseteq [0, 2\pi] \setminus F$, joten erityisesti sarja S suppenee kohti nollaa joukossa $[0, 2\pi] \setminus E$. Näin ollen $a_n = b_n = 0$ kaikilla $n \geq 0$, ja täten F on uniikki joukko. □

Lause 1.24. *Olkoon $0 < \alpha < 1/2$ ja olkoon $E \subset [0, 2\pi]$ iteraatiofunktiosysteemin $\{\alpha x + a_i\}_{i=1}^{l}$ attraktori, kun $2 \leq l < 1/\alpha$ ja $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_l = 1 - \alpha$. Tällöin E on uniikki joukko jos ja vain jos*

1. *$\theta := 1/\alpha$ on Pisot'n luku, ja*

2. *$a_1, \ldots, a_l$ ovat algebrallisia lukuja polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[\theta]$.*

Todistus. Katso [12], luku 7. □

Lause 1.25.

1. *Suljettujen uniikkien joukkojen numeroituva unioni on uniikki.*

2. *Jos $E, F \subset [0, 2\pi]$ ja $E = \lambda F + a$, joillakin $\lambda \neq 0$ ja $a \in [0, 2\pi]$, niin tällöin joukko E on uniikki, jos ja vain jos joukko F on uniikki.*

Todistus. Katso [9]. □

Huomautus 1.26. Oletetaan, että $E \subseteq [0, 2\pi]$ on uniikki joukko ja $\lambda F + a \subseteq E$. Tällöin lemman 1.23 nojalla joukko $\lambda F + a$ on uniikki. Nyt lauseen 1.25 nojalla F on uniikki joukko.

Määritelmä 1.27. Olkoon μ Borel-mitta avaruudessa $\mathbb{R}$. Mitan μ Fourier-muunnos määritellään asettamalla

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \,\mathrm{d}\mu(\mathrm{x})$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Mitan μ Fourier-muunnoksen kertoimet määritellään asettamalla jokaisella $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} \,\mathrm{d}\mu(\mathrm{x}).$$

Lause 1.28. *Jos $E \subset [0, 2\pi]$ on suljettu uniikki joukko, niin tällöin kaikilla Borel-todennäköisyysmitoilla η, joille $\mathrm{supp}(\eta) \subseteq E$, on voimassa että $\hat{\eta}(n) \not\to 0$ kun $|n| \to \infty$.*

Todistus. Katso [12], sivu 46. □

Lause 1.29. *(Wienerin lemma) Olkoon μ Borel-todennäköisyysmitta avaruudessa $\mathbb{R}$. Tällöin*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(x)|^2 dx = \sum_{x \in A_\mu} \mu(\{x\})^2.$$

Todistus. Katso [8], lause 6. □

2 Lauseiden esittely

Seuraavaksi esittelemme työssä todistettavat lauseet.

Lause 2.1. *Oletetaan, että IFS Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon, ja attraktorin F itsesimilaarinen dimensio ja Hausdorffin dimensio ovat yhtä suuret. Tällöin F voidaan C^1-upottaa joukkoon E, jos ja vain jos F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E. Jos joukkoa F ei voida upottaa affiinisti joukkoon E, niin tällöin*

$$\dim_H \big(E \cap f(F)\big) < \dim_H F$$

kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^d$ diffeomorfismeilla f. Erityisesti, kaikilla $L > 0$ on voimassa

$$\sup_{f \in \mathrm{Diff}^1_L(\mathbb{R}^d)} \dim_H \big(E \cap f(F)\big) < \dim_H F,$$

missä $\mathrm{Diff}^1_L(\mathbb{R}^d)$ tarkoittaa kaikkien avaruuden $\mathbb{R}^d$ C^1-diffeomorfismien joukkoa, joille $\kappa\big(D_x(f^{-1})\big) \leq L$ kaikilla $x \in E$ (ehtoluvun määritelmä löytyy luvusta 1.1).

Lauseen 2.1 todistus perustuu itsesimilaaristen joukkojen ominaisuuksiin. Osoitamme aluksi muutamia lemmoja, joita käytetään apulauseen 3.5 todistuksessa. Lause 2.1 saadaan seurauksena apulauseesta 3.5 ja Bairen lauseesta.

Jos attraktorit E ja F ovat täysin epäyhtenäisiä ja F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E, niin on luonnollista olettaa, että suhdeluvut α_i ja β_j toteuttavat jonkin aritmeettisen ehdon. Seuraava lause näyttää millainen ehto suhdelukujen välillä on tapauksessa, jossa toisen iteraatiofunktiosysteemin suhdeluvut ovat samoja.

Lause 2.2. *Oletetaan, että IFS Φ toteuttaa voimakkaan erotteluehdon, $\alpha_i = \alpha$ kaikilla $1 \leq i \leq l$ ja $\dim_H E < 1/2$. Jos F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E, niin tällöin $\log \beta_j / \log \alpha \in \mathbb{Q}$ kaikilla $1 \leq j \leq m$.*

Lauseen 2.2 todistuksessa tarvitsemme erityisesti kappaleen 1.7 tuloksia. Todistuksen ideana on osoittaa, että jos $\log \beta_j / \log \alpha \notin \mathbb{Q}$, niin tällöin joukko $\{|x - y| \colon x, y \in E\}$ sisältää aidon välin. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen $\dim_H E < 1/2$ kanssa.

Seuraavaksi tarkastalemme Cantorin joukkojen affiineja upotuksia. Jos E ja F ovat Cantorin joukkoja, niin voimme tarkentaa lauseen 2.2 antamaa tulosta.

Lause 2.3. *Olkoon $0 < \beta < \alpha < 1/2$. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa:*

1. *Jos $\alpha < 1/4$, niin C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α jos ja vain jos $\log \beta / \log \alpha \in \mathbb{N}$.*

2. *Jos $1/4 \leq \alpha < \sqrt{2} - 1$ ja C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α, niin $\log \beta / \log \alpha \in \mathbb{Q}$. Tässä tapauksessa on mahdollista, että $\log \beta / \log \alpha \notin \mathbb{N}$.*

3. *Jos $1/\alpha$ on Pisot'n luku ja C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α, niin tällöin $\log \beta / \log \alpha \in \mathbb{Q}$; lisäksi luku $1/\beta$ on Pisot'n luku.*

Lauseen 2.3 kohtien 1 ja 2 todistuksissa hyödynnämme lemmaa 1.10 ja mittateoriaa. Lauseen 2.3(2) todistuksessa tarvitsemme myös siirtoavaruuksien ominaisuuksia. Todistamme molemmat kohdat vastaväitettä käyttäen. Kohdan 3 todistus vaatii puolestaan luvun 1.9 tuloksia.

Seuraavan lauseen erikoistapaus antaa meille työkalun tarkastella affiineja upotuksia, kun ainakin toisen iteraatiofunktiosysteemin attraktori on Cantorin joukko jonkin luvun p suhteen.

Lause 2.4. *Olkoon* $\Phi = \{\alpha x + a_i\}_{i=1}^{l}$ *sellainen IFS avaruudessa* $\mathbb{R}$*, että* $\theta := 1/\alpha > 2$ *on Pisot'n luku,* $2 \leq l < \theta$ *ja* $a_i \in \mathbb{Z}[\theta]$ *kaikilla* $1 \leq i \leq l$*. Olkoon IFS* Ψ *muotoa* (1.1) *ja olkoon* F *sen attraktori. Jos* F *voidaan upottaa affiinisti joukkoon* E*, niin tällöin* $\log \beta_j / \log \alpha \in \mathbb{Q}$ *ja* $1/\beta_j$ *on Pisot'n luku kaikilla* $1 \leq j \leq m$*.*

Lauseen 2.4 todistuksessa oletamme aluksi, että similariteettien suhdeluvut ovat samoja. Käyttämällä iteraatiofunktiosysteemien ominaisuuksia saamme todistettua aikaisemman väitteen. Sen avulla voimme todistaa yleisen tapauksen hyödyntämällä similariteettien yhdistettyjä kuvauksia ja Galois'n teoriaa.

Eräs Furstenbergin esittämistä konjektuureista on muotoiltu seuraavasti (katso [6]): Olkoon $p, q \geq 3$ kokonaislukuja ja $\log q / \log p \notin \mathbb{Q}$. Tällöin

$$\dim_H \big(A \cap f(B)\big) \leq \max\{0, \dim_H A + \dim_H B - 1\},$$

missä A on Cantorin joukko luvun p suhteen, B on Cantorin joukko luvun q suhteen ja f on affiini kuvaus avaruudessa $\mathbb{R}$. Saamme osittaisen, joskin heikon, vastauksen konjektuuriin lauseiden 2.1 ja 2.4 seurauksena.

Lause 2.5. *Oletetaan, että luvut* $p, q \geq 3$ *ja* $\log q / \log p \notin \mathbb{Q}$*. Tällöin kaikilla Cantorin* p*-joukoilla* A *ja kaikilla Cantorin* q*-joukoilla* B *on voimassa*

$$\sup_f \dim_H(A \cap f(B)) < \min\{\dim_H A, \dim_H B\},$$

missä supremum otetaan kaikkien avaruuden $\mathbb{R}$ C^1*-diffeomorfismien yli.*

3 Affiinien upotusten ja C^1-upotusten suhde

Tässä luvussa todistamme lauseen 2.1, joka käsittelee affiinien upotusten ja C^1-upotusten välistä suhdetta.

Olkoot iteraatiofunktiosysteemit $\Phi = \{\phi_i = \alpha_i R_i + a_i\}_{i=1}^{l}$ ja $\Psi = \{\psi_j = \beta_j O_j + b_j\}_{j=1}^{m}$ muotoa (1.1), ja olkoot E ja F iteraatiofunktiosysteemeitä Φ ja Ψ vastaavat attraktorit. Oletamme tässä luvussa, että Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon, ja attraktorin F Hausdorffin dimensio ja itsesimilaarinen dimensio ovat yhtä suuret. Voimme olettaa, että

$$\alpha_1 = \min\{\alpha_i \colon 1 \leq i \leq l\} \text{ ja } \beta_1 = \min\{\beta_j \colon 1 \leq j \leq m\}.$$

Määritellään jokaista lukua $0 < r < \alpha_1$ kohti joukko

$$\mathcal{A}_r := \big\{I = i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, l\}^n \colon n \in \mathbb{N}, \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} \leq r < \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{n-1}}\big\}.$$

Osoitetaan seuraavaksi muutama joukon $\mathcal{A}_r$ ominaisuus.

Lemma 3.1. *Kaikilla $0 < r < \alpha_1$ on voimassa*

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} \phi_I(E) = E.$$

Todistus. Attraktorin määritelmän nojalla on selvää, että $\bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} \phi_I(E) \subseteq E$. Jos $x \in E = \bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(E)$, niin $x \in \phi_i(E)$ jollakin $1 \leq i \leq l$. Merkitään kyseistä indeksiä symbolilla i_1. Edelleen $\phi_{i_1}(E) = \phi_{i_1}\big(\bigcup_{j=1}^{l} \phi_j(E)\big) = \bigcup_{j=1}^{l} \phi_{i_1}(\phi_j(E))$, eli $x \in \phi_{i_1} \circ \phi_j(E)$ jollakin $1 \leq j \leq l$. Asetetaan $j =: i_2$. Jatkamalla tätä päättelyä kunnes ehto $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} \leq r < \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{n-1}}$ on voimassa saamme, että $x \in \bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} \phi_I(E)$. $\square$

Lemma 3.2. *On olemassa sellainen luku $N_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $0 < r < \alpha_1$ ja kaikilla $I \in \mathcal{A}_r$ on voimassa*

$$\#\{J \in \mathcal{A}_r : \mathrm{dist}(\phi_I(E), \phi_J(E)) \leq r\} \leq N_0,$$

missä merkintä $\#A$ tarkoittaa joukon A kardinaalilukua eli joukon alkioiden lukumäärää.

Todistus. Iteraatiofunktiosysteemi Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon, joten on olemassa sellainen epätyhjä rajoitettu avoin joukko $V \subseteq \mathbb{R}^d$, että joukot $\phi_i(V)$, missä $1 \leq i \leq l$, ovat erillisiä joukon V osajoukkoja. Lisäksi kaikilla $0 < r < \alpha_1$ joukot $\phi_I(V)$ ovat erillisiä, kun $I \in \mathcal{A}_r$. Koska V on rajoitettu avoin joukko, niin on olemassa sellaiset suljetut pallot B_1 ja B_2, että $B_1 \subset V \subset B_2$. Olkoot R_1 ja R_2 kyseisten pallojen säteet. Rajoitettuna ja suljettuna joukkona $\overline{V}$ on kompakti. Nyt attraktorille E on voimassa $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$ (katso [4], Lause 9.1).

Kiinnitetään seuraavaksi $0 < r < \alpha_1$ ja $I := i_1 \dots i_n \in \mathcal{A}_r$. Olkoon $\alpha_{\max} := \max\{\alpha_i : 1 \leq i \leq l\}$. Tällöin on olemassa sellainen luku $m \in \mathbb{N}$, että $\alpha_{\max}^m \leq r$. Näin ollen enintään m-pituiset indeksijonot voivat kuulua joukkoon $\mathcal{A}_r$. Huomaa, että tällaisia jonoja on vain äärellinen määrä, joten $\#\mathcal{A}_r < \infty$. Olkoot $J_1, \dots, J_k$ joukon $\mathcal{A}_r$ sellaiset alkiot, joille on voimassa, että $\mathrm{dist}(\phi_I(E), \phi_{J_t}(E)) \leq r$, kun $t = 1, \dots, k$. Koska $E \subseteq \overline{V}$, niin $\mathrm{dist}(\phi_I(\overline{V}), \phi_{J_t}(\overline{V})) \leq r$. Nyt

$$\mathrm{diam}(\phi_{J_t}(V)) = \alpha_{J_t} \mathrm{diam}(V) \leq 2rR_2$$

kaikilla $1 \leq t \leq k$. Vastaavasti

$$\mathrm{diam}(\phi_I(V)) = \alpha_I \mathrm{diam}(V) \leq 2rR_2.$$

Täten kaikki joukot $\phi_{J_t}(V)$ sisältyvät $4rR_2 + r$ säteiseen palloon, jonka keskipiste on joukossa $\phi_I(\overline{V})$. Toisaalta

$$\mathrm{diam}(\phi_{J_t}(V)) = \alpha_{J_t}\mathrm{diam}(V) \geq r\alpha_1\mathrm{diam}(B_1) = 2r\alpha_1 R_1,$$

joten jokainen joukko $\phi_{J_t}(V)$ sisältää pallon jonka säde on suurempi tai yhtä suuri kuin $r\alpha_1 R_1$. Olkoon c_d d-ulotteisen 1-säteisen pallon tilavuus. Näin ollen saamme yhtälön

$$kc_d(\alpha_1 r R_1)^d \leq c_d(r + 4rR_2)^d, \text{ eli } k \leq \frac{(1+4R_2)^d}{\alpha_1^d R_1^d}.$$

Lemman väite saadaan todistetuksi, kun valitaan $N_0 \in \mathbb{N}$ suuremmaksi kuin yhtälön oikea puoli. $\square$

Osoitamme vielä muutaman lemman, joita tarvitaan apulauseen 3.5 todistuksessa.

Lemma 3.3. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $s_n > 0$ se yksikäsitteinen reaaliluku, joka toteuttaa yhtälön*

$$\sum_{J \in \{1,\ldots,m\}^n \,:\, J \neq 1^n} \beta_J^{s_n} = 1.$$

Oletetaan, että $\dim_H F = s$, kun $\sum_{j=1}^m \beta_j^s = 1$. Tällöin $\sum_{J \in \Gamma} \beta_J^{s_n} \leq 1$ kaikilla joukon $\{1,\ldots,m\}^n$ aidoilla osajoukoilla Γ. Lisäksi $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Todistus. Oletuksen nojalla

$$1 = \sum_{J \in \{1,\ldots,m\}^n \,:\, J \neq 1^n} \beta_J^{s_n} = \sum_{J \in \{1,\ldots,m\}^n} \beta_J^{s_n} - \beta_{1^n}^{s_n} = \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_n}\right)^n - \beta_1^{ns_n}.$$

Nyt $\beta_1^n \leq \beta_I$ kaikilla sanoilla $I \in \{1,\ldots,m\}^n$. Näin ollen $\sum_{J\in\Gamma} \beta_J^{s_n} \leq 1$ kaikilla joukon $\{1,\ldots,m\}^n$ aidoilla osajoukoilla Γ.

Aiemman nojalla

$$\sum_{J \in \{1,\ldots,m\}^n \,:\, J \neq 1^n} \beta_J^{s} = \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s}\right)^n - \beta_1^{ns} = 1 - \beta_1^{ns} < 1.$$

Täten $s_n < s$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja erityisesti $\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_n} > 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen

$$\begin{aligned}\sum_{J\in\{1,\ldots,m\}^n\colon J\neq 1^n} \beta_J^{s_{n+1}} &= \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_{n+1}}\right)^n - \beta_1^{ns_{n+1}} \\ &< \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_{n+1}}\right)^{n+1} - \beta_1^{(n+1)s_{n+1}}\beta_1^{-s_{n+1}} \\ &< \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_{n+1}}\right)^{n+1} - \beta_1^{(n+1)s_{n+1}} \\ &= \sum_{J\in\{1,\ldots,m\}^{n+1}\colon J\neq 1^{n+1}} \beta_J^{s_{n+1}} = 1,\end{aligned}$$

joten $s_n < s_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$1 = \sum_{j=1}^m \beta_j^s < \sum_{j=1}^m \beta_j^{s_n} < \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{s_n}\right)^n = 1 + \beta_1^{ns_n} < 1 + \beta_1^{ns_1} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Tämä on mahdollista vain jos $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

□

Lemma 3.4. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että*

$$\dim_H(E \cap F) > s_n,$$

missä s_n on määritelty kuten lemmassa 3.3. Tällöin jokaista lukua $j \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellainen sana W_j, että $|W_j| \geq j$ ja

$$\psi_{W_jJ}(F) \cap E \neq \emptyset \text{ kaikilla } J \in \{1,\ldots,m\}^n. \tag{3.1}$$

Todistus. Todistetaan lemma vastaväitettä käyttäen. Oletetaan siis, että on olemassa sellainen $p_0 \in \mathbb{N}$, että jokaista sanaa W, jolle $|W| \geq p_0$, kohti on olemassa ainakin yksi sana $J \in \{1,\ldots,m\}^n$, jolle $\psi_{WJ}(F) \cap E = \emptyset$. Olkoon $q \in \mathbb{N}$ ja merkitään

$$\begin{aligned}\Gamma_q := \{UJ_1\ldots J_q \in \{1,\ldots,m\}^{p_0+qn}\colon |U| = p_0,\ |J_i| = n \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq q \text{ ja} \\ \psi_{UJ_1\ldots J_q}(F) \cap E \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Asetetaan

$$t(q) := \sum_{UJ_1\ldots J_q\in\Gamma_q} (\operatorname{diam}(\psi_{UJ_1\ldots J_q}(F)))^{s_n} = \sum_{UJ_1\ldots J_q\in\Gamma_q} (\operatorname{diam}(F))^{s_n}(\beta_{UJ_1\ldots J_q})^{s_n}.$$

Jos $UJ_1 \dots J_q \in \Gamma_q$, niin $UJ_1 \dots J_{q-1} \in \Gamma_{q-1}$. Toisaalta jos $UJ_1 \dots J_{q-1} \notin \Gamma_{q-1}$, niin $UJ_1 \dots J_{q-1}J \notin \Gamma_q$ millään sanalla $J \in \{1, \dots, m\}^n$. Näin ollen

$$\sum_{UJ_1 \dots J_q \in \Gamma_q} \beta_{UJ_1 \dots J_q}^{s_n} = \sum_{UJ_1 \dots J_{q-1} \in \Gamma_{q-1}} \beta_{UJ_1 \dots J_{q-1}}^{s_n} \sum_{J\colon\, |J|=n,\ UJ_1 \dots J_{q-1}J \in \Gamma_q} \beta_J^{s_n}.$$

Vastaoletuksen nojalla jokaista sanaa $UJ_1 \dots J_{q-1} \in \Gamma_{q-1}$ kohti on olemassa sellainen sana J, että $|J| = n$ ja $UJ_1 \dots J_{q-1}J \notin \Gamma_q$. Täten

$$\sum_{J\colon\, |J|=n,\ UJ_1 \dots J_{q-1}J \in \Gamma_q} \beta_J^{s_n} \leq 1$$

lemman 3.3 nojalla. Nyt

$$\begin{aligned} t(q) &= \Big(\sum_{J\colon\, |J|=n,\ UJ_1 \dots J_{q-1}J \in \Gamma_q} \beta_J^{s_n} \Big) \Big(\sum_{UJ_1 \dots J_{q-1} \in \Gamma_{q-1}} (\mathrm{diam}(F))^{s_n} (\beta_{UJ_1 \dots J_{q-1}})^{s_n} \Big) \\ &\leq t(q-1) \end{aligned}$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Näin ollen $t(q) \leq t(q-1) \leq \dots \leq t(1)$. Erilaisia sanoja $UJ_1 \in \Gamma_1$ voi olla enintään m^{p_0+n} kappaletta ja $\beta_{UJ_1} \leq 1$ kaikilla $UJ_1 \in \Gamma_1$, joten

$$\begin{aligned} t(1) &= (\mathrm{diam}(F))^{s_n} \sum_{UJ_1 \in \Gamma_1} \beta_{UJ_1}^{s_n} \leq (\mathrm{diam}(F))^{s_n} \sum_{UJ_1 \in \Gamma_1} 1 \\ &\leq m^{p_0+n} (\mathrm{diam}(F))^{s_n} < \infty. \end{aligned}$$

Attraktorin määritelmän nojalla joukko $\{\psi_I(F)\colon I \in \Gamma_q\}$ on joukon $F \cap E$ peite kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa, että $\mathcal{H}^{s_n}(F \cap E) < \infty$ ja näin ollen $\dim_H(F \cap E) \leq s_n$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen lemman väite on voimassa. □

Apulause 3.5. *Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $f \in \mathit{Diff}_L^1(\mathbb{R}^d)$ jollain $L > 1$. Oletetaan, että $\dim_H(E \cap f(F)) > s_n$, missä s_n on määritelty kuten lemmassa 3.3. Olkoon N_0 lemman 3.2 avulla saatava luonnollinen luku. Tällöin on olemassa sellaiset affiinit kuvaukset $g_1, g_2, \dots, g_k$, että $k \leq N_0$, kuvausten lineaariosien ehtolukujen yläraja on L ja*

$$\psi_J(F) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} g_i(E) \Big) \neq \emptyset \text{ kaikilla } J \in \{1, \dots, m\}^n. \tag{3.2}$$

Todistus. Koska funktio f on C^1-diffeomorfismi avaruudessa $\mathbb{R}^d$, niin myös funktio f^{-1} on C^1-diffeomorfismi avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $h := f^{-1}$. Kompaktissa joukossa määritellyt diffeomorfismit ovat bi-Lipschitz-kuvauksia, joten ne eivät muuta joukon Hausdorffin dimensiota (katso luvut 1.1 ja 1.2). Täten

$$\dim_H(h(E) \cap F) = \dim_H(f(h(E) \cap F)) = \dim_H(E \cap f(F)) > s_n.$$

Koska f on jatkuva, niin jokaista lukua $\delta_1 > 0$ kohti on olemassa sellainen δ, että $|f(v) - f(w)| < \delta_1$ kaikilla $v, w \in \mathbb{R}^d$ joille $|v - w| < \delta$. Toisaalta funktion f bijektiivisyyden nojalla voidaan merkitä $v = h(x)$ ja $w = h(y)$, missä $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tällöin $|f(h(x)) - f(h(y))| = |x - y| < \delta_1$, kun $|v - w| = |h(x) - h(y)| < \delta$. Nyt koska h on C^1-diffeomorfismi, niin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x, y \in E$, joille $|h(x) - h(y)| \leq \delta$, on voimassa

$$|h(x) - h(y) - D_x h(x - y)| \leq \epsilon |x - y|.$$

Olkoon $\epsilon \leq \delta_{\min}(D_x h)/2$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\geq |D_x h(x - y)| - \epsilon |x - y| \\ &\geq \delta_{\min}(D_x h)|x - y| - \delta_{\min}(D_x h)|x - y|/2 \\ &= \delta_{\min}(D_x h)|x - y|/2, \end{aligned}$$

ja näin ollen arvio

$$|h(x) - h(y)| \geq \frac{\delta_{\min}(D_x h)|x - y|}{2} \tag{3.3}$$

on voimassa kaikilla $x, y \in E$, joille $|h(x) - h(y)| \leq \delta$.

Merkitään $\rho = \min_{x \in E}\{\delta_{\min}(D_x h)\}$. Huomaa että minimi on olemassa, koska C^1-diffeomorfismilla h on jatkuva derivaatta ja jatkuva funktio saavuttaa ääriarvonsa kompaktissa joukossa. Valitaan sellainen $p_1 \in \mathbb{N}$, että

$$2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F)\big(\max_{1 \leq i \leq m} \beta_i\big)^{p_1} < \min\Big\{\frac{2\delta}{\rho}, \alpha_1\Big\}.$$

Merkitään $r_j := 2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F)\beta_{W_j}$ kaikilla $j \geq p_1$, missä W_j saadaan lemmasta 3.4. Nyt $0 < r_j < \min\big\{\frac{2\delta}{\rho}, \alpha_1\big\}$, koska $\beta_{W_j} \leq \big(\max_{1 \leq i \leq m} \beta_i\big)^{p_1}$. Erityisesti $r_j < 2\delta/\rho$, eli $\rho r_j/2 < \delta$.

Huomaa että $\delta_{\min}(D_x h) \neq 0$ kaikilla $x \in E$, koska oletuksen nojalla $\delta_{\max}(D_x h) \leq L\delta_{\min}(D_x h)$ kaikilla $x \in E$. Jos nyt $\delta_{\min}(D_x h) = 0$, niin myös $\delta_{\max}(D_x h) = 0$, eli h on vakiokuvaus, mikä on ristiriita, koska h on C^1-diffeomorfismina bijektio joukolta $\mathbb{R}^d$ joukolle $\mathbb{R}^d$.

Oletetaan, että $x, y \in E$ ja $|x - y| > r_j$. Jos $|h(x) - h(y)| \leq \rho r_j/2$, niin arvion (3.3) nojalla

$$|x - y| \leq 2|h(x) - h(y)|/\delta_{\min}(D_x h) \leq 2(\rho r_j/2)/\rho = r_j,$$

mikä on ristiriita. Täten

$$|h(x) - h(y)| > \rho r_j/2 \text{ aina kun } x, y \in E \text{ ja } |x - y| > r_j.$$

Näin ollen saadaan arvio

$$|\psi_{W_j}^{-1} \circ h(x) - \psi_{W_j}^{-1} \circ h(y)| = \beta_{W_j}^{-1}|h(x) - h(y)| > \beta_{W_j}^{-1}\rho r_j/2 = \operatorname{diam}(F).$$

Edelleen, jos $I, J \in \mathcal{A}_{r_j}$ ja $\operatorname{dist}(\phi_I(E), \phi_J(E)) > r_j$, niin

$$\operatorname{dist}(\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E), \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_J(E)) > \operatorname{diam}(F). \tag{3.4}$$

Oletetaan että $\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E) \cap F \neq \emptyset$. Nyt joukko $\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_J(E)$ voi leikata arvion (3.4) nojalla joukkoa F ainoastaan, kun

$$\operatorname{dist}(\phi_I(E), \phi_J(E)) \leq r_j.$$

Lemman 3.2 nojalla

$$\#\{I \in \mathcal{A}_r : \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E) \cap F \neq \emptyset\} \leq N_0.$$

Olkoon $I_{j,1}, \ldots, I_{j,k_j}$ kaikki joukon $\mathcal{A}_{r_j}$ sanat, joille on voimassa

$$\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j,t}}(E) \cap F \neq \emptyset, \tag{3.5}$$

kun $1 \leq t \leq k_j$. Selvästi $k_j \leq N_0$. Lemman 3.1 nojalla

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} h \circ \phi_I(E) = h\biggl(\bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} \phi_I(E)\biggr) = h(E).$$

Näin ollen

$$\dim_H \biggl(\bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} h \circ \phi_I(E) \cap F\biggr) = \dim_H(h(E) \cap F) > s_n.$$

Lukujen W_j valinnan nojalla (katso lemma 3.4)

$$\psi_{W_j J}(F) \cap \bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} h \circ \phi_I(E) \neq \emptyset \text{ kaikilla } j \geq p_1,\ J \in \{1, \ldots, m\}^n.$$

Erityisesti

$$\psi_J(F) \cap \bigcup_{I \in \mathcal{A}_r} \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E) \neq \emptyset \text{ kaikilla } j \geq p_1,\ J \in \{1, \ldots, m\}^n.$$

Nyt arvion (3.5) nojalla

$$\psi_J(F) \cap \Big(\bigcup_{t=1}^{k_j} \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j,t}}(E)\Big) \neq \emptyset \text{ kaikilla } j \geq p_1,\ J \in \{1, \dots, m\}^n. \tag{3.6}$$

Koska $I_{j,t} \in \mathcal{A}_{r_j}$, niin $r_j \geq \alpha_{I_{j,t}}$ kaikilla $1 \leq t \leq k_j$. Korvaamalla sanan $I_{j,t}$ viimeinen termi arvolla 1 nähdään, että $\alpha_1 r_j < \alpha_{I_{j,t}}$ kaikilla $1 \leq t \leq k_j$. Näin ollen $r_j\alpha_1 < \alpha_{I_{j,t}} \leq r_j$ kaikilla $1 \leq t \leq k_j$. Nyt sijoittamalla $r_j = 2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F)\beta_{W_j}$ saadaan, että

$$2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F)\alpha_1 < \beta_{W_j}^{-1}\alpha_{I_{j,t}} \leq 2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F). \tag{3.7}$$

Olkoot $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ similariteetti, jonka suhdeluku on a ja $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ similariteetti, jonka suhdeluku on b. Huomataan, että $D_x(\phi)$ on kuvauksen ϕ lineaariosa, joten

$$\delta_{\max}\big(D_x(\phi)\big) = \max\{|D_x\phi(v)| \colon v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\} = a|v| = a.$$

Vastaava päättely voidaan tehdä myös pienimmän singulaariarvon suhteen, joten $\delta_{\max}\big(D_x(\phi)\big) = \delta_{\min}\big(D_x(\phi)\big)$. Lisäksi $D_x(\phi)(\mathbb{S}^{d-1}) = \{av \colon v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\} =: a\mathbb{S}^{d-1}$. Jos $v, v' \in \mathbb{S}^{d-1}$ ja $av' := D_x(\phi)v$, niin

$$\begin{aligned}|D_{h\circ\phi(x)}(\psi)D_{\phi(x)}(h)D_x(\phi)v| &= a|D_{h\circ\phi(x)}(\psi)D_{\phi(x)}(h)v'| \\ &= ab|D_{\phi(x)}(h)v'| \\ &= |D_{h\circ\phi(x)}(\psi)v'||D_{\phi(x)}(h)v'||D_x(\phi)v'|.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi(x)}(\psi)D_{\phi(x)}(h)D_x(\phi)\big) = \delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi(x)}(\psi)\big)\delta_{\max}\big(D_{\phi(x)}(h)\big)\delta_{\max}\big(D_x(\phi)\big).$$

Yhtälö on voimassa myös pienimmän singulaariarvon suhteen.

Olkoot $j \geq p_1$ ja $1 \leq t \leq k_j$. Määritellään kuvaus $h_{j,t} := \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j,t}}$. Olkoon $x_0 \in E$. Nyt ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\delta_{\max}(D_{x_0}h_{j,t}) &= \delta_{\max}\big(D_{x_0}(\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j,t}})\big) \\ &= \delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big) \\ &= \delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})\big)\delta_{\max}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\delta_{\max}\big(D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big) \\ &\leq \delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})\big)L\delta_{\min}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\delta_{\max}\big(D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big) \\ &= L\delta_{\min}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big) \\ &= L\delta_{\min}\big(D_{x_0}(\psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j,t}})\big) \\ &= L\delta_{\min}(D_{x_0}h_{j,t}).\end{aligned}$$

Täten

$$\delta_{\max}(D_{x_0}h_{j,t}) \leq L\delta_{\min}(D_{x_0}h_{j,t}).$$

Edellisen perustelun ja arvion (3.7) nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}\delta_{\min}(D_{x_0}h_{j,t}) &= \delta_{\min}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})\big)\delta_{\min}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\delta_{\min}\big(D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big)\\ &= \beta_{W_j}^{-1}\alpha_{I_{j,t}}\delta_{\min}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\\ &\geq \beta_{W_j}^{-1}\alpha_{I_{j,t}}\rho \geq 2\mathrm{diam}(F)\alpha_1 =: c_1.\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että

$$\begin{aligned}\delta_{\max}(D_{x_0}h_{j,t}) &= \delta_{\max}\big(D_{h\circ\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(\psi_{W_j}^{-1})\big)\delta_{\max}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\delta_{\max}\big(D_{x_0}(\phi_{I_{j,t}})\big)\\ &= \beta_{W_j}^{-1}\alpha_{I_{j,t}}\delta_{\max}\big(D_{\phi_{I_{j,t}}(x_0)}(h)\big)\\ &\leq \beta_{W_j}^{-1}\alpha_{I_{j,t}}\varrho \leq 2\mathrm{diam}(F)\rho^{-1}\varrho =: c_2,\end{aligned}$$

missä $\varrho := \max_{x\in E}\{\delta_{\max}(D_x h)\}$. Näin ollen

$$c_1 \leq \delta_{\min}(D_{x_0}h_{j,t}) \leq \delta_{\max}(D_{x_0}h_{j,t}) \leq c_2. \tag{3.8}$$

Koska h on C^1-diffeomorfismi avaruudessa $\mathbb{R}^d$ ja joukko E on kompakti, niin on olemassa sellainen vähenevä positiivisten lukujen jono $(d_j)_{j=1}^{\infty}$, että $d_j \to 0$ kun $j \to \infty$ ja

$$|h(x) - h(y) - D_x h(x-y)| \leq d_j|x-y| \tag{3.9}$$

kaikilla $x, y \in E$, joille pätee $|x-y| \leq r_j\mathrm{diam}(E)$ (katso [14], luku 10.4.2). Täten kaikilla $j \geq p_1$, $1 \leq t \leq k_j$ ja $x, y \in E$ pätee kaavan (3.9) nojalla, että

$$\begin{aligned}&|h\circ\phi_{I_{j,t}}(x) - h\circ\phi_{I_{j,t}}(y) - D_x(h\circ\phi_{I_{j,t}})(x-y)|\\ &= |h\circ\phi_{I_{j,t}}(x) - h\circ\phi_{I_{j,t}}(y) - D_{\phi_{I_{j,t}}(x)}(h)D_x(\phi_{I_{j,t}})(x-y)|\\ &= |h\circ\phi_{I_{j,t}}(x) - h\circ\phi_{I_{j,t}}(y) - D_{\phi_{I_{j,t}}(x)}(h)(D_x(\phi_{I_{j,t}})(x) - D_x(\phi_{I_{j,t}})(y))|\\ &= |h\circ\phi_{I_{j,t}}(x) - h\circ\phi_{I_{j,t}}(y) - D_{\phi_{I_{j,t}}(x)}(h)(\phi_{I_{j,t}}(x) - \phi_{I_{j,t}}(y))|\\ &\leq d_j|\phi_{I_{j,t}}(x) - \phi_{I_{j,t}}(y))| = d_j\alpha_{I_{j,t}}|x-y| \leq d_j r_j\mathrm{diam}(E).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Kiinnitetään $x_0 \in E$ ja määritellään kuvaus

$$A_{j,t}(x) := h_{j,t}(x_0) + (D_{x_0}h_{j,t})(x-x_0).$$

Nyt kaikilla $j \geq p_1$ on arvion (3.10) nojalla voimassa

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in E, 1 \leq t \leq k_j} |h_{j,t}(x) - A_{j,t}(x)| \\
&= \beta_{W_j}^{-1} \sup_{x \in E, 1 \leq t \leq k_j} |h \circ \phi_{I_{j,t}}(x) - h \circ \phi_{I_{j,t}}(x_0) - (D_{x_0}(h \circ \phi_{I_{j,t}}))(x - x_0)| \\
&\leq d_j \beta_{W_j}^{-1} r_j \mathrm{diam}(E) = d_j 2\rho^{-1} \mathrm{diam}(F) \mathrm{diam}(E) = d_j C, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

missä $C := 2\rho^{-1}\mathrm{diam}(F)\mathrm{diam}(E)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaukset $h_{j,t} : E \to \mathbb{R}^d$ ovat tasaisesti rajoitettuja, eli on olemassa sellainen $M > 0$, että $|h_{j,t}(x)| < M$ kaikilla $x \in E, j \geq p_1$ ja $1 \leq t \leq k_j$. Nyt $h_{j,t}(E) \cap F \neq \emptyset$ kaikilla $j \geq p_0$ ja $1 \leq t \leq k_j$, joten

$$\mathrm{dist}(h_{j,t}(E), h_{i,s}(E)) \leq \mathrm{diam}(F), \qquad (3.12)$$

kun $i \geq p_0$ ja $1 \leq s \leq k_i$. Koska $(d_j)_{j=1}^{\infty}$ on vähenevä jono, niin $d_{p_1} \geq d_j$ kaikilla $p_1 \leq j \leq \infty$. Nyt arvioiden (3.8) ja (3.11) nojalla

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in E, 1 \leq t \leq k_j} |h_{j,t}(x) - h_{j,t}(x_0)| \\
&\leq \sup_{x \in E, 1 \leq t \leq k_j} |h_{j,t}(x) - A_{j,t}(x)| + \sup_{x \in E, 1 \leq t \leq k_j} |(D_{x_0} h_{j,t})(x - x_0)| \\
&\leq d_j C + \sup_{1 \leq t \leq k_j} \delta_{\max}(D_{x_0} h_{j,t}) \mathrm{diam}(E) \\
&\leq d_{p_1} C + c_2 \mathrm{diam}(E) =: C'.
\end{aligned}$$

Täten $\mathrm{diam}(h_{j,t}(E)) \leq 2C'$ kaikilla $j \geq p_1$ ja $1 \leq t \leq k_j$. Olkoon $y \in F$. Arvion (3.12) nojalla on olemassa sellainen suljettu pallo $B(y, 2C' + \mathrm{diam}(F))$, että

$$h_{j,t}(E) \subset B(y, 2C' + \mathrm{diam}(F))$$

kaikilla $j \geq p_1$ ja $1 \leq t \leq k_j$. Näin ollen kuvaukset $h_{j,t}(x_0)$ ovat tasaisesti rajoitettuja. Tämän ja arvion (3.11) nojalla nähdään, että myös kuvaukset $A_{j,t}$ ovat tasaisesti rajoitettuja. Samaistamalla kuvaukset $A_{j,t}$ avaruuden $\mathbb{R}^{d^2+d}$ vektorien kanssa ja käyttämällä Bolzano-Weierstrassin lausetta saamme, että jokaista indeksijonoa $(j_l, t_l)_{l=1}^{\infty}$, missä $1 \leq t_l \leq k_{j_l}$, kohti löydetään sellainen suppeneva osajono $(j_{l'}, t_{l'})_{l'=1}^{\infty}$, missä $1 \leq t_{l'} \leq k_{j_{l'}}$, että kuvaus $A_{(j_{l'}, t_{l'})}$ suppenee kohti jotain avaruuden $\mathbb{R}^d$ affiinia kuvausta g. Jatkossa merkitsemme yksinkertaisuuden vuoksi $(j_{l'}, t_{l'})_{l'=1}^{\infty} =: (j_l, t_l)_{l=1}^{\infty}$. Koska singulaariarvot riippuvat jatkuvasti affiineista kuvauksista, niin kuvauksen g lineaariosan ehtoluku on rajoitettu luvulla L. Arvion (3.11) nojalla näemme, että

$$\sup_x |g(x) - h_{j_l,t_l}(x)| \leq \sup_x |g(x) - A_{j_l,t_l}(x)| + \sup_x |A_{j_l,t_l}(x) - h_{j_l,t_l}(x)| \to 0,$$

kun $j \to \infty$ ja supremum otetaan alkioiden $x \in E$ yli, kun $1 \le t_l \le k_{j_l}$. Näin ollen $h_{j_l,t_l}(E)$ suppenee kohti joukkoa $g(E)$ Hausdorffin metriikan suhteen, kun $l \to \infty$.

Koska $\#\{I \in \mathcal{A}_{r_j} : \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E) \cap F \neq \emptyset\} \le N_0$, niin on olemassa sellainen luku $k \in \mathbb{N}$, että $\#\{I \in \mathcal{A}_{r_j} : \psi_{W_j}^{-1} \circ h \circ \phi_I(E) \cap F \neq \emptyset\} = k$ äärettömän monella indeksin j arvolla. Valitsemalla kyseiset indeksin arvot, saamme konstruoitua jonon $(j_l)_{l=1}^{\infty}$, jolle $k_{j_l} \equiv$k, jollain $k \le N_0$. Aikaisemman nojalla jokaista lukua $1 \le t \le k$ kohti on olemassa sellainen avaruuden $\mathbb{R}^d$ affiini kuvaus g_t, että $A_{j_l,t} \to g_t$, kun $l \to \infty$. Erityisesti

$$\bigcup_{t=1}^{k_l} \psi_{W_{j_l}}^{-1} \circ h \circ \phi_{I_{j_l,t}}(E) = \bigcup_{t=1}^{k} h_{j_l,t}(E) \to \bigcup_{t=1}^{k} g_t(E) \tag{3.13}$$

Hausdorffin metriikan suhteen, kun $l \to \infty$. Koska $\psi_J(F) \cap \left(\bigcup_{t=1}^{k} g_t(E)\right)$ on suljettu, niin arvioiden (3.6) ja (3.13) nojalla

$$\psi_J(F) \cap \left(\bigcup_{t=1}^{k} g_t(E)\right) \neq \emptyset \text{ kaikilla } J \in \{1,\dots,m\}^n$$

todistaen apulauseen. □

Vihdoinkin voimme todistaa lauseen 2.1.

Lauseen 2.1 todistus. Olkoon $L > 1$. Osoitetaan aluksi, että jos

$$\sup_{f \in \mathrm{Diff}_L^1(\mathbb{R}^d)} \dim_H(E \cap f(F)) = \dim_H F, \tag{3.14}$$

niin tällöin F voidaan affiinisti upottaa joukkoon E. Oletetaan siis, että edellä mainittu yhtälö on voimassa. Nyt apulauseen 3.5 nojalla jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellaiset affiinit kuvaukset $\{g_i^{(n)}\}_{i=1}^{k_n}$, että $k_n \le N_0$, kuvausten $g_i^{(n)}$ lineaariosien ehtoluvut ovat pienempiä kuin L, $g_i^{(n)}(E) \cap F \neq \emptyset$ kaikilla $1 \le i \le k_n$ ja

$$\psi_J(F) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k_n} g_i^{(n)}(E)\right) \neq \emptyset \text{ kaikilla } J \in \{1,\dots,m\}^n. \tag{3.15}$$

Apulauseen 3.5 todistuksessa näimme, että kuvaukset $A_{j,t}$ ovat tasaisesti rajoitettuja, joten myös kuvaukset $g_i^{(n)}$ ovat tasaisesti rajoitettuja riippumatta luvuista i ja n. Koska $k_n \le N_0$, niin on olemassa sellainen osajono $(n_p)_{p=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, että $k_{n_p} \equiv k$ kaikilla $p \in \mathbb{N}$. Nyt affiinit kuvaukset

$g_i^{(n_p)}, i = 1, \ldots, k$, voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^{d^2+d}$ vektorien kanssa. Koska kuvaukset $g_i^{(n_p)}$ ovat tasaisesti rajoitettuja, niin käyttämällä Bolzano-Weierstrassin lausetta löydetään suppeneva osajono, jota merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $\left(g_i^{(n_p)}\right)_{p=1}^{\infty}$. Nyt siis $g_i^{(n_p)}$ suppenee kohti jotain affiinia kuvausta g_i kaikilla $i = 1, \ldots, k$, kun $p \to \infty$. Erityisesti

$$\bigcup_{i=1}^{k_{n_p}} g_i^{(n_p)}(E) \to \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E)$$

Hausdorffin metriikan suhteen. Merkitään $\beta := \max\{\beta_j \colon 1 \leq j \leq m\}$. Olkoon $x \in F$ mielivaltainen. Nyt arvion 3.15 nojalla

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{i=1}^{k_{n_p}} g_i^{(n_p)}(E)\right) \leq \operatorname{diam}(\psi_J F) \leq \beta^{n_p}$$

jollain sanalla $J \in \{1, \ldots, m\}^{n_p}$. Näin ollen

$$F \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k_{n_p}} g_i^{(n_p)}(E)\right)_{\beta^{n_p}},$$

missä $(A)_{\beta^{n_p}}$ tarkoittaa joukon A β^{n_p}-ympäristöä. Nyt ottamalla raja-arvo $p \to \infty$ saadaan, että

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E).$$

Täydellisen avaruuden $\mathbb{R}^d$ suljettuna osajoukkona F on täydellinen metrinen avaruus. Koska $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E)$, niin Bairen lauseen nojalla on olemassa sellainen $i = 1, \ldots, k$, että joukon $g_i(E)$ sisus on epätyhjä avaruudessa F, ja täten on olemassa sellainen avoin pallo B, että $\emptyset \neq B \cap F \subset g_i(E)$. On olemassa sellainen sana J, että $F \cap B \supset \psi_J(F)$, joten $F \subset \psi_J^{-1} \circ g_i(E)$, eli toisin sanoin F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E. Näin ollen

$$\sup_{f \in \operatorname{Diff}_L^1(\mathbb{R}^d)} \dim_H(E \cap f(F)) < \dim_H F$$

aina, kun joukkoa F ei voida affiinisti upottaa joukkoon E. Toisaalta kaikkien avaruuden $\mathbb{R}^d$ C^1-diffeomorfismien käänteisfunktioiden derivaatat ovat jatkuvia, joten ne saavuttavat maksimi- ja minimiarvonsa kompaktissa joukossa E. Täten jokaista avaruuden $\mathbb{R}^d$ C^1-diffeomorfismia f kohti on olemassa sellainen $L > 1$, että $f \in \mathrm{Diff}^1_L(\mathbb{R}^d)$. Täten jos joukkoa F ei voida affiinisti upottaa joukkoon E, niin

$$\dim_H(E \cap f(F)) < \dim_H F$$

millä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^d$ C^1-diffeomorfismilla.

Koska äärellisulotteisessa avaruudessa affiinit kuvaukset ovat myös C^1-diffeomorfismeja, niin joukko F voidaan C^1-upottaa joukkoon E, jos se voidaan upottaa joukkoon E affiinisti. Edelleen jos f on C^1-diffeomorfismi ja $f(F) \subseteq E$, niin tällöin

$$\dim_H(E \cap f(F)) = \dim_H(f(F)) = \dim_H F,$$

koska kompaktissa joukossa C^1-diffeomorfismit ovat bi-Lipschitz-kuvauksia, eivätkä näin ollen muuta joukon Hausdorffin dimensiota. Nyt kohdan (3.14) nojalla joukko F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E. □

4 Suhdelukujen välinen aritmeettinen yhteys

Tässä luvussa todistamme lauseet 2.2 ja 2.3(1). Osoitamme aluksi kaksi Hausdorffin dimensioihin liittyvä arviota.

Lemma 4.1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ kompakti joukko. Tällöin*

$$\dim_H(E \times E) \geq \dim_H(E - E).$$

Todistus. Osoitamme, että joukko $E - E$ voidaan sopivalla vakiolla skaalata joukon $E \times E$ ortogonaaliseksi projektioksi. Tällöin väite on voimassa, koska Lipschitz-kuvauksena projektio voi ainoastaan pienentää joukon Hausdorffin dimensiota (katso luku 1.2).

Tarkastellaan aluksi tapausta, kun $E \subset \mathbb{R}$. Projisoimme pisteen $(x, y) \in E \times E$ vektorin $(1, -1)$ virittämälle suoralle, eli

$$(1, -1)/\sqrt{2} \cdot (x, y) = (x - y)/\sqrt{2},$$

missä operaatio $\cdot$ tarkoittaa tavallista pistetuloa. Näin ollen voimme projisoida joukon $E \times E$ joukoksi $(E - E)/\sqrt{2}$.

Oletetaan seuraavaksi, että $E \subset \mathbb{R}^d$. Merkitään avaruuden $\mathbb{R}^d$ luonnollisia kantavektoreita symboleilla e_i, missä $1 \leq i \leq d$. Määritellään myös kaikilla luvuilla $1 \leq i \leq d$ vektorit $\hat{e_i} := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cdots, 1, 0, \cdots, -1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{2d}$, missä luku 1 sijaitsee i:nnessä koordinaatissa ja luku -1 sijaitsee $d+i$:nnessä koordinaatissa. Nyt voimme projisoida joukon $E \times E$ pisteet koordinaateittain vektorien $\hat{e}_i$ suuntaisille suorille. Näin ollen $(x, y) \cdot \hat{e}_i = (x_i - y_i)/\sqrt{2}$, missä x_i ja y_i tarkoittavat vektorien x ja y i:nnensiä koordinaatteja. Nyt

$$\sum_{i=1}^{d} \big((x, y) \cdot \hat{e}_i\big) e_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1, \cdots, x_d - y_d).$$

Täten $(E - E)/\sqrt{2}$ on joukon $E \times E$ projektio ja lauseen väite on voimassa. □

Seuraus 4.2. *Olkoot $E, A \subset \mathbb{R}^d$ kompakteja joukkoja ja oletetaan, että $\emptyset \neq A \subseteq E$. Tällöin*

$$\dim_H(E \times A) \geq \dim_H(E - A).$$

Todistus. Merkitsemällä toista joukoista E symbolilla A lemman 4.1 todistuksessa saadaan haluttu tulos. □

Lemma 4.3. *Oletetaan, että IFS Φ toteuttaa avoimen joukon ehdon. Tällöin* $\dim_H(E \times E) = 2 \dim_H(E)$.

Todistus. Nyt [4, lause 9.3] nojalla $\dim_H(E) = \dim_B(E)$, missä $\dim_B$ tarkoittaa joukon laatikko- tai Minkowskin ulottuvuutta. Tällöin [4, seuraus 7.4] nojalla $\dim_H(E \times E) = 2 \dim_H(E)$. □

***Lauseen 2.2 todistus*.** Oletetaan, että Φ täyttää voimakkaan erotteluehdon, $\alpha_i = \alpha$ kaikilla $1 \leq i \leq l$ ja $\dim_H(E) < 1/2$. Oletetaan lisäksi, että F voidaan affiinisti upottaa joukkoon E, eli on olemassa sellainen affiini kuvaus $g(x) = Mx + b$, että $det(M) \neq 0$ ja $g(F) \subseteq E$.

Tarkastellaan aluksi tapausta $\beta_j = \beta$ kaikilla $1 \leq j \leq m$. Tehdään vastaoletus, että $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \mathbb{Q}$. Haluamme osoittaa, että $\dim_H(E - E) \geq 1$, koska tällöin lemmojen 4.1 ja 4.3 nojalla

$$2 \dim_H E = \dim_H(E \times E) \geq \dim_H(E - E) = 1,$$

eli $\dim_H E \geq \frac{1}{2}$. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, joten $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$.

Olkoot $\delta := \min_{i \neq j} d(\phi_i(E), \phi_j(E))$ ja $\Gamma := \max\{\operatorname{diam}(MO(F))\colon O \in \boldsymbol{O}(d)\}$, missä $\boldsymbol{O}(d)$ tarkoittaa kaikkien ortogonaalisten kuvausten joukkoa avaruudessa $\mathbb{R}^d$. Nyt voimakkaan erotteluehdon ja attraktorin E kompaktiuden nojalla $0 < \delta < \infty$. Lisäksi $0 < \Gamma < \infty$, koska F on kompakti ja ortogonaalikuvaus säilyttää etäisyydet. Valitaan sellaiset luvut $p, N \in \mathbb{N}$, että $\alpha^{p+1} < \frac{\delta}{\Gamma}$ ja $\frac{\log \beta}{\log \alpha} N \geq p + 1$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $n \geq N$. Nyt $g(\psi_{1^n}(F)) \subset g(F) \subseteq E$, ja kuvaus $\psi_{1^n}(F)$ on muotoa $\beta^n O_1^n(F) + c_n$ jollain $c_n \in \mathbb{R}^d$. Täten $\beta^n M O_1^n(F) + b' \subseteq E$, kun $b' = Mc_n + b$. Olkoon l_n luvun $\frac{\log \beta}{\log \alpha} n$ kokonaislukuosa. Tällöin $\beta^n \leq \alpha^{l_n}$, $\Gamma < \delta \alpha^{-(p+1)}$ ja $l_n > p$, joten

$$\operatorname{diam}(\beta^n M O_1^n(F) + b') \leq \beta^n \Gamma < \delta \alpha^{l_n - p}.$$

Toisaalta

$$\operatorname{dist}(\phi_I(E), \phi_J(E)) \geq \delta \alpha^{l_n - p - 1} > \delta \alpha^{l_n - p},$$

joten joukko $\beta^n M O_1^n(F) + b'$ voi leikata vain yhtä joukoista $\phi_I(E)$, missä $I \in \{1, \ldots, l\}^{l_n - p}$. Näin ollen

$$\beta^n M O_1^n(F) + b' \subseteq \phi_I(E)$$

jollain $I \in \{1, \ldots, l\}^{l_n - p}$. Kuvaus $\phi_I(x)$ on muotoa $\alpha^{l_n - p} P_n(x) + r_n'$ jollain $P_n \in \boldsymbol{O}(d)$ ja $r_n' \in \mathbb{R}^d$. Täten

$$\beta^n M O_1^n(F) \subseteq \alpha^{l_n - p} P_n(E) + r_n' - b' = \alpha^{l_n - p} P_n(E) + r_n,$$

missä $r_n := r_n' - b'$. Huomaa, että $\log \beta^n / \log \alpha = l_n + \{n\gamma\}$, kun $\gamma := \log \beta / \log \alpha$, joten $\beta^n = \alpha^{l_n + \{n\gamma\}}$, eli $\beta^n / \alpha^{l_n} = \alpha^{\{n\gamma\}}$. Ortogonaalikuvauksille on voimassa $P_n^T = P_n^{-1}$, kun P_n^T tarkoittaa ortogonaalikuvauksen matriisiesityksen transpoosia. Näin ollen

$$\alpha^{p - l_n} \beta^n P_n^T M O_1^n(F) - P_n^T\Big(\frac{r_n}{\alpha^{l_n - p}}\Big) = \alpha^{p + \{\gamma n\}} P_n^T M O_1^n(F) - a_n \subseteq E,$$

missä $a_n := P_n^T(r_n / \alpha^{l_n - p})$. Olkoon $v \in F - F$ nollavektorista poikkeava. Tällöin

$$\alpha^{p + \{\gamma n\}} P_n^T M O_1^n(v) \in \alpha^{p + \{\gamma n\}} P_n^T M O_1^n(F - F) \subseteq E - E \qquad (4.1)$$

kaikilla $n \geq N$. Merkitään $U := \{|x_1 - x_2|^2 \colon x_1, x_2 \in E\}$. Arvion (4.1) nojalla

$$U \supseteq \{\alpha^{2(p + \{\gamma n\})} |M O_1^n v|^2 \colon n \geq N\}, \qquad (4.2)$$

koska ortogonaalinen kuvaus P_n^T ei muuta etäisyyksiä. Kuvaus $\vartheta : E - E \to \mathbb{R}^d$, $\vartheta(x) = |x|^2$ on Lipschitz-kuvaus. Nyt $U = \vartheta(E - E)$. Täten

$$\dim_H U = \dim_H \vartheta(E - E) \leq \dim_H (E - E), \qquad (4.3)$$

koska Lipschitz-kuvaus ei kasvata Hausdorffin dimensiota (katso luku 1.2).

Olkoon $W := \{(e^{2\pi i n\gamma}, O_1^n) \colon n \geq N\}$. Esimerkin 1.19 nojalla $\overline{\{O_1^n \colon n \in \mathbb{N}\}}$ on ryhmän $\boldsymbol{O}(d)$ suljettu aliryhmä. Vastaavanlaisilla argumenteilla nähdään, että $\overline{\{e^{2\pi i n\gamma} \colon n \in \mathbb{N}\}}$ on ryhmän $\mathbb{S}^1$ suljettu aliryhmä. Nyt $\overline{W}$ on kompaktin Lien ryhmän $\mathbb{S}^1 \times \boldsymbol{O}(d)$ suljettu aliryhmä. Näin ollen lauseen 1.17 nojalla $\overline{W}$ on myös Lien ryhmä. Olkoon W_0 joukon $\overline{W}$ identiteettikomponentti, eli $(1, I) \in W_0$. Lemman 1.14 nojalla W_0 on Lien ryhmä. Lisäksi joukot $\overline{W}$ ja W_0 ovat kompaktin joukon suljettuina osajoukkoina kompakteja. Lauseen 1.14 nojalla W_0 on avoin joukossa $\overline{W}$. Jos joukolla $\overline{W}$ on jokin identiteettikomponentista poikkeava yhtenäinen komponentti W_1, niin Lien ryhmän tulo-operaation sileyden nojalla joukko hW_0 on yhtenäinen, missä $h \in W_1$. Yhtenäisen komponentin W_1 maksimaalisuuden nojalla $hW_0 \subseteq W_1$. Vastaavasti nähdään, että joukko $h^{-1}W_1 \subseteq W_0$ eli $W_1 = hW_0$. Näin ollen kaikki joukon $\overline{W}$ yhtenäiset komponentit ovat avoimia ja lisäksi ne muodostavat avoimen peitteen joukolle $\overline{W}$. Kompaktiuden nojalla joukolla $\overline{W}$ on vain äärellisen monta yhtenäistä komponenttia.

Olkoon $\pi_1 : \mathbb{S}^1 \times \boldsymbol{O}(d) \to \mathbb{S}^1$ luonnollinen koordinaattiprojektio. Koska luku γ on irrationaalinen, niin seurauksen 1.11 nojalla $\pi_1(\overline{W}) = \mathbb{S}^1$. Ryhmäoperaatio on invariantti Haarin mitan suhteen ja joukko W_0 sisältää ryhmän ykkösalkion, joten kaikilla joukon $\overline{W}$ komponenteilla täytyy olla sama Haarin mitta. Täten joukon $\pi_1(W_0)$ Haarin mitta on positiivinen. Nyt $\pi_1(W_0)$ on suljettu yhtenäinen positiivimittainen aliryhmä, joten se sisältää muotoa $e^{2\pi i n a}$ olevan alkion, missä luku a on irrationaalinen. Näin ollen seurauksen 1.11 nojalla $\pi_1(W_0) = \mathbb{S}^1$.

Olkoon $\pi_2 : \mathbb{S}^1 \times \boldsymbol{O}(d) \to \boldsymbol{O}(d)$ luonnollinen koordinaattiprojektio. Jos $\overline{\{O_1^n \colon n \geq \mathbb{N}\}}$ on äärellinen, niin $\pi_2(W_0) = \{I\}$. Tällöin asetamme, että $\phi(t) = I$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Jos $\overline{\{O_1^n \colon n \geq \mathbb{N}\}}$ ei ole äärellinen, niin kompaktiuden nojalla se sisältää ainakin yhden kasautumispisteen. Näin ollen se on ainakin 1-ulotteinen sileä monisto, joten sen tangenttiavaruus on myös ainakin 1-ulotteinen vektoriavaruus (katso [10], propositio 3.10). Täten tangenttiavaruudessa on jokin nollasta eroava vektori. Lien ryhmien tapauksessa ykkösalkion kohdalla oleva tangenttiavaruus voidaan samaistaa Lie ryhmää vastaavan Lien algebran kanssa (katso [10], lause 8.37). Nyt Lien ryhmää $\overline{\{O_1^n \colon n \geq \mathbb{N}\}}$ vastaavassa Lien algebrassa on siis nollamatriisista poikkeava antisymmetrinen matriisi X. Tällöin tX on myös antisymmetrinen kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Lauseen 1.16 nojalla funktio $\exp(tX)$ on analyyttinen. Lisäksi

$$\exp(0 \cdot X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(0 \cdot X)^k = I \in \exp(\mathbb{R} \cdot X).$$

Koska $\mathbb{R}$ on polkuyhtenäinen, niin sen jatkuva kuva on polkuyhtenäinen, joten $\exp(\mathbb{R}\cdot X) \subseteq \pi_2(W_0)$. Lauseen 1.15 nojalla

$$t \mapsto \exp(tX) \in \overline{\{O_1^n \colon n \geq \mathbb{N}\}}$$

on analyyttinen ryhmähomomorfismi. Merkitään kyseistä kuvausta symbolilla ϕ. Näin ollen ϕ on analyyttinen funktio ja kuvaus $t \mapsto (e^{2\pi i t}, \phi(t))$ on analyyttinen homomorfismi.

Arvion (4.2) nojalla

$$U \supseteq \{\alpha^{2(p+\{t\})}|MOv|^2 \colon (e^{2\pi i t}, O) \in W\}.$$

Koska U on kompakti, niin

$$U \supseteq \{\alpha^{2(p+\{t\})}|MOv|^2 \colon (e^{2\pi i t}, O) \in \overline{W}\} \supseteq \ \{\alpha^{2(p+\{t\})}|M\phi(t)v|^2 \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Asetetaan $f(t) = \alpha^{2(p+t)}|M\phi(t)v|^2$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska ϕ on analyyttinen, niin myös f on analyyttinen funktio avaruudessa $\mathbb{R}$. Lisäksi f on positiivinen ja $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, koska on olemassa sellainen luku $P > 0$, että $|M\phi(t)v| < P$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Esimerkin 1.2 nojalla f ei ole vakiofunktio millään avaruuden $\mathbb{R}$ aidolla osavälillä. Nyt $J := \{f(t) \colon t \in [0, \frac{1}{2}[\}$ on myös aito avaruuden $\mathbb{R}$ osaväli. Lisäksi $U \supseteq J$. Tämän ja arvion (4.3) nojalla $\dim_H(E-E) \geq \dim_H U \geq \dim_H J = 1$.

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä tapausta kun luvut β_j, $1 \leq j \leq m$, voivat olla erisuuria. Olkoon $j \in \{1,\ldots,m\}$. Osoitetaan, että $\frac{\log\beta_j}{\log\alpha} \in \mathbb{Q}$. Koska F ei ole yksiö, niin on olemassa sellainen $1 \leq i \leq m$, että $i \neq j$ ja kuvauksen ψ_i kiintopiste on eri kuin kuvauksen ψ_j kiintopiste. Olkoon F_1 iteraatiofunktiosysteemin $\{\psi_j \circ \psi_i, \psi_i \circ \psi_j\}$ attraktori. Olkoon $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^d \colon K$ on kompakti ja $K \neq \emptyset\}$. Määritellään kuvaus $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ asettamalla $\mathcal{F}(K) = \psi_j \circ \psi_i(K) \cup \psi_i \circ \psi_j(K)$. Koska $\psi_j \circ \psi_i(F) \subseteq F$ ja $\psi_i \circ \psi_j(F) \subseteq F$, niin [4, lause 9.1] nojalla

$$F_1 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^k(F) \subseteq F.$$

Oletimme, että IFS Ψ toteuttaa vahvan erotteluehdon joten

$$\psi_j \circ \psi_i(F_1) \cap \psi_i \circ \psi_j(F_1) \subseteq \psi_j \circ \psi_i(F) \cap \psi_i \circ \psi_j(F) \subseteq \psi_j(F) \cap \psi_i(F) = \emptyset.$$

Näin ollen F_1 ei ole yksiö. Oletimme todistuksen alussa, että on olemassa sellainen affiinikuvaus g, että $g(F) \subseteq E$. Täten $g(F_1) \subseteq E$ eli joukko F_1 voidaan affiinisti upottaa joukkoon E. Koska iteraatiofunktiosysteemin

$\{\psi_j \circ \psi_i, \psi_i \circ \psi_j\}$ kuvausten suhdeluvut ovat samoja, niin $\frac{\log \beta_j \beta_i}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$. Vastaavasti tarkastelemalla iteraatiofunktiosysteemiä $\{\psi_j^2 \circ \psi_i, \psi_i \circ \psi_j^2\}$ saadaan, että $\frac{\log \beta_j^2 \beta_i}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$. Näin ollen

$$\frac{\log \beta_j}{\log \alpha} = \frac{\log \beta_j^2 \beta_i}{\log \alpha} - \frac{\log \beta_j \beta_i}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$$

todistaen lauseen 2.2. $\square$

Seuraus 4.4. *Olkoon $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{4}$. Huomaa, että tällöin $\dim_H C_\alpha < \log 2/\log 4 = 1/2$. Soveltamalla lausetta 2.2 attraktoreihin $E = C_\alpha$ ja $F = C_\beta$ saadaan, että jos C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α, niin tällöin $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$.*

Seuraavaksi todistamme lauseen 2.3(1), joka tarkentaa edellisessä seurauksessa saatua tulosta.

Lauseen 2.3(1) todistus. Olkoon $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{4}$. Jos $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{N}$, niin $\beta = \alpha^n$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Lemman 1.6 nojalla joukon C_{α^n} alkiot ovat muotoa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (1-\alpha^n)(\alpha^n)^i &= \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (1-\alpha)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1)(\alpha^n)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (1-\alpha)(\alpha^{ni+n-1} + \alpha^{ni+n-2} + \cdots + \alpha^{ni+1} + \alpha^{ni}).\end{aligned}$$

Koska $n(i+1) > ni + n - 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, niin Lemman 1.6 ja huomautuksen 1.7 nojalla $C_{\alpha^n} \subset C_\alpha$. Tällöin $C_\beta = C_{\alpha^n} \subset C_\alpha$, eli joukko C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α.

Oletetaan, että C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α. Osoitetaan, että jos $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \mathbb{N}$, niin päädytään ristiriitaan.

Oletuksen nojalla on olemassa sellaiset $a \in [0,1]$ ja $\lambda \neq 0$, että $a + \lambda C_\beta \subseteq C_\alpha$. Selvästi $|\lambda| \leq 1$, jotta upotus on mahdollinen. Koska joukon $1 - C_\beta$ alkiot ovat muotoa

$$\begin{aligned}1 - \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (1-\beta)\beta^i &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)\beta^i - \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (1-\beta)\beta^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\epsilon_i)(1-\beta)\beta^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\epsilon}(1-\beta)\beta^i,\end{aligned}$$

missä $\widetilde{\epsilon} = 1-\epsilon$, niin $1-C_\beta = C_\beta$. Erityisesti $\lambda+(-\lambda C_\beta) = \lambda(1-C_\beta) = \lambda C_\beta$. Jos $\lambda < 0$, niin

$$C_\alpha \supseteq a + \lambda C_\beta = a + \lambda - \lambda C_\beta,$$

missä $a + \lambda \in [0,1]$. Näin ollen voimme olettaa, että luku $\lambda > 0$.

Seuraavaksi osoitamme, että on olemassa sellaiset $n, m \in \mathbb{N}$, joille pätee

$$\alpha < \lambda \frac{\beta^m}{\alpha^n} < 1 - 2\alpha. \tag{4.4}$$

Seurauksen 4.4 nojalla $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{Q}$. Oletetaan seuraavaksi, että $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Tällöin $\frac{\log \beta}{\log \alpha} = \frac{p}{q}$ jollain suhteellisilla alkuluvuilla $p, q \geq 2$. Näin ollen $\beta = \alpha^{\frac{p}{q}}$. Koska $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, niin $1 - 2\alpha > \sqrt{\alpha}$, eli $\frac{1-2\alpha}{\alpha} > \alpha^{-1/2} \geq \alpha^{-1/q}$. Jos $\lambda \geq 1 - 2\alpha$, niin valitaan sellainen kokonaisluku $r \geq 0$, että $\lambda\alpha^{\frac{r}{q}} \geq 1 - 2\alpha$ ja $1 - 2\alpha > \lambda\alpha^{\frac{r+1}{q}}$. Nyt $1 - 2\alpha > \lambda\alpha^{\frac{r+1}{q}} = \lambda\alpha^{\frac{r}{q}}\alpha^{\frac{1}{q}} \geq (1-2\alpha)\alpha^{\frac{1}{q}} > \alpha$. Jos $\lambda < 1 - 2\alpha$, niin valitaan sellainen kokonaisluku $r \leq 0$, että $\lambda\alpha^{\frac{r}{q}} < 1 - 2\alpha$ ja $\lambda\alpha^{\frac{r-1}{q}} \geq 1 - 2\alpha$. Tällöin $1 - 2\alpha > \lambda\alpha^{\frac{r}{q}} = \lambda\alpha^{\frac{r-1}{q}}\alpha^{\frac{1}{q}} \geq (1-2\alpha)\alpha^{\frac{1}{q}} > \alpha$. Näin ollen löydetään aina sellainen $r \in \mathbb{Z}$, että $1 - 2\alpha > \lambda\alpha^{\frac{r}{q}} > \alpha$.

Osoitetaan vielä, että $\{\frac{\beta^m}{\alpha^n} \colon m, n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha^{k/q} \colon k \in \mathbb{Z}\}$, jolloin epäyhtälö (4.4) on voimassa, kun $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Koska $syt(p,q) = 1$, niin Eukleideen algoritmin nojalla on olemassa sellaiset luvut $m', n' \in \mathbb{Z}$, että $1 = syt(p,q) = pm' + qn'$, eli $k = pkm' + qkn'$, kun $k \in \mathbb{Z}$. Olkoon $l \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$k = pkm' + qkn' = pkm' + qkn' + lpq - lpq = (km' + lq)p + (kn' - lp)q.$$

Näin ollen valitsemalla luku l tarpeeksi suureksi on mahdollista aina löytää esitys $k = mp - nq$, missä $m, n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\alpha^{k/q} = \alpha^{\frac{mp-nq}{q}} = \alpha^{m\frac{p}{q}-n} = \frac{\beta^m}{\alpha^n}.$$

Täten epäyhtälö (4.4) on voimassa, kun $\frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \mathbb{N}$.

Olkoon $\Phi = \{\phi_1 = \alpha x, \phi_2 = \alpha x + (1-\alpha)\}$ joukon C_α generoiva IFS. Olkoon $A_k := \{\phi_I(C_\alpha) \colon I \in \{1,2\}^k\}$, missä $k \in \mathbb{N}$. Attraktorin määritelmän nojalla joukko A_k on joukon C_α peite kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi jos $\phi_I(C_\alpha), \phi_J(C_\alpha) \in A_k$ ja $I \neq J$, niin tällöin

$$\operatorname{dist}(\phi_I(C_\alpha), \phi_J(C_\alpha)) \geq \alpha^{k-1}(1-2\alpha). \tag{4.5}$$

Valitaan sellaiset luvut $m, n \in \mathbb{N}$, että (4.4) on voimassa. Tällöin

$$H := a + \lambda\beta^m C_\beta \subseteq a + \lambda C_\beta \subseteq C_\alpha = \bigcup_{A \in A_{n+1}} A. \tag{4.6}$$

Nyt $\operatorname{diam}(H) = \lambda\beta^m > \alpha^{n+1}$ epäyhtälön (4.4) nojalla. Tämä tarkoittaa, että joukko H leikkaa ainakin kahta joukon A_{n+1} alkiota, koska jos $\phi_I(C_\alpha) \in A_{n+1}$, niin $\operatorname{diam}(\phi_I(C_\alpha)) = \alpha^{n+1}$, mutta toisaalta arvio 4.6 on voimassa. Siten arvion (4.5) nojalla H sisältää "reiän", jonka pituus on ainakin $\alpha^n(1-2\alpha)$. Täten $\operatorname{diam}(H) = \lambda\beta^m \geq \alpha^n(1-2\alpha)$, mikä tarkoittaa että $\lambda\frac{\beta^m}{\alpha^n} \geq 1-2\alpha$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa arvion (4.4) kanssa. Näin ollen joukko C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α jos ja vain jos $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \in \mathbb{N}$. $\square$

5 Cantorin joukon affiinit upotukset

Aluksi käymme läpi muutamia merkintöjä, joita tarvitsemme tässä luvussa. Tämän jälkeen tutkimme tapausta, kun C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α ja $\log\beta/\log\alpha \notin \mathbb{Q}$. Saamme jotain epätavalliselta vaikuttavia tuloksia, jotka aiheuttavat haluamamme ristiriidan lauseen 2.3(2) todistuksessa. Lopuksi todistamme lemman, jonka nojalla on mahdollista, että $\log\beta/\log\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ lauseen 2.3(2) oletusten ollessa voimassa.

Oletetaan, että $0 < \alpha < 1/2$. Määritellään siirtoavaruuteen kuvaus $\pi : \Sigma \to [0,1]$ seuraavasti:

$$\pi(z) = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} z_i\alpha^i, \text{ kun } z = (z_i)_{i=0}^{\infty} \in \Sigma.$$

Lemman 1.6 nojalla on selvää, että $\pi(\Sigma) = C_\alpha$. Muistetaan myös, että Cantorin α-joukon generoiva IFS on $\{S_0(x) := \alpha x, S_1(x) := \alpha x + 1 - \alpha\}$. Huomataan, että muotoa $S_{z_0}\circ\cdots\circ S_{z_{n-1}}(0)$ olevat luvut ovat Cantorin α-joukon konstruktiovälien alkupisteitä. Nyt vastaavasti kuin luvussa 1.4 olevassa perustelussa saamme, että

$$\pi(z) = \lim_{n\to\infty} S_{z_0}\circ\cdots\circ S_{z_{n-1}}(0)$$

kaikilla $z \in \Sigma$.

Lemma 5.1. *Oletetaan, että $0 < \beta < \alpha < 1/2$. Olkoon $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \notin \mathbb{Q}$ ja oletetaan, että C_β voidaan affiinisti upottaa joukkoon C_α, eli on olemassa sellaiset luvut $c \geq 0$ ja $\lambda > 0$, että $c + \lambda C_\beta \subseteq C_\alpha$. Merkitään $z = \pi^{-1}(c)$. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa:*

1. *Kaikilla luvuilla $n, k \in \mathbb{N}$, joille $\frac{\lambda\beta^k}{\alpha^n} < \frac{1-2\alpha}{\alpha}$, on voimassa $\pi(\sigma^n z) + \lambda\frac{\beta^k}{\alpha^n}C_\beta \subseteq C_\alpha$.*

2. *Jokaista lukua $u \in [0, \frac{1-2\alpha}{\alpha}]$ kohti on olemassa sellainen $w \in \overline{\{\sigma^n z :\ n \in \mathbb{N}\}}$, että $\pi(w) + uC_\beta \subseteq C_\alpha$.*

3. $\dim_H(\pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}})) \geq 1 - \dim_H C_\alpha > 0$.

Todistus. Oletetaan, että luvuille $n, k \in \mathbb{N}$ on voimassa $\frac{\lambda\beta^k}{\alpha^n} < \frac{1-2\alpha}{\alpha}$. Koska $c = \pi(z)$, niin $c \in S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}}(C_\alpha)$. Lisäksi

$$\operatorname{dist}(C_\alpha \setminus S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}}(C_\alpha), S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}}(C_\alpha)) \geq (1 - 2\alpha)\alpha^{n-1},$$

missä luku $(1 - 2\alpha)\alpha^{n-1}$ vastaa Cantorin α-joukon konstruktiovaiheessa n poistetun välin pituutta. Oletuksien nojalla $c + \lambda\beta^k C_\beta \subseteq c + \lambda C_\beta \subseteq C_\alpha$ ja $\operatorname{diam}(c+\lambda\beta^k C_\beta) = \lambda\beta^k < (1-2\alpha)\alpha^{n-1}$, joten $c+\lambda\beta^k C_\beta \subseteq S_{z_0}\circ\cdots\circ S_{z_{n-1}}(C_\alpha)$. Edelleen koska $\operatorname{diam}\big((S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}})^{-1}(\lambda\beta^k C_\beta)\big) = \lambda\frac{\beta^k}{\alpha^n}$, niin $(S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}})^{-1}(c) + \lambda\frac{\beta^k}{\alpha^n} C_\beta \subseteq C_\alpha$. Huomaamalla, että $(S_{z_0} \circ \cdots \circ S_{z_{n-1}})^{-1}(c) = \pi(\sigma^n z)$, väite 1 saadaan todistettua.

Todistamme seuraavaksi kohdan 2. Oletetaan, että $u \in [0, \frac{1-2\alpha}{\alpha}]$. Nyt $\frac{\beta^k}{\alpha^n} = e^{\log\frac{\beta^k}{\alpha^n}} = e^{k\log\beta - n\log\alpha} = e^{\log\alpha(k\frac{\log\beta}{\log\alpha} - n)}$ ja lemman 1.10 nojalla joukko $\{k\frac{\log\beta}{\log\alpha} - n \colon k, n \in \mathbb{N}\}$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$, joten $\{e^{\log\alpha(k\frac{\log\beta}{\log\alpha} - n)} \colon k, n \in \mathbb{N}\}$ on tiheä eksponenttifunktion kuvajoukossa $]0, \infty[$. Täten on olemassa sellainen jono $(k_i, n_i) \in \mathbb{N}^2$, että $\frac{\lambda\beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} \to u$ kun $i \to \infty$ ja $\frac{\lambda\beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} < \frac{1-2\alpha}{\alpha}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt 1. kohdan nojalla $\pi(\sigma^{n_i} z) + \lambda\frac{\beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} C_\beta \subseteq C_\alpha$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon w jonon $(\sigma^{n_i} z)$ kasautumispiste. Huomaa, että kasautumispiste on olemassa, koska siirtoavaruus on kompakti lauseen 1.20 nojalla. Tällöin saadaan, että $\pi(w) + uC_\beta \subseteq C_\alpha$, koska C_α ja C_β ovat kompakteja.

Kohdan 2 nojalla kaikilla $u \in [0, \frac{1-2\alpha}{\alpha}]$ on voimassa

$$uC_\beta \subseteq C_\alpha - \pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}}).$$

Täten

$$\left[0, \frac{1 - 2\alpha}{\alpha}\right] \subseteq C_\alpha - \pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}}).$$

Näin ollen $\dim_H(C_\alpha - \pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}})) \geq 1$. Kuvauksen π määritelmän nojalla $\pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}}) \subseteq C_\alpha$. Tällöin seurauksen 4.2 ja [4, seuraus 7.4] nojalla

$$\begin{aligned}1 &\leq \dim_H(C_\alpha - \pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}})) \leq \dim_H(C_\alpha \times \pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}})) \\ &= \dim_H C_\alpha + \dim_H(\pi(\overline{\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}})),\end{aligned}$$

koska Cantorin α-joukon ylälaatikkodimensio on yhtä suuri kuin Hausdorffin dimensio (katso [4], esimerkit 2.2 ja 3.7). $\square$

Huomautus 5.2. Lemman 5.1 tulokset todellakin vaikuttavat epätavallisilta. Esimerkiksi (2) kohdan luku u voi olla hyvinkin suuri, jolloin joukko uC_β ei voi sisältyä joukkoon C_α. Lisäksi (3) kohdan joukko $\{\sigma^n z : n \in \mathbb{N}\}$ on numeroituva ja on täysin mahdollista, että tämän joukon sulkeuman kuvan Hausdorffin dimensio on 0. Lauseen 2.3(1) perusteella tiedämme jo entuudestaan, että lemman 5.1 kaikki oletukset eivät voi olla voimassa yhtäaikaa, kun $0 < \alpha < 1/4$. Lauseen 2.3(2) todistuksessa näemme, että lemman oletukset eivät voi olla voimassa myöskään, kun $1/4 \leq \alpha < \sqrt{2} - 1$.

Apulause 5.3. *Olkoon* $0 < \alpha < \sqrt{2}-1$. *Asetetaan* $z_i = (-1)^i$ *kaikilla* $i \in \mathbb{N}$. *Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

1. $z := (z_i)_{i=0}^\infty$ *on sellainen yksikäsitteinen alkio avaruudessa* $\{-1, 0, 1\}^\mathbb{N}$, *että*
$$(1-\alpha)\sum_{i=0}^\infty z_i \alpha^i = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \tag{5.1}$$

2. *Merkitään* $a := (1-\alpha)\sum_{i=0}^\infty \alpha^{2i+1}$ *ja* $b := (1-\alpha)\sum_{i=0}^\infty \alpha^{2i}$. *Tällöin* $(a, b) \in C_\alpha \times C_\alpha$ *on yksikäsitteinen piste, jolle* $b - a = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

Todistus. Huomataan aluksi, että

$$\frac{1}{1+\alpha} = \sum_{i=0}^\infty (-\alpha)^i = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \alpha^i.$$

Täten jono z toteuttaa yhtälön (5.1). Osoitamme seuraavaksi, että jos jono $w := (w_i)_{i=0}^\infty \in \{-1, 0, 1\}^\mathbb{N}$ toteuttaa yhtälön (5.1), niin tällöin $w = z$.

Koska $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$, niin $\alpha^2 + 2\alpha - 1 < 0$, eli $\alpha^2 + \alpha < 1 - \alpha$. Näin ollen

$$\sum_{i=1}^\infty w_i \alpha^i \leq \sum_{i=1}^\infty \alpha^i = \frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{5.2}$$

Täten termin w_0 tulee olla arvoltaan 1. Nyt

$$w_0 + \sum_{i=2}^\infty w_i \alpha^i \geq 1 - \sum_{i=2}^\infty \alpha^i = 1 - \frac{\alpha^2}{1-\alpha} > \frac{1}{1+\alpha}, \tag{5.3}$$

koska $\frac{\alpha^2}{1-\alpha} < \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Näin ollen termin w_1 tulee olla arvoltaan -1. Nyt

$$\sum_{i=2}^\infty w_i \alpha^i = \frac{1}{1+\alpha} - w_0 - w_1\alpha = \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \tag{5.4}$$

ja täten $\sum_{i=2}^{\infty} w_i\alpha^{i-2} = \frac{1}{1+\alpha}$. Toistamalla päättelyt (5.3) ja (5.4) saadaan, että $w_2 = 1$ ja $w_3 = -1$. Edelleen, jatkamalla yllä mainitulla tavalla saadaan, että $w_i = (-1)^i$ eli $w = z$. Väite 1 on siis voimassa.

Todistamme seuraavaksi kohdan 2. Huomaa, että $a, b \in C_\alpha$. Nyt kohdan (5.1) nojalla

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} z_i\alpha^i = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i} - (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i+1} = b - a.$$

Oletetaan, että $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = b' - a'$, jollain parilla $(a', b') \in C_\alpha \times C_\alpha$. Tällöin on olemassa sellaiset jonot $e := (e_i)_{i=0}^{\infty}$ ja $f := (f_i)_{i=0}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, että $a' = \pi(e)$ ja $b' = \pi(f)$. Täten

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = b' - a' = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}(f_i - e_i)\alpha^i.$$

Nyt kohdan 1 nojalla $f_i - e_i = (-1)^i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tämä on mahdollista vain kun

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{jos i on pariton} \\ 0, & \text{jos i on parillinen} \end{cases}$$

ja

$$f_i = \begin{cases} 0, & \text{jos i on pariton} \\ 1, & \text{jos i on parillinen} \end{cases}.$$

Näin ollen $a' = a$ ja $b' = b$. □

Lauseen 2.3(2) todistus. Oletetaan, että $\frac{1}{4} \leq \alpha < \sqrt{2} - 1$, $0 < \beta < \alpha$ ja C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α.

Tehdään vastaoletus, että $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \notin \mathbb{Q}$. Nyt $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \in]0, \frac{1-2\alpha}{\alpha}[$. Lemman 5.1 kohdan 2 nojalla on olemassa sellainen $a \in C_\alpha$, että

$$a + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}C_\beta \subseteq C_\alpha. \tag{5.5}$$

Erityisesti $b := a + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \in C_\alpha$. Nyt $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = b - a$ ja $a, b \in C_\alpha$, joten apulauseen 5.3 nojalla täytyy olla, että $a = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i+1}$. Olkoon $z = \pi^{-1}(a)$. Tällöin $z = (01)^\infty$, eli z on periodinen avaruudessa $\Sigma = \{0,1\}^\infty$. Näin ollen joukossa $\{\sigma^n z \colon n \in \mathbb{N}\}$ on vain kaksi alkiota, eli

$$\dim_H(\pi(\overline{\{\sigma^n z \colon n \in \mathbb{N}\}})) = 0.$$

Kuitenkin kaavan (5.5) ja lemman 5.1 kohdan 3 nojalla saadaan, että

$$\dim_H(\pi(\overline{\{\sigma^n z\colon n \in \mathbb{N}\}})) > 0,$$

mikä on ristiriita. Näin ollen $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Seuraavan lemman nojalla on mahdollista, että $\log\beta/\log\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, kun $0 < \beta < \alpha < 1/2$, $1/4 \le \alpha < \sqrt{2}-1$ ja C_β voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_α.

Lemma 5.4. *Olkoon $\alpha_k > 0$ yhtälön*

$$\sqrt{x} = x + x^2 + \cdots + x^k$$

yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu kaikilla $k \ge 2$. Asetetaan $\beta_k := \alpha_k^{(2k+1)/2}$. Tällöin $\frac{1}{2} > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots, \lim_{k\to\infty}\alpha_k = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ja C_{β_k} voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_{α_k}.

Todistus. Kiinnitetään $k \ge 2$ ja merkitään $\lambda_k = \frac{1-\alpha_k}{1-\beta_k}$. Muistetaan, että kaikki Cantorin β_k-joukon alkiot voidaan esittää muodossa $\sum_{i=0}^{\infty}\epsilon_i(1-\beta_k)\beta_k^i$, missä $\epsilon_i \in \{0,1\}$ kaikilla $i \ge 0$. Olkoon $z \in C_{\beta_k}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\lambda_k z &= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_k)\epsilon_i\beta_k^i = \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_k)(\epsilon_{2i}\beta_k^{2i} + \epsilon_{2i+1}\beta_k^{2i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_k)(\epsilon_{2i}\alpha_k^{(2k+1)i} + \epsilon_{2i+1}\alpha_k^{(2k+1)i+k}\sqrt{\alpha_k}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_k)(\epsilon_{2i}\alpha_k^{(2k+1)i} + \epsilon_{2i+1}\alpha_k^{(2k+1)i+k}(\alpha_k + \cdots + \alpha_k^k)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_k)(\epsilon_{2i}\alpha_k^{(2k+1)i} + \epsilon_{2i+1}\alpha_k^{(2k+1)i+k+1} + \cdots + \epsilon_{2i+1}\alpha_k^{(2k+1)i+2k}).
\end{aligned}$$

Koska $(2k+1)(i+1) = (2k+1)i + 2k + 1 > (2k+1)i + 2k$ kaikilla $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, niin lemman 1.6 nojalla $\lambda_k z \in C_{\alpha_k}$. Täten $\lambda_k C_{\beta_k} \subseteq C_{\alpha_k}$. Toisin sanoin C_{β_k} voidaan upottaa affiinisti joukkoon C_{α_k}.

Ratkaistaan seuraavaksi yhtälö $\sqrt{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i$. Käyttämällä geometrisen summan kaavaa ja korottamalla yhtälön molemmat puolet toiseen saadaan, että $x = x^2/(1-x)^2$, eli $x^2 - 3x + 1 = 0$. Toisen asteenyhtälön ratkaisukaavaa käyttämällä saadaan, että $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Jono $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \subset]0,1/2[$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, joten se suppenee kohti jotain lukua α. Lisäksi jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k^j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_k^j + \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_k^j = \sqrt{\alpha_k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_k^j \to \sqrt{\alpha},$$

kun $k \to \infty$. Näin ollen $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. $\square$

6 Uniikit joukot ja affiinit upotukset Pisot'n lukujen tapauksessa

Tässä luvussa todistamme aluksi lauseen 2.3(3). Todistus antaa meille myös hyödyllisen työkalun, jota tarvitsemma jatkossa. Seuraavaksi osoitamme puhtaasti lukuteoreettisen lemman, jota hyödynnämme lauseen 2.4 todistuksessa. Lopuksi todistamme lauseen 2.4.

Lauseen 2.3(3) todistus. Oletetaan, että $0 < \beta < \alpha < 1/2$, $1/\alpha$ on Pisot'n luku ja C_β voidaan affiinisti upottaa joukkoon C_α. Lauseen 1.24 nojalla C_α on uniikki joukko. Nyt huomautuksen 1.26 nojalla joukko C_β on myös uniikki joukko. Edelleen lauseen 1.24 nojalla luku $1/\beta$ on Pisot'n luku.

Osoitamme seuraavaksi, että $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \in \mathbb{Q}$. Tehdään vastaoletus, että $\frac{\log\beta}{\log\alpha} \notin \mathbb{Q}$.

Merkitään $b := \frac{1-2\alpha}{\alpha}$. Lemman 5.1 2-kohdan nojalla jokaista lukua $u \in [0,b]$ kohti on olemassa sellainen luku $c \in \mathbb{R}$, että $uC_\beta + c \subseteq C_\alpha$. Määritellään funktio $f : [0,b] \to C_\alpha$ seuraavasti: $f(u) = \sup\{d \in \mathbb{R} \colon uC_\beta + d \subseteq C_\alpha\}$. Aluksi huomaamme, että $f(u) \in C_\alpha$ kaikilla u, koska $0 \in uC_\beta$ ja C_α on kompakti. Osoitamme, että funktio f on puolijatkuva ylhäältäpäin.

Olkoon jono $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset [0,b]$ sellainen, että $x_i \to x_0 \in [0,b]$, kun $i \to \infty$. Nyt $\cup_{i=1}^{\infty} f(x_i) \subset C_\alpha$. Olkoon $(f(x_i'))_{i=1}^{\infty}$ mielivaltainen jonon $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ suppeneva osajono ja oletetaan, että $\lim_{i\to\infty} f(x_i') =: a$. Koska funktion f määritelmän nojalla $x_i'C_\beta + f(x_i') \subseteq C_\alpha$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja lisäksi C_α on suljettu, niin

$$\lim_{i\to\infty} (x_i'C_\beta + f(x_i')) = x_0 C_\beta + a \subseteq C_\alpha.$$

Kuitenkin funktion f määritelmän nojalla $a \leq f(x_0)$, joten

$$\limsup_{i\to\infty} f(x_i) \leq f(x_0).$$

Osoitetaan vielä, että puolijatkuva funktio f on Borel-mitallinen. Olkoon $A := \{x \in [0,b] \colon f(x) < a\}$. Oletetaan, että $x_0 \in A$ ja asetetaan $\epsilon :=$

$a - f(x_0)$. Funktion f puolijatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|x_0 - x| < \delta$, niin $f(x) < f(x_0) + \epsilon = a$. Näin ollen $x \in A$, joten A on avoin. Täten f on Borel-mittallinen

Olkoon μ normalisoitu $\frac{\log 2}{\log(1/\beta)}$-ulotteinen Hausdorffin mitta, joka on rajoitettu joukkoon C_β, eli μ on Borel-todennäköisyysmitta, jonka kantaja on C_β. Määritellään kuvaus $h_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $h_u(x) = ux + f(u)$. Määritellään vielä kuvaus

$$\eta(A) = \frac{1}{b}\int_0^b \mu \circ h_u^{-1}(A) \ \mathrm{du}$$

kaikilla Borel-joukoilla $A \subseteq \mathbb{R}$. Nyt $h_u(C_\beta) = uC_\beta + f(u) \subseteq C_\alpha$ kaikilla $u \in [0, b]$. Erityisesti $h_u^{-1}(C_\alpha) \supseteq C_\beta$ ja $\mathrm{supp}(\mu) = C_\beta$, joten $\mathrm{supp}(\eta) \subseteq C_\alpha$. Edelleen, koska $\mathrm{supp}(\mu) = C_\beta$, niin

$$\eta(C_\alpha) = \frac{1}{b}\int_0^b \mu \circ h_u^{-1}(C_\alpha) \ \mathrm{du} = \frac{1}{b}\int_0^b \mu(C_\beta) \ \mathrm{du} = \frac{1}{b}\int_0^b 1 \ \mathrm{du} = 1.$$

Täten η on Borel-todennäköisyysmitta.

Arvioidaan seuraavaksi mitan η Fourier-muunnoksen kertoimia. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} \ \mathrm{d}\eta(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} \ d\Big(\frac{1}{b}\int_0^b \mu \circ h_u^{-1}(x) \ \mathrm{du}\Big) \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} \ \mathrm{d}\mu \circ h_u^{-1}(x) \ \mathrm{du} \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b \int_{\mathbb{R}} e^{-in(ux+f(u))} \ \mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) \ \mathrm{du} \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b \hat{\mu}(un)e^{-if(u)n} \ \mathrm{du},
\end{aligned}$$

missä $\hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \ \mathrm{d}\mu(\mathrm{x})$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}$. Täten

$$|\hat{\eta}(n)| \leq \frac{1}{b}\int_0^b |\hat{\mu}(un)| \ \mathrm{du} \leq \frac{1}{b|n|}\int_0^{b|n|} |\hat{\mu}(x)| \ \mathrm{dx}. \tag{6.1}$$

Hausdorffin mittana μ ei sisällä yhtään atomeita, joten lemman 1.29 nojalla

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(x)|^2 \ \mathrm{dx} = 0.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(x)|\cdot 1 \text{ dx}\right)^2 &\leq \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(x)|^2 \text{ dx}\cdot\int_0^T \frac{1}{T}\text{ dx}\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(x)|^2 \text{ dx}.\end{aligned}$$

Täten

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(x)| \text{ dx} = 0.$$

Näin ollen arviosta (6.1) saadaan, että $\hat{\eta}(n)\to 0$, kun $|n|\to\infty$. Toisaalta η on Borel-todennäköisyysmitta, jonka kantaja sisältyy uniikkiin joukkoon C_α, joten lauseen 1.28 nojalla $\hat{\eta}(n)\not\to 0$, kun $|n|\to\infty$. Tämä on ristiriita, joten $\frac{\log\beta}{\log\alpha}\in\mathbb{Q}$. □

Lause 6.1. *Oletetaan, että $B\subset[0,2\pi]$ on kompakti uniikki joukko, $A\subset[0,2\pi]$ on kompakti joukko ja μ sellainen Borel-todennäköisyysmitta, joka ei sisällä atomeita ja* $\mathrm{supp}(\mu)\subseteq A$. *Tällöin kaikilla $\epsilon>0$ on olemassa sellainen $\delta\in(0,\epsilon)$, että $\delta A+a\not\subseteq B$ millään $a\in\mathbb{R}$.*

Todistus. Jos olisi olemassa sellainen ϵ, että kaikilla $\delta\in(0,\epsilon)$ löytyy luku $a\in\mathbb{R}$, jolle $\delta A+a\subseteq B$, niin vastaavalla tavalla kuten lauseen 2.3(3) todistuksessa voimme määritellä uuden Borel-todennäköisyysmitan joka on kannettu joukossa B. Edelleen lauseen 2.3(3) todistuksessa näimme, että tämän uuden mitan Fourier-muunnoksen kertoimet suppenevat kohti lukua nolla, mikä on ristiriidassa lauseen 1.28 kanssa. Näin ollen lauseen väite on voimassa. □

Tarvitsemme seuraavaa lukuteoreettista lemmaa lauseen 2.4 todistuksessa.

Lemma 6.2. *Olkoon $\theta>1$ Pisot'n luku ja olkoon A renkaan $\mathbb{Z}[\theta]$ äärellinen osajoukko. Tällöin on olemassa sellainen vakio $C>0$, että kaikilla $n\in\mathbb{N}$ ja $t_1,\ldots,t_n\in A$ on voimassa*

$$\textit{joko}\ \sum_{i=0}^{n} t_i\theta^i = 0\ \textit{tai}\ \left|\sum_{i=0}^{n} t_i\theta^i\right|\geq C.$$

Todistus. Olkoot $t_1,\ldots,t_n\in A$. Nyt kaikilla $i\in\{1,\ldots,n\}$ on voimassa, että $t_i=\sum_{l=0}^{m} t_{i,l}\theta^l$ joillain $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ja $t_{i,l}\in\mathbb{Z}$. Olkoot $\theta^{(1)},\ldots,\theta^{(k)}$ luvun θ algebralliset konjugaatit ja $t_i^{(1)},\ldots,t_i^{(k)}$ luvun $t_i\in A$ konjugaatit.

Luvun t_i konjugaateilla tarkoitamme muotoa $t_i^{(j)} = t_{i,m}\theta^{(j)m} + t_{i,m-1}\theta^{(j)m-1} + \cdots + t_{i,1}\theta^{(j)} + t_{i,0}$ olevia lukuja. Oletetaan, että $\sum_{i=1}^n t_i\theta^i \neq 0$. Tällöin luvun $\sum_{i=1}^n t_i\theta^i$ lukuteoreettinen normi (katso [1], luku 9.2)

$$\Big(\sum_{i=1}^n t_i\theta^i\Big)\Big(\prod_{j=1}^k \sum_{i=1}^n t_i^{(j)}\big(\theta^{(j)}\big)^i\Big)$$

on nollasta poikkeava kokonaisluku (katso [1], luku 9, sivu 223). Koska θ on Pisot'n luku, niin

$$\rho := \max_{1\le j\le k} |\theta^{(j)}| < 1.$$

Merkitään $\varrho := \max\{|t_i^{(j)}| \colon 1 \le j \le k, 1 \le i \le n\}$. Nyt

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^n t_i\theta^i\Big| &\ge \frac{1}{\prod_{j=1}^k \sum_{i=1}^n |t_i^{(j)}\big(\theta^{(j)}\big)^i|} \ge \frac{1}{\varrho^k \prod_{j=1}^k \frac{\theta^{(j)} - (\theta^{(j)})^{i+1}}{1-\theta^{(j)}}}\\ &\ge \frac{(1-\rho)^k}{\varrho^k} =: C,\end{aligned}$$

koska $\frac{\theta^{(j)} - (\theta^{(j)})^{i+1}}{1-\theta^{(j)}} \le \frac{\theta^{(j)}}{1-\theta^{(j)}} \le \frac{\rho}{1-\rho} \le \frac{1}{1-\rho}$. □

Lauseen 2.4 todistus. Olkoot $\mathcal{D} := \{a_i \colon i = 1, \ldots, l\}$ ja

$$\Lambda := \Big\{\sum_{i=1}^n t_i\theta^i \colon n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{D} - \mathcal{D}\Big\}.$$

Tällöin $\Lambda - \Lambda = \{\sum_{i=1}^n t_i\theta^i \colon n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in A\}$, missä $A := (\mathcal{D}-\mathcal{D}) - (\mathcal{D}-\mathcal{D})$ on äärellinen. Nyt lemman 6.2 nojalla joukko $\Lambda - \Lambda$ on diskreetti, eli kaikilla $x, y \in \Lambda$ on voimassa, että $|x-y| = 0$ tai $|x-y| \ge C$ jollain vakiolla $C > 0$. Täten välillä $[0,1]$ voi olla enintään $\lfloor 1/C + 1\rfloor$ alkiota, joten joukko $\Lambda \cap [0,1]$ on äärellinen. Huomaa, että aina $0 \in \Lambda \cap [0,1]$.

Oletetaan aluksi, että F on homogeeninen eli $\beta_j = \beta$, jollain $\beta > 0$ ja kaikilla $1 \ge j \ge m$. Oletuksen nojalla F voidaan upottaa affiinisti joukkoon E, eli on olemassa sellaiset luvut $a, \lambda \in \mathbb{R}$, että $\lambda \neq 0$ ja $\lambda F + a \subseteq E$. Koska joukko $-F$ on myös homogeeninen, niin voimme olettaa, että $\lambda > 0$. Lauseen 1.24 nojalla E on uniikki joukko. Täten lauseen 1.25 nojalla joukko F on uniikki ja edelleen lauseen 1.24 nojalla $1/\beta$ on Pisot'n luku. Oletetaan seuraavaksi, että $\log\beta/\log\alpha \notin \mathbb{Q}$ ja osoitetaan, että tällöin päädytään ristiriitaan.

Osoitamme aluksi, että jokaista lukua $u \in (0, 1/\mathrm{diam}(F)]$ kohti on olemassa sellainen luku $c_u \in \mathbb{R}$, jolle

$$uF + c_u \subseteq E + \mathcal{F}, \tag{6.2}$$

missä $\mathcal{F} := \Lambda \cap [0,1]$. Oletetaan siis, että $u \in (0, 1/\mathrm{diam}(F)]$. Nyt

$$\frac{\beta^k}{\alpha^n} = e^{\log \frac{\beta^k}{\alpha^n}} = e^{k \log \beta - n \log \alpha} = e^{\log \alpha (k \frac{\log \beta}{\log \alpha} - n)}$$

ja lemman 1.10 nojalla joukko $\{k \frac{\log \beta}{\log \alpha} - n \colon k, n \in \mathbb{N}\}$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$. Edelleen joukko $\{e^{\log \alpha (k \frac{\log \beta}{\log \alpha} - n)} \colon k, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{\beta^k}{\alpha^n} \colon k, n \in \mathbb{N}\}$ on tiheä eksponenttifunktion kuvajoukossa $]0, \infty[$. On siis olemassa sellaiset parit $(k_i, n_i) \in \mathbb{N}^2$, että $\frac{\lambda \beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} < 1/\mathrm{diam}(F)$ ja $\frac{\lambda \beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} \to u$, kun $i \to \infty$. Jokaisella luvulla $i \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lambda \psi_{1^{k_i}}(F) + a \subset \lambda F + a \subseteq E = \bigcup_{I \in \{1, \ldots, l\}^{n_i}} \phi_I(E).$$

Edelleen $\lambda \psi_{1^{k_i}}(F) + a = \lambda \beta^{k_i} F + d_i$, jollain $d_i \in \mathbb{R}$. Koska $\phi_i(x) = \alpha x + a_i$, niin

$$\phi_I(x) = \alpha^{n_i} x + \sum_{i=0}^{n_i - 1} \alpha^i d_i$$

joillain $d_i \in \mathcal{D}$ ja näin ollen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{I \in \{1, \ldots, l\}^{n_i}} \phi_I(E) &= \{\alpha^{n_i} x + \sum_{i=0}^{n_i - 1} \alpha^i d_i \colon x \in E, d_i \in \mathcal{D}\} \\
&= \alpha^{n_i} \{x + \sum_{i=0}^{n_i - 1} \alpha^{i - n_i} d_i \colon x \in E, d_i \in \mathcal{D}\} \\
&= \alpha^{n_i} \{x + \sum_{j=1}^{n_i} \theta^j d_j \colon x \in E, d_j \in \mathcal{D}\} \\
&= \alpha^{n_i} (E + \mathcal{D}_{n_i}),
\end{aligned}$$

missä $\mathcal{D}_{n_i} := \{\sum_{j=1}^{n_i} d_j \theta^j \colon d_1, \ldots, d_{n_i} \in \mathcal{D}\}$. Koska E on kompakti, niin voimme skaalata sen välille $[0,1]$, jollain kuvauksella $g(x) = \delta x + b$, missä $\delta \neq 0$ ja $b \in \mathbb{R}$. Nyt g on affiinikuvaus, joten voimme upottaa joukon F affiinisti joukkoon $g(E) \subseteq [0,1]$. Voimme siis olettaa jatkossa, että $\mathrm{diam}(E) \leq 1$. Valitaan pienin sellainen luku $c_i \in \mathcal{D}_{n_i}$, että $(\lambda \beta^{k_i} F + d_i) \cap \alpha^{n_i}(E + c_i) \neq \emptyset$. Selvästi luvun c_i valinnan takia $(\lambda \beta^{k_i} F + d_i) \cap \alpha^{n_i}(E + c_i) = \emptyset$ kaikilla $t < c_i$. Olkoon $t > c_i + 1$. Nyt $\mathrm{diam}(\lambda \beta^{k_i} F + d_i) < \alpha^{n_i}$, koska oletimme että $\frac{\lambda \beta^{k_i}}{\alpha^{n_i}} < 1/\mathrm{diam}(F)$, ja $\mathrm{diam}(\alpha^{n_i}(E + c_i)) \leq \alpha^{n_i}$. Lisäksi $\mathrm{dist}(\alpha^{n_i}(E + c_i), \alpha^{n_i}(E + t)) > 0$. Täten

$(\lambda\beta^{k_i}F+d_i)\cap\alpha^{n_i}(E+t)=\emptyset$. Näin ollen $(\lambda\beta^{k_i}F+d_i)\cap\alpha^{n_i}(E+t)=\emptyset$ kaikilla $t\in\mathcal{D}_{n_i}$, joille $t<c_i$ tai $t>c_i+1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\lambda\beta^{k_i}F+d_i &\subseteq \alpha^{n_i}(E+c_i)\cup\bigcup_{\widetilde{c_i}\in\mathcal{D}_{n_i}\setminus\{c_i\}:\, c_i\le\widetilde{c_i}\le c_i+1}\alpha^{n_i}(E+\widetilde{c_i})\\ &=\alpha^{n_i}\big(E+c_i+(\mathcal{D}_{n_i}-c_i)\cap[0,1]\big)\\ &\subseteq\alpha^{n_i}\big(E+c_i+\mathcal{F}\big),\end{aligned}$$

koska $\mathcal{D}_{n_i}-c_i\subseteq\Lambda$, eli $(\mathcal{D}_{n_i}-c_i)\cap[0,1]\subseteq\mathcal{F}$. Siis $\lambda\beta^{k_i}\alpha^{-n_i}F+b_i\subseteq E+\mathcal{F}$, jollakin luvulla $b_i\in\mathbb{R}$. Kun $i\to\infty$, niin $uF+c\subseteq E+\mathcal{F}$, missä c on jonon $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ kasautumispiste. Huomaa, että kasautumispiste on olemassa, koska joukko $E+\mathcal{F}$ on kompakti. Täten väite (6.2) on voimassa.

Koska joukko E on uniikki ja $\mathcal{F}$ on äärellinen, niin lauseen 1.25 nojalla joukko $E+\mathcal{F}$ on uniikki. Selvästi joukko $E+\mathcal{F}$ on myös kompakti. Arvion (6.2) nojalla jokaista lukua $u\in(0,1/\mathrm{diam}(F)]$ kohti on olemassa sellainen $c_u\in\mathbb{R}$, että $uF+c_u\subseteq E+\mathcal{F}$. Lauseen 6.1 nojalla kompakti joukko F ei voi siis kantaa mitään Borel-todenäköisyysmittaa. Nyt normalisoitu $\dim_H F$-ulotteinen Hausdorffin mitta, joka on rajoitettu joukkoon F, on Borel-todennäköisyysmitta, jonka kantaja on F. Tämä on ristiriita, joten lauseen väite on voimassa, kun F on homogeeninen.

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä tapausta, jolloin luvut $\beta_j, 1\le j\le l$, voivat olla erisuuria. Kiinnitetään indeksi j ja tarkastellaan lukua β_j. Koska F ei ole yksiö, niin on olemassa sellainen luku $i\neq j$, että similariteettien ψ_j ja ψ_i kiintopisteet ovat erit. Olkoon F_i iteraatiofunktiosysteemin $\{\psi_i\circ\psi_j,\psi_j\circ\psi_i\}$ attraktori. Tällöin F on homogeeninen. Lisäksi $F_i\subseteq F$ ei ole yksiö ja se voidaan affiinisti upottaa joukkoon E. Näin ollen $\log(\beta_i\beta_j)/\log\alpha\in\mathbb{Q}$. Vastaavasti tarkistelemalla iteraatiofunktiosysteemin $\{\psi_i\circ\psi_j^2,\psi_j^2\circ\psi_i\}$ attraktoria saamme, että $\log(\beta_i\beta_j^2)/\log\alpha\in\mathbb{Q}$. Nyt

$$\frac{\log\beta_j}{\log\alpha}=\frac{\log\beta_j^2\beta_i}{\log\alpha}-\frac{\log\beta_j\beta_i}{\log\alpha}\in\mathbb{Q}$$

kaikilla $1\le j\le l$.

Osoitetaan vielä, että $1/\beta_j$ on Pisot'n luku. Koska iteraatiofunktiosysteemin $\{\psi_j^n\circ\psi_i^m,\psi_i^m\circ\psi_j^n\}$ homogeeninen attraktori F ei ole yksiö ja se voidaan affiinisti upottaa joukkoon E, niin $\beta_j^{-n}\beta_i^{-m}$ on Pisot'n luku kaikilla $n,m\in\mathbb{N}$. Lisäksi, koska $\log\beta_i/\log\alpha\in\mathbb{Q}$ ja $\log\beta_j/\log\alpha\in\mathbb{Q}$, niin $\log\beta_i/\log\beta_j\in\mathbb{Q}$. Täten on olemassa sellaiset positiiviset suhteelliset alkuluvut u,v, että $\beta_i=\beta_j^{u/v}$. Tällöin kaikilla $n\in\mathbb{N}$ luku

$$\beta_j^{-n-u}=\beta_j^{-n}\beta_i^{-v}\tag{6.3}$$

on Pisot'n luku. Merkitään $\xi := 1/\beta_j$ ja olkoon $f(x)$ luvun ξ minimipolynomi. Olkoon $\xi_1, \dots, \xi_k$ luvun ξ algebralliset konjugaatit. Asetetaan $\xi_0 := \xi$. Valitaan sellainen kokonaisluku $p > u$, että

$$e^{2\pi i/p} \notin \{\xi_i/\xi_j \colon 0 \leq i, j \leq k\}.$$

Huomaa, että valinta on mahdollinen, koska joukko $\{\xi_i/\xi_j \colon 0 \leq i, j \leq k\}$ on äärellinen ja $e^{2\pi i/p}$ saa jokaisella luvulla p eri arvon. Jos joillakin $0 \leq i, j \leq k$ on voimassa $\xi_i^p = \xi_j^p$, niin $(\xi_i/\xi_j)^p = 1 = e^{2\pi i}$, eli $\xi_i/\xi_j = e^{2\pi i/p}$. Täten luvut ξ_i^p, $i = 0, \dots, k$ ovat eri suuria. Koska minimipolynomi on jaoton (katso [13], lemma 3.2), niin lauseen 1.9 nojalla jokaista lukua $1 \leq i \leq k$ kohti on olemassa sellainen automorfismi χ_i, että $\chi_i(\xi) = \xi_i$. Olkoon g alkion ξ^p kokonaislukukertoiminen minimipolynomi. Tällöin lemman 1.8 nojalla luvut $\chi_i(\xi^p) = \xi_i^p$ ovat polynomin g nollakohtia. Näin ollen luvut $\xi_i^p, i = 1, \dots, k$ ovat luvun ξ^p algebrallisia konjugaatteja. Arvion (6.3) nojalla muotoa β_j^{-p} oleva luku on Pisot'n luku. Täten ξ^p on Pisot'n luku, joten $|\xi_i^p| < 1$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Täten $|\xi_i| < 1$ kaikilla $1 \leq i \leq k$, joten $\xi = 1/\beta_j$ on Pisot'n luku.

□

7 Yhteys Furstenbergin konjektuuriin

Tässä luvussa todistamme lauseen 2.5.

Lauseen 2.5 todistus. Olkoot $p, q \geq 3$ ja oletetaan, että A on iteraatiofunktiosysteemin $\Phi = \{x/p + a_i\}_{i=1}^l$ attraktori ja B on iteraatiofunktiosysteemin $\Psi = \{x/q + b_j\}_{j=1}^m$ attraktori. Kaikki lukua 1 suuremmat kokonaisluvut ovat Pisot'n lukuja, joten erityisesti p ja q ovat Pisot'n lukuja. Lisäksi $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \subseteq \mathbb{Z}[p]$ kaikilla $1 \leq i \leq l$ ja $b_j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \subseteq \mathbb{Z}[q]$ kaikilla $1 \leq j \leq m$. Määritelmän nojalla $l < p$ ja $m < q$. Lauseen 2.4 oletukset ovat siis voimassa molempien iteraatiofunktiosysteemien Φ ja Ψ suhteen. Oletetaan, että $\log q / \log p \notin \mathbb{Q}$. Tällöin myös $\log p / \log q \notin \mathbb{Q}$. Nyt lauseen 2.4 nojalla joukkoa A ei voida upottaa affiinisti joukkoon B ja joukkoa B ei voida upottaa affiinisti joukkoon A.

Valitsemalla esimerkiksi $V =]0, 1[$ nähdään helposti, että iteraatiofunktiosysteemit Φ ja Ψ toteuttavat avoimen joukon ehdon. Tällöin [4, lause 9.3] nojalla joukkojen A ja B Hausdorffin dimensiot ovat yhtä suuria kuin similariteetti dimensiot. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on C^1-diffeomorfismi ja $x \in \mathbb{R}$, niin tällöin $\delta_{max}(D_x(f^{-1})) = c = \delta_{min}(D_x(f^{-1}))$ jollain luvulla $c > 0$. Näin ollen $\kappa(D_x(f^{-1})) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt lauseen 2.1 nojalla

$$\sup_f \dim_H \big(A \cap f(B)\big) = \sup_{f \in \mathrm{Diff}_1^1(\mathbb{R})} \dim_H \big(A \cap f(B)\big) < \dim_H B,$$

missä ensimmäinen supremum otetaan kaikkien avaruuden $\mathbb{R}$ C^1-diffeomorfismien yli. Toisaalta $\dim_H(A \cap f(B)) = \dim_H(f^{-1}(A) \cap B)$ lemman 1.1 nojalla. Edelleen lauseen 2.1 nojalla

$$\begin{aligned}\sup_f \dim_H \big(A \cap f(B)\big) &= \sup_f \dim_H \big(f^{-1}(A) \cap B\big) \\ &= \sup_{f \in \mathrm{Diff}_1^1(\mathbb{R})} \dim_H \big(f^{-1}(A) \cap B\big) \\ &< \dim_H A.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\sup_f \dim_H \big(A \cap f(B)\big) < \min\{\dim_H A, \dim_H B\}.$$

$\square$

Lähdeluettelo

[1] S. Alaca, K. S. Williams: *Introductory Algebraic Number Theory.* Cambridge University Press, 2004.

[2] G. A. Edgar: *Measure, Topology and Fractal Geometry.* Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[3] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Taylor & Francis Group, LLC, CRC Press, 1992.

[4] K. Falconer: *Fractal Geometry; Mathematical Foundations and Applications.* Wiley, 2014.

[5] D.-J. Feng, W. Huang, H. Rao: *Affine embeddings and intersections of Cantor sets.* J. Math. Pures Appl. 102 (2014) 1062-1079.

[6] H. Furstenberg: *Intersections of Cantor sets and transversality of semigroups, in: Problems in Analysis, Sympos.* Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, pp. 41-59.

[7] P. R. Halmos: *Measure Theory.* Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[8] Vojkan Jaksic: *Topics in Spectral Theory.* <http://www.math.mcgill.ca/jaksic/papers_pdf/spectral.pdf>. 16.2.2016.

[9] A.S. Kechris, A. Louveau: *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness.* Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., vol 128, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[10] J. M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2003.

[11] J. F. Price: *Lie Groups and Compact Groups.* Cambridge University Press, 1977.

[12] R. Salem: *Algebraic Numbers and Fourier Analysis.* D.c.Heath and Co., Boston, Mass, 1963.

[13] I. N. Stewart: *Galois Theory, Second edition.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 1989.

[14] V.A. Zorich: *Mathematical Analysis II.* Käännös kirjasta Matematicheskij Analiz (Part II, 4th corrected edition, Moscow, 2002). Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.