Cantorin joukon suoristuvuus tasossa

LuK-tutkielma
Miika Savolainen
2380207
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2016

Sisältö

Johdanto

Tutkielman ensimmäisessä luvussa esitellään Cantorin joukko ja toisessa luvussa tutustutaan suoristuvuuteen. Kolmannessa luvussa yhdistetään nämä käsitteet ja todistetaan kaksi lausetta Cantorin joukon suoristuvuudesta. Vaikka aihe liittyy vahvasti mittateoriaan, tässä tutkielmassa sitä lähestytään alkeellisemmilla menetelmiltä. Lukijalta vaaditaan siksi vain hyvät perustiedot analyysistä. Esimerkiksi kompaktin joukon ominaisuuksia oletetaan tunnetuksi. Tutkielmassa on käytetty lähteenä teosta [1]. Kirjasta on otettu määritelmiä ja pari huomautusta sekä lemman 2.12 todistus. Muut tulokset olen todistanut itse. Myös kaikki esimerkit ovat minun laatimiani.

1 Cantorin joukon esittely

Määritelmä 1.1. Olkoon $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Merkitään $C_0(\lambda) = I_{0,1} = [0, 1]$. Poistetaan välin $I_{0,1}$ keskeltä avoin väli, jonka pituus on $1 - 2\lambda$. Jäljelle jäävät välit $I_{1,1} = [0, \lambda]$ ja $I_{1,2} = [1-\lambda, 1]$. Merkitään $C_1(\lambda) = I_{1,1} \cup I_{1,2}$. Tätä prosessia voidaan jatkaa. Kun on määritelty välit $I_{n-1,1}, \ldots, I_{n-1,2^{n-1}}$, poistetaan näiden välien keskeltä avoimet välit, joiden pituudet ovat $(1-2\lambda)\lambda^{n-1}$. Näin saadaan suljetut välit $I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}$, joiden pituudet ovat λ^n. Merkitään nyt $C_n(\lambda) = I_{n,1} \cup \ldots \cup I_{n,2^n}$. Tällöin Cantorin joukko on

$$C(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(\lambda).$$

Esimerkki 1.2. Kuuluisin erityistapaus on Cantorin kolmasosajoukko, missä $\lambda = \frac{1}{3}$. Tällöin jokaisessa vaiheessa poistetaan välien keskimmäiset kolmasosat. Kuvassa 1 on seitsemän ensimmäistä vaihetta tästä prosessista.

Kuva 1: $C_n(\frac{1}{3})$, $n = 0, \ldots, 6$

Esimerkki 1.3. Tarkastellaan pistettä $x \in C(\lambda)$. Nyt $x \in C_n(\lambda)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun Cantorin joukon konstruktiossa poistetaan välin $[0, 1]$ keskeltä osa, piste x jää joko vasemman- tai oikeanpuoleiseen jäljelle jäävään

väliin. Kun seuraavassa vaiheessa tämän välin keskeltä poistetaan väli, niin piste x jää sen välin jäljelle jäävistä osista joko vasemman- tai oikeanpuoleiseen väliin. Pistettä x vastaa siis yksikäsitteinen esitys $a_0a_1a_2\ldots$, missä $a_n \in \{$vasen, oikea$\}$ kertoo, kumpaan jäljelle jäävään osaan x kuuluu, kun välin $I_{n,k} \ni x$ keskeltä poistetaan osa. Tällainen esitys on olemassa jokaiselle joukon $C(\lambda)$ pisteelle. Jos Cantorin joukko on numeroituva, niin kaikista pisteistä $x_1, x_2, \ldots \in C(\lambda)$ voidaan muodostaa lista. Tehdään tämä lista edellä määritellyn esityksen avulla:
$$\begin{array}{ll} x_1 & a_0^1a_1^1a_2^1\ldots \\ x_2 & a_0^2a_1^2a_2^2\ldots \\ x_3 & a_0^3a_1^3a_2^3\ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

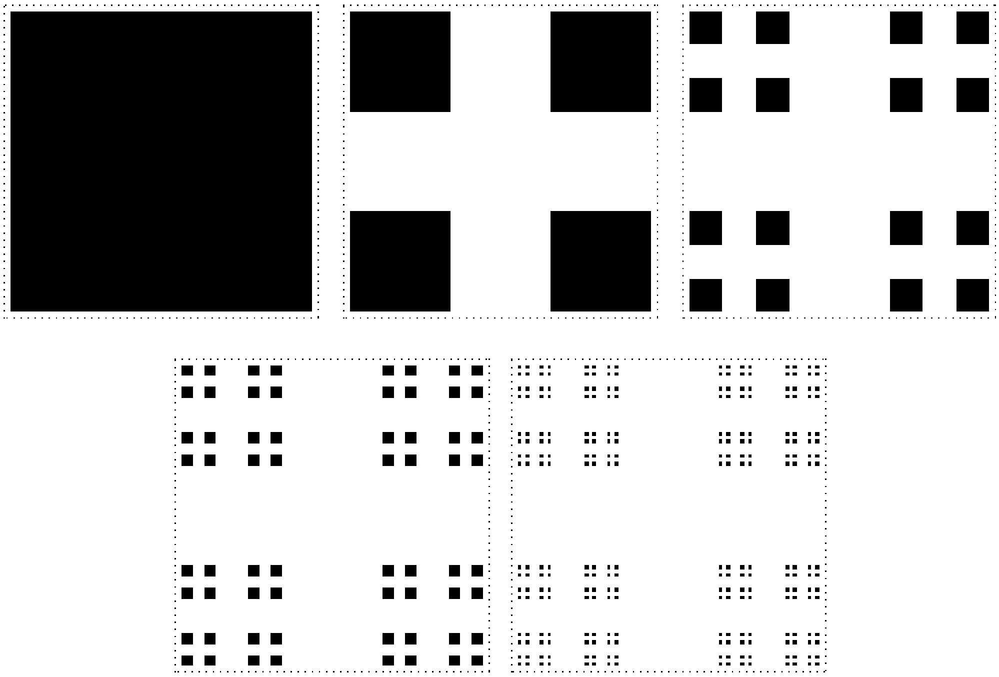
Olkoon x' piste, jolla on sellainen esitys $a_0'a_1'a_2'\ldots$, missä $a_n' \in \{$vasen, oikea$\}$, että $a_n' \neq a_n^{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt $x' \neq x_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$, joten x' ei ole yllä olevassa listassa. Piste x' kuuluu kuitenkin Cantorin joukkoon, joten lista ei sisällä kaikkia Cantorin joukon pisteitä. Siis Cantorin joukko on ylinumeroituva.

Esimerkki 1.4. Korkeammissa ulottuvuuksissa Cantorin joukko määritellään yksiulotteisen tapauksen karteesisena tulona itsensä kanssa. Esimerkiksi kaksiulotteinen Cantorin joukko on $C(\lambda) \times C(\lambda)$. Nyt prosessi aloitetaan yksikköneliöstä $[0,1] \times [0,1]$ ja sen keskeltä poistetaan ristin muotoinen alue, jolloin kulmiin jää neljä neliötä, joiden sivun pituus on λ. Tätä jatketaan ja Cantorin joukko on kaikkien vaiheiden leikkaus kuten yksiulotteisen tapauksenkin kohdalla. Kuvassa 2 on viisi ensimmäistä vaihetta, kun $\lambda = \frac{1}{3}$.

Kuinka suuri on kaksiulotteinen Cantorin joukko? Joukon $C_n(\lambda) \times C_n(\lambda)$ pinta-ala on $4^n\lambda^{2n} = (2\lambda)^{2n}$. Koska $lim_{n\to\infty}(2\lambda)^{2n} = 0$ kaikilla $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, niin kaksiulotteisen Cantorin joukon pinta-ala on 0. Esimerkissä 1.3 osoitettiin, että Cantorin joukko on ylinumeroituva. Myös janalla ja suoralla on nämä ominaisuudet. Kuitenkin suoran voidaan ajatella olevan suurempi kuin jana, sillä suoran pituus on ääretön, kun taas janalla on äärellinen pituus. Myös Cantorin joukon suurutta voidaan tutkia tästä näkökulmasta. Voidaanko Cantorin joukon pisteet yhdistää käyrällä, jonka pituus on äärellinen? Jotta tähän kysymykseen voidaan vastata, on syytä määritellä, mitä tarkoittaa käyrä ja sen pituus.

2 Suoristuvuus ja Lipschitz

Määritelmä 2.1. Käyrä Γ on jatkuvan kuvauksen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, missä $[a,b] \subset \mathbb{R}$ on suljettu väli, kuva. Kuvaus γ on käyrän Γ parametrisointi.



Kuva 2: $C_n(\frac{1}{3}) \times C_n(\frac{1}{3})$, $n = 0, \ldots, 4$

Huomautus 2.2. Koska kuvaus γ on jatkuva ja väli $[a, b]$ on kompakti, niin myös käyrä $\Gamma = \gamma([a, b])$ on kompakti.

Määritelmä 2.3. Käyrän Γ pituus parametrisoinnilla γ on

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|,$$

missä $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ovat välin $[a, b]$ jakopisteitä. Jos $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$ jollakin käyrän Γ parametrisoinnilla, niin käyrä Γ on suoristuva.

Huomautus 2.4. Mikäli parametrisoinnista ei ole epäselvyyttä, voidaan puhua yksinkertaisesti käyrän pituudesta. Parametrisoinnin yhtälöä ei välttämättä tarvitse tuntea, sillä esimerkiksi kaikki injektiiviset parametrisoinnit antavat saman pituuden. Käyrän pituus ei kuitenkaan ole yleisesti yksikäsitteinen, vaan riippuu parametrisoinnista. Siksi on usein hyödyllistä keskittyä tarkastelemaan käyriä, jotka on parametrisoitu luonnollisella tavalla. Määritellään seuraavaksi tällainen parametrisointi.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus ja käyrä Γ sen kuva. Jos $b = \mathcal{L}(\Gamma)$ ja $\mathcal{L}(\gamma([0, t])) = t$ kaikilla $t \in [0, b]$, niin käyrä Γ on parametrisoitu käyrän pituuden suhteen.

Huomautus 2.6. Käyrä voidaan parametrisoida käyrän pituuden suhteen jos ja vain jos se on suoristuva. Jos $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ suoristuvan käyrän Γ eräs parametrisointi, niin voidaan määritellä kuvaus $\gamma : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ asettamalla $\gamma(t) = \gamma'(u)$ kaikilla $0 \leq t \leq \mathcal{L}(\Gamma)$, missä $\gamma'(u)$ on se yksikäsitteinen piste, jolle pätee $\mathcal{L}(\gamma'[a,u]) = t$. Toisaalta käyrän määritelmässä edellytetään, että väli $[a,b]$ on suljettu, joten on oltava $b < \infty$. Jos käyrä Γ on parametrisoitu käyrän pituuden suhteen, niin $b = \mathcal{L}(\Gamma) < \infty$.

Nyt kysymys "Sisältyykö kaksiulotteinen Cantorin joukko suoristuvaan käyrään?"on määritelty. Vastaamisen helpottamiseksi otamme käyttöön vielä yhden hyödyllisen käsitteen.

Määritelmä 2.7. Kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^k$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$, on Lipschitz, jos on olemassa sellainen $L \geq 0$, että $|f(a) - f(b)| \leq L|a-b|$ kaikilla $a, b \in A$.

Esimerkki 2.8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, kuvaus. Tällöin

$$|f(a) - f(b)| = |a - b| \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nyt määritelmässä 2.7 voidaan valita $L = 1$. Siis kuvaus f on Lipschitz.

Esimerkki 2.9. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $f : A \to \mathbb{R}^k$ Lipschitz. Tällöin on olemassa sellainen $L \geq 0$, että $|f(a) - f(b)| \leq L|a-b|$ kaikilla $a, b \in A$. Erityisesti

$$|f(a) - f(b)| \leq L|a - b| < \varepsilon, \text{ kun } |a - b| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Siis valitsemalla jatkuvuuden määritelmässä $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ nähdään, että kuvaus f on jatkuva.

Esimerkki 2.10. Olkoon $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, kuvaus ja $L \geq 0$. Nyt on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $n > L$. Tällöin $1/n^2 \in [0, \infty[$ ja

$$|f(\frac{1}{n^2}) - f(0)| = |\sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{0}| = |\frac{1}{n}| = n|\frac{1}{n^2}| > L|\frac{1}{n^2} - 0|.$$

Siis kuvaus f ei ole Lipschitz, vaikka onkin jatkuva.

Miten Lipschitz-kuvaukset sitten liittyvät käyrän suoristumiseen? Siihen vastaavat seuraavat lemmat.

Lemma 2.11. *Olkoon kuvaus $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Tällöin käyrä $\Gamma = \gamma([a,b])$ on suoristuva.*

Todistus. Koska kuvaus γ on Lipschitz, niin on olemassa sellainen $L \geq 0$, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in [a, b]$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Gamma) &= \sup \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} L|t_i - t_{i-1}| = \sup L \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| \\ &= \sup L \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \sup L(t_n - t_0) = \sup L(b - a) = L(b - a) < \infty\end{aligned}$$

eli käyrä Γ on suoristuva. □

Lemma 2.12. *Olkoon kuvaus* $\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}^n$ *suoristuvan käyrän* Γ *parametrisointi käyrän pituuden suhteen. Tällöin* $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$ *kaikilla* $t_1, t_2 \in [0, b]$. *Erityisesti kuvaus* γ *on Lipschitz.*

Todistus. Olkoon $0 \leq t_2 \leq t_1 \leq b$. Määritelmistä 2.3 ja 2.5 saadaan

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \mathcal{L}(\gamma([t_1, t_2])) = \mathcal{L}(\gamma([0, t_1])) - \mathcal{L}(\gamma([0, t_2])) = t_1 - t_2.$$

□

3 Cantorin joukon suoristuvuus

Nyt olemme valmiit vastaamaan kysymykseen Cantorin joukon suoristuvuudesta tasossa. Käy ilmi, että vastaus riippuu vakion λ arvosta. Pienillä arvoilla on olemassa sellainen suoristuva käyrä, johon Cantorin joukko sisältyy, mutta suurilla ei. Kriittinen arvo on $\lambda = \frac{1}{4}$. Tämä on ymmärrettävä tulos, sillä joukon $C(\frac{1}{4})$ konstruktion jokaisessa vaiheessa poistetaan tasan puolet sen pisteissä. Ennen varsinaisen väitteen todistamista tarvitaan vielä yksi lemma.

Lemma 3.1. *Olkoon* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, *missä* $n = 2, 3, \ldots$, *sellaisia suoristuvia käyriä, että* $\Gamma_1 \cap \Gamma_i \neq \emptyset$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n$ *ja olkoon kuvaukset* $\gamma_1 : [0, l_1] \to \mathbb{R}^n, \gamma_2 : [0, l_2] \to \mathbb{R}^n, \ldots, \gamma_n : [0, l_n] \to \mathbb{R}^n$ *näiden käyrien parametrisoinnit käyrän pituuden suhteen. Jos* $\gamma_i(0) = \gamma_i(l_i)$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n$, *niin käyrälle* $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ *on olemassa sellainen käyrän pituuden suhteen tehty parametrisointi* $\gamma : [0, \sum_{i=1}^{n} l_i] \to \mathbb{R}^n$, *että* $|\gamma(t) - \gamma_1(t)| \leq \sum_{i=2}^{n} l_i$ *kaikilla* $t \in [0, l_1]$ *ja* $\gamma(0) = \gamma(\sum_{i=1}^{n} l_i)$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen. Tarkastellaan ensin tapausta $n = 2$. Konstruoidaan kuvaus, joka kulkee aluksi käyrää Γ_1 pitkin, siirtyy käyrälle Γ_2 jossakin käyrien leikkauspisteessä ja käytyään läpi kaikki käyrän Γ_2 pisteet palaa takaisin käyrälle Γ_1.

Koska $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, niin on olemassa sellaiset pisteet $x \in [0, l_1]$ ja $y \in [0, l_2]$, että $\gamma_1(x) = \gamma_2(y)$. Nyt kuvaus $\gamma : [0, l_1 + l_2] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{kun } t \in [0, x] \\ \gamma_2(t - x + y), & \text{kun } t \in [x, x + l_2 - y] \\ \gamma_2(-x + y - l_2), & \text{kun } t \in [x + l_2 - y, x + l_2] \\ \gamma_1(t - l_2), & \text{kun } t \in [x + l_2, l_1 + l_2] \end{cases},$$

on alussa kuvaillun käyrän kaltainen. Koska kuvaukset γ_1 ja γ_2 ovat parametrisointeja käyrän pituuden suhteen, niin myös kuvaus γ on parametrisointi käyrän pituuden suhteen. Nyt

$$|\gamma(t) - \gamma_1(t)| = |\gamma_1(t) - \gamma_1(t)| = 0 \leq l_2, \text{ kun } t \in [0, x] \text{ ja}$$

$$|\gamma(t) - \gamma_1(t)| = |\gamma(t) - \gamma(t + l_2)| \leq |t - (t + l_2)| = l_2, \text{ kun } t \in [x, l_1].$$

Lisäksi $\gamma(0) = \gamma_1(0) = \gamma_1(l_1) = \gamma(l_1 + l_2)$.

Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $n = k$. Tällöin on olemassa sellainen käyrän $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$ pituuden suhteen tehty parametrisointi $\gamma' : [0, \sum_{i=1}^{k} l_i] \to \mathbb{R}^n$, että $|\gamma'(t) - \gamma_1(t)| \leq \sum_{i=2}^{k} l_i$ kaikilla $t \in [0, l_1]$ ja $\gamma'(0) = \gamma'(\sum_{i=1}^{k} l_i)$. Soveltamalla tapausta $n = 2$ käyriin Γ' ja Γ_{k+1} nähdään, että on olemassa sellainen käyrän $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \Gamma_i$ pituuden suhteen tehty parametrisointi $\gamma : [0, \sum_{i=1}^{k+1} l_i] \to \mathbb{R}^n$, että $|\gamma(t) - \gamma'(t)| \leq l_{k+1}$ kaikilla $t \in [0, \sum_{i=1}^{k} l_i]$ ja $\gamma(0) = \gamma(\sum_{i=1}^{k+1} l_i)$. Siis

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma_1(t)| &= |\gamma(t) - \gamma'(t) + \gamma'(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma(t) - \gamma'(t)| + |\gamma'(t) - \gamma_1(t)| \\ &\leq l_{k+1} + \sum_{i=2}^{k} l_i = \sum_{i=2}^{k+1} l_i \text{ kaikilla } t \in [0, l_1]. \end{aligned}$$

Näin ollen väite pätee myös, kun $n = k + 1$. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n = 2, 3, \ldots$. □

Lause 3.2. *Olkoon* $0 < \lambda < \frac{1}{4}$. *Tällöin on olemassa sellainen suoristuva käyrä* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, *että* $C(\lambda) \times C(\lambda) \subset \Gamma$.

Todistus. Todistetaan väite konstruoimalla sellainen jono käyriä, että jonon raja-arvona saadaan käyrä, joka toteuttaa lauseen ehdot. Muodostetaan käyräjono kaksiulotteisen Cantorin joukon konstruktion avulla. Olkoon välit $I_{n,k}$ kuten määritelmässä 1.1. Kaksiulotteisen Cantorin joukon konstruktiossa olevat neliöt ovat välien karteesisia tuloja. Olkoon käyrät $\Gamma_{n,k \times n,l}$ näiden neliöiden reunat. Tässä käyrän indeksi vastaa neliön määräävien välien indeksejä.

Olkoon vielä kuvaukset $\gamma_{n,k\times n,l}$ edellä määriteltyjen käyrien parametrisoinnit käyrän pituuden suhteen.

Olkoon sitten käyrä Γ_0 neliön $C_0(\lambda)\times C_0(\lambda)$ reuna ja kuvaus γ sen parametrisointi käyrän pituuden suhteen. Olkoon nyt $\Gamma_1=\Gamma_0\cup\Gamma_{1,1\times 1,1}\cup\Gamma_{1,1\times 1,2}\cup\Gamma_{1,2\times 1,1}\cup\Gamma_{1,2\times 1,2}$. Yleisesti asetetaan $\Gamma_n=\Gamma_{n-1}\cup\bigcup_{i=1}^{2^n}\bigcup_{j=1}^{2^n}\Gamma_{n,i\times n,j}$. Näin saadaan jono käyriä, joille pätee

$$\mathcal{L}(\Gamma_n)-\mathcal{L}(\Gamma_{n-1})=\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\mathcal{L}(\Gamma_{n,i\times n,j})=2^n\cdot 2^n\cdot 4\lambda^n=4\cdot(4\lambda)^n.$$

Osoitetaan sitten, että jono $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin. Lemman 3.1 nojalla käyrälle Γ_1 on olemassa sellainen käyrän pituuden suhteen tehty parametrisointi γ_1, että $|\gamma_1(t)-\gamma_0(t)|\leq 4\cdot 4\lambda$ kaikilla $t\in[0,\mathcal{L}(\Gamma_0)]$. Yleisesti nähdään, että käyrälle Γ_n on olemassa sellainen käyrän pituuden suhteen tehty parametrisointi γ_n, että $|\gamma_n(t)-\gamma_{n-1}(t)|\leq 4\cdot(4\lambda)^n$ kaikilla $t\in[0,\mathcal{L}(\Gamma n-1)]$. Koska $\lim_{n\to\infty}4\cdot(4\lambda)^n=0$, kun $0<\lambda<\frac{1}{4}$, niin jono $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono. Koska $[0,1]\times[0,1]$ on kompakti joukko, niin jono $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. Siis raja-arvo $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$ on olemassa.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvauksen γ kuva Γ on suoristuva käyrä. Koska kuvaukset γ_n ovat käyrän pituuden suhteen parametrisoituja, niin lemman 2.12 nojalla $|\gamma_n(x)-\gamma_n(y)|\leq|x-y|$ kaikilla $x,y\in[0,\mathcal{L}(\Gamma_n)]$. Siis

$$|\gamma(x)-\gamma(y)|=\lim_{n\to\infty}|\gamma_n(x)-\gamma_n(y)|\leq\lim_{n\to\infty}|x-y|=|x-y|.$$

Näin ollen kuvaus γ on Lipschitz. Lemman 2.11 nojalla Γ on suoristuva käyrä. Lemmaa 2.11 voidaan käyttää, koska

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(\Gamma_n)=\lim_{n\to\infty}4\sum_{k=0}^{n}(4\lambda)^k=4\sum_{k=0}^{\infty}(4\lambda)^k<\infty,$$

kun $0<\lambda<\frac{1}{4}$.

Osoitetaan lopuksi, että kaksiulotteinen Cantorin joukko sisältyy käyrään Γ. Olkoon $x\in C(\lambda)\times C(\lambda)$. Nyt $x\in C_n(\lambda)\times C_n(\lambda)$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $n\in\mathbb{N}$ on olemassa sellainen neliö $I_{n,a}\times I_{n,b}$, että $x\in I_{n,a}\times I_{n,b}$. Tämän neliön reunalla on sellainen piste $y_n\in\Gamma_n\subset\Gamma$, että $|x-y_n|\leq\lambda^n$. Koska tämä pätee kaikille $n\in\mathbb{N}$, niin saadaan jono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Koska $\lim_{n\to\infty}\lambda^n=0$, niin jonon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raja-arvo on $\lim_{n\to\infty}y_n=x$. Koska käyrä Γ on kompakti, niin jonon raja-arvo kuuluu käyrään Γ. Siis $x\in\Gamma$. Näin ollen $C(\lambda)\times C(\lambda)\subset\Gamma$. $\square$

Yllä oleva todistus toimii vain, kun $\lambda<\frac{1}{4}$. Jos $\lambda\geq\frac{1}{4}$, niin

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(\Gamma_n)=4\sum_{k=0}^{\infty}(4\lambda)^k=\infty.$$

Siis todistuksessa konstruoidun käyräjonon raja-arvo ei tällöin voi olla suoristuva käyrä. Osoitetaan seuraavaksi, ettei ole olemassa suoristuvaa käyrää, johon kaksiulotteinen Cantorin joukko sisältyy, kun $\lambda \geq \frac{1}{4}$.

Lemma 3.3. *Olkoon $\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{1}{2}$ ja välit $I_{n,k} \subset C_n(\lambda)$ kuten määritelmässä 1.1. Jos Γ on sellainen käyrä, että $\Gamma \cap I_{n,k} \times I_{n,l} \neq \emptyset$ kaikilla $I_{n,k} \times I_{n,l} \subset C_n(\lambda) \times C_n(\lambda)$, niin $\mathcal{L}(\Gamma) \geq 3(1-2\lambda)n$.*

Todistus. Olkoon käyrä Γ sellainen, että se leikkaa jokaista joukon $C_n(\lambda) \times C_n(\lambda)$ neliötä ja kuvaus γ sen parametrisointi. Nyt on olemassa pisteet $\gamma(t_{n,k\times n,l}) \in \Gamma \cap I_{n,k} \times I_{n,l}$. Indeksoidaan ne uudestaan valitsemalla indekseiksi luvut $1, 2, \ldots, 4^n$ siten, että $t_i < t_j$ kaikilla $i < j$. Siis käyrä Γ kulkee näiden pisteiden kuvien kautta indeksin määräämässä järjestyksessä. Tällöin käyrän Γ pituudelle saadaan alaraja

$$\mathcal{L}(\Gamma) \geq \sum_{i=1}^{4^n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

Tarkastellaan tämän summan termejä. Jos $\gamma(t_i) \in I_{1,i} \times I_{1,j} \subset C_1(\lambda) \times C_1(\lambda)$ ja $\gamma(t_j) \in I_{1,k} \times I_{1,l} \subset C_1(\lambda) \times C_1(\lambda)$, missä $I_{1,i} \times I_{1,j} \neq I_{1,k} \times I_{1,l}$, niin $|\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| \geq 1-2\lambda$. Koska jokainen neliö $I_{1,k} \times I_{1,l} \subset C_1(\lambda) \times C_1(\lambda)$ sisältää pisteitä $\gamma(t_i)$, niin summa $\sum_{i=1}^{4^n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$ sisältää ainakin $4 - 1 = 3$ termiä, jotka ovat vähintään $1-2\lambda$. Yleisesti jos $\gamma(t_i) \in I_{m,i} \times I_{m,j} \subset C_m(\lambda) \times C_m(\lambda)$ ja $\gamma(t_j) \in I_{m,k} \times I_{m,l} \subset C_m(\lambda) \times C_m(\lambda)$, missä $I_{m,i} \times I_{m,j} \neq I_{m,k} \times I_{m,l}$, niin $|\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| \geq (1-2\lambda)\lambda^{m-1}$. Kun $m \leq n$, niin jokainen neliö $I_{m,k} \times I_{m,l} \subset C_m(\lambda) \times C_m(\lambda)$ sisältää pisteitä $\gamma(t_i)$, joten summa $\sum_{i=1}^{4^n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$ sisältää ainakin $4^m - 1$ termiä, jotka ovat vähintään $(1-2\lambda)\lambda^{m-1}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma) &\geq \sum_{i=1}^{4^n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \\
&\geq (4-1)(1-2\lambda) + ((4^2-1) - (4-1))(1-2\lambda)\lambda \\
&+ \ldots + ((4^n-1) - (4^{n-1}-1))(1-2\lambda)\lambda^{n-1} \\
&= 3((1-2\lambda) + (4^2-4)(1-2\lambda)\lambda + \ldots + (4^n - 4^{n-1})(1-2\lambda)\lambda^{n-1} \\
&= 3((1-2\lambda) + 3\cdot 4(1-2\lambda)\lambda + \ldots + 3\cdot 4^{n-1}(1-2\lambda)\lambda^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 3(1-2\lambda)4^k\lambda^k = 3(1-2\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}(4\lambda)^k \\
&\geq 3(1-2\lambda)\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 3(1-2\lambda)n
\end{aligned}$$

□

Lause 3.4. *Olkoon* $\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{1}{2}$. *Tällöin ei ole olemassa sellaista suoristuvaa käyrää* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, *että* $C(\lambda) \times C(\lambda) \subset \Gamma$.

Todistus. Olkoon $\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{1}{2}$ ja Γ sellainen käyrä, että $C(\lambda) \times C(\lambda) \subset \Gamma$. Joukolla $C(\lambda) \times C(\lambda)$ on yhteisiä pisteitä jokaisen neliön $I_{n,k} \times I_{n,l} \subset C_n(\lambda) \times C_n(\lambda)$ kanssa kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Esimerkiksi jokaisen neliön kulmapisteet kuuluvat joukkoon $C(\lambda) \times C(\lambda)$. Siis käyrä Γ toteuttaa lemman 3.3 ehdot. Näin ollen $\mathcal{L}(\Gamma) \geq 3(1-2\lambda)n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_{n\to\infty} 3(1-2\lambda)n = \infty$, niin $\mathcal{L}(\Gamma) = \infty$ eli käyrä Γ ei ole suoristuva. $\square$

Lähdeluettelo

[1] K. J. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press.