Iivari Elina

Matematiikka musiikinteorian opetuksessa

Kandidaatin tutkielma

KASVATUSTIETEIDEN JA PSYKOLOGIAN TIEDEKUNTA

Musiikkikasvatus

2024

Oulun yliopisto
Kasvatustieteiden ja psykologian tiedekunta
Matematiikka musiikinteorian opetuksessa (Elina Iivari)
Kandidaatintutkielma, 30 sivua
Kesäkuu 2024

Kandidaatintutkielman aiheena on matematiikan käyttö musiikinteorian perusteiden opetuksessa. Matematiikan käytöllä tarkoitetaan matemaattisen päättelyn, mallien ja teorian käyttöä musiikinteorian selittämiseen ja perusteluun. Musiikki on saanut alkunsa matemaattisena tieteenä, ja länsimaalainen musiikinteoria on edelleen rakenteeltaan hyvin matemaattinen. Tutkielmassa avattiin matematiikan ja musiikin yhteistä historiaa, sekä matemaattista musiikinteoriaa käyttäviä pedagogisia artikkeleita. Matemaattinen musiikinteoria on käännös tutkielman aineistossa esille nousseelle termille ”mathematical music theory”.

Tutkimusmenetelmänä käytettiin narratiivisena yleiskatsauksena toteutettua kirjallisuuskatsausta. Tutkimuskysymys oli, voiko matematiikkaa hyödyntää musiikinteorian opetuksessa. Tutkielmassa ei käsitelty STEAM-opettajuutta tai musiikin hyödyntämistä matematiikan opetuksessa.

Tutkielman tuloksissa selvisi, että matemaattista musiikinteoriaa voidaan käyttää musiikinteorian opetuksessa ja sen soveltaminen on mahdollista peruskoulutasolla. Matemaattisen musiikinteorian haasteiksi nousivat mahdollinen resurssipula ja siinä hyödynnetty opetusmalli kokemuksellinen oppiminen, joka vaatii oppilaiden aktiivista osallistumista ja mielenkiintoa. Matemaattisessa musiikinteoriassa hyödynnetty pedagoginen lähestyminen tukee kuitenkin musiikinteorian syvemmän ymmärryksen kehittymistä ja musiikinteoriassa olevien suhteiden ymmärtämistä. Matemaattinen musiikinteoria ei kuitenkaan voi korvata musiikinteoriaa, koska musiikki on ihmistiede.

Avainsanat: kokemuksellinen oppiminen, matemaattinen musiikinteoria, matemaattinen päättely, mathematical music theory, musiikinteoria.

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikan ja musiikin suhde on tunnustettu aikojen alusta lähtien (Locanto, 2019; Mazzola ym., 2016), mutta usein opetuksen kontekstissa puhutaan nimenomaan musiikin hyödyistä matematiikan oppimisessa ja opetuksessa. Matematiikan hyödyntämisestä musiikinteorian opetuksessa puhutaan huomattavasti vähemmän, vaikka oppiaineiden yhteisen historian perusteella matematiikan käyttö musiikinteorian rakenteiden ja käsitteiden selittämiseen vaikuttaa ilmeiseltä. Matematiikan hyödyntämisellä tarkoitetaan tässä tutkielmassa matemaattisten mallien, käsitteiden, matemaattisen päättelyn sekä teorian hyödyntämistä musiikinteorian opetuksessa. Tässä tutkimuksessa aion avata musiikin ja matematiikan yhdistämiseen liittyvää teoriasuuntausta, sekä historiaa tieteenalojen välisestä suhteesta. Avaan tutkielman teoriaosuuden loppuun myös opetuskokonaisuuksia, joissa musiikinteorian opetukseen hyödynnetään matemaattista päättelyä sekä matemaattista musiikinteoriaa.

Alustava tutkimuskysymykseni oli, voiko musiikinteoriaa muuttaa matemaattisiksi kaavoiksi. Olen johtanut tästä oikean tutkimuskysymykseni, voiko matematiikkaa hyödyntää musiikinteorian opetuksessa. Tutkimusaihe on rajattu koskemaan nimenomaan matematiikan hyödyntämistä musiikinteorian opetuksessa. Tarkoituksenani ei ole käsitellä esimerkiksi STEAM-opettajuutta, vaikka aiheesta löytyy suhteellisen paljon tutkimusta ja materiaalia.

Aihetta on tärkeä tutkia, koska sitä ei ole tutkittu vielä tarpeeksi. Matematiikan, matemaattisen päättelyn sekä matemaattisen musiikinteorian hyödyntäminen apuvälineenä musiikinteorian perusteiden opetuksessa on tähän asti pitkälti sivuutettu. Kirjoittaessani tätä tutkielmaa, vuonna 2024, aihepiirin tiimoilta löytyy todella vähän Suomessa tehtyä tutkimusta tai materiaaleja. Tutkimusta matematiikan hyödyntämisestä musiikinteorian opetuksessa ei ole tehty musiikinteorian perusteiden näkökulmaan keskittyen vielä tarpeeksi edes kansainvälisesti. Tutkimusta tehdessä löysin kuitenkin useamman musiikin hyödyntämistä matematiikan opetuksessa kannattavan artikkelin, kuten *Integrating Math and Music: Teaching Ideas* (NOH & HUH, 2015).

Kandidaatin tutkielmani historiaosuuden päälähteenä toimii artikkelikokonaisuus *Twentieth-Century Music and Mathematics* (Illiano & Locanto, 2019) jonka sisältämään neljään artikkeliin tutkielmassa viittaan. Teoksessa käsitellään 1900-luvun merkittävimpiä matemaattisen musiikinteorian teoreetikkoja, sekä matematiikan ja musiikinteorian yhdistämisen teoriaa ja analyysiä. Teoksessa tuodaan esille se, kuinka näkemys musiikista matemaattisena tieteenä on alkanut jo ennen meidän ajanlaskumme alkua ja kuinka matematiikka on aina ollut osa musiikinteoriaa (Locanto, 2019; Mazzola, 2019). Artikkelissa *Music Composition, Mathematics, and the Modernist Legacy* (2019) Massimiliano Locanto kuitenkin huomauttaa, että matemaattisen musiikinteorian kentän määrittämistä hankaloittaa osittain se, että ihmisillä on paljon erilaisia käsityksiä sanasta matematiikka (”mathematics”).

Tämän tutkielman keskeisiksi käsitteiksi muodostuivat **musiikinteoria** ja **matemaattinen musiikinteoria** (mathematical music theory). Matemaattisen musiikinteorian käsitteen yhteydessä avaan lyhyesti käsitteet Mathematical Music Theory ja American Set Theory. Ne ovat tällä hetkellä länsimaalaisen matemaattisen musiikinteorian kaksi keskeisintä koulukuntaa (Mazzola ym., 2016). Näiden lisäksi avaan teoriaosuudessa myös käsitteet **kokemuksellinen oppiminen** sekä **matemaattinen päättely**. Tässä tutkielmassa painotetaan matemaattisen päättelyn suhteen erityisesti George Malatyn (2002) ajatusta siitä, että matemaattisen päättelyn luonne on deduktiiviseksi painottunut, mutta samalla matematiikkaan on sisäänrakennettu vapaus tutkia. Malatyn artikkelissa esiintyneet oppimiskäsitykset ovat yhteneviä matemaattisen musiikinteorian pedagogisissa artikkeleissa esille nousseen kokemuksellisen oppimisen opetusmallin kanssa. Myös tässä opetusmallissa kannustetaan oppijoita tutkimaan opettajan ohjauksen tukemana.

2 Menetelmä

Toteutan tutkimuksen kvalitatiivisena tutkimuksena, käyttäen menetelmänä kuvailevaa kirjallisuuskatsausta. Kirjallisuuskatsauksen avulla pyrin vastaamaan tutkimuskysymykseeni, voiko matematiikkaa hyödyntää musiikinteorian opetuksessa. Olen tietoa hakiessa rajannut ulos aineistot, jotka käsittelivät STEAM-opettajuutta, ja lopullinen tutkimusaineistoni on suurimmaksi osaksi englanninkielistä. Eniten käytin tutkimusta tehdessä hakutermejä math, music ja mathematical music theory.

2.1 Kirjallisuuskatsaus

Kuvaileva kirjallisuuskatsaus on tutkimustapa, jossa muodostettuun tutkimuskysymykseen pyritään vastaamaan valitun valmiin aineiston pohjalta (Kangasniemi ym., 2013; Salminen, 2011; Snyder, 2019). Ari Salmisen julkaisussa *Mikä kirjallisuuskatsaus?* (2011) avataan sitä, mikä on kirjallisuuskatsaus, sekä sitä, mitä kirjallisuuskatsaus sisältää. Teoksessa tuodaan esille, kuinka narratiivisen kirjallisuuskatsauksen avulla pystytään antamaan laaja kuva käsiteltävästä aiheesta, ja kuinka nimenomaan yleiskatsauksen "tarkoituksena on tiivistää aiemmin tehtyjä tutkimuksia" (Salminen, 2011).

Salmisen (2011) julkaisun perusteella tässä tutkielmassa käytetään narratiivista yleiskatsausta. Haluan käsitellä tässä tutkimuksessa lähinnä aihepiirin taustaa sekä niitä tutkimuksia ja teorioita, joille ajatus matematiikan hyödyntämisestä musiikinteorian opetuksessa pohjautuu. Narratiivinen yleiskatsaus soveltuu tähän parhaiten, koska siinä otetaan huomioon kaikki mahdolliset tutkimukset ja näkökulmat, joilla voi olla merkitystä tutkielman aiheen kannalta (Snyder, 2019).

2.1.1 Tiedonhaku

Tämän kirjallisuuskatsauksen aineistohaku suoritettiin seuraavilla tietokannoilla: Google Scholar, Oula-Finna, Finna, Scopus ja Ebsco. Rajasin haut tietokannoissa niin, että lähteet olivat 2000-luvulla tuotettuja. Kuvailevan kirjallisuus katsauksen aineiston tulisi olla alan uusinta tutkimusta, mutta aineiston hakua kuitenkin ohjaa tutkittava ilmiö (Kangasniemi ym., 2013). Rajaamaani tutkimuskysymykseen liittyvää materiaalia on suhteellisen vähän, joten hakutulosten rajaaminen ajallisesti lähemmäs nykyhetkeä olisi ollut hyvin haastavaa.

Käytin tiedonhaussa ensin eri yhdistelmiä sanoista music, music theory, math, mathematics, musiikki ja matematiikka. Kuten tutkielman johdannossa jo mainitsin, en käsittele tässä tutkielmassa STEAM-opettajuutta, joten se on rajattu myös tiedonhaussa pois. Tiedonhaun edetessä huomasin, että sanoilla musiikki ja matematiikka, saadut tulokset eivät vastanneet tutkimuskysymykseeni. Ensimmäisten löytämieni lähteiden ja hakujen perusteella aloin hakea tietoa käsitteestä ”mathematical music theory”. Alustavia lähteitä lukiessa törmäsin myös useasti mainintaan kirjasta *Twentieth-Century Music and Mathematics* (Illiano & Locanto, 2019). Etsin teoksen tietokanta Finnan kautta ja olen tässä tutkimuksessa viitannut neljään kirjan artikkeleista.

2.1.2 Lähteiden arviointi

Lähteiden luotettavuuden takaamiseksi on edellä mainituissa tietokannoissa tehdyt haut rajattu vain vertaisarvioituihin tuloksiin. Artikkelien luotettavuuden arviointia on tehty tarkistamalla Google Scholarista, kuinka usein artikkeleihin on viitattu ja tarkastamalla artikkelien julkaisijoiden Julkaisufoorumi-luokitukset. Tutkimuksessa on pyritty välttämään JuFo-luokituksen 0-saaneita lähteitä, koska tällöin lähde ei todennäköisesti ole peräisin tieteellisestä julkaisukanavasta (Julkaisufoorumi, 2023). Mikäli lähteellä ei ole JuFo-luokitusta se mainitaan lähteen yhteydessä. Olen pyrkinyt mahdollisuuksien mukaan tutustumaan tutkimuksessa viitattujen lähteiden lisäksi teoksissa mainittuihin teorioihin, tutkijoihin ja niiden taustalla vaikuttaviin näkemyksiin tutkimuksen eettisyyden takaamiseksi.

3 Teoreettinen viitekehys

Avaan tässä osuudessa lyhyesti matematiikan ja musiikin yhteistä historiaa länsimaissa. Historiaosuus on painottunut 1900-luvulle lähteenä käytetyn *Twentieth Century Music and Mathematics* (Illiano & Locanto, 2019) ajallisen rajauksen myötä. Alaluvussa kaksi käsitellään tutkimussuunnitelman lähdekirjallisuudesta esille nousseet käsitteet musiikinteoria ja matemaattinen musiikinteoria sekä koulukunnat Mathematical Music Theory ja American Set Theory. Näiden lisäksi avaan kokemuksellisen oppimisen ja matemaattisen päättelyn käsitteet.

Osuuden lopussa esittelen joitain matematiikka musiikinteorian opetuksessa hyödyntäviä opetuskokonaisuuksia. Kochavin, Nollin ja Peck:in artikkelit ovat osa samaa erikoisjulkaisua *Journal of Mathematics and Music* -lehdessä (2014), jossa julkaistiin yhteensä kuusi artikkelia. Näiden artikkelien tarkoituksena on käsitellä matemaattisen musiikinteorian nykytilannetta sekä sen pedagogisia mahdollisuuksia (Yust & Fiore, 2014).

3.1 Matematiikan ja musiikin yhteinen historia

Musiikin ja matematiikan suhde on tunnustettu jo pitkään, ja erityisesti eurooppalaisen musiikinteorian katsotaankin juontavan juurensa pythagoralaiseen traditioon (Locanto, 2019). Pythagoras (n. 571–497 eaa.) oli Antiikin Kreikan filosofi ja matemaatikko. Hänen oppeihinsa perustuvan pythagoralaisen koulukunnan mukaan musiikki oli matemaattisen luonnon kosmologisen periaatteen fyysinen ilmentymä (Mazzola ym., 2016). Koulukunnan jäsenet näkivät siis maailman perustuvan matematiikkaan ja musiikki nähtiin tämän ympäröivän matematiikan havainnoitavana ilmentymänä.

Vielä keskiajalla musiikki nähtiin matemaattisena tieteenalana, ja tämä ajatus pysyi mukana musiikissa vielä tieteellisen vallankumouksen läpi (Locanto, 2019). 1900-luvulla modernismin myötä matematiikan soveltaminen muun muassa musiikin säveltämisessä yleistyi, ja musiikkia alettiin analysoida matemaattisin keinoin. Yksi tämän ajan tunnetuista säveltäjistä ja musiikkiteoreetikoista on eurooppalainen Iannis Xenakis (Locanto, 2019; Mazzola ym., 2016). Hän kehitti stokastisen säveltämisen (Hoffmann, 2019; Squibbs, 2019) ja tiedetysti ensimmäisenä säveltäjänä muotoili sävellyksensä sellaisten matemaattisten mallien pohjalta, jotka nähtiin fysikaalisen todellisuuden yleisen rakenteen selityksinä (Locanto, 2019).

Matematiikan hyödyntäminen musiikissa jatkui, ja 1950-luvun puolivälissä musiikin ja siihen jo aiemmin kehitetyn matemaattisen teorian suhde muuttui elektronisen musiikin synnyn myötä

(Locanto, 2019). Matematiikkaa alettiin hyödyntää musiikin säveltämiseen syntetisaattoreiden, elektronisten soittimien ja myöhemmin ohjelmien kehityksen kautta (Mailman, 2021). Tämä kehitys hitaasti syrjäytti aiemmin mukana olleen matematiikan soveltamisen musiikin sävellyksessä (Locanto, 2019), koska matematiikka oli jo osana elektronisilla laitteilla tehtyä sävellysprosessia, tätä varten tarvittujen elektronisten laitteiden takia.

Milton Babbitts oli yhdysvaltalainen musiikkiteoreetikko, joka kehitti eteenpäin musiikin matemaattista analysointia 1950-luvun jälkeen (Locanto, 2019). Hän kehitti Schönbergin 12-säveljärjestelmälle, eli dodekafonialle, järjestelmällisen teknisen sanaston (Mailman, 2021; Mazzola ym., 2016). Hän myös ehdotti, että musiikilliset järjestelmät ovat vain vaihtoehtoisia teoreettisia rakenteita musiikissa (Mailman, 2021). Musiikilliset järjestelmät eivät hänen mukaansa myöskään ole universaaleja (Mazzola ym., 2016). Babbitts hyödynsi teoreettisessa työssään jo olemassa olevia käsitteitä ja teorioita, mutta hänen tapansa yhdistää teoriaa, analyysia ja sävellystä on vaikuttanut muun muassa yhdysvaltalaisen musiikinteorian ja musiikin analyysin tärkeisiin osa-alueisiin (Locanto, 2019).

Tämän tutkielman tekohetkellä, vuonna 2024, yksi viitatuimpia tutkijoita matemaattista musiikinteoriaa ja matematiikan sekä musiikin yhdistämistä käsittelevissä tutkimuksissa on Guerino Mazzola. Hän on sekä matemaatikko että musiikinteoreetikko ja hänet tunnetaan Mathematical Music Theory käsitteen määrittelijänä (Mazzola ym., 2016). Hän on ollut kirjoittamassa tässä kandidaatintutkielmassa esiintyvistä teoksista kahdessa, ja hän on tutkielman kirjoitus hetkellä *Journal of Mathematics and Music* -lehden toimituskunnassa. Mazzolan matemaattisen musiikinteorian ajatuksia on kritisoitu niiden länsimaalaisen ja tiettyyn ajanjaksoon perustuvan painotuksen vuoksi (Wiggins, 2012). Mazzolan kehittämä teoria matemaattisessa musiikinteoriassa ei huomioi kunnolla muita musiikkikulttuureja ja musiikinteorioita, mikä on ristiriidassa Mazzolan ajatuksen musiikin tieteellistämisestä kanssa (Wiggins, 2012).

3.2 Keskeiset käsitteet

3.2.1 Musiikinteoria ja matemaattinen musiikinteoria

Sana teoria tarkoittaa jotain asiaa selittävää käsitejärjestelmää (Tieteen termipankki, ei pvm.), täten musiikinteorialla tarkoitetaan musiikkia selittävää käsitejärjestelmää. Musiikinteoria on musiikin hahmottamista (Joutsenvirta & Perkiömäki, 2008), ja se voidaan nähdä välineenä, joka tarjoaa musiikista kiinnostuneelle työvälineet harmonian, melodian sekä rytmin käsittelemiseen

(Alencar, 2019). Länsimainen musiikinteoria on ollut erityisen hedelmällinen pohja matemaattiselle ajattelulle sen rakenteen takia (Locanto, 2019). Matematiikan yhdistäminen musiikinteoriaan ei ole vain länsimaisessa musiikinteoriassa oleva ajatus, mutta aineiston, tutkimussuunnitelman sekä tutkimuksen rajaamiseksi, tässä tutkielmassa tarkoitetaan länsimaalaista musiikinteoriaa, kun käytetään sanaa musiikinteoria.

Musiikinteorian rinnalla tässä kandidaatintutkielmassa esiintyy käsite matemaattinen musiikinteoria. Se ei ole virallinen tai vakiintunut suomenkielinen käsite. Käytän sitä vastineena tutkimuksen aineistoissa esiintyvälle englannin kielen termille ”mathematical music theory”. Matemaattinen musiikinteoria on musiikkia selittävä käsitejärjestelmä, jossa käytetään matematiikkaa työvälineenä selittämään musiikissa olevia rakenteita. Matematiikkaa käytetään matemaattisessa musiikinteoriassa kaikessa säveltämisestä musiikin analyysiin (Locanto, 2019). Matemaattinen musiikinteoria voidaan nähdä yläkäsitteenä, ja sen alle kuuluvat koulukunnat American Set Theory ja Mathematical Music Theory.

Mathematical Music Theory [MaMuTh] on Guerino Mazzolan (1947—) vuonna 1981 kehittämä käsite, joka voidaan nähdä pohjoisamerikkalaisen samaa ajatusta kantavan käsitteen eurooppalaisena vastakohtana (Mazzola ym., 2016). Mathematical Music Theory hyödyntää matemaattisia kategorioita, moduuliteoriaa ja algebrallista geometriaa musiikinteorian ilmaisussa (Mazzola, 2019). Syyksi näiden teoriakehysten valinnalle Mazzola kertoo artikkelissaan (2019) tietotekniikan käyttöönoton musiikissa ja perinteisten lähestymistapojen epäonnistumisen musiikinteorian ja sen esittämisen perusongelmien ratkaisemisessa. Mazzolan mukaan eurooppalaisen musiikinteorian matemaattisten juurien takia, MaMuTh voidaan nähdä musiikin alkuperäiseen lähestymistapaan paluuna (Mazzola, 2019).

Yhdysvaltalaisen matemaattisen musiikinteorian perinteeseen kuuluva American Set Theory [AST] on kehittynyt samoihin aikoihin MaMuTh kanssa (Mazzola ym., 2016). Mazzola käyttää kirjassaan (2016) tästä matemaattisen musiikinteorian suuntauksesta termiä AST, mutta pitkälti muissa lähteissä käytettiin teoriasta kuitenkin nimeä Set Theory. AST:n juuret ovat eurooppalaisessa musiikinteoriassa, ja se sisältää edelleen pitkälti samoja teoreettisia lähtökohtia kuin eurooppalainen vastineensa (Mazzola ym., 2016). Teoriaa on viety eteenpäin 80-luvun jälkeen, ja muun muassa David Lewin on sen pohjalta kehittänyt nykyään laajemmin käytössä olevan Transformational Theoryn (Mazzola ym., 2016; Satyendra, 2004). AST:n sisällä vallitsee dikotomia kahden suuntauksen välillä. Toisessa suuntauksessa painotetaan enemmän matemaattisen musiikinteorian avulla musiikin säveltämistä ja teoreetikkona Milton Babbittia, kun taas toisessa matemaattisen musiikinteorian hyödyntämistä analyyttisenä näkökulmana musiikissa ja teoreetikkona Allen Fortea (Mazzola ym., 2016).

Käytän tutkielmassa kattokäsitettä "matemaattinen musiikinteoria" sen vuoksi, että yhdysvaltalainen ja eurooppalainen matemaattinen musiikinteoria ovat nykyään tiiviissä yhteistyössä ja kehittyneet sisällöiltään sekä näkemyksiltään samansuuntaisiksi. Tämän voi huomata *Journal of Mathematics and* Music -lehden toimituskunnan jäsenistöstä, johon kuuluu sekä eurooppalaisia, että yhdysvaltalaisia teoreetikkoja ja tutkijoita. Matemaattista musiikinteoriaa käsittelevissä artikkeleissa ei usein puhuta suuntauksista MaMuTh tai AST vaan sen sijaan käytetään kattokäsitteenä termiä "mathematical music theory". Täten vaikuttaa siltä, että artikkeleiden kirjoittajat eivät sitoudu jompaankumpaan näistä kahdesta koulukunnasta, vaan ennemmin ajatukseen matemaattisesta musiikinteoriasta.

3.2.2 Matemaattinen päättely

Artikkelissaan *A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics* (2017) Jeannotte ja Kieran pyrkivät määrittelemään matemaattista päättelyä teoreettisesti, jotta sitä voitaisiin hyödyntää tehokkaammin pedagogisena apuvälineenä. Heidän mukaansa tarvetta tarkemmalle teoreettiselle määrittelylle on, koska usein käsitettä matemaattinen päättely käytetään ilman tarkempaa määritelmää. Tämän takia matemaattiselle päättelylle löytyy useita eri määritelmiä, jotka korostavat eri asioita. Matemaattinen päättely voidaan kuitenkin rajata prosessiksi, ja se määritellään useimmiten luonteeltaan induktiiviseksi, deduktiiviseksi tai abduktiiviseksi (Jeannotte & Kieran, 2017). Tämä rajaus vaihtelee lähteestä ja tutkijasta riippuen. Jeannotten ja Kieran (2017) mukaan induktiivisessa päättelyssä muodostetaan kerätyn datan pohjalta yleistys. Abduktiivinen päättely puolestaan tarkoittaa tiedettyjen tietojen pohjalta tehtyä "arvausta" (Tieteen termipankki, ei pvm.), ja jotkut näkevät abduktiivisen päättelyn osana induktiivista päättelyä (Jeannotte & Kieran, 2017). Induktiivisen ja abduktiivisen päättelyn perusteella saadun tuloksen ei tarvitse olla totta. Induktion perusteella johdettu vastaus on yleistys, kun taas abduktion avulla voidaan saada aikaan arvaus (Jeannotte & Kieran, 2017).

Matemaattinen päättely liittyy matemaattiseen ajatteluun. Matemaattinen ajattelu on luonteeltaan deduktiivista (Malaty, 2002) ja varmaan osittain tästä syystä myös matemaattinen päättely useimmiten luonnehditaan deduktiivisena. Deduktiivisessa ajattelussa tulee löytää implikaatio, jonka avulla jostain lähtöoletuksesta voidaan tehdä johtopäätös (Malaty, 2002). Deduktiivisessa päättelyssä puolestaan johdetaan vastaus faktojen perusteella, ja toisin kuin induktiivisessa tai abduktiivisessa päättelyssä deduktiivisessa päättelyssä pyritään totuuteen (Jeannotte & Kieran, 2017). Deduktiiviseen päättelyyn liittyy aina erottamattomasti saadun tuloksen ja ratkaisun tarkastelu (Havu-Nuutinen & Järvinen, 2002). Deduktiivisen päättelyn avulla saadun vastauksen tulee olla totta, ja deduktiivinen päättely on tärkeä osa matemaattista todistamista (Jeannotte & Kieran, 2017).

3.2.3 Kokemuksellinen oppiminen

Kokemuksellinen oppiminen on opetusmalli, jossa opettaja ohjeistaa ja toiminnallaan edistää oppilaan omaa tutkimisprosessia (Abdullah ym., 2017). Oppilas itse etsii vastauksia ja luo kytköksiä tiedon välillä, jolloin opettaja ohjeistaa ja osoittaa arvostusta oppijan onnistuessa. Kokemuksellisen oppimisen keskiössä on aina painotus oppijasta aktiivisena tekijänä oppimisprosessissa, ja tärkeänä pidetään oppijan oman merkityksen löytämistä opittavaa aihetta kohtaan (Bollström-Huttunen ym., 2005; Fernström & Kärnä-Behm, 2018).

Alaluvussa kolme esitellyissä matemaattisen musiikinteorian artikkeleissa kannatetaan opetuksessa oppilaskeskeistä lähestymistä, missä oppilas itse tutkii opeteltavaa asiaa. Artikkeleissa kuvailluissa opetuskokonaisuuksissa opettajan tehtävänä on ohjata keskustelua ja toimintaa haluttuun suuntaan. Tärkeimpänä kuitenkin nähdään oppilaille muodostuva syvempi ymmärrys aiheesta, sekä oppilaan oman merkityksen muodostuminen aihetta kohtaan. Näiden kuvauksien perusteella voidaan tulkita artikkeleissa hyödynnettävän kokemuksellista oppimista.

Fernström ja Kärnä-Behmin artikkelissa (2018) esitellään kvalitatiivista tapaustutkimusta, jossa tarkkailtiin kahta käsityönopettajiksi opiskeleville suunnattua kurssia, joissa käytettiin kokemuksellista oppimista pedagogisena välineenä. Tutkimuksessa tarkkailtuja opintojaksoja yhdisti opiskelijoiden oma tutkimuksellinen prosessi ja omien kokemusten pohjalta luotu lopputuotos. Tutkimuksessa todettiin, että kokemuksellinen oppiminen edesauttoi oppilaita ymmärtämään mitä asioita ja arvoja heidän tekemänsä valinnat heidän luomassaan tuotteessa ja siihen liittyvissä suunnitelmissa edustivat (Fernström & Kärnä-Behm, 2018). Täten he saavuttivat jo tuotteen suunnitteluvaiheessa syvemmän ymmärryksen heidän lopullisen tuotoksensa merkityksestä.

Vaikka alaluvun kolme artikkeleissa nähdään piirteitä kokemuksellisesta oppimisesta, ei itse artikkeleissa kuitenkaan määritellä tarkemmin niissä esitellyissä opetuskokonaisuuksissa käytettyjä opetusmetodeja. Täten artikkeleissa hyödynnetty opetusmalli voitaisiin nähdä myös esimerkiksi tutkivana oppimisena. Se on pedagoginen malli, "jonka tarkoituksena on tukea asiantuntijalle tyypillistä tiedonhankintaa" (Bollström-Huttunen ym., 2005, s.29) oppilaissa. Lähestymistapa korostaa oppijan aktiivisuuden ja yhteistyönvaikutusta tutkimuksen suuntaamiseen. Oppilaat voivat työskennellä ryhmissä tai yksin, ja lopullinen kerätty tieto koostetaan yhteen opettajan ohjauksella. Tämä antaa tilan oppilaiden kysymyksille sekä asioiden itsenäiselle tutkimisille (Bollström-Huttunen ym., 2005).

Kummankin opetusmallin haasteena on kuitenkin oppilaiden henkilökohtaisen mielenkiinnon ja ohjautuvuuden painotus. Oppimisprosessin vaatiessa oppijan oman kiinnostuksen ja sitoutumisen, voi oppilaiden saavuttama lopputulos poiketa opettajan opetukseen asettamista tarkoituksista (Fernström & Kärnä-Behm, 2018). Koska oppijoilla on vapaus itse tutkia he voivat päätyä tutkimaan jotain mikä ei ole opetettavan aiheen kannalta olennaista (Abdullah ym., 2017). Tosin, aiheen tutkiminen oppilaiden kanssa sen perinteisen opetuksen sijaan tuottaa ilmiön laajemman ymmärryksen ja siihen liittyvän tiedon lisäksi myös elämyksiä ja onnistumisen kokemuksia oppijalle (Bollström-Huttunen ym., 2005).

3.3 Pedagogisia ideoita matemaattisen musiikinteorian opetukseen

Thomas Noll avaa artikkelissaan (2014) joitain tapoja yhdistää matemaattisia musiikinteorioita perinteiseen musiikinteorian opetukseen. Hän korostaa matemaattisen päättelyn roolia musiikinteorian opetuksessa, ja artikkelin opetuskokonaisuudet keskittyvät intervalleihin ja diatonisen asteikon sointuihin. Artikkelissa esitellään asteikkoteoreetikkojen näkemyksiä diatonisen asteikon intervalleista ja soinnuista (Yust & Fiore, 2014). Noll kannattaa opetustyyliä, jossa oppija on tutkijan asemassa, ja saa itse tutkia sekä löytää vastauksia opetettavasta aiheesta. Artikkelissa käsiteltäviä teorioita ja käsitteitä havainnollistetaan diagrammeilla ja esimerkki opetuskokonaisuuksilla (Noll, 2014).

Jon Kochavi avaa julkaisussaan (2014) kurssisuunnitelmaa musiikinteorian alkeiden opettamisesta alempaa korkeakoulututkintoa suorittaville. Kurssin tarkoituksena on oppia musiikinteorian perustiedot ja sen aikana tutkitaan akustiikkaan, algebraan ja geometriaan perustuvaa järjestelmää ja sen tarjoamia näkökulmia musiikinteoriaan. Kochavi kertoo, että kyseinen kurssisuunnitelma on ollut käytössä ainakin tekstin julkaisuvuonna (2014) Swarthmoren Yliopistossa nimellä *Mathematics and Music* vuodesta 2007 lähtien. Kurssi on suunnattu musiikista kiinnostuneille opiskelijoille ja kurssin aikana pidetään lyhyitä luentoja, joten syvempää ymmärrystä matematiikasta ei vaadita ennen kurssin aloitusta (Kochavi, 2014).

Kochavi avaa julkaisussa (2014) lyhyesti yhden kurssin aikana pidettävän luennon, jonka aiheena ovat etumerkit. Oppilaat ovat aiemmilla luennoilla tutustuneet erilaisiin intervalliaskeliin, ja he ovat muodostaneet asteikkoja W/H-järjestelmän avulla. Järjestelmässä W edustaa kokoaskelta (whole step) ja H puoliaskelta (half step). Oppilaille ei ole kuitenkaan puhuttu mitään asteikkojen luokittelusta tai niiden nimeämisestä niihin kuuluvien ylennysten tai alennusten mukaan. Luennolla painotetaan asteikkojen välisiä suhteita, sen sijaan, että keskityttäisiin siihen, kuinka monta ylennystä tai alennusta tietyssä asteikossa on. Luento etenee keskustelusta pienryhmä työskentelyyn, jossa heillä on työskentelyä tukemassa kysymyslista. Ryhmätyöskentelyn tarkoituksena on, että opiskelijat itse johtavat kvinttiympyrän ja päätyvät näkemään sen asteikkojen välisten suhteiden näkökulmasta (Kochavi, 2014).

Yksi tärkeä esille nouseva ajatus artikkeleissa, joissa käsitellään matematiikka musiikinteorian opetukseen hyödyntäviä opetuskokonaisuuksia, on musiikinteoriassa esiintyvien suhteiden ymmärtäminen, musiikinteorian ulkoa oppimisen sijaan (Kochavi, 2014; Noll, 2014). Opetuskokonaisuuksien opetustyyliin kuuluu oppilaan asettuminen tutkijan rooliin, jolloin oppilas itse on aktiivinen osa oppimisprosessia (Kochavi, 2014).

Siinä missä Kochavin ja Nollin artikkelit argumentoivat enemmän matemaattisen musiikinteorian osa-alueiden opetukseen sisällyttämisen puolesta, samassa erikoisjulkaisussa julkaistu Robert Peckin artikkeli (2014) avaa enemmän aiempien ja nykyisten matemaattisen musiikinteorian opetusmetodien heikkouksia. Robert Peck korostaa matemaattisen musiikinteorian lähestymistapojen joustavuuden ja oppilas tutkijana-lähestymistavan hyötyjä matemaattisessa musiikinteoriassa. Hän tuo artikkelissa kuitenkin esille myös Yhdysvalloissa toteutetun ”New Math” kokeilun ja painottaa erityisesti syitä kokeilun epäonnistumisen takana ((Peck, 2014; Yust & Fiore, 2014).

”New Math” oli Yhdysvalloissa kylmänsodan jälkeen toteutettu uudistus kasvatusjärjestelmässä (Malaty, 2002; Peck, 2014). Se painotti matematiikan tärkeyttä koulutuksessa ja sen tarkoituksena oli valmistaa peruskouluoppilaat (K-12) edistyneemmän matematiikan (advanced mathematics) opiskeluun. Jo 1960-luvun puolivälissä New Math uudistus suurelta osin hylättiin. Peck (2014) korostaa, että opettajien pedagogisen tuen puute oli yksi suuri syy sille, miksi uudistus ei toiminut halutulla tavalla.

New Math pyrki korjaamaan matematiikan opiskelussa vallinneen, myös musiikista löytyvän, katkoksen käytännön ja teoreettisen tiedon välillä (Peck, 2014). Peck tuo esille Patrick McCrelessin (1997) ja Richard Cohnin (1998) tätä näkökulmaa tukevat näkemykset sekä heidän ehdotuksensa sen puolesta, miten tämän vallitsevan katkoksen voisi korjata. Näiden pohjalta Peck argumentoi, että hankalamman ja abstraktimman teorian sisällyttäminen opetukseen voi tukea oppilaiden kiinnostusta sekä heidän syvemmän teorian tuntemuksen kehitystä, kun oppilaat itse saavat löytää teoriassa vallitsevat kytkökset (Peck, 2014). Täten päätyy Peckin kokemuksellista oppimista muistuttavan opetusmallin, joka voidaan tunnistaa nousevan esille myös Nollin ja Kochavin artikkeleissa.

4 Tulokset

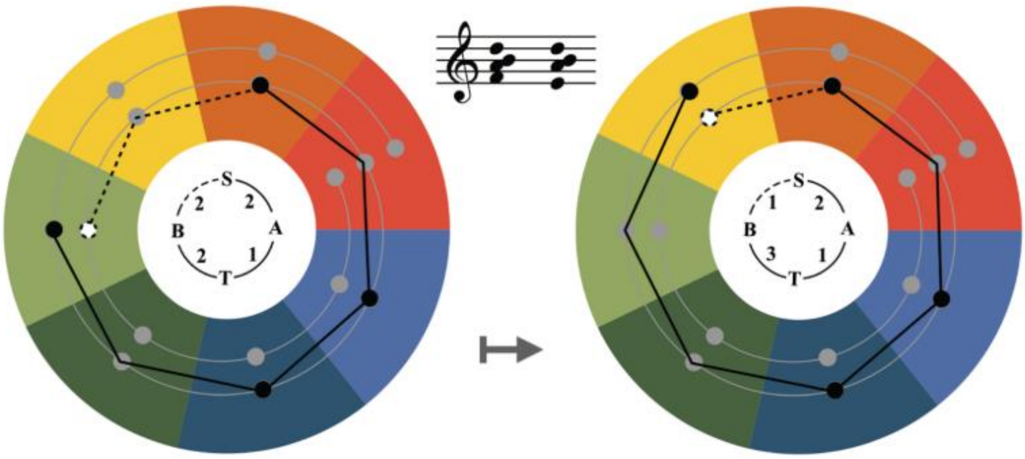
Musiikinteoria on saanut alkunsa matemaattisena tieteenä, ja tämä tausta heijastuu edelleen sen rakenteesta (Kochavi, 2014; Locanto, 2019; Mazzola ym., 2016). Matemaattisessa musiikinteoriassa käytetty pedagoginen malli tukee syvemmän oppimisen kehitystä ja kannustaa musiikinteoriassa olevien suhteiden ymmärrykseen. Avaan muiden tulosten yhteydessä myös matemaattisen musiikinteorian käytön haasteet, jotka nousivat esille Peckin (2014) artikkelista. Matemaattisen musiikinteorian käyttö musiikin opetuksessa on mahdollista peruskoulutasolla, mutta soveltuu parhaiten opetussuunnitelman perusteella 3—6. luokille (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 2014).

Tässä osiossa vastaan tutkimuskysymykseeni, voiko matematiikkaa hyödyntää musiikinteorian opetuksessa.

4.1 Matematiikan käytön mahdollisuudet musiikinteorian opetuksessa

Ilomäen ja Holkkolan (2013) mukaan perinteisen musiikinteorian opiskelun "ongelmallisuus" liittyy sen opetustapaan. Musiikinteorian opetus painottuu usein teorian ulkoa opetteluun, jonka omaksumisen jälkeen voidaan vasta alkaa keskustelemaan ja esittämään kysymyksiä aiheesta. Opetuksessa käytetyissä tehtävissä puolestaan on heidän mukaansa usein liian yksinkertaisia esimerkkejä opetettavasta asiasta (Ilomäki & Holkkola, 2013). Matemaattisessa musiikinteoriassa hyödynnettävässä oppimisen mallissa tavoitellaan syvempää tutkimusta, joka johtaa tutkittavien ilmiöiden merkityksien, niiden välisten suhteiden ja laajempien kokonaisuuksien ymmärtämiseen (Bollström-Huttunen ym., 2005). Tämä kävi ilmi Fernströmin ja Kärnä-Behmin (2018) artikkelissa käsitellyssä kvalitatiivisessa tutkimuksessa. Kokemuksellinen oppiminen mahdollistaa oppilaiden syvemmän ymmärryksen ja musiikinteorian kannalta tärkeän musiikinteoriassa olevien suhteiden hahmottamisen, asioiden ulkoa oppimisen sijaan.

Matemaattisessa musiikinteoriassa painotetaan musiikinteoriassa esiintyviä suhteita. Tämä käy esille muun muassa Nollin (2014) artikkelista, missä hän painottaa intervallien käsittämistä askelväleinä suhteessa niiden pohjasäveleen eli intervalliaskelina. Noll tuo myös esille käsitteen intervallisykli, mikä tarkoittaa asteikkojen ymmärrystä syklinä, joka alkaa pohjasävelestä ja palaa takaisin pohja säveleen (Noll, 2014). Kuva 1. havainnollistaa Nollin (2014) artikkelissa esiteltyä Tonkreisel näyttelyssä ollutta leikkikenttää. Kuvaajasta käy ilmi edellä mainitut ajatusmallit, intervallisykli ja intervallien käsittäminen intervalliaskelina. Ympyrän värit edustavat säveliä, mustat pisteet pelaajia, ja niiden välille piirretyt mustat viivat pelaajien etäisyyksiä toisistaan askelina, jotka on esitetty myös väriympyrän keskellä olevassa valkoisessa ympyrässä numeroina.



Kuva 1. *Figure 5.* (Noll, 2014, s.172)

Siirryttäessä intervalleista laajempiin musiikinteorian kokonaisuuksiin, myös asteikkojen opetuksessa matemaattisessa musiikinteoriassa nähdään tärkeämpänä niiden välisten suhteiden opiskelu. Tämä tuodaan esiin muun muassa Kochavin artikkelissa (2014). Siinä hän korostaa sitä, kuinka oppilaiden on tärkeää ymmärtää asteikkojen väliset erot niiden välisten sidosten kautta. Mikä asteikkojen välillä on samaa, ja mitä pitää muuttaa siirryttäessä asteikosta toiseen (Kochavi, 2014).

Ilomäen ja Holkkolan (2013) mukaan musiikin perusteiden opetuksen suunta on muun opetuksen mukana siirtymässä konstruktivistiseksi ja ”osallisuutta painottavaan oppimiskäsitykseen” (Ilomäki & Holkkola, 2013). He tuovat kuitenkin tekstissään esille sen, kuinka edelleen musiikinperusteiden opetuksessa on parannettavaa, erityisesti musiikinperusteidenmateriaaleissa esiintyvän ”hieman yksioikoisen tavan” takia, jolla musiikinteoriaa opetetaan. Ilomäki ja Holkkola tuovat tekstissä esille erityisesti nimeämistehtävät, joissa olevat esimerkit ovat selkeästi tulkittavissa ja yksinkertaisia eivätkä vastaa oppilaiden todellisessa elämässä kohtaamia vastaavia musiikinteoreettisia rakenteita. Heidän mukaansa ”opetuksessa käytettyjen musiikinteoreettisten käsitteiden tulisi pikemmin joustaa musiikin ja käyttötarpeiden mukaan” (s.208). Liian tiukasti käsitteisiin sidottu opetus voi heidän mukaansa jäädä kauas musiikille ominaisesta joustavasta hahmotuksesta, joka olisi tärkeä osa ”taitavaa” musiikillista toimintaa (Ilomäki & Holkkola, 2013).

Matemaattisen musiikinteorian luonteen omainen reflektoiva ajattelu, joka on ominaista matematiikalle sekä kokemukselliselle oppimiselle ohjaavat matemaattiselle päättelylle ominaiseen deduktiiviseen päättelyyn (Yrjönsuuri, 2004). Yrjönsuuren (2004) mukaan reflektoiva ajattelu edistää laajempien ja syvällisempien oppimisen tuloksien saavuttamista. Matemaattisen musiikinteorian erilainen musiikinteorian ilmaisu voi jo itsessään myös rohkaista oppilaita tutkimaan musiikinteoriaa ja hahmottamaan sitä omalla tavallaan. Perinteisissä musiikinteorian oppikirjoissa kannustetaan opettajia tämän tyyppiseen vaihtoehtoisten hahmotustapojen ilmaisuun (Joutsenvirta & Perkiömäki, 2008). Matemaattisessa musiikinteorian opetuksessa mukana oleva matemaattinen päättely sekä ajattelu voivat tuoda musiikinteorian opetukseen myös vapautta. George Malaty (2002) tuo tekstissään esille matemaattisessa ajattelussa olevan ominaisen vapauden. Ongelmanratkaisijan pitäisi antaa ajatella ongelmaa vapaasti ja yhden tietyn ratkaisun sijaan tulisi oppijoita kannustaa myös löytämään ongelmasta vaihtoehtoisiaratkaisuja sekä uusia reittejä päästä oikeaan ratkaisuun. Malaty ilmaisee tämän tekstissään kehotuksena opettajille ”motivoida lapsia lähtemään löytöretkelle” (Malaty, 2002, s.127—128). Onnistunut tutkimustyö tuottaakin ilmiön laajemman ymmärryksen ja siihen liittyvän tiedon lisäksi myös elämyksiä ja onnistumisen kokemuksia oppijalle (Bollström-Huttunen ym., 2005).

4.2 Matematiikan käytön haasteet musiikinteorian opetuksessa

Peckin artikkelissa (2014) esille tuodussa New Math-kokeilussa oppilaat saivat testata päteviä teoreettisia käsitteitä, mutta opetus ei tehnyt tästä teoriasta heille itselleen merkityksellistä. Peckin mukaan oppilaan tulee itse löytää tälle teorialle sopiva merkitys hänestä itsestään. Näin argumentoidaan myös Ilomäen ja Holkkolan (2013) tekstissä. Opetus tulee sovittaa oppilaskohtaisesti, huomioida heidän ikänsä ja aiempi tasonsa (Peck, 2014). Oppilaiden matemaattisen musiikinteorian käsitteiden ja rakenteiden tutkiminen tulee nähdä yhtä tärkeänä, kuin heidän oikeiden tulosten löytämisensä. Oppilaiden tulee myös tietää miksi he opiskelevat mitä he opiskelevat, ja opettajien tulisi kuunnella oppilaita ja antaa heidän määrittää itse motivaationsa siihen miksi he opiskelevat näitä asioita (Peck, 2014).

New Math kokeilun haasteista voidaan erottaa nousevan esille kaksi erillistä ongelmaa, jotka ovat kummatkin keskeisiä tälle tutkielmalle. Ensimmäinen näistä on näennäinen resurssipula. Peckin mukaan New Math-kokeilu ei itsessään pedagogisena ajatuksena epäonnistunut vaan se epäonnistui, koska opettajat ja oppilaiden huoltajat eivät itse ymmärtäneet opetettavan asian syvempää merkitystä eivätkä täten osanneet ilmaista aiheita oppilaille tarpeeksi selkeästi (Peck, 2014). Opettajat eivät tienneet miten aihetta tulisi opettaa ja sama näennäinen perehdytyksen puute vaikutti myös lasten kotona. Peckin mukaan lasten huoltajatkaan eivät ymmärtäneet kokeilun pedagogista ideaa, joten hekään eivät osanneet auttaa lapsia opiskelussa (Peck, 2014).

Ilomäki ja Holkkola (2013) tuovat esille sen kuinka jo tähänastiset muutokset oppimiskäsityksessä ovat vaatineet paljon työtä uusien materiaalien laatimiseksi. Heidän mukaansa tavoitteena uusissa materiaaleissa on ollut saada oppilaat ”kysymään, tutkimaan ja muovaamaan tietoa” edellä mainitun ulkoa opettelun sijaan (Ilomäki & Holkkola, 2013). Oppilastutkijana keskeiset opetusmallit kuten kokemuksellinen oppiminen vaativat opettajalta asioiden järjestämistä ja keskittymistä olennaiseen (Bollström-Huttunen ym., 2005). Nämä opetusmallit ovat luonteeltaan dynaamisia, koska oppiminen ja opetus ei etene suoraviivaisesti vaan oppilaiden kiinnostus ohjaa sen etenemistä suuresti. Opettajan myönteinen asenne oppimista ja opetettavaa asiaa kohtaan edistää tutkivaa oppimista (Bollström-Huttunen ym., 2005).

New Math -kokeilussa sekä Ilomäen ja Holkkolan (2013) artikkelissa korostettiin oppilaan oman tutkimustyön merkitystä ja heidän henkilökohtaisen kiinnostuksensa painotusta opetuksessa. Tästä nousee esille toinen haaste, joka on oleellinen tämän tutkielman aihepiirin kannalta: oppilaiden mielenkiinto ohjaa opittavaa aihetta ja tutkimusprosessia.

Kuten jo kävi ilmi kokemuksellista oppimista koskevasta teoriaosuuden kappaleesta, oppijoiden henkilökohtainen mielenkiinto opittavaa aihetta kohtaan ja aktiivinen osallistuminen oppimisprosessiin on erittäin tärkeää syvemmän ymmärryksen saavuttamisen kannalta. Kuten Fernströmin ja Kärnä-Behmin (2018) ja Abdullah ym. (2017) artikkeleista kävi ilmi voi tällöin tutkimusprosessin lopputulos poiketa opettajan asettamista tarkoituksista. Opettajan tehtävänä olisikin oppimisprosessin aikana ohjata oppijoita aiheen tutkimisessa, mutta samalla annettava oppilaille tarpeeksi tilaa ja vapauksia itse tutkia, löytää ja muodostaa oma käsityksensä aiheesta.

Tällöin edellä mainitut kokemuksellisen oppimisen ja resurssipulan haaste kohtaavat myös toisensa. Koska kokemuksellisessa oppimisessa olisi tärkeää antaa tilaa oppilaiden kysymyksille ja niiden käsittelylle, tulee kysyä, onko opettajalla aikaa siihen. Ylen uutisessa (2024) OAJ:n mukaan luokkien kokoja ollaan suurentamassa ja suurennettu. Uutisessa OAJ kertoo, että 30 oppilaan luokat ”eivät ole tavattomia Suomen peruskouluissa” ja samassa uutisessa kerrotaan OAJ:n jäsenistön vastanneen kyselyyn helmikuussa 2024. Kyselyssä selvitettiin luokanopettajien huolenaiheita ja kyselystä kävi ilmi, että suuri huolenaihe luokan opettajille on suuret luokka koot. Kyselyyn vastanneesta 1500-jäsenestä, joka seitsemäs työskentelee 30 oppilaan tai suuremmassa luokassa (Lehtola & Hirvonen, 2024). OAJ:n mukaan vuonna 2023 valtion osuus peruskoulujen rahoituksesta on vähennetty vuoden 2013 jälkeen 30.96 %:sta 20.07 % (OAJ, ei pvm.). Samalla kuntien perusopetukseen käytetyt resurssit ovat vähentyneet niiden perusopetuksen budjeteissa. OAJ:n mukaan tämä resurssien pieneneminen on johtanut muun muassa ryhmäkokojen kasvamiseen peruskouluissa ja tuntikehyksien leikkaamiseen (OAJ, ei pvm.).

On myös tärkeää tuoda esille se, että matemaattisten kaavojen luominen teorialle, sen formalisointi, ei tee teoriasta sen parempaa (Volk & Honingh, 2012). Matemaattinen musiikinteoriaa ei voi tällä hetkellä korvata perinteistä musiikinteoriaa. Matemaattinen musiikinteoria ei ole vielä yleisesti käytössä, ja siinä on vielä paljon heikkouksia teoria sisällön yhtenäisyyteen liittyen.

4.3 OPS ja matemaattisen musiikiinteorian pedagogiset sovellukset

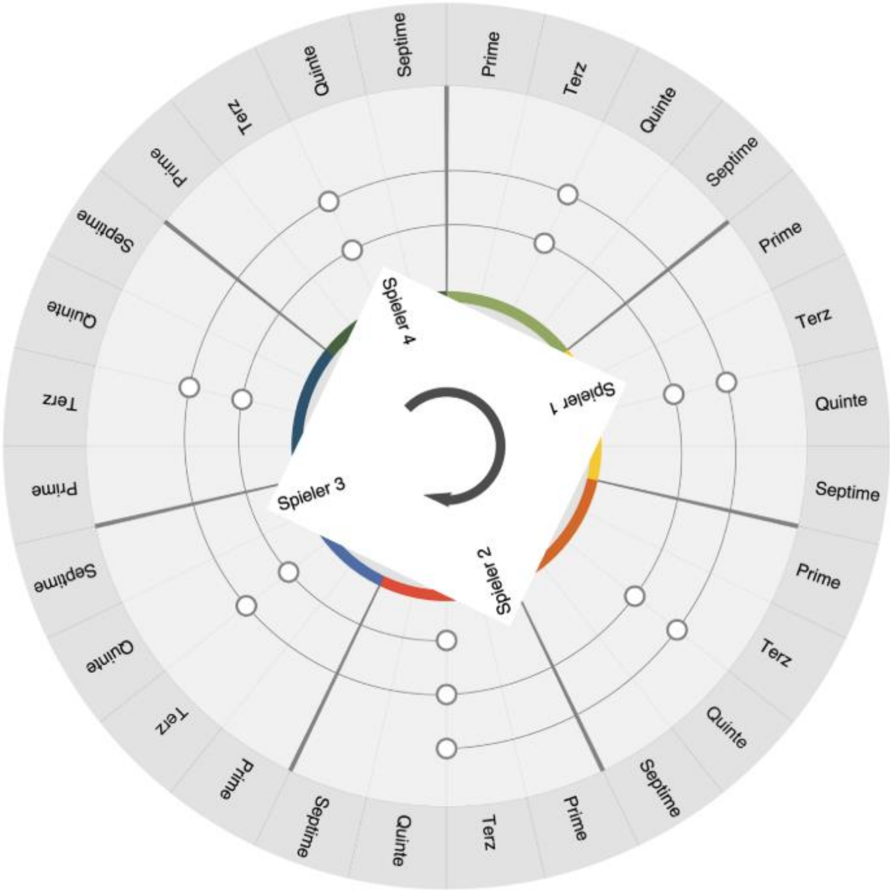
Vuoden 2017 taiteen perusopetuksen opetussuunnitelma perustuu “oppimiskäsitykseen, jonka mukaan oppilas on aktiivinen toimija” (Opetushallitus, 2017). Opetuksessa oppilasta tulisi ohjata sekä kannustaa muun muassa pohtimaan opetettavan aiheen merkitystä heidän omassa elämässään. Vuoden 2014 peruskoulujen opetussuunnitelmassa puolestaan korostetaan yleisesti luovuutta ja oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen tärkeyttä (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet [OPS], 2014). Opetussuunnitelmassa tuodaan esille oppilaan oman reflektion tärkeys oppimistaan kohtaan sekä oppijoiden positiivisten kokemusten ja oppimismotivaation tärkeys osana oppimista.

Vuoden 2014 opetussuunnitelmassa painotetaan musiikin oppiaineessa luokille 1.–2. oppilaiden positiivisen asenteen ja harrastuneisuuden tärkeyttä sekä pitkälti toiminnallista opetustyyliä (OPS, 2014). Musiikinteorian painotus on näillä luokka-asteilla perusasioissa kuten sointivärin hahmottamisessa, josta edetään muun muassa musiikin dynamiikan ja rytmin opiskeluun. Yksi kolmesta 1.–2. luokille suunnatuista musiikin oppiaineen päätavoitteista tavoitteista on “kannustaa oppilasta kokemaan ja hahmottamaan ääniympäristöä, ääntä, musiikkia ja musiikkikäsitteitä liikkuen ja kuunnellen” (OPS, 2014).

OPS:in perusteella matematiikan yhdistäminen musiikkiin soveltuu kuitenkin enemmän 3.–6. luokille (OPS, 2014). Opetussuunnitelmassa puhutaan oppilaiden musiikkikäsitteistön ja täten myös musiikinteorian ymmärryksen syventämissestä sekä musiikinhahmotustaitojen eteenpäin viemisestä näillä luokka-asteilla. OPS:ssa tuodaan myös suoraan esille se kuinka musiikin opetuksessa tulisi tuoda esiin musiikin yhteyksiä muihin oppiaineisiin. Opetussuunnitelmassa yhtenä vaihtoehtona näiden suhteiden opettamiselle ehdotetaan monialaisia oppimiskokonaisuuksia [MOK]. MOK-jaksojen on tarkoitus ohjata oppilaita soveltamaan tietoa ja rakentamaan tietoa yhteisöllisesti. MOK oppimisen mielekkyyden takaamiseksi tulisi opetuksen järjestäjän taata oppilaille "yksi monialainen oppimiskokonaisuus lukuvuodessa" (OPS, 2014).

Viime aikoina musiikin perusteiden opetuksessa on alettu painottaa toiminnan kautta musiikinteoreettisten ilmiöiden luonteen opetusta (Ilomäki & Holkkola, 2013). Tämä ajatus heijastuu myös OPS:ista ja TPOP:sista. Noll esitteli artikkelissaan (2014) ”Tonkreisel"-leikkikentän. Noll on kehittänyt sen intervallisykli ajatuksen pohjalta sekä Jack Douthettin filtered point-symmetries inspiroimana. Tämä Douthettin teoria on musiikin analyysitapa, jossa keskitytään tietyn pisteen ympärillä musiikinanalysointiin sen symmetrian ja rakenteen säännönmukaisuuksien löytämiseksi (Yust, 2022). Tonkreisel-leikkikentän näppäimien eri värit edustavat puhtaita säveliä. Näppäimet esittävät oktaavin intervallisykli ajatuksen mukaisesti jaksona. Asteikon nouseva lineaarinen järjestys säilyy ennallaan, kun samalla intervalliketjusta tulee silmukka. Kohdassa 4.4 esitellyssä Kuva 1.ssä on esitetty, miten Tonkreisel-leikkikentällä pelkistetty sointukulku voidaan jäljittää intervallijaksojen avulla. Kun yhtä nuottia nostetaan sen alla oleva askelväli kasvaa ja sen yläpuolella oleva askelväli pienenee.

Alla olevassa kuva 2. on Tonkreisel-leikkikentän yhteydessä ollut peli. Kuvassa esitetyn ympyrän keskellä on pyörivä neliö, jonka jokaiseen kulmaan asettuu yksi joukkueen pelaajista. Ympyrän kehälle on kirjoitettu diatonisen septimisoinnun sointuasteet priimi, terssi, kvintti ja septimi (prime, terz, quinte ja septime, s.174). Oppijoiden olisi tarkoitus neljän hengen joukkueissa suorittaa heille annettu sointukulku mahdollisimman vähillä liikkeillä, ja niin että vaikka sävelen asema vaihtuu, esimerkiksi priimistä terssiksi, pysyisivät soinnusta toiseen siirryttäessä sävelet mahdollisimman samoina. Oppijat joutuvat näin hyödyntämään tehokasta äänenkuljetusta sointuinversioiden avulla. Toiminnan tarkoituksena on antaa pelaajille mahdollisuus löytää itse sointukäännösten välisen tehokkaan äänenjohtamisen idea. Nollin mukaan heidän tulisi toiminnan kautta ymmärtää miten esimerkki toimii sekä oppia ymmärtämään sointujen välisiä suhteita.



Kuva 2. *Figure 7.* (Noll, 2014, s.174)

5 Pohdinta

Matemaattista päättelyä ja matemaattista musiikinteoriaa on mahdollista ja hyödyllistä käyttää musiikinteorian opetuksessa. Matemaattisessa musiikinteoriassa sisään rakennettu deduktiivinen päättely ja syvempään ymmärrykseen kannustava opetuspedagogiikka tukevat oppijoiden syvemmän ymmärryksen kehitystä musiikinteoriaa kohtaan. Siinä hyödynnettävä pedagoginen lähestymistapa voi myös toimia yhtenä vaihtoehtoisena vastauksena Ilomäen ja Holkkolan (2013) artikkelissaan esiin tuomalle musiikinteorian opetuksessa vallitsevalle ulkoa opettelun perinteelle. OPS:in perusteella matemaattisen musiikinteorian soveltaminen opetuksessa sopisi parhaiten 3.–6.-luokille vaikkakin muun muassa Noll (2014) vaikuttaa kannustavan matemaattisen musiikinteorian sisällyttämistä opetukseen mahdollisimman aikaisin siihen sopivissa aiheissa. Malatyn (2002) mukaan matemaattiselle päättelylle tärkeä deduktiivinen ajattelu alkaa kuitenkin kehittyä lapsissa vasta 11-vuoden iässä.

Tutkimuskysymykseni tarkennus oli haastavaa. Tutkimusta ja teoksia matematiikan hyödyntämisestä musiikinteorian opetuksessa on tehty suhteellisen vähän. Valmiita materiaaleja löysin vain pari ja näissäkin mainittiin usein, että ohjeet ovat suuntaa antavia (Noll, 2014) tai tarkoitettu yliopistotason opintoja varten (Kochavi, 2014).

Tarkoituksenani on jatkaa tutkimusta saman aiheen pohjalta pro gradu -tutkielmassa. Haluaisin syventyä siinä musiikinteorian perusteiden käytännön opetukseen matematiikan avulla. Toiveenani olisi mahdollisesti kehittää joitain yksinkertaisia matemaattiseen musiikinteoriaan pohjautuvia opetuskokonaisuuksia tai apuvälineitä, joita voisi hyödyntää peruskoulussa. Apuvälineiden tai opetuskokonaisuuksien olisi tarkoitus olla tarpeeksi helposti lähestyttäviä, että ne voitaisiin ottaa käyttöön opetuksessa ilman opettajien ylimääräistä syvempää perehdytystä. Tällä pyrittäisiin siis välttämään Peckin (2014) esille tuomat haasteet New Math kokeilusta.

Matemaattisen musiikinteorian teoriatieto on edelleen hajanaista ja samalla yhtä ymmärrystä vaativaa kuin perinteinen musiikinteoria. Noll (2014) avaa lyhyesti joitain hänen esittelemilleen opetuskokonaisuuksille relevantteja teorioita, mutta samalla hän toteaa joidenkin teorioiden kohdalla artikkelissa, että ei avaa näitä aiheita. Hänen mukaansa syvemmälle meneviä teorioita ei ole tarpeellista tai mielekästä avata ihmisille, jotka eivät ole matemaatikkoja, tai jos syvempi ymmärrys ei olisi vaadittavaa aiheen opettamisen oppimisen kannalta. Nollin artikkelista käy myös ilmi, että vaikka opettajan tulee ymmärtää opetettava aihe ja taustatieto ei oppilaiden tarvitse tietää kaikkea aiheeseen liittyvää (Noll, 2014). Näiden syiden lisäksi tarkoituksenani oli tässä kandidaatintutkielmassa tehdä taustoitus matematiikan hyödyntämisestä musiikinteoriassa ilmiönä.

Puhuessamme siitä, voiko musiikinteoriaa muuttaa matemaattisiksi kaavoiksi tai selittää matematiikalla, on hyvä tuoda esille musiikinteoreetikkojen eri lähestymistavat tähän aiheeseen. Osa teoreetikoista kehittää uusia matemaattisen musiikinteorian teorioita ja etsii niihin sopivia esimerkkejä jo tehdystä musiikista. Vastaavaa toimintaa havainnollistavat esimerkiksi Mazzola ja kollegat teoriakirjassa *Cool Math for Hot Music* (2016). Teoksessa matemaattisen musiikinteorian teorioita havainnollistetaan esimerkeillä muun muassa Mozartin ja Beethovenin sävellyksistä.

Toiset teoreetikot puolestaan pyrkivät tutkimaan musiikinteoriassa jo olevia rakenteita matematiikan avulla ja muuttamaan ne matemaattisen musiikinteorian mukaisiksi. Esimerkkinä tästä voidaan tuoda esille ”mathematical scale theory”, joka tutkii soinnun, asteikon, sävelen tai rytmin sisäisiä symmetrisiä rakenteita (Harasim ym., 2020). Tämän teorian avulla on löydetty yleisiä asteikko-ominaisuuksia, joita voi esiintyä kaikissa edellä mainituissa musiikin ominaisuuksissa. Sen avulla on myös kehitetty eteenpäin perinteisen musiikinteorian teoreettisten käsitteiden sanastoa (Harasim ym., 2020).

Näiden kahden musiikin sekä musiikinteorian analysointiin painottuvan lähestymistavan lisäksi haluan myös lyhyesti mainita säveltäjät, jotka hyödyntävät matematiikkaa sävellyksissään, koska tutkielman aineistoissa heitä on mainittu useita. Esimerkiksi tässä tutkielmassa jo aiemmin lyhyesti esille tuotu säveltäjä ja teoreetikko Xenakis, käytti sävellyksessään *Herma* Boolen algebraa luodakseen teoksen rakenteen (Mazzola ym., 2016).

Näistä eri lähestymistavoista ja niiden esimerkeistä voimme nähdä, että musiikinteoriaa voidaan muuttaa matemaattisiksi kaavoiksi. Eri lähestymistapoja vertaillessa on hyvä tuoda esille se, että säveltämistä lukuun ottamatta kahden muun lähestymistavan tarkoituksena on musiikin syvemmän ymmärtämisen mahdollistaminen sekä samalla musiikinteorian formalisointi. Näistä lähestymistavoista pedagogiseen käyttöön soveltuu paremmin jälkimmäinen, vaikkakin tietyt esimerkiksi barokin ajan musiikissa olleet säännönmukaisuudet voidaan esittää oppilaille hyvin myös pelkästään matemaattisen musiikinteorian avulla. Samalla kuitenkin jo valmiin musiikin analysointi tai sen reflektiivinen tarkastelu, oppilaan tai oppilaiden kanssa voi auttaa heitä paremmin hahmottamaan heidän arjessa kohtaamansa musiikin kautta erityisesti musiikinteorian enemmän abstrakteja käsitteitä (Ilomäki & Holkkola, 2013).

Matemaattisen musiikinteorian ei kuitenkaan ole tarkoitus korvata musiikinteoriaa, ja suurin osa teoreetikoistakaan ei argumentoi sen puolesta. Peter Hoffmannin (2019) mukaan Xenakis oli ilmaissut, että koska koneet eivät voi korvata ihmismatemaatikkoja, eivät ne voi korvata myöskään ihmistä musiikin säveltämisessä ja tekemisessä. Vaikka Xenakis oli yksi musiikin konetuottamisen kehittäjistä ja edelläkävijöistä, hän itse määritteli musiikin kulttuurifyysiseksi ilmiöksi. Täten musiikista ei voida ottaa pois sen inhimillistä puolta. Xenakis myös kiisti sen, että eri ihmisten tulisi olla samaa mieltä heidän omista musiikillisista käsityksistään. Musiikki on ihmistiede, täten siitä voidaan olla eri mieltä (Hoffmann, 2019). Noll (2014) korostaakin, kuinka jokainen voi löytää jotain itselleen sopivia kohtia opetukseensa matemaattisesta musiikinteoriasta. Peck (2014) puolestaan kannustaa matemaattista musiikinteoriaa opettavia opettajia löytämään omia luovia ja aktiivisia metodeja opetettavan asian tehokkaaseen kommuunikointiin ja esittelyyn oppilaille.

Kandidaatintutkielman kirjallisuuskatsausta tehdessä törmäsin useasti käsitteeseen ”Schenker theory”. Philip Ewellin artikkelissa (2021) puhutaan siitä, kuinka musiikinteorian kentän inklusiivisestä suunnasta huolimatta, musiikinteorian ala on edelleen suurimmaksi osaksi ”valkoinen” (white). Ewell tarjoaa artikkelissaan selityksiä sille, miksi näin on edelleen. Yhtenä syynä tälle hän näkee musiikinteorian alalla olemassa olevan ”valkoisen rajauksen” (white frame). Ewell mainitsee tästä esimerkkinä saksalaisen musiikinteoreetikko Heinrich Schenkerin, jonka mukaan aiemmin mainittu Schenker theory on nimetty. Ewellin mukaan Schenkerin vahvasta vaikutuksesta yhdysvaltalaisen musiikinteorian kentällä huolimatta hänen rasistiset näkemyksensä on suureksi osaksi jätetty huomiotta tai niiden käsittelyä on pidetty epäolennaisena (Ewell, 2021). Muun muassa tässäkin kandidaatintutkielmassa esiin tuotu teoreetikko Milton Babbitts on kehittänyt Schenkerin musiikinteorioiden pohjalta omia teorioitaan (Grant, 2007).

Ewellin artikkelia (2021) koskevaa lisätietoa etsiessäni huomasin, että suomenkielisiä lähteitä oli saatavilla niukasti. Englanninkielisissä vertaisarvioiduissa lähteissä Schenkerin rasistiset näkemykset usein sivuutettiin, kuten Ewell artikkelissaan mainitsee. Feministisen, erityisesti post-strukturalistisen feministisen pedagogiikan näkökulmasta opetuksessa tulisi kuitenkin ottaa huomioon tiedon taustalla vaikuttavat tekijät, kuten rakenteelliset ja yksilölliset etuoikeudet (Laukkanen ym., 2020). Erojen pedagogiikan mukaan taas turvallisen opiskeluympäristön luomiseksi oli tärkeää pyrkiä purkamaan opetukseen sisäänrakennettu tietyn tiedon ja näkökulman painotus. Hanna Ojala (2020)korostaa tekstissään *Feministisen pedagogiikan teoreettisia suuntauksia*, että tämä opetukseen sisäänrakennettu näkökulma on usein eurooppalaisen, yliopistokoulutuksen saaneen, valkoisen ja keskiluokkaisen miehen näkökulma. Näiden pedagogisten suuntauksien valossa on tärkeää tuoda musiikinopetuksessa esiin historiallinen konteksti, musiikinteoreetikkojen mielipiteet ja heidän työhönsä vaikuttaneet tekijät, jotta voidaan taata oppilaille turvallinen oppimisympäristö ja opetuksen tasa-arvo.

Tutkielma osoitti, että matemaattista musiikinteoriaa ja sen kautta matematiikkaa voidaan hyödyntää musiikinteorian opetuksessa. Matemaattisessa musiikinteoriassa hyödynnetty opetusmalli sekä matematiikkaan sisäänrakennetut piirteet, kuten vapaus tutkia ja deduktiivinen päättely, tukevat syvemmän ymmärryksen kehitystä aihetta kohtaan. Tämä viittaa siihen, että matemaattisen musiikinteorian sisällyttäminen musiikinopetukseen voisi edistää oppilaiden syvemmän ymmärryksen muodostumista musiikinteoriasta. Matemaattisen musiikinteorian soveltaminen peruskoulutason opetukseen on mahdollista, mutta se toimii paremmin sisällytettynä muuhun teoriaopetukseen. On kuitenkin tärkeää ymmärtää, että matemaattinen musiikinteoria ei voi korvata perinteistä musiikinteoriaa, ja että resurssipula voi tehdä aiheen opettamisesta haastavaa.

Lähteet

Abdullah, A., Adil, M., Rosenbaum, L., Clemmons, M., Shah, M., Abrahamson, D., & Neff, M. (2017). Pedagogical agents to support embodied, discovery-based learning. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, *10498 LNAI*, 1–14. https://doi.org/10.1007/978-3-319-67401-8_1/COVER

Alencar, M. S. de. (2019). *Music Science* (M. Gabbouj & T. Stouraitis, Toim.). River Publishers. https://pc124152.oulu.fi:9443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=e000xww&AN=2363401&site=ehost-live&scope=site

Bollström-Huttunen, M., Pyysalo, R., Lonka, K., Raami, A., Sinivuori, E., & Hakkarainen, K. (2005). *Tutkiva oppiminen käytännössä : matkaopas opettajille*. WSOY.

Ewell, P. (2021). Music Theory's White Racial Frame. *Music Theory Spectrum*, *43*(2), 324–329. https://doi.org/10.1093/MTS/MTAA031

Fernström, P., & Kärnä-Behm, J. (2018). Kokemuksellinen oppiminen muotoilupedagogiikan menetelmänä. *Ainedidaktiikka*, *2*(2), 21–37. https://doi.org/10.23988/AD.64203

Grant, M. J. (2007). The Collected Essays of Milton Babbitt - Edited by Stephen Peles, Stephen Dembski, Andrew Mead and Joseph N. Straus . *Music Analysis*, *26*(3), 365–372. https://doi.org/10.1111/J.1468-2249.2008.00263.X

Harasim, D., Schmidt, S. E., & Rohrmeier, M. (2020). Axiomatic scale theory. *Journal of Mathematics and Music*, *14*(3), 223–244. https://doi.org/10.1080/17459737.2019.1696899

Havu-Nuutinen, S., & Järvinen, H. (2002). Ympäristö- ja luonnontiedon opettaminen ja oppiminen ala-asteella. Teoksessa M.-L. Julkunen (Toim.), *Opetus, oppiminen, vuorovaikutus* (Vsk. 2, ss. 135–156). WSOY.

Hoffmann, P. (2019). "My music makes no revolution": thoughts on the role of mathematics in the work of Iannis Xenakis. Teoksessa M. Locanto & R. Illiano (Toim.), *Twentieth-century music and mathematics* (Vsk. 1). Brepols.

Illiano, R., & Locanto, M. (2019). *Twentieth-century music and mathematics*. Brepols.

Ilomäki, L., & Holkkola, M. (2013). Musiikinperusteet ja muuttuva oppimiskäsitys. Teoksessa M.-L. Juntunen, H. M. Nikkanen, & H. Westerlund (Toim.), *Musiikkikasvatus: Kohti refleksiivistä käytäntöä* (ss. 204–224). PS-kustannus.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/S10649-017-9761-8/FIGURES/1

Joutsenvirta, A., & Perkiömäki, J. (2008). *Musiikinteoria. 1*. Modus musiikki.

Julkaisufoorumi. (ei pvm.) *Luokitteluperusteet*. Noudettu 29. lokakuuta 2023, osoitteesta https://julkaisufoorumi.fi/fi/arvioinnit/luokitteluperusteet

Kangasniemi, M., Utriainen, K., Ahonen, S.-M., Pietilä, A.-M., Jääskeläinen, P., & Liikanen, E. (2013). Kuvaileva kirjallisuuskatsaus : eteneminen tutkimuskysymyksestä jäsennettyyn tietoon. *Hoitotiede*, *25*(4), 291–301. https://journal.fi/hoitotiede/article/view/128286

Kochavi, J. (2014). Musica speculativa for the twenty-first century: Integrating mathematics and music in the liberal arts classroom. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 117–123. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.927013

Laukkanen, A., Miettinen, S., Elonheimo, A.-M., Ojala, H., Saresma, T., Ahlfors, J., & Salminen, A. (2020). *Feministisen pedagogiikan ABC : opas ohjaajille ja opettajille*. Vastapaino.

Lehtola, J., & Hirvonen, H. (2024, huhtikuuta 23). Kaisa Lahtisen lapsi joutuu jättiluokalle, koska koulun pitää säästää – OAJ:n mukaan tämä on kasvava trendi. *Yle Varsinais-Suomi*. https://yle.fi/a/74-20083918

Locanto, M. (2019). Music Composition, Mathematics, and the Modernist Legacy. Teoksessa R. Illiano & M. Locanto (Toim.), *Twentieth-Century Music and Mathematics* (Vsk. 1, ss. xi–xxxiii). Brepols.

Mailman, J. B. (2021). INTRODUCTIONOn Milton Babbitt: Progressive Artistic Research, Decorous Pranks, and Pig-Stand Jazz. *Contemporary Music Review*, *40*(2–3), 121–140. https://doi.org/10.1080/07494467.2021.2031066

Malaty, G. (2002). Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetus. Teoksessa M.-L. Julkunen (Toim.), *Opetus, oppiminen, vuorovaikutus* (Vsk. 2, ss. 111–134). WSOY.

Mazzola, G. (2019). The Role of Mathematics for Music in Theory, Composition, and Performance. Teoksessa R. Illiano & M. Locanto (Toim.), *Twentieth-Century Music and Mathematics* (Vsk. 1, ss. 297–314). Brepols.

Mazzola, G., Mannone, M., & Pang, Y. (2016). *Cool Math for Hot Music*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42937-3

NOH, J., & HUH, N. (2015). Integrating Math and Music: Teaching Ideas. *Research in Mathematical Education*, *19*(3), 177–193. https://doi.org/10.7468/jksmed.2015.19.3.177

Noll, T. (2014). Getting involved with mathematical music theory. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 167–182. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.943818

OAJ. (ei pvm.). *Koulutuksen rahoitus*. Noudettu 6. toukokuuta 2024, osoitteesta https://www.oaj.fi/politiikassa/koulutuksen-rahoitus/#varhaiskasvatus-esi-ja-perusopetus

Opetushallitus. (2015). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Opetushallitus.

Opetushallitus. (2017). *Taiteen perusopetuksen yleisen oppimäärän opetussuunnitelman perusteet 2017*. www.oph.fi

Peck, R. W. (2014). Mathematical music theory pedagogy and the ”new Math”. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 145–150. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.927115

Salminen, A. (2011). *Mikä kirjallisuuskatsaus? : johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppeihin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin*. Vaasan yliopisto. http://www.uwasa.fi/materiaali/pdf/isbn_978-952-476-349-3.pdf

Satyendra, R. (2004). An Informal Introduction to Some Formal Concepts from Lewin's Transformational Theory. *Journal of music theory*, *48*(1), 99–141. https://doi.org/10.1215/00222909-48-1-99

Snyder, H. (2019). Literature review as a research methodology: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*, *104*, 333–339. https://doi.org/10.1016/J.JBUSRES.2019.07.039

Squibbs, R. (2019). Xenakis's Method of Stochastic Composition: A Brief Introduction. Teoksessa R. Illiano & M. Locanto (Toim.), *Twentieth- Century Music and Mathematics* (Vsk. 1, ss. 23–39). Brepols.

Tieteen termipankki. (ei pvm.) *Filosofia:teoria*. Noudettu 28. helmikuuta 2024, osoitteesta https://tieteentermipankki.fi/wiki/Filosofia:teoria

Tieteen termipankki. (ei pvm.). *Kielitiede:abduktiivinen päättely*. Noudettu 14. huhtikuuta 2024, osoitteesta https://tieteentermipankki.fi/wiki/Kielitiede:abduktiivinen_p%C3%A4%C3%A4ttely

Volk, A., & Honingh, A. (2012). Mathematical and computational approaches to music: Challenges in an interdisciplinary enterprise. *Journal of Mathematics and Music*, *6*(2), 73–81. https://doi.org/10.1080/17459737.2012.704154

Wiggins, G. A. (2012). The future of (mathematical) music theory. *Journal of mathematics and music (Society for Mathematics and Computation in Music)*, *6*(2), 135–144. https://doi.org/10.1080/17459737.2012.698151

Yrjönsuuri, R. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa *Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*.

Yust, J. (2022). Jack Douthett and mathematical music theory. *Journal of mathematics and music (Society for Mathematics and Computation in Music)*, *16*(3), 249–252. https://doi.org/10.1080/17459737.2022.2143589

Yust, J., & Fiore, T. M. (2014). Introduction to the special issue on pedagogies of mathematical music theory. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 113–116. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.951188