Korkeamman asteen polynomifunktio lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Milla Ylikulju
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto

Kevät 2024

Sisällys

Johdanto 3

1 Tavoitteet 4

1.1 Habits of Mind 4

1.2 Opetussuunnitelma 4

2 Oppikirja 5

2.1 Tehtävätyypit 6

2.1.1 Pohdintatehtävät ja kotitehtävät 7

2.2 Korkeamman asteen polynomifunktio 8

2.2.1 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys 9

2.2.2 Korkeamman asteen yhtälö 12

2.2.3 Korkeamman asteen epäyhtälö 14

A Oppimateriaali 18

A.1 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys 18

A.2 Korkeamman asteen yhtälö 24

A.3 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö 29

B Opettajan opas 34

B.1 Ajankäytön suunnitelma 34

B.2 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys 34

B.2.1 Korkeamman asteen yhtälö 36

B.2.2 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö 38

C Tehtävien vastaukset 41

Johdanto

Matematiikan opetuksen luonne on muuttunut viime vuosikymmeninä. Ennen opetuksen pääpaino oli algebrallisissa toimenpiteissä, nykyään teknologia ja geometriaohjelmat auttavat siinä joissain määrin [2]. Perinteistä oppikirjapohjaista lähestymistapaa pidetään vanhanaikaisena, sillä se painottuu rutiininomaiseen laskemiseen sekä sääntöjen pänttäämiseen. Matemaattiset määritelmät tulisi ennemmin ymmärtää, kuin opetella ulkoa [5]. Matemaattiset faktat tulisi saada tallennettua pitkän aikavälin muistiin, jossa ne ovat mahdollisesti opiskelijoiden saatavilla aiempien oppimisten muodossa [8].

Lukion opetussuunnitelma uudistui vuonna 2019, jonka myötä sen tavoitteet ovat muuttuneet. Lukiokoulutuksen on tarkoitus olla yleissivistävä ja valmistaa opiskelijaa korkeakoulua varten [9]. Uusi opetussuunnitelma on ottanut isoja askelia kohti modernia opetustapaa. Siinä korostetaan oppilaslähtöisyyttä, erilaisia opetusmenetelmiä ja oppimiseen oppimista.

Tämä Pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelman didaktinen oppikirjagraduprojektia, missä suunnitellaan opetussuunnitelman mukainen lukion pitkän matematiikan kurssin MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt oppikirja. Kurssin sisältö perustuu tämänhetkiseen lukion opetussuunnitelmaan sekä vertaisarvioituihin tieteellisiin tutkimuksiin matematiikan opettamisesta. Tämän oppikirjan tavoitteena on opettaa opiskelijaa oppimaan, havainnoimaan ja luomaan tietoa. Oppikirjassa pyritään antamaan parempi kuva matematiikasta tieteenä sekä motivoimaan laajempaan ymmärrykseen matematiikan periaatteista.

Yhtälöiden ja epäyhtälöiden sieventämisen ja ratkaisemisen ajatellaan olevan yksi perinteisimmistä matemaattisista toimenpiteistä toisen asteen koulutuksessa, sillä siihen liittyy tavalliset algebralliset ja aritmeettiset taidot. Tämä tutkielma sisältää osion korkeamman asteen polynomifunktioista, -yhtälöistä ja -epäyhtälöistä. Tutkielmassa on perustelu- ja oppikirjaosa, mikä sisältää oppimateriaalin, opettajan oppaan sekä vastaukset kirjan tehtäviin. Perusteluosassa esitellään oppikirjaprojektin tavoitteet ja perustellaan kirjaan tehdyt valinnat kappale kerrallaan. Oppimateriaaliin kuuluu kolme kappaletta: Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys, Korkeamman asteen polynomiyhtälö ja Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö. Oppimateriaali koostuu pääosin opiskelijalähtöisistä pohdintatehtävistä, joiden tukena on esitetty joitakin lauseita ja esimerkkejä. Jokaisesta aihealueesta on lisäksi neljä harjoitustehtävää ja vastaukset niihin löytyy tutkielman lopusta. Opettajan opas sisältää ajankäyttösuunnitelman sekä vastaukset kirjan pohdintatehtäviin.

1 Tavoitteet

Oppikirjan tavoitteet on valittu siten, että ne kannustavat opiskelijoita omaan ajatteluun yrityksen ja erehdyksen taktiikalla. Pyrkimyksenä on antaa opiskelijoille aito tutkimuskokemus, ei niinkään opettamalla spesifejä tapoja käyttää kaavoja ja oppia ulkoa tekniikoita tavoitellen ainoastaan oikean vastauksen löytämistä. Tarkoituksena on kannustaa opiskelijaa matemaattiseen ajatteluun, ilmiöiden syvempään pohdintaan ja matematiikan luonteen ymmärtämiseen.

1.1 Habits of Mind

Matematiikan opetuksen tavoitteena peruskoulussa ja lukiossa tulisi olla oppilaiden matemaattisen ongelmanratkaisukyvyn kehittäminen [3]. Oppilaille tulee antaa työvälineitä, joita he voivat hyödyntää matemaattisesssa ongelmanratkaisussa, ymmärtämisessä sekä uuden matematiikan keksimisessä. *Habits of Mind* -artikkelissa on käsitelty erilaisia matemaattisia ajatteluprosesseja, joista tässä kirjassa pyritään kehittämään visualisointia sekä lausekkeiden pilkkomista ja kasaamista.

Visualisoinnin avulla rohkaistaan opiskelijoita kokeilemaan ja harjoittamaan säännönmukaisuuden etsimistä [3]. Tässä tutkielmassa keskitytään visualisoimaan asioita, jotka edistävät opiskelijan matemaattista ajattelua, mutta eivät ole välttämättä suoraan helposti visualisoitavissa. Tällaisia voivat olla esimerkiksi kahden binomin kertolasku, tekijöihin jako ryhmittelemällä tai korkeamman asteen polynomifunktion graafinen esitystapa. Visualisoinnin on todettu auttavan opiskelijoita matemaattisten ongelmien hahmottamisessa ja niistä selviämisessä, mutta usein opiskelijat käyttävät apunaan visuaalisuutta ainoastaan sitä erikseen pyydettäessä. Tässä oppikirjassa käytetään apuna GeoGebra-geometriaohjelmaa. Sen avulla harjoitellaan tulkitsemaan kuvaajia, löytämään niistä säännönmukaisuuksia ja tekemään päätelmiä sekä oletuksia teorioista. Opiskelijat voivat keskittyä matemaattisiin ideoihin konkreettisten tuotosten sijaan. GeoGebra toimii opetuksessa tukena havainnoida matematiikkaa ja on suuri apu pohdintatehtävissä, mutta graafinen tarkastelu ei korvaa matemaattisen tekstin tuottamisen sekä ilmiöiden todistamisen tärkeyttä.

Toinen tavoite on lausekkeiden pilkkominen ja kasaaminen, alkulukuhajotelma on esimerkki tästä. Alkuluvut ovat ikään kuin rakennuspalasia, joiden tulona voidaan esittää mikä tahansa positiivinen kokonaisluku. Algebrassa ajatellaan jokaisen tarkasteltavan kohteen olevan yhdistelmä hyvin yksinkertaisia palasia [3]. Tässä tutkielmassa keskitytään jakamaan korkeamman asteen polynomeja tekijöihin, jolloin tekijät ovat näitä rakennuspalasia, joiden avulla polynomeja voidaan esittää. Tässä oppikirjassa korkeamman asteen polynomiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä ratkaistaankin pääosin tekijöihin jakamisen avulla.

1.2 Opetussuunnitelma

Vuonna 2019 on julkaistu uusi lukion opetussuunnitelma, jonka mukaan lukion aloittavien opiskelijoiden opetus on järjestetty 1.8.2021 alkaen ja käyttöönotto on edennyt vuosiluokka kerrallaan. Uudistuksen tavoitteena on vahvistaa koulutuksen laatua, nostaa koulutustasoa ja korkeakoulutettujen osuutta Suomessa, sillä tulevaisuudessa tarvitaan asiantuntijaosaamista sekä korkeakoulutettua työvoimaa. Lukiokoulutuksen vetovoimaa halutaan lisätä yleissivistävänä, korkeakouluihin jatko-opintoihin valmentavana koulutusmuotona. Lisäksi halutaan sujuvoittaa siirtymistä toisen asteen opinnoista korkea-asteelle. Tavoitteisiin pyritään korkeakouluyhteistyön, oppiainerajat ylittävien opintojen sekä yksilöllisempien ja joustavampien opintopolkujen ja ohjauksen avulla. [9]

Matematiikan opetuksessa tulisi käyttää hyväksi opiskelijoiden kiinnostuksen kohteita ja keksiä tapoja ratkoa niitä matematiikan avulla. Vaihtelevat työtavat palvelevat monia erilaisia oppijoita. Opiskelijat voivat esimerkiksi yksin opiskelun sijaan työskennellä pareittain tai ryhmissä ja siten vahvistaa vuorovaikutusosaamista. Oppimisympäristöjä voidaan mahdollisuuksien mukaan vaihdella tai muunnella ja tehtävätyyppejä modifioida. Opetustavat tulee valita yhdessä opiskelijoiden kanssa ja niistä keskustelemiseen olisi hyvä käyttää aikaa. Opetustilanteiden tavoitteena olisi vahvistaa opiskelijan omaa ajattelua, herättää kysymyksiä havaintojensa pohjalta, tekemään oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. [9]

Opetussuunnitelmassa painotetaan vastuun ottamista omasta oppimisesta ja omatoimisuutta yhteisöllisen työskentelyn rinnalla. Lisäksi painotetaan luovaan ajatteluun ja tutkimiseen perustuvaa oppimista. Tässä oppikirjassa pyritään minimoimaan opettajan monologeja ja pienentämään hänen rooliaan opetuksessa, siirtämään vastuuta opiskelijalle itseohjautuvuutta tukien sekä edistämään yhteistoiminnallisuutta ja osallisuutta. Opettajan rooli on avustaa opiskelijoita eteenpäin omien ajatustensa ja ongelmanratkaisuideoidensa kehittämisessä esimerkiksi johdattelevien kysymysten avulla. Myös digitaalisia työvälineitä tulisi hyödyntää kattavasti, mikä näkyy oppikirjassa pääosin GeoGebran vahvalla läsnäololla ongelmanratkaisuprosesseissa. GeoGebra on käytössä myös ylioppilaskirjoituksissa, joten sen käytön harjoittelemista on syytä opetella siitäkin syystä.

Opetussuunnitelmassa on asetettu viisi tavoitetta tälle kurssille, joista tässä osiossa toteutuu seuraavat: moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu ilmiöiden matemaattiseen mallintamiseen polynomifunktioiden avulla, tuntee niiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä sekä tietää polynomifunktion nollakohtien ja polynomin tekijöiden välisen yhteyden
- osaa ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä
- osaa käyttää ohjelmistoja polynomifunktioiden tutkimisessa sekä polynomiyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusten yhteydessä. [9]

2 Oppikirja

Tämän tutkielman oppikirjaosio käsittelee lukion pitkän matematiikan funktiot ja yhtälöt MAA2-kurssin aihealuetta korkeamman asteen polynomifunktiot. Aihealue on jaettu kolmeen moduuliin ja sille on varattu kolme 75 minuutin mittaista oppituntia.

Ensimmäinen kappale käsittelee polynomin nollakohtien ja tekijöiden välistä yhteyttä, korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajia sekä niiden nollakohtien ratkaisemista graafisesti. Toisessa kappaleessa harjoitellaan polynomifunktioiden jakamista tekijöihin yhteisen tekijän, ryhmittelyn ja muistikaavojen avulla sekä ratkaistaan polynomiyhtälöitä tulon nollasäännöllä. Kolmas kappale käsittelee korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä ja niiden ratkaisemista edelleen samoja menetelmiä käyttäen.

Kappaleet sisältävät tunnilla käytävän teoriaosuuden sekä kotona tehtäviä harjoitustehtäviä. Tunnilla käytävä osio on suunniteltu niin, että opetus tapahtuu mahdollisimman suurelta osin opiskelijalähtöisesti ja uusi asia opitaan pohdintatehtävien avulla. Oppilaat ratkovat tarkoin suunniteltuja tehtäviä yksin tai eri suuruisissa ryhmissä. Tehtävistä on tarkoituksena hoksata jokin uusi asia, jolloin oppiminen tapahtuu opiskelijan omassa ajatusprosessissa suoraan kirjasta lukemisen sijaan. Mukana on lauseita, huomautuksia, esimerkkejä ja mallitehtäviä oppimisen varmistamiseksi ja väärinymmärryksien minimoimiseksi. Kotitehtävät ovat valittu mahdollisimman monipuolisesti teoriaosuuteen liittyen.

2.1 Tehtävätyypit

Oppikirjaan on valittu muutama yhteinen tehtävätyyppi, joita esiintyy pohdinta- ja harjoitustehtävissä. Tehtävätyypit perustuvat Swanin artikkeliin, jossa hän tutkii tehokkaampia tapoja opettaa ja oppia matemaattisia konsepteja ja strategioita [10]. Valitut tehtävätyypit ovat usean esitystavan tulkitseminen ja vertailu, väitteiden totuuden tarkistaminen ja virheiden korjaaminen. Oppiminen pyritään tekemään helpoksi käyttämällä rakenteeltaan samantyylisiä tehtävätyyppejä läpi oppikirjan. Hyviä tehtävätyyppejä olisi muitakin, mutta ennalta tuntematon kysymyksen asettelu toisi tehtävään turhaa lisähaastetta [8]. Opettaminen pyritään pitämään kurssin sisällöissä ennemmin kuin uusien tehtävätyyppien opettelussa. Näiden tehtävätyyppien lisäksi kirjassa on esimerkiksi graafisia tehtäviä, sanallisia lausekkeen muodostustehtäviä sekä mekaanisia laskutehtäviä.

Ensimmäisen yhteisesti valitun tehtävätyypin, usean esitystavan tulkitsemisen ja vertailun, on todettu olevan erityisen tehokas tapa parantaa oppilaiden oppimista, mikäli heillä on tarpeeksi pohjatietoa aihepiiristä [6]. Vertailu voi auttaa opiskelijoita tunnistamaan tärkeitä rakenteellisia piirteitä eri esitystavoissa ja niiden välillä. Ideana on esittää matemaattinen tuotos usealla eri tavalla sekä tulkita, vertailla ja ryhmitellä niitä. Tässä tehtävätyypissä pohditaan merkityksiä ja keskitytään ennemmin tulkitsemiseen kuin esitysten tuottamiseen, mikä on hyvä tapa rohkaista opiskelijoita näkemään matemaattisia ideoita eri näkökulmista ja yhdistellä niitä [10]. Suotavaa olisi keskustella yhtäläisyyksistä ja eroista, eduista ja rajoituksista sekä tehdyistä johtopäätöksistä. Esimerkkejä tästä tehtävätyypistä ovat perinteinen muistipeli tai domino, jossa yhdistellään eri tavalla esitettyjä matemaattisia tuotoksia. Tällaisia voidaan muodostaa esimerkiksi desimaaliluvuista, murto-osista ja ”murtokakku”-alueista”.

Toinen tehtävätyyppi on väitteiden totuuden tarkistaminen. Ideana on esittää väitteitä, joihin vastataan perustelujen kera onko se aina, joskus vai ei koskaan totta. Perustelut ovat usein esimerkkien ja vastaesimerkkien keksimistä, ehtojen lisäämistä ja tarkistamista. Tämän tyyppinen toiminta kehittää oppilaiden kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa. Opiskelijoita voidaan pyytää lisäämään ehtoja tai muutoin muuttamaan lausunnot niin, että niistä tulee ”aina totta”. Väitteet voivat olla vaikeustasoltaan mitä vain ja kysymysten asettelulla on mahdollista puuttua yleisesti haastaviin tai väärinymmärrettyihin asioihin. [10]

Kolmas ja viimeinen yhteisesti valittu tehtävätyyppi on virheiden korjaaminen. Nyt tehtävän tarkoituksena ei ole päästä ratkaisuun vaan arvioida sitä kriittisesti. Monilla matematiikan tunneilla opiskelijat soveltavat yhtä opetettua menetelmää erilaisiin kysymyksiin ja usein opiskelijoille jää tunne, että jos he eivät tiedä ”oikeaa menetelmää”, niin he eivät voi edes aloittaa ongelmanratkaisua. Osa on juuttunut menetelmiin, jotka tuottavat oikeita vastauksia, mutta ovat tehottomia ja toimivat vain juuri tietyn tyyppisissä tapauksissa. Tässä tehtävätyypissä opiskelijat voivat keskustella ja vertailla ongelmien vaihtoehtoisia ratkaisustrategioita, mikä lisää heidän itseluottamustaan ja joustavuutta matematiikan käytössä. Jumittuessaan jossakin strategiassa, he uskaltavat kokeilla jotain muuta ja siten heistä tulee tehokkaampia ongelmanratkaisijoita. [10]

Tehtävätyypin edellytyksenä on, että opiskelijat tutkivat ratkaisua ja tunnistavat sekä korjaavat virheet. Tehtävässä voi pyytää opiskelijaa antamaan ohjeita ja vinkkejä virheen tekijälle. Tämä asettaa opiskelijan neuvonantajan rooliin. Tässäkin tehtävätyypissä tutkittavat ratkaisutavat voidaan valita siten, että ne koskevat yleisiä väärinkäsityksiä. Näitä korjatessaan opiskelijoiden on kohdattava ja kommentoitava vaihtoehtoisia ajattelutapoja. Tehtävätyyppi kasvattaa opiskelijan itseluottamusta, joustavuutta ja ratkaisujen kriittistä tarkastelua. Tehtävään on myös helppo yhdistää pari- tai ryhmätyöskentely ja kehittää siten tärkeitä yhteistyö-, argumentointi- ja vakuuttamistaitoja.

2.1.1 Pohdintatehtävät ja kotitehtävät

Oppijan näkökulmasta matemaattisen ymmärryksen on esitetty jakautuvan kahtia: käsitteelliseksi ymmärrykseksi, joka kuvaa kykyä päätellä erityisiä säännönmukaisuuksia ja menettelyjä yleisemmästä matemaattisesta suhteesta, sekä instrumentaaliseksi ymmärrykseksi, joka kuvaa kykyä soveltaa sääntöä ongelman ratkaisuun ymmärtämättä sen toimintaa. Instrumentaalinen ymmärrys liittyy laskelmiin ja algortimien käyttöön, jolloin oppija osaa suorittaa matemaattisia laskelmia tehokkaasti. Käsitteellisessä ymmärtämisessä tietoa otetaan vastaan, prosessoidaan ja omaksutaan siten, että tieto muuttaa oppijan käsityksiä, asenteita tai osaamista. Se on syvempää ymmärtämistä matemaattisista suhteista laskutoimitusten ulkopuolella. Oppija osaa kyseenalaistaa havaintojen järkevyyden ja luoda niitä lisää tarvittaessa. Käsitteellinen ymmärrys määritellään oppijan olemassa olevan tiedon ja uuden tiedon välisenä linkkinä, joka tarjoaa merkityksen matemaattisille toimintaperiaatteille ja joita voidaan soveltaa erilaisissa konteksteissa. [7]

Molempia ymmärryksen lajeja tarvitaan. Opiskelijat ovat riippuvaisia algebrallisista menettelyistä, mutta käsitteellinen ymmärrys voidaan saavuttaa vain useiden esitysten ja yhteyksien avulla. Esimerkiksi kertolaskuissa opiskelijoiden on hyödyllistä ymmärtää toistuva lukujen yhteenlasku käsitteellisenä tietona, sillä se auttaa monissa tulevaisuuden ongelmissa, kuten tekijöihin jaossa. Toisen ja korkeamman asteen polynomilaskenta tarkoittaa pylonomien tuloa, joten opiskelijoilla on oltava sekä vahva käsitteellinen ymmärrys polynomien kertolaskusta sekä prosessitietoa peruskertolaskutoimituksista. Käsitteellinen tieto auttaa, miten termit liittyvät toisiinsa (eksponenttilait, samankaltaisten termien yhteenlasku). [8]

Ongelmapohjaisen matematiikan opettaminen on kasvattanut vaatimuksia opettajalle. He tarvitsevat tietoa, miten edistää luokkahuonekokemuksia ja esittää johdattelevia kysymyksiä saavuttaakseen syvempää ymmärrystä ja kumotakseen opiskelijoiden väärinymmärryksiä. Tutkielmassa oppituntien perustana toimivat pohdintatehtävät, jotka johdattelevat opiskelijoita uusiin aiheisiin sekä aihealueesta toiseen. Tavoitteena on oppilaslähtöisyyden lisääminen ja opettajan monologien vähentäminen. Pohdintatehtävissä opiskelijan tulee käyttää hyväksi jo osaamiansa asioita ja ratkaista niiden avulla uudenlaisia ongelmia. Suurin aika oppitunnista on varattu pohdintatehtävien ratkomiseen ja kirjan teoria muodostuu suoraan niiden tuloksina. Näin pyritään kehittämään opiskelijan ongelmanratkaisutaitoa sekä itsevarmuutta lähteä ratkaisemaan tehtävätyyppejä, jotka eivät entuudestaan ole tuttuja.

Tärkeää on, että opiskelijat tietävät pärjäävänsä sillä matemaattisella tietoudella, mikä heillä siinä vaiheessa on. Pohdintatehtävät on suunniteltu ja järjestelty siten, että opiskelijoiden aiemmin opitut asiat riittävät haluttujen päätelmien tekemiseen haastaen sopivasti uuden oppimisessa. Opettajan rooli tämän tyylisessä oppimisessa on toimia työskentelyn ohjaajana tiedon jakajan sijaan. Hänen tulee pitää huolta siitä, että kaikki pysyvät mukana tehtävän edetessä ja tarvittaessa johdatella eteenpäin esimerkiksi kysymysten avulla [10]. Hän voi vastaavasti myös haastaa opiskelijoita keksimään perusteluja tai uusia havaintoja ja siten ajattelemaan pidemmälle, jos alkuperäisessä tehtävänannossa ei ole tarpeeksi haastetta.

Keskustelutehtävissä tarkoituksena on kehittää yhteistyötaitoja, tehdä oppimisesta sosiaalisempaa ja mielekkäämpää sekä oppia sanallistamaan omia ajatuksia. Ryhmätehtävissä opiskelijoille selviää myös muita mahdollisia ratkaisu- ja ajattelutapoja ryhmän muilta jäseniltä. Yleensä ryhmän kooksi on valikoitu kaksi henkilöä, mikä on hyvä asetelma yksittäiselle opiskelijalle saada tilaa keskustelussa matalalla kynnyksellä. Jokaisella opiskelijalla on käytössään käytännössä puolet tehtävään annetusta ajasta. Pienessä ryhmässä ei myöskään jäädä yhtä helposti osallistumatta tehtäviin kuin isommissa [10]. Pieni ryhmäkoko helpottaa myös opettajan havainnointitehtävää ja auttaa pitämään ryhmän rauhallisena ja tehtävään keskittyneenä.

Tunneilla tehtävien pohdintojen lisäksi jokaisen kappaleen lopussa on 4-5 kotona tehtävää harjoitustehtävää. Myös kotitehtävät on suunniteltu tarkasti vastaavaan mahdollisimman suurelta osin teoriaosuuden olennaisimpia asioita. Mekaanista laskemista on vähän perinteiseen oppikirjaan verrattuna, sillä kotitehtävissä painotetaan edelleen syvällisen ongelmanratkaisun harjoittelemista. Pienempi tehtävämäärä myös mahdollistaa keskittymiskyvyn säilymisen. Jokaisesta aihealueesta on ylioppilaskoetehtävä motivoimassa ja korostamassa asian tärkeyttä.

2.2 Korkeamman asteen polynomifunktio

Tässä tutkielmassa opetettava kokonaisuus on jaettu kolmeen osaan. Ensimmäisessä kappaleessa tutustutaan polynomin nollakohtien ja tekijöiden väliseen yhteyteen, korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajiin, niiden ominaisuuksiin ja nollakohtien graafiseen ratkaisuun. Toisessa kappaleessa harjoitellaan jakamaan polynomi tekijöihin sekä ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä tulon nollasääntöä hyödyntäen. Kolmas kappale sisältää korkeamman asteen epäyhtälöiden ratkaisua sekä graafisen mallintamisen avulla niiden määrittely- ja ratkaisujoukkoihin perehtymistä.

Kokonaisuus aloitetaan kertomalla, mitä polynomin asteluku tarkoittaa ja mikä on korkeamman asteen polynomifunktio. Näin opiskelija tietää nimellisesti, millaisia funktioita käsitellään, vaikka niiden ominaisuuksiin ei olla vielä perehdytty. Alkukappaleessa kerrotaan myös, että kokonaisuudessa tulemme harjoittelemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemista eli kerrotaan opiskelijalle, mitä tässä osiossa on tarkoituksena oppia.

2.2.1 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys

Kappaleessa tutustutaan korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajiin tutkien pääosin kolmannen, neljännen ja viidennen asteen polynomifunktioita. Pohdintatehtävien avulla päädytään havaintojen pohjalta tehtyihin johtopäätöksiin, jotka luovat mielikuvia polynomifunktioiden käyttäytymisestä. Kappaleessa painotetaan Habits of Mindin mukaista visuaalisuutta. Tarkoituksena on tutustua GeoGebraa apuna käyttäen korkeamman asteen polynomifunktioiden ominaisuuksiin ja käyttäytymiseen. Teknologian hyödyntäminen on suuressa osassa opetusta ja sitä käytetään monin tavoin hahmottamisen apuna. Tässä osiossa se näkyy polynomifunktioiden kuvaajien tutkimisena.

Buckin tutkimuksessa todettiin opiskelijoiden näkevän polynomifunktioiden yhteyden graafiseen esitystapaan riippuen heidän olemassa olevasta tiedostaan. Opiskelijat eivät siis välttämättä näe kuvaajissa sitä, mitä ajattelemme heidän näkevän. Tutkimuksessa huomattiin, että kun opiskelijoille esitettiin korkeamman asteen polynomien kuvaajia, he yhdistivät ne suoraan toisen asteen polynomiyhtälöihin, sillä eivät tienneet siinä vaiheessa korkeamman asteen polynomifunktioista. Opiskelijat huomasivat ensimmäisen ja toisen asteen polynomiyhtälöiden kohdalla, että polynomiyhtälön juuret ovat graafisesti sen kuvaajan x-akselin leikkauspisteitä, mutta heillä oli vaikeuksia ymmärtää, että se pätee kaikilla polynomeilla asteluvusta riippumatta. Opiskelijat huomasivat kahden lineaarisen funktion tulon muodostavan toisen asteen paraabelin, mutta lineaaristen funktioiden nollakohtien yhteyttä toisen asteen funktioon ei huomattu. Tutkimuksen mukaan opiskelijat eivät yleensä luo yhteyksiä eri asteisten funktioiden välillä algebrallisesti, mutta yrittävät luoda niitä graafisesti. [2]

Jotta opiskelijoilla tulisi käsitys korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajien muodosta ja ominaisuuksista, aloitetaan tämä osio tutkimalla eri asteisia kuvaajia GeoGebran liukusäätimien avulla. Ensimmäinen pohdintatehtävä A.1 käsittelee polynomifunktion muotoa, ominaisuuksia ja nollakohtien lukumäärää. Tehtävässä pohditaan polynomin kuvaajan ominaisuuksia väittämien avulla, jotka ovat muodostettu johdatellen havaintoihin nollakohtien lukumäärästä ja kuvaajan ominaisuuksista. Opiskelijan tulee pohtia, ovatko väittämät aina, joskus vai ei koskaan tosia ja perustella päätelmänsä. Perustelut voivat olla muun muassa vastaesimerkkien keksimistä, ehtojen lisäämistä tai tarkistamista.

Polynomifunktiot, joiden korkeimman asteen termin kertoimet ovat negatiivisia, on huomattu olevan opiskelijalle vaikeampia [8]. Niiden kuvaajat eroavat vastaavista positiivisen asteluvun kertoimen kuvaajista ja ne esiintyvät hieman eri tavalla tulomuodossa. Siksi tehtävään on laadittu asteluvun kertoimen etumerkkiä tutkiva väite ja sen vaikutuksia tulomuotoon jatketaan myöhemmin. Tarkoituksena olisi, että ratkaisuun päätymiseksi opiskelijan tulee tutkia laajalti erilaisia korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajia ja havaita niistä samalla kuinka polynomin asteluku, korkeimman asteen termin kerroin sekä vakiotermi vaikuttavat polynomifunktion kuvaajan muotoon sekä montako nollakohtaa milläkin polynomilla voi olla. Tulokset yleistetään lauseeksi pohdinnan jälkeen.

Tässä kappaleessa tutkitaan polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteyttä. Opiskelijoiden väärinkäsityksiä tekijöihin liittyen on tutkittu tarkoituksena kehittää opetusmateriaaleja. On huomattu, että visuaalista materiaalia olisi hyvä käyttää kertoimia ja tekijöitä selitettäessä. Matematiikan kurssit koostuvat jo yleisesti abstrakteista käsitteistä, jolloin aihetta ei ehkä ymmärretä täysin käsitteellisesti ja voi tulla väärinkäsityksiä. Abstraktit konseptit tulee konkretisoida visuaalisilla materiaaleilla, sillä useiden esitystapojen kautta opiskelija oppii luomaan yhteyksiä esitysmuotojen välille ja kehittää käsitteellistä ymmärrystään. [5]

Määritellään polynomin tekijä käsitteenä ja havainnollistetaan sitä esimerkkien avulla. Tätä seuraa pohdintatehtävä A.3, jossa opiskelijan tulee edellistä määritelmää apuna käyttäen tutkia yksinkertaisen binomin avulla polynomin tekijöitä ja harjoitella samalla tekijöihin jakamista yhteisen tekijän erottamisella, mihin tutustutaan paremmin seuraavassa kappaleessa. Pohdintatehtävä kehittää opiskelijan käsitteellistä ymmärrystä tekijöihin liittyen. Tekijöihin jakoa on käyty läpi nollakohtien avulla jo toisen asteen polynomifunktioita käsittelevässä osuudessa ja siksi tämän pohdintatehtävien päätelmät nollakohtien ja tekijöiden yhteydestä ovat helposti oppilaiden havaittavissa.

Kotsopoulos tutki toisen asteen opiskelijoiden haasteita ymmärtää toisen asteen yhtälöitä. Tutkimuksen mukaan opiskelijoiden on hankala ymmärtää eri esitysmuotoja samalle neliösuhteelle, varsinkin jos se ei ole heille tutussa muodossa [8]. Heyd-Metzuyanim, Munter ja Greeno havaitsivat tutkimuksessaan, että opiskelijoiden on vaikea yhdistää polynomin algebrallinen esitystapa sen kuvaajan kanssa [4]. Pohdintatehtävässä A.4 vertaillaan toisen ja korkeamman asteen polynomifunktioiden eri esitysmuotoja. Taulukkoon on koottu viiden eri korkeamman asteen polynomifunktiot, joilta on esitetty summa- ja tulomuodot, nollakohdat sekä kuvaajat. Polynomin summamuoto on opiskelijoille tuttu ja tarkoituksena olisi, että opiskelija havaitsisi sen yhteyden tulomuotoon nollakohtien avulla. Graafinen esitys havainnollistaa, miten polynomin nollakohdat näkyvät tulomuodossa. Tehtävässä on mukana toisen asteen polynomi, jolla ei ole nollakohtaa. Tästä olisi tarkoitus huomata, ettei sitä voida jakaa tekijöihin.

Tehtävään on useita eri lähestymistapoja, mikä rohkaisee opiskelijaa kokeilemaan ratkaisemista ilman, että hän tietää täysin varmaksi mitä on tarkoitus tehdä. Varsinkin tulomuodon yhdistäminen muihin esitysmuotoihin on haastava, sillä sen merkitys ei ole opiskelijoille vielä tuttu. Se voikin vaatia keskimääräistä enemmän opettajan ohjausta. Syvin tarkoitus kuitenkin on, että opiskelija itse pääsee pohtimaan ja tutkimaan tilannetta omalle tasolleen sopivalla tavalla. Opiskelijan täytyy todella pohtia ja yrittää ymmärtää uutta asiaa, eikä hän pysty muistelemaan ulkoa aiemmin opittuja asioita [5]. Tämä antaa mahdollisuuden rakentaa yhteyksiä käsitteiden välille ja pohtia niiden merkityksiä [10].

Useiden esitystapojen vertailu on erityisen tehokas tapa parantaa opiskelijoiden matemaattisen ajattelun oppimista [6]. Parhaassa tapauksessa se herättää keskustelua, joka paljastaa opettajalle opiskelijoiden ennakkokäsityksiä aiheesta ja siten parantaa opetuksen laatua. Lisäksi keskustelu ajatuksista edesauttaa oppimista ja kehittää opiskelijan kykyä ilmaista itseään. Opiskelijan tavoitteena on oppia kokeilemaan asioita, mikä on ongelmanratkaisun ensimmäinen askel, selittämään ajatuksiaan, niin suullisesti kuin kirjallisesti sekä ymmärtämään, että ratkaisumalleja ei ole vain yhtä ainoaa [3]. Pohdinnan perusteella opiskelijan tulisi huomata yhteys polynomin nollakohtien ja tekijöiden välillä. Se todetaan ja todistetaan, jotta se ei jää pelkäksi toteamukseksi. Todistus on yksinkertainen ja suoraviivainen samalla totutellen opiskelijoita matemaattiseen tekstiin. Matemaattisen tekstin sisällyttäminen lukion oppimateriaaliin karsii opiskelijoiden ennakkoluuloja matemaattista tekstiä kohtaan.

Polynomi voidaan jakaa tekijöihin nollakohtien avulla. Pohdintatehtävässä A.7 käytetään myös ylioppilaskokeista tuttua menetelmää, joka testaa opiskelijan käsitteellistä ymmärrystä: esitetään teoria uudesta asiasta ja pyydetään käyttämään sitä tehtävässä. Opiskelijan tulee jakaa toisen asteen yhtälö tekijöihin nollakohtien avulla. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen on tullut tutuksi edellisessä osiossa, joten opiskelijalla on tarpeelliset pohjatiedot tehtävän suorittamista varten. Käyttäen tulon nollasääntöä käänteiseen suuntaan voidaan muodostaa polynomifunktio, jolla on ennalta valitut nollakohdat. Pohdintatehtävän A.7 toisessa osassa opiskelijan tulee muodostaa kolmannen asteen yhtälö, jolla on halutut nollakohdat. Tämä vaatii opiskelijalta käsitteellistä ymmärrystä nollakohtien ja tekijöiden yhteydestä sekä instrumentaalista ymmärrystä tarvittavien laskutoimitusten onnistumiseksi.

Kappaleessa on neljä harjoitustehtävää, joissa keskitytään polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteyteen, polynomifunktioiden kulkuun, graafiseen ratkaisuun tai matemaattiseen esitystapaan. Ensimmäisessä kotitehtävässä on tarkoituksena yhdistää polynomifunktion lauseke ja kuvaaja. Tässä opiskelija käyttää apuna tunnilla opittuja säännönmukaisuuksia polynomifunktion asteluvusta ja sen kertoimen sekä vakiotermin vaikutuksesta kuvaajan muotoon. Kuvaajan yhdistäminen lausekkeeseen on tärkeää opiskelijalle asioiden yhteyksien muodostamisessa [2]. Toisessa tehtävässä ratkaistaan graafisesti neljännen asteen polynomifunktion nollakohdat ja opitaan sen kuvaajan arvoista ja kulusta. Kolmannessa tehtävässä muodostetaan erilaisia korkeamman asteen polynomifunktion kuvaajia sanallisten ohjeiden avulla. Funktiot eivät ole vaikeita, mutta haastetta tehtävään tuo sen esitysmuoto. Oppilaiden on usein vaikeampi vastata epäsuoriin kysymyksiin, koska luetun ymmärtäminen on vaikeaa [5]. Tätä on kuitenkin hyvä harjoitella, sillä sanallisia tehtäviä esiintyy esimerkiksi ylioppilaskokeissa paljon. Tehtävä 4 on kevään 2018 ylioppilaskoetehtävä, jonka tarkoituksena on motivoida ja luoda mielekkyyttä opiskeluun. Tehtävässä liikutaan summa- ja tulomuodon välillä sekä harjoitellaan osoittamista. Se haastaa opiskelijan ymmärrystä aiheesta ja matemaattisen tekstin käsittelystä.

2.2.2 Korkeamman asteen yhtälö

Tässä kappaleessa harjoitellaan ratkaisemaan korkeamman asteen yhtälöitä tulon nollasäännön avulla. Jotta tämä onnistuu, opetellaan jakamaan polynomeja tekijöihin. Tekijöihin jakaminen on tärkeä osa yhteyksien muodostamisessa eri asteisten polynomifunktioiden välillä [2]. Kappaleessa käydään läpi menetelmiä, jotka lukiolaiselta vaaditaan tekijöihinjaon riittävään hallitsemiseen. Jotta tekijöihin jakaminen onnistuu, opiskelijoilla on oltava vahva ymmärrys polynomien kertolaskusta tehokkaat peruslaskutaidot [8]. Opiskelijoiden näkemys tekijöihin jakautumisesta voi olla täysin abstrakti ja käsite on mahdollisesti täysin erillään sen käyttötarkoituksesta, mikä on esteenä ymmärrykselle [7]. Kaikkia polynomeja ei voida jakaa tekijöihin, jolloin käytetään apuna GeoGebraa. Kappaleessa harjoitetaan vahvasti kirjan tavoitteeksi määriteltyä Habits of Mindin mukaista lausekkeiden pilkkomista sekä kasaamista tekijöihin jaon luonteen mukaisesti.

Kappale aloitetaan kertomalla tekijöihin jakamisen tarkoittavan korkeamman asteen polynomien kirjoittamista alemman asteen polynomien tulona. Kerrotaan myös, että tekijöihin jakamista tarvitaan seuraavissa kappaleissa yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa, minkä tarkoituksena on motivoida ja luoda merkitystä oppimiselle. Tekijöihin jakaminen on käänteinen prosessi kertolaskulle, jossa opiskelijan täytyy hahmottaa seuraavan vaiheen neliökertoimet. Se vaatii opiskelijalta kykyä löytää yhden luvun tekijät ja yhdistää ne toisen luvun tekijöihin. Tätä taitoa kehitetään pohdintatehtävällä A.8, missä toisen asteen polynomi jaetaan tekijöihin sen vakiotermin avulla. Pohdinnassa opiskelija harjoittelee tekijöihin jakoa erottamalla yhteisen tekijän sekä ryhmittelemällä. Johdattelevien kysymysten avulla opiskelijan tulisi onnistua löytämään ne vakiotermin tekijät, joiden summana saadaan ensimmäisen asteen kertoimen tekijä. Kun lineaarinen termi on saatu jaettua vakiotermin tekijöiden avulla summaksi, on tekijöihin jakaminen helpompi suorittaa loppuun ryhmittelemällä, sillä yhteinen tekijä löytyy helpommin. On kuitenkin muistettava, että menetelmää voidaan käyttää vain, jos polynomin nollakohdat ovat kokonaislukuja.

Tekijöihin jako voidaan aina tarkistaa kertomalla lopputuloksen sulut auki. Tämä luo varmuutta tehtävien ratkaisemiseen: opiskelija voi konkreettisesti tarkistaa ratkaisun oikeellisuuden, mikä harjaannuttaa ratkaisujen tulkintaan ja arvioimiseen [5] [9]. Yhteisen tekijän erottaminen sekä ryhmittelymenetelmä perustuvat osittelulakiin. Ryhmittelyssä osittelulakia käytetään käänteiseen suuntaan erottaen yhteinen tekijä pienemmistä ryhmistä. Tästä on esitetty havainnollistus, jossa yhteinen tekijä erotetaan kahdesta ryhmästä. Apuna toimii aaltosulkeet, joilla ryhmät on erotettu ja selitykset niiden alla erottaa yhteisen tekijän selkeämmin. Polynomi voidaan jakaa tekijöihin myös binomikaavojen avulla. Pohdintatehtävä A.10 on mekaaninen laskutehtävä, jossa kerrataan binomikaavoja ja harjoitellaan niiden käyttämistä tekijöihin jaossa.

Aiemmin mainitussa tutkimuksessa Heyd-Metzuyanim ym. vertasivat erilaisia opetustapoja polynomiyhtälöiden opettamiseen. Yhdellä testitunnilla pyydettiin ratkaisemaan toisen asteen yhtälö, jolloin opiskelijat heti muistivat sen tapahtuvan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tämän jälkeen harjoiteltiin saman yhtälön ratkaisemista jakamalla sen tekijöihin ja vertailtiin näitä ratkaisutapoja toisiinsa. Samalla oppitunnilla harjoiteltiin ratkaisemaan kolmannen asteen yhtälöitä siten, että etsitään yksi nollakohta joko kokeilemalla tai kuvaajasta katsomalla. Nollakohta määriteltiin seuraavasti:

”jos luku a sijoitettuna muuttujan paikalle tuottaa yhtälön ratkaisun, luku a on yhtälön nollakohta”. Löydetyn nollakohdan avulla opiskelijoiden tuli muodostaa siitä tekijä $x - a$, jolla voidaan jakaa kolmannen asteen polynomi. Tuloksena saadaan toisen asteen polynomi, joka osataan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tutkimuksessa todettiin tällaisen johdattelun korkeamman asteen polynomiyhtälöihin toimivaksi, sillä se yhdistää polynomin nollakohdan ja tekijän toisiinsa. Opiskelijoille tämä yhteys huomattiin olevan vaikea ymmärtää. [4]

Joskus polynomin yhden nollakohdan voi nähdä helposti kokeilemalla. Kuten Heyd-Metzuyan ym. tutkimuksessa, esimerkkitehtävässä A.11 käsitellään tällaista tilannetta: kolmannen asteen polynomifunktiolle löydettiin yksi tekijä kokeilemalla, jolloin tekijöihin jaon voi viedä loppuun toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Tällaista arvausmenetelmää ei ole usein kannattavaa käyttää, mutta on hyvä tietää sen olevan mahdollista. Esimerkin jälkeen kerrotaan, että tekijöihin jako voidaan suorittaa laskimella ja kehotetaan opiskelijaa kokeilemaan sitä kappaleen pohdintatehtäviin, jotta laskimen käyttö tulisi tutuksi. Tämä on yksi tapa tarkistaa ratkaisujen oikeellisuus, mutta yksinään se ei riitä ratkaisuksi. Tässä kappaleessa saamme käytyä kaikki tekijöihin jakamiseen liittyvät aiheet läpi, joten meiltä löytyy kaikki työkalut korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemiseen.

Pohdintatehtävässä A.13 tulkitaan ja korjataan valmista ratkaisua. Se on yksi yhteisesti valituista tehtävätyypeistä, jossa siirretään tehtävän tarkoitusperä ratkaisun saamisesta sen arviointiin [10]. Opiskelijan tarkoituksena on huomata keskeneräinen ratkaisu ja viedä se loppuun. Häntä pyydetään selittämään sanallisesti ratkaisun vaiheita, joka on esimerkiksi ylioppilaskokeissa yleinen tehtävätyyppi. Opiskelijoille on usein vaikeaa yhteisen tekijän erottaminen ja termien yhteenlasku [8]. Tehtävästä voi saada vinkkejä, kuinka ratkaisuun voi lisätä välivaiheita hahmottamisen helpottamiseksi. Ryhmittely itsessään on ajattelua vaativaa, niin sen jakaminen pienempiin palasiin voi helpottaa ajatteluprosessia. Vaiyavutjamai ja Clements havaitsivat tutkimuksessaan opiskelijoiden väärinymmärryksiä muuttujiin liittyen: kun muuttujatermi $3x$ esitettiin summana $x + x + x$, huomattavan suuri osa opiskelijoista ei onnistunut ratkaisemaan yhtälöä oikein [11]. Tässä tehtävässä muistutetaan myös, että potenssimerkki kertoo kerrottavien lukumäärän.

Pohdinnan jälkeen on ryhmittelymenetelmästä mallitehtävä, mikä havainnollistaa kaikkia kappaleessa käytettäviä tekijöihin jakomenetelmiä: yhteisen tekijän erottamista, ryhmittelyä ja binomikaavojen hyödyntämistä. Ratkaisun etenemistä on selitetty sanallisesti sekä yhteisen tekijän erottamista on pyritty helpottamaan värejä ja aaltosulkeita käyttäen. Ratkaisun lopussa kerrotaan, ettei tekijöihin jakoa voida enää jatkaa, koska tekijöihin jako on valmis, kun lauseke on tulomuodossa eikä sen tekijöitä voida jakaa tekijöihin. Tulon nollasäännöllä ratkaistaan vielä polynomiyhtälön nollakohdat tehtävän lopuksi.

Kappaleen viimeisessä pohdintatehtävässä A.16 harjoitellaan yhtälön ratkaisemista eri menetelmillä. Abu Mokh, Othman ja Shahbari totesivat tutkimuksessaan algebrallisten lausekkeiden muokkaamisen opiskelijoille haastavaksi [1]. Riittävien algebrallisten taitojen puute vaikeuttaa yhtälönratkaisua. Nyt harjoitellaan yhtälön muokkaamista eri tavoilla. Ensimmäinen ratkaisutapa on kuvaajalta lukeminen. Kyseisen yhtälön ratkaisut eivät ole kokonaislukuja, jolloin vastaukset eivät ole tarkkoja. Eräässä tutkimuksessa huomattiin, että opiskelijat mielellään ratkaisisivat korkeamman asteen polynomin nollakohdat kokeilemalla tai katsomalla kuvaajasta x-akselin leikkauskohdat [4]. Opiskelijan tulisi arvioida kriittisesti vastauksen oikeellisuutta ja menetelmän luotettavuutta. Toisessa ratkaisutavassa yhtälö ratkaistaan ryhmittelemällä, joka vaatii opiskelijalta kykyä hahmottaa, miten lauseketta on muokattava, jotta tekijöihin jako onnistuu. Samaa menetelmää käytettiin Pohdinnassa A.9. Tämä malli edistää opiskelijoiden ymmärrystä tekijöihin jaosta, sillä he ajattelevat usein neliösuhteet (millä eri tavoilla toisen asteen yhtälö voidaan esittää) käsitteellisesti haastavana [7]. Kolmas ratkaisumenetelmä on sijoitusmenetelmä, missä opiskelijan tulee muuttaa neljännen asteen yhtälö toisen asteen yhtälöksi tekemällä sijoitus $x^2 = t$. Nyt yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Menetelmä voi tuottaa haastetta, sillä lopussa sijoitus tulee ottaa uudelleen huomioon ja ratkaista siitä vielä x:n arvot. Opiskelijan tulee vielä pohtia ratkaisumenetelmien vahvuuksia ja heikkouksia sekä pohtia, minkä vuoksi on hyvä olla erilaisia ratkaisutapoja.

Tehtävässä 5 harjoitellaan tekijöihin jakoa murtolausekkeiden sieventämisessä. Tarkoituksena on sieventää lauseketta jakamalla sen osoittaja ja/tai nimittäjä tekijöihin ja sieventämällä sitä. Tehtävä 6 on rutiinilaskutehtävä, jossa opetellaan ratkaisemaan yhtälöitä jakamalla ne tekijöihin eri menetelmillä. Polynomit ovat esitetty eri muodoissa ja yhtälöitä voi joutua muokkaamaan. Tehtävä 7 on sanallinen tehtävä, jossa opiskelijan täytyy muodostaa korkeamman asteen yhtälö ohjeiden mukaan ja ratkaista se. Tutkimuksen mukaan opiskelijat kokevat sanalliset tehtävät usein haastavana, sillä kysymyksen asettelu ei ole välttämättä entuudestaan tuttu [8]. Tehtävä 8 on ylioppilaskoetehtävä, jossa tulee ratkaista vakio a siten, että yhtälöllä on haluttu juuri ja selvittää sen avulla muut juuret. Tehtävä on yksi esimerkki yhtälön ratkaisemisesta halutun juuren avulla, mitä harjoiteltiin edellisessä kappaleessa.

2.2.3 Korkeamman asteen epäyhtälö

Epäyhtälöillä tarkoitetaan kahden lausekkeen suuruusjärjestyksen vertailua. Epäyhtälöitä voidaan käyttää esimerkiksi optimointiin liittyvissä ongelmissa sekä trigonometrian ja analyyttisen geometrian ymmärtämisessä. Ne liittyvät myös olennaisesti yhtäsuuruuden ja yhtälöiden käsitteelliseen ymmärtämiseen, sillä epäyhtälöt täydentävät yhtälön ja ratkaisujoukon käsitettä. Yhtälöihin verrattuna epäyhtälöt koetaan usein vaikeampina juurikin ratkaisujoukon tulkinnassa [11]. Esimerkiksi ratkaisun ollessa $x \leq 2$ hyvin usein opiskelijat kirjoittavat vastaukseksi luvun 2 [11]. Sen vuoksi tässä osiossa painotetaan ratkaisujoukon arviointia ja tulkitsemista.

Weinhold kertoo artikkelissaan esitystavasta, jossa korkeamman asteen polynomi esitetään graafisesti ensimmäisen asteen tekijöidensä kuvaajina. Hän tutki toisen asteen polynomifunktiota kahden lineaarisen funktion kuvaajien avulla. Menetelmää testanneiden opettajien mukaan tästä voidaan päätellä helposti polynomin nollakohdat sekä positiiviset ja negatiiviset arvot tulon nollasäännön avulla laskemalla montako suoraa on x-akselin ylä- ja alapuolella tutkittavassa kohdassa. Weinhold kertoo tämän tyyppisen menetelmän luovan vahvempaa ymmärrystä epäyhtälöistä. [12]

Ensimmäisessä pohdintatehtävässä A.17 tutkitaan polynomifunktion ensimmäisen asteen tekijöitä, jotka on esitetty suorina koordinaatistossa. Opiskelijan tulee päätellä kuvasta Weinholdin menetelmällä polynomifunktion eli tekijöiden tulofunktion nollakohdat sekä milloin se saa positiivisia tai negatiivisia arvoja. Merkkikaavion käyttöön johdatellaan tutkimalla suorien kuvaajien merkkejä ja päättelemällä niiden avulla tulofunktion kulku. Seuraavassa kohdassa havainnot tulee kirjata valmiiseen merkkikaaviopohjaan. Lopuksi opiskelijan tulee hahmotella kuvaajan kulku merkkikaavion avulla ja tarkistaa havaintonsa graafisesti. Tällainen tehtävätyyppi auttaa opiskelijaa muodostamaan yhteyksiä eri polynomiluokkien välille sekä edistää yhteyksien muodostumista graafisen ja algebrallisen esityksen välille [2].

Epäyhtälöihin haastetta tuo ratkaisujoukon tulkinta sekä epäyhtälömerkin ja muiden symbolien ymmärtämättömyys. Abu Mokh ym. tutkivat opiskelijoiden ymmärrystä yhtäsuuruusmerkistä sekä heidän kykyä ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Lisäksi tutkittiin loogisten konnektiivien, kuten $\vee$ (tai) ja $\wedge$ (ja), käyttöä sekä opettajien reagointia niiden käyttämiseen liittyviin virheisiin. Tutkimuksen mukaan 38% opiskelijoista suoriutuivat oikein algebrallisesta manipuloinnista, mutta käyttivät väärin konnektiiveja. Ainoastaan 12% opiskelijoista onnistuivat tehtävässä oikeiden konnektiivien kanssa. Yleistä oli, että konnektiivit jätettiin pois korvaamalla ne pilkulla tai muulla täytesanalla. Yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen on tärkeä osa-alue algebrassa ja niiden ymmärtäminen vaatii opiskelijalta vahvaa osaamista ratkaisujoukon löytämiseksi. Tutkimuksessa havaittiin, että lopullista vastausta ei arvioida tai edes mietitä, vastaako se alkuperäiseen kysymykseen. Lisäksi huomattiin, ettei opettajat huomioi virheitä konnektiivien käytössä. [1]

Oppimisen tärkeä edellytys on johdonmukaisuus ja loogisuus opetuksen edetessä. Opettajien loogisten yhteyksien käytön virheet ja oppilaiden vaikeudet liittyvät toisiinsa[1]. Oikea konnektiivien käyttö ja niiden merkityksen selittäminen ratkaisujoukkoon liittyen voi helpottaa oppimista. Esimerkiksi mitä tarkoittaa *tai* ratkaisujoukkoa kirjoittaessa? Esimerkiksi ratkaistaessa epäyhtälöä $x^2 > 81$ opiskelijat muistivat sekä positiivisen että negatiivisen ratkaisun, mutta esittivät sen väärällä tapaa $x > \pm 9$ eikä $x > 9$ tai $x < -9$, mikä on oikea ratkaisu [1]. Opettajien olisi hyvä lisätä tietoisuutta liitossanojen oikeasta käytöstä. Tässä aihealueessa se tarkoittaa esimerkiksi ratkaisujoukon havainnollistamista lukusuoran avulla.

Pohdintatehtävässä A.18 puututaan epäyhtälöihin liittyviin väärinymmärryksiin väittämien avulla. Heti ensimmäinen väittämä vaatii opiskelijalta tarkkuutta, vastaako annettu ratkaisujoukko kysymykseen positiivisista arvoista. Tämän tyyppinen tehtävä vaatii myös opettajalta tarkkuutta, ettei synny lisää väärinkäsityksiä. Opiskelijat saattavat esittää joitakin lukuja, jotka toteuttavat epäyhtälön ilman muita perusteluja funktion kulusta. Ei siis mietitä, onko ratkaisu järkevä tai edes mahdollinen. Jotkut rajoittavat tarkastelun pelkästään luonnollisiin lukuihin, jolloin syntyy väärinymmärrys ratkaisujoukon äärellisyydestä. Väittämien avulla pyritään luomaan käsitystä ratkaisujoukosta, sen laajuudesta ja ominaisuuksista eri tilanteissa.

Lopuksi mietitään polynomifunktion jatkuvuuteen liittyviä ominaisuuksia. Miksi riittää, että tutkitaan polynomin merkkiä nollakohtien välissä, voidaanko funktion kulkua arvioida kuvan ulkopuolella? Kysymyksellä pyritään ohjaamaan opiskelijoiden ajattelua korkeamman asteen polynomifunktioiden käyttäytymiseen. Seuraava lause kertoo, että polynomifunktio voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan. Tulos liittyy oleellisesti testipistemenetelmään, sillä sen nojalla riittää laskea funktion arvo yhdessä testipisteessä jokaiselta nollakohtien rajaamalta väliltä. Testipisteiden avulla selvitetään funktion arvojen etumerkit ja epäyhtälön ratkaisu kokoamalla tulokset merkkikaavioon.

Vaiyavutjamai ja Clements totesivat tutkimuksessaan, että opiskelijat kokevat hankalana tilanteet, joissa vakioita ja muuttujia esiintyy molemmilla puolilla epäyhtälömerkkiä [11]. Jotkut opiskelijat ajattelivat, että eri puolilla olevilla muuttujilla olisi eri arvot. Pohdintatehtävässä A.20 epäyhtälö tulee muokata ensin muotoon, jossa tekijöihin jako onnistuu eli muotoon missä vasemmalla puolella on kaikki termit ja oikealla nolla tai päinvastoin. Tehtävässä on tarkoituksena harjoitella epäyhtälön ratkaisemista tekijöihin jaon ja merkkikaavion avulla ohjeita noudattaen. Ensimmäisen ja toisen asteen polynomiepäyhtälöiden ratkaiseminen on opiskelijoille tuttua. Jakamalla korkeamman asteen polynomifunktio ensimmäisen ja toisen asteen tekijöihin ja tutkimalla niiden saamien arvojen etumerkkejä (positiivisuutta/ negatiivisuutta) opiskelijan tulisi onnistua ratkaisemaan tehtävä. Lisäksi pyydetään opiskelijaa hahmottamaan ratkaisua lukusuoralle, mikä testaa ymmärrystä epäyhtälömerkeistä ja ratkaisujoukon laajuudesta. Myös tämä tehtävä tulee tarkistaa GeoGebralla graafisesti.

Viimeinen pohdintatehtävä A.21 esittää kolmannen tavan ratkaista korkeamman asteen epäyhtälöitä: merkkikaavion täydentäminen testipisteiden avulla. Ratkaisutapa perustuu polynomin jatkuvuuteen, sillä polynomi voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Opiskelijan tulee kirjoittaa ratkaisuun välivaiheet mikä voi syventää ymmärrystä. Tämän ratkaisutavan lisäksi tehtävässä tulee vertailla muita esitystapoja: merkkikaavion täydentäminen tekijöiden avulla sekä ”tavallisilla” yhtälön ratkaisumenetelmillä. Usean esitystavan vertailu antaa opiskelijalle mahdollisuuksia rakentaa merkityksiä ja yhteyksiä käsitteiden välille [10].

Opiskelijan tulee vertailla ja arvioida ratkaisumenetelmien vahvuuksia ja heikkouksia. Tavoitteena on, että opiskelija huomaa eri ratkaisutapojen olevan hyödyllisiä eri tilanteissa: testipisteet silloin, kun tekijöihin jako ei ole mahdollista. ”Tavallisten” yhtälön ratkaisumenetelmien käyttö voi tulla monilla ensimmäisenä mieleen ratkaisua aloittaessa ja siksi se on hyvä olla mukana kappaleessa varoittavana esimerkkinä, vaikka menetelmää ei opeteta. Opiskelijoiden tulisi hoksata, että muuttujalla ei voida jakaa ilman tietoa siitä, voiko se olla nolla. Pohdinnan jälkeen huomautetaan, että korkeamman asteen epäyhtälöitä ratkaistaessa merkkikaavio tulee perustella joko tekijöiden kuvaajien avulla tai laskemalla testipisteitä nollakohtien välillä. Ei siis riitä, että etsitään joitakin arvoja, jotka toteuttavat epäyhtälön.

Ensimmäisessä kotitehtävässä harjoitellaan kolmannen asteen epäyhtälön ratkaisemista ja ratkaisujoukkoon liittyviä käsitteitä. Se haastaa opiskelijaa pohtimaan syvällisemmin, mitä kysytään ja mikä on siihen oikea ratkaisujoukko. Toisessa kotitehtävässä on sanallisia arvoituksia, joiden perusteella opiskelijan tulee muodostaa epäyhtälö ja ratkaista se. Haastetta tuo sanallinen esitysmuoto, mikä on usein opiskelijoille haastava ymmärtää, vaikka tehtävä ei olisikaan lopulta hirveän vaikea. Kolmas kotitehtävä on osoitustehtävä, mitä on hyvä harjoitella. Osoittaminen tuntuu usein vaikealta, mutta sitä on hyvä harjoitella jatko-opintoja varten. Viimeinen kotitehtävä on tuttuun tapaan ylioppilaskoetehtävä. Tehtävässä harjoitellaan sanallista selittämistä ratkaisun tukena, mikä on joillekin opiskelijoille haastavaa. Tehtävätyyppi on kuitenkin melko yleinen ylioppilaskokeissa, joten sitäkin on tärkeä harjoitella. Viimeiset tehtävät ovat selkeästi haastavampia ja voivat vaatia apua alkuun pääsemisessä.

Viitteet

[1] Abu Mokh, R., Othman, A., & Shahbari, J.A. *Mistakes made by students with logical connectives when solving equations and inequalities, and how teachers assess these mistakes*. International Journal of Research in Education and Science, 5(2), 421-428, 2019.

[2] Buck, J. C. *Fostering Connections between Classes of Polynomial Functions*. 1995.

[3] Cuoco, A., Goldenberg, E.P., & Mark, J. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Journal of Mathematical Behavior 15, 375-402, 1996.

[4] Heyd-Metzuyanim, E., Munter, C., & Greeno, J. *Conflicting frames: a case of misalignment between professional development efforts and a teacher's practice in a high school mathematics classroom*. Educational Studies in Mathematics, 97, 21-37, 2018.

[5] Dogrucan, H., Soybas, D., & Sevgi, S. *The Investigation of Middle School Student Learning Difficulties and Concept Misunderstandings in Multipliers and Factorization*. Excellence in Education Journal, 9(3), 109-144, 2020.

[6] Durkin, K., Rittle-Johnson, B., & Star, J. *Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps*. ZDM Mathematics Education, 49. 585–597, 2017.

[7] Fitzmaurice, O., & Hayes, J. *Investigating the different dimensions of preservice mathematics teachers' understanding-the case of factorisation*. Australian Journal of Teacher Education (Online), 45(10), 73-94, 2020.

[8] Kotsopoulos, D. *Unravelling student challenges with quadratics: A cognitive approach.* Australian Mathematics Teacher, 2007.

[9] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Helsinki, 2019.

[10] Swan, M. *Collaborative Learning in Mathematics*. A Challenge to our Beliefs, 162-176, 2006.

[11] Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. *Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations*. Mathematics Education Research Journal, 18(1), 47-77, 2006.

[12] Weinhold, M. W. *Designer Functions: Power Tools for Teaching Mathematics*. The Mathematics Teacher, 102(1), 28–33, 2008.

A Oppimateriaali

Polynomin asteluku määräytyy korkeimman monomin asteen mukaan. Polynomin

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

asteluku on n, kun a_n ei ole 0. Tässä luvussa tutkitaan polynomifunktioita, joiden asteluku on suurempi kuin kaksi eli korkeamman asteen pylonomifunktioita. Samalla opitaan, kuinka polynomin nollakohdat ja tekijät liittyvät yhteen ja kuinka polynomeja jaetaan tekijöihin. Harjoitustehtävissä harjoitellaan ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä graafisesti sekä tulon nollasääntöä ja merkkikaaviota käyttäen.

A.1 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys

Tässä kappaleessa keskitytään polynomin tekijöihin ja niiden yhteyteen polynomin nollakohtien kanssa tutkimalla korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajia ja niiden ominaisuuksia sekä ratkaisemalla niitä graafisesti.

Pohdinta A.1 Tutki GeoGebran liukusäätimien avulla polynomifunktion $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ kuvaajaa siten, että $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Onko väite totta aina, joskus vai ei koskaan? Perustele vastauksesi ja korjaa väärät väittämät.

1. Polynomin asteluku vaikuttaa sen kuvaajan muotoon.
2. Polynomin vakiotermi kertoo, missä kohdassa kuvaaja leikkaa x-akselin.
3. 3. asteen polynomilla on ainakin yksi nollakohta.
4. 4. asteen polynomilla on parillinen määrä nollakohtia.
5. Polynomin korkeimman asteen termin kertoimen etumerkki ei vaikuta kuvaajan muotoon.
6. Astetta n olevalla polynomilla on $n + 1$ nollakohtaa.

Kahden kokonaisluvun yhteinen tekijä on luku, jolla nämä molemmat luvut ovat jaollisia. Kertolaskussa kertoja ja kerrottava ovat tulon tekijöitä.

Yleisemmin voi yhteinen tekijä olla myös polynomissa esimerkiksi binomi. Usein korkeamman asteen polynomifunktio voidaan esittää tekijöidensä tulona.

Määritelmä A.2 Polynomi $Q(x)$ on polynomin $P(x)$ *tekijä*, jos on olemassa sellainen polynomi $R(x)$, että
$$P(x) = Q(x)R(x).$$

Pohdinta A.3 Onko binomi $x - 1$ polynomin

1. $x^3 - x^2$ tekijä?
2. $x^3 - x^2 + 3$ tekijä?

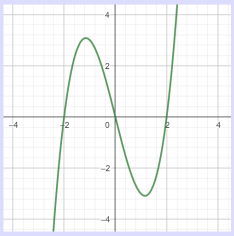
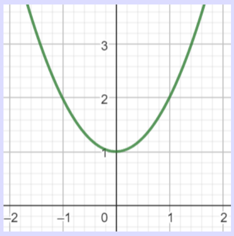
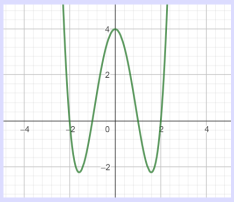
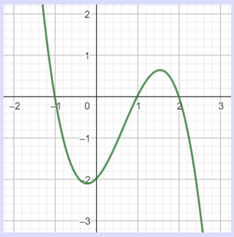
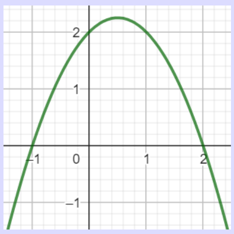
Pohdintatehtävässä tutkittiin, onko binomi $x-1$ tutkittavan polynomin yhteinen tekijä.

Yleiskielessä yhteinen tekijä merkitsee yhdistävää asiaa, mikä auttaa hahmottamaan kokonaiskuvaa. Esimerkiksi keittokirjassa kerrotaan, mitä ainesosia reseptissä tarvitaan eli mistä tekijöistä tuote koostuu.

Matematiikassa yhteinen tekijä merkitsee, että eri termit ovat jaollisia tällä kyseisellä tekijällä. Tällaisia tekijöitä voi olla useampia ja yhteinen tekijä voi myös olla eri termien summa.

Tekijöihin jako auttaa sieventämään lausekkeita, ratkaisemaan niitä, tarkastelemaan ongelmaa kokonaisvaltaisemmin.

Pohdinta A.4
a) Yhdistä samaa polynomia tarkoittavat esitykset.
b) Miten funktion nollakohdat näkyvät tulomuodossa?

Summamuoto	Tulomuoto	Nollakohdat	Kuvaaja
$-x^2 + x + 2$	ei tulomuotoa	$f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$x^2 + 1$	$-(x + 1)(x - 2)$	$f(-2) = 0$, $f(0) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$x^3 - 4x$	$(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$	$f(-2) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$-x^3 + 2x^2 + x - 2$	$-(x + 1)(x - 1)(x - 2)$	$f(-1) = 0$ ja f(2)=0	
$x^4 - 5x^2 + 4$	$x(x + 2)(x - 2)$	ei nollakohtia	

Polynomin nollakohtien ja tekijöiden välillä on yhteys:

Lause A.5
Luku x_0 on polynomin $P(x)$ nollakohta, jos $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä ja toisinpäin.

Todistus. Todistetaan lause kolmannen asteen polynomifunktiolle. Tällöin $P(x) = ax^3 + bx^2 + c + d$, missä kertoimet $a, \ldots, d$ ovat reaalilukuja.
Olkoon $x - x_0$ polynomin $P(x)$ tekijä. Tällöin

$$P(x) = Q(x)(x - x_0)$$

sekä

$$P(x_0) = Q(x_0)(x_0 - x_0) = Q(x_0) \cdot 0 = 0,$$

joten luku x_0 on polynomin $P(x)$ nollakohta.

Olkoon nyt x_0 polynomin $P(x)$ nollakohta. Tällöin

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(x_0) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) \\ &= ax^3 - ax_0^3 + bx^2 - bx_0^2 + cx - cx_0 + d - d \\ &= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0). \end{aligned}$$

Erotetaan $x - x_0$ yhteiseksi tekijäksi, jolloin

$$\begin{aligned} &a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) \\ &= a(x - x_0)(x^2 + x_0x + x^2) + b(x - x_0)(x + x_0) + c(x - x_0) \\ &= (x - x_0)(a(x^2 + x_0x + x_0^2) + b(x + x_0) + c) \end{aligned}$$

eli $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

□

Lause A.6 Jokaisella astetta n olevalla polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.

Polynomi voidaan *jakaa tekijöihin nollakohtien avulla*. Jos polynomilla ei ole yhtään nollakohtaa, niin polynomilla ei ole yhtään tekijää eli sitä ei voida esittää tekijöidensä tulona.

Pohdinta A.7 1. Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi ratkaisua x_1 ja x_2, niin polynomin $ax^2 + bx + c$ ensimmäisen asteen tekijät ovat $x - x_1$ ja $x - x_2$ siten, että Lauseen A.6 nojalla

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Jaa polynomi $5x^2 + 4x - 1$ tekijöihin nollakohtiensa avulla.

2. Tulon nollasääntöä soveltamalla käänteiseen suuntaan voidaan muodostaa yhtälö, jolla on halutut ratkaisut. Muodosta kolmannen asteen yhtälö, jonka nollakohdat ovat -3, 1 ja 4.

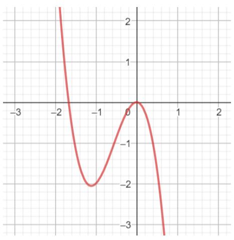
Jos polynomilla ei ole reaalilukujen joukossa yhtään nollakohtaa, sitä ei voida jakaa reaalilukutekijöihin ja sanotaan, että polynomi on *jaoton*.

Tehtävät

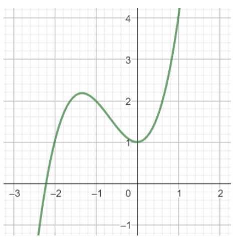
1. Yhdistä funktio ja kuvaaja.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \qquad g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$$
$$h(x) = -3x^3 - 3x \qquad i(x) = -4x^4 + 5x^2 + 1$$

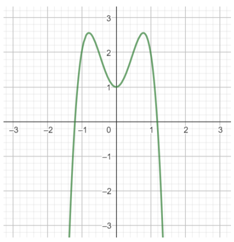
1.



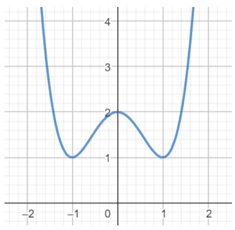
2.



3.



4.



2. Piirrä GeoGebralla funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ kuvaaja. Määritä kuvaajan perusteella
a) funktion f nollakohdat,
b) ne muuttujan arvot, joilla funktion f arvot ovat negatiivisia,
c) ne muuttujan arvot, joilla funktion f arvot ovat positiivisia,
d) ne muuttujan arvot, joilla funktion f kuvaaja on kasvava,
e) ne muuttujan arvot, joilla funktion f kuvaaja on vähenevä.

3.a) Muodosta sellainen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat -1, 1 ja 0, ja jonka arvo kohdassa 2 on 3.
b) Muodosta sellainen polynomifunktio, jonka arvo kasvaa rajatta muuttujan arvon vähentyessä tai kasvaessa rajatta.
c) Muodosta sellainen polynomifunktio, jonka arvo kasvaa rajatta, kun muuttujan arvo vähentyy rajatta, ja jonka arvo vähenee rajatta, kun muuttujan arvo kasvaa rajatta.

Lisäksi funktion kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $(0, -4)$.

4. [K18 t. 2] Toisen asteen polynomille voidaan käyttää kahta erilaista esitystapaa:

$$\text{Summamuoto: } ax^2 + bx + c$$
$$\text{Tulomuoto: } a(x - x_1)(x - x_2).$$

a) Muokkaa polynomi $2(x - 6)(x - 9)$ summamuotoon.
b) Muokkaa polynomi $x^2 + x - 12$ tulomuotoon.
c) Osoita, että $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.

A.2 Korkeamman asteen yhtälö

Tekijöihin jako tarkoittaa korkeamman asteen polynomin ilmaisemista alemman asteen polynomien tulona. Tekijöihin jakamista tarvitaan, kun ratkaistaan korkeamman asteen yhtälöitä sekä epäyhtälöitä.

Pohdinta A.8 Tutki toisen asteen polynomia $x^2 + 5x + 6$.

1. Etsi kaikki sellaiset kokonaislukuparit, joiden tulona saadaan vakio 6.
2. Etsi kokonaislukupareista se, joiden summana saadaan muuttujan x kerroin 5.
3. Käytä näitä kokonaislukuja a ja b kirjoittaaksesi polynomin muodossa $x^2 + ax + bx + a \cdot b$.
4. Muokkaa polynomi muotoon $(x + a)(x + b)$.
5. Tarkista ratkaisusi kertomalla sulut auki. Vastauksena pitäisi tulla alkuperäinen polynomi $x^2 + 5x + 6$.

Toisen asteen polynomi $x^2 + ax + b$ voidaan joskus kirjoittaa muodossa $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta$, missä α ja β ovat kokonaislukuja. Tällöin kerroin a voidaan esittää lukujen α ja β summana ja kerroin b niiden tulona. Tämä onnistuu silloin, kun polynomin nollakohdat ovat kokonaislukuja.

Huomautus A.9 Tekijöihinjako voidaan aina tarkistaa kertomalla lopputuloksen sulut auki ja vertaamalla sitä alkuperäiseen lausekkeeseen.

Yhteisen tekijän erottaminen on polynomien kertolaskun käänteinen toimenpide, missä osittelulakia voidaan käyttää käänteiseen suuntaan:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Osittelulakia on mahdollista soveltaa myös useampaan kuin kahteen termiin, jos niillä on yhteinen tekijä:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d).$$

Ryhmittelyssä erotetaan jokaisesta ryhmästä yhteinen tekijä erikseen. Erotetaan siis kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä, sitten kahden seuraavan termin yhteinen tekijä ja erotetaan sitten yhteinen tekijä näistä uudelleen:

$$\underbrace{ac + ad}_{\text{yhteinen tekijä a}} + \underbrace{bc + bd}_{\text{yhteinen tekijä b}} = \underbrace{a(c + d) + b(c + d)}_{\text{yhteinen tekijä (c+d)}} = (a + b)(c + d).$$

Edellisessä pohdintatehtävässä erotettiin yhteinen tekijä polynomista ryhmittelemällä. Joskus polynomit voidaan jakaa tekijöihin *muistikaavojen avulla*. Muistikaavojan avulla saadaan jaetuksi tekijöihin polynomilausekkeita, joissa ei esiinny kaikille termeille yhteistä tekijää.

Pohdinta A.10 Jaa tekijöihin seuraavat polynomit binomikaavojen avulla:

1. $4x^2 - 12x + 9$
2. $x^4 - 1$
3. $x^2 - 9x$
4. $x^2 + 8x + 16$.

Joskus yhden nollakohdan voi nähdä helposti, jolloin tekijöihin jaon voi viedä loppuun toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla.

Esimerkki A.11 Huomataan kokeilemalla, että kolmannen asteen polynomifunktion $p(x) = x^3 - 7x + 6$ yksi nollakohta on $x = 1$, joten $x - 1$ on yksi polynomin $p(x)$ tekijä. Selvitetään tuntemattomien kertoimien menetelmällä, mikä on jäljelle jäävä toisen asteen tekijä.

$$p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c) = x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c = x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$$

Selvitetään tuntemattomat kertoimet b ja c alkuperäisen polynomifunktion avulla:

- Polynomifunktiolla $p(x)$ ei ole toisen asteen termiä, joten $b - 1 = 0$ eli $b = 1$.
- Polynomifunktion $p(x)$ ensimmäisen asteen termin kerroin -7, joten $c - b = -7$. Koska $b = 1$, niin $c = -6$.
- Polynomifunktion $p(x)$ vakiotermi on 6, mikä toteuttaa ehdon $-c = -(-6) = 6$.

Siten

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x - 6).$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan selvitettyä toisen asteen tekijän nollakohdat

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x = -3$ tai $x = 2$ ja niiden avulla jaettua se ensimmäisen asteen tekijöihin eli

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+3).$$

Lisätieto A.12 Tekijöihin jakaminen voidaan suorittaa myös laskimella esimerkiksi factor-komennon avulla. Esimerkiksi $factor(x^3 - x) = x(x+1)(x-1)$. Harjoittele laskimen käyttöä ja jakamalla pohdintatehtävien polynomeja tekijöihin laskimellasi ja varmista, että saat oikeat tulokset.

Opetellaan ratkaisemaan sellaisia korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan kirjoittaa muotoon, jossa vasemmalla puolella on polynomien tulo ja oikealla nolla. Ratkaisumenetelmä perustuu tulon nollasääntöön: kun polynomifunktio on jaettu tekijöihin, se voidaan ratkaista tulon nollasäännöllä. Tekijöihin jakoa voidaan soveltaa minkä tahansa asteen polynomiyhtälön ratkaisemiseen.

Pohdinta A.13 Annukka on jakanut tekijöihin polynomin $x^3+3x^2-4x-12$. Ratkaisu etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} x^3+3x^2-4x-12 &= x\cdot x\cdot x + 3\cdot x\cdot x - 4\cdot x - 4\cdot 3 \\ &= x^2(x+3) - 4(x+3) \\ &= (x^2-4)(x+3). \end{aligned}$$

1. Onko tekijöihin jako suoritettu loppuun asti? Suorita se loppuun tarvittaessa.
2. Selitä lyhyesti rivi riviltä, miten Annukan ratkaisu etenee.
3. Ratkaise polynomifunktion nollakohdat tulon nollasäännöllä.

Mallitehtävä A.14 Jaa tekijöihin ja ratkaise funktion $f(x) = 5x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 2$ nollakohdat.

Ratkaisu

Erotetaan kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä $5x^4$ ja kahden viimeisen termin tekijä 2:

$$5x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 2 = \underbrace{5x^4\cdot x^2 - 5x^4\cdot x^2}_{\text{yhteinen tekijä}} 5x^4 + \underbrace{2\cdot x^2 - 2\cdot 1}_{\text{yhteinen tekijä}} 2 = 5x^4(x^2-1) + 2(x^2-1).$$

Erotetaan yhteinen tekijä $(x^2 - 1)$:

$$\underbrace{5x^4(x^2-1) + 2(x^2-1)}_{\text{yhteinen tekijä } x^2-1} = (5x^4 + 2)(x^2 - 1).$$

Käytetään binomikaavaa, jotta saadaan suoritettua tekijöihin jako loppuun asti:

$$(5x^4 + 2)\underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{erotuksen neliö}} = (5x^4 + 2)(x + 1)(x - 1).$$

Tekijöihin jako on suoritettu loppuun, sillä neljännen asteen termillä $5x^4 + 2$ ei ole nollakohtia eikä sitä siten voida jakaa enää tekijöihin.

Ratkaistaan vielä yhtälö

$$(5x^4 + 2)(x + 1)(x - 1) = 0.$$

Tulon nollasäännöllä saadaan

$$\begin{aligned} 5x^4 + 2 &= 0 \\ 5x^4 &= -2 \\ x^4 &= \frac{-2}{5} \end{aligned} \quad \text{tai} \quad \begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned} \quad \text{tai} \quad \begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1, \end{aligned}$$

missä $x^4 = \frac{-2}{5}$ ei ole mahdollinen. Polynomifunktion $f(x) = 5x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 2$ nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$.

Huomautus A.15 Tekijöihin jako on suoritettu loppuun asti, kun lauseke on tulomuodossa eikä sen tekijöitä voi jakaa tekijöihin.

Pohdinta A.16

1. Ratkaise yhtälö $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
   a) graafisesti GeoGebralla.
   b) ryhmittelemällä (kuten pohdinnassa A.8).
   c) muuttamalla yhtälö toisen asteen yhtälöksi (tee sijoitus $x^2 = t$).

2. Pohdi näiden erilaisten ratkaisutapojen pätevyyttä, vahvuuksia ja heikkouksia. Mitä hyötyä on erilaisista ratkaisutavoista?

Tehtävät

5. Miten voisit käyttää tekijöihin jakoa apuna murtolausekkeiden sieventämisessä? Supista murtolausekkeet.
a) $\frac{x^3-x}{x+1}$ **b)** $\frac{x^2-9}{2x-6}$ **c)** $\frac{z(2+z)-(2+z)}{z-1}$

6. Ratkaise yhtälöt tulon nollasäännöllä.
a) $5x^3 + 25x^2 = 0$
b) $y^3 - 5y^2 + 3y = 15$
c) $z^4 - 7z^3 + 9z^2 - 63z = 0$
d) $x^4 - 16 = 0$

7. Määritä luvut, joilla on seuraavat ominaisuudet:
a) Luvun neljäs potenssi on yhtä suuri kuin kolme kertaa luvun neliö.
b) Luvun viides potenssi on yhtä suuri kuin luvun kuution ja itse luvun keskiarvo.
c) Kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo on yhtä suuri kuin niiden summa.

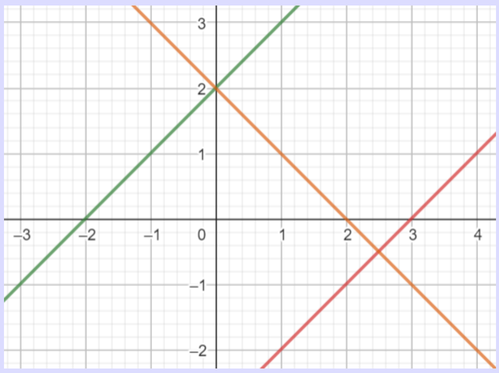
8. [S1986 t.2] Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^3 + 3(2a - 1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$ on juurena $x = 1$. Mitkä ovat tällöin muut juuret?

A.3 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

Korkeamman asteen polynomiepäyhtälöt ratkaistaan tutkimalla polynomifunktion merkkiä merkkikaavion avulla. Harjoitellaan merkkikaavion käyttämistä tulofunktion yhteydessä.

Pohdinta A.17 Polynomi $f(x)$ on jaettu ensimmäisen asteen tekijöihin $x-a, x-b$ ja $x-c$, joita vastaavien funktioiden kuvaajat on esitetty alla olevassa kuvassa. Tutkitaan, miten voidaan hahmotella kolmesta ensimmäisen asteen polynomifunktiosta muodostuvan tulofunktion $f(x) = -(x-a)(x-b)(x-c)$ kuvaaja tekijöitä vastaavien funktioiden kuvaajien avulla.

1. Tutki, minkä merkkisiä (positiivisia vai negatiivisia) arvoja ensimmäisen asteen tekijöitä vastaavat funktiot saavat nollakohtien molemmin puolin. Milloin polynomifunktio f
   a) saa arvon nolla?
   b) saa positiivisia arvoja?
   c) saa negatiivisia arvoja?



2. Olkoon $a < b < c$. Merkitse alla olevan taulukon mukaiseen merkkikaavioon + ja − merkeillä tarvittavat tiedot ja päättele niiden avulla polynomifunktion f kulku.

	Nollakohta	Nollakohta	Nollakohta	
$x-a$				
$x-b$				
$x-c$				
f				

3. Hahmottele merkkikaavion avulla polynomifunktion f kulku vihkoosi. Mitä astetta polynomifunktio f on? Tarkista GeoGebralla.

Korkeamman asteen epäyhtälöitä ratkaistaessa merkkikaavio on hyödyllinen. Funktion merkki + tai - kertoo, ovatko funktion saamat arvot positiivisia vai negatiivisia. Funktion arvo on positiivinen, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella ja negatiivinen, kun kuvaaja on x-akselin alapuolella.

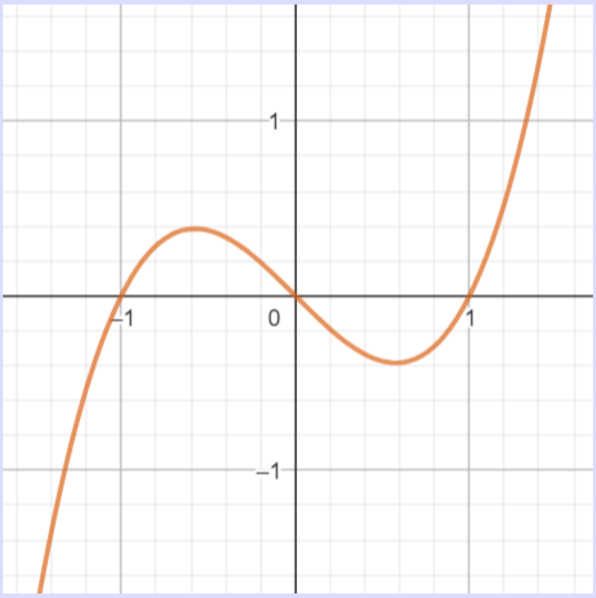
Kuvaajalta luettuna funktio $f(x)$ on nolla niissä pisteissä, joissa funktion kuvaaja leikkaa tai sivuaa x-akselia. Merkkikaaviota tulee tulkita seuraavasti:

- jos $f(x) < 0$, nollakohta ei kuulu mukaan alueeseen.
- jos $f(x) \leq 0$, nollakohta kuuluu mukaan alueeseen.

Vastaavasti toimitaan x-akselin yläpuolella eli positiivisilla arvoilla.

Polynomiepäyhtälön nollakohdat voidaan lukea GeoGebran avulla graafisesti kuvaajaa tulkitsemalla.

Pohdinta A.18 Tutki kolmannen asteen polynomifunktion $f(x) = x^3 - x$ kuvaajaa. Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua? Korjaa väärät väittämät oikeiksi.



1. Funktio saa positiivisia arvoja, kun $-1 < x < 0$ tai $x \geq 1$.
2. Funktio saa äärettömän määrän negatiivisia arvoja.
3. Funktion nollakohdat muuttuvat kerrottaessa sitä luvulla kolme.
4. $f(x) \leq 0$, kun $x < -1$ tai $0 < x < 1$.
5. Funktio vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan.
6. Funktio voi vaihtaa merkkiään kuvan ulkopuolella.

Polynomifunktion kuvaaja on katkeamaton käyrä eli se on *jatkuva funktio*. Siten se voi vaihtaa merkkiä vain leikkaamalla x-akselin. Polynomifunktion jatkuvuutta käsitellään moduulissa MAA6.

Lause A.19 Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan.

Graafisesti on vaikea löytää luotettavasti ratkaisua varsinkin, jos ratkaisu ei ole kokonaisluku. Useimmiten pelkkä kuvasta katsominen ei riitä, mutta sitä voidaan käyttää apuna ratkaisua arvioidessa.

Ensimmäisen ja toisen asteen epäyhtälöiden ratkaisumenetelmä opittiin aiemmissa osioissa. Käyttämällä hyväksi näitä taitoja sekä edellisessä kappaleessa opittua tekijöihin jakamista, voidaan ratkaista korkeamman asteen epäyhtälöitä.

Pohdinta A.20 Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 < 3x$ seuraavien ohjeiden avulla:

1. Jaa polynomi tekijöihin.
2. Ratkaise tekijöitä vastaavien funktioiden nollakohdat ja päättele, milloin funktiot saavat positiivisia ja negatiivisia arvoja.
3. Tee merkkikaavio, johon laitat + ja − merkkejä kertomaan tekijöitä vastaavien funktioiden arvojen positiivisuuden tai negatiivisuuden eri väleillä. Laske niiden tulona polynomifunktiota vastaavat merkit eri väleillä.
4. Lue merkkikaaviosta, milloin epäyhtälö toteutuu ja kirjoita vastaus. Mallinna ratkaisujoukko lukusuoralle.
5. Tarkista vastauksesti graafisesti GeoGebralla.

Merkkikaavion avulla pystytään ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä sen tekijöitä vastaavien funktioiden merkkien avulla. Nämä merkit voidaan selvittää funktioiden kuvaajien avulla, kuten aiemmin on opittu. Tulofunktion merkit saadaan selville tekijöitä vastaavien funktioiden merkkien tulona käyttämällä tulon nollasääntöä.

Tutkimalla polynomin merkkiä nollakohtiensa välissä testipisteiden avulla, voidaan ratkaista korkeamman asteen polynomiepäyhtälöitä.

Pohdinta A.21 Tehtävänä on ratkaista millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^5 - 5x^3$ arvot ovat negatiivisia? Tutki Teijan, Marjon ja Heikin ratkaisuja.

Teijan ratkaisu:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 &< 0 \\ x^3(x-5) &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= 0 \quad \text{tai} \quad & x - 5 &= 0 \\ x &= 0 & x &= 5 \end{aligned}$$

$$f(-1) = 6 > 0$$

$$f(1) = -4 < 0$$

$$f(6) = 216 > 0$$

		0		5	
$x^4 - 5x^3$	+		-		+

Funktio f saa negatiivisia arvoja, kun $0 \leq x \leq 5$.

Marjon ratkaisu:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 &< 0 \\ x^3(x-5) &< 0 \end{aligned}$$

Funktio $g(x) = x^3$ on kolmannen asteen polynomi, jolla on nollakohta origossa.
Funktion $h(x) = x - 5$ kuvaaja on nouseva suora, joka leikkaa x-akselin kohdassa $x = 5$.

		0		5	
x^3	-		+		+
$x-5$	-		-		+
$x^4 - 5x^3$	+		-		+

Eli $f(x) < 0$, kun $0 < x < 5$.

Heikin ratkaisu:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 &< 0 \\ x^4 &< 5x^3 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

Funktio f on negatiivinen, kun $x < 5$.

1. Mihin polynomifunktion ominaisuuteen Teijan menetelmä perustuu?
2. Selitä, mitä kussakin ratkaisussa on tehty ja lisää ratkaisuihin välivaiheita.
3. Vertaile Teijan ja Marjon ratkaisuja. Mitä vahvuuksia ja heikkouksia niissä on toisiinsa verrattuna?
4. Mikä Heikin olisi pitänyt tehdä, että tällä tavalla ratkaiseminen onnistuu?

Huomautus A.22 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälön merkkikaavio tulee aina perustella hahmottelemalla polynomin tekijöitä vastaavien funktioiden kuvaajat tai laskemalla funktion arvoja polynomifunktion nollakohtien välissä.

Tehtävät

9. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 11x$ arvot ovat
a) negatiivisia?
b) epänegatiivisia?
c) positiivisia?

10. Määritä luvut, joilla on seuraava ominaisuus:
a) kyseisen luvun kuutio on suurempi kuin luku itse.
b) kyseisen luvun kuutio on pienempi kuin luvun neliö.

11. Olkoon $f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 + 1)x$. Osoita, että olipa vakiolla a mikä arvo tahansa, niin $f(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

12. [S2019 t.5] Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \leq 0$. Voit käyttää esimerkiksi laskinohjelmistoa. Selitä sanallisesti (enintään 1000 merkkiä), miten polynomifunktion tulomuotoa $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ voidaan käyttää epäyhtälön $p(x) \leq 0$ ratkaisemiseen, kun $a < b < c$.

B Opettajan opas

Osiossa käydään läpi pohdintatehtävien oppimistavoitteita ja annetaan vinkkejä opettajalle niiden ohjeistamiseen ja läpikäymiseen. Pohdintatehtävät voidaan tehdä yksin tai pienissä ryhmissä. Niihin on suunniteltu käytettäväksi aikaa tehtävästä riippuen noin 10-20 minuuttia, jonka jälkeen niistä olisi hyvä keskustella yhteisesti käyden havaintoja läpi. Tehtävät on jaoteltu kappaleittain oppimateriaalin mukaan.

B.1 Ajankäytön suunnitelma

Jokaiselle aihealueelle on varattu yksi 75 minuutin mittainen oppitunti.

- Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys (75 min)
- Korkeamman asteen polynomiyhtälö (75 min)
- Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö (75 min)

B.2 Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys

Kappaleen tavoitteena on tutustua polynomin tekijöihin sekä niiden yhteyteen polynomin nollakohtien kanssa. Opiskelijan tulisi oppia tunnistamaan korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajia ja niiden keskeisimpiä ominaisuuksia: vakiotermin sekä korkeimman asteen termin kertoimen vaikutus polynomifunktion kuvaajaan sekä polynomifunktion nollakohtien minimi- ja maksimimäärä.

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on tutustua korkeamman asteen polynomifunktioiden ominaisuuksia väittämien avulla. Opiskelijan tulee tutkia GeoGebran liukusäätimien avulla viidennen asteen polynomifunktion kuvaajaa. Muuttamalla termien kertoimia, saadaan tutkittua myös pienemmän asteluvun kuvaajia.

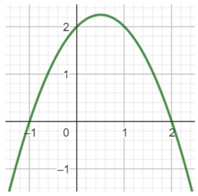
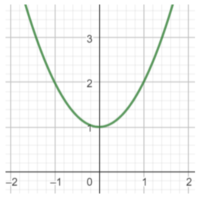
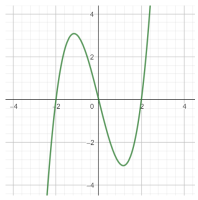
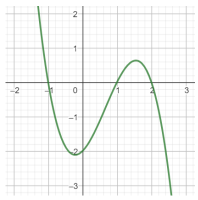
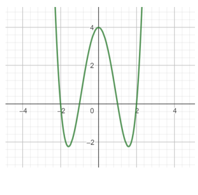
1. Aina.
2. Ei koskaan. Vakiotermi kertoo, missä kohdassa kuvaaja leikkaa y-akselin.
3. Aina.
4. Joskus. 4. asteen polynomilla voi olla 0-4 nollakohtaa.
5. Ei koskaan. Polynomin korkeimman asteen termin kertoimen etumerkistä voidaan asteluvun kanssa päätellä kuvaajan yleinen muoto.
6. Ei koskaan. Polynomilla, joka on astetta n on korkeintaan n nollakohtaa.

Lisäksi opiskelijoita voi haastaa opiskelijoita keksimään pätevämpiä perusteluja ja muodostamaan lisää säännönmukaisuuksia korkeamman asteen polynomifunktioiden muodosta.

Pohdinta A.3

1. On
2. Ei

Pohdinta A.4

$-x^2 + x + 2$	$-(x+1)(x-2)$	$f(-1) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$x^2 + 1$	ei tulomuotoa	ei nollakohtia	
$x^3 - 4x$	$x(x+2)(x-2)$	$f(-2) = 0$, $f(0) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$-x^3 + 2x^2 + x - 2$	$-(x+1)(x-1)(x-2)$	$f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ ja $f(2) = 0$	
$x^4 - 5x^2 + 4$	(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)	$f(-2) = 0$, $f(-1) = 0$ $f(1) = 0$ ja $f(2) = 0$	

Tehtävään on useita eri lähestymistapoja. Jokaisesta sarakkeesta valitaan yksi kortti/ryhmä ja tehtävän voi aloittaa esimerkiksi ratkaisemalla summamuodosta nollakohdat, joiden avulla löydetään tulomuoto sekä oikea kuvaaja tai selvittämällä kuvaajien avulla nollakohdat, etsimällä niiden avulla tulomuoto ja kertomalla se auki, niin päästään summamuotoon.

Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys ei ole tässä vaiheessa opiskelijalle tuttu. Taululle voi lähteä hahmottelemaan nollakohtien merkitystä. Esimerkiksi nollakohta $x = -1$ voidaan esittää muodossa $x + 1 = 0$, minkä vasen puoli on polynomin tekijä.

Tunnille voi tehdä valmiiksi tehtävästä pelikortit, jotka voidaan jakaa pinoihin. Alustaksi voidaan ottaa iso paperi, johon fyysisten korttien ryhmittely sekä perustelujen kirjoittaminen on helppo tehdä. Tämä voi auttaa hahmottamisessa. Lisäksi opiskelijoita voi pyytää yleistämään ja perustelemaan havaintojaan.

Pohdinta A.7

1. $(5x - 1)(x + 1)$
2. $a(x + 3)(x - 1)(x - 4) = a(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$

Lisäksi GeoGebralla liukusäätimien avulla voi tutkia polynomien $a(5x-1)(x+1)$ ja $a(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$ kuvaajia muuttamalla luvun a arvoja. Haasta opiskelijoita pohtimaan, miksi polynomin nollakohdat eivät muutu kerrottaessa sitä jollakin luvulla.

B.2.1 Korkeamman asteen yhtälö

Kappaleen keskeisimpänä tavoitteena on harjoitella tekijöihin jakamista ja sen avulla yhtälön ratkaisemista. Käydään läpi kaikki tekijöihin jakomenetelmät, jotka lukiolaisen tulee osata. Tekijöihin jako voi olla haastavaa opiskelijoille. Tavoitteena on helpottaa eri tekijöihin jakomenetelmien hahmottamista ja niiden käyttämistä.

Pohdinta A.8

Tekijöihin jako voidaan usein tehdä kokeilemalla ja usein vain näkemällä sopivia yhtäläisyyksiä, mutta joitakin sääntöjä voidaan muotoilla. Tämän tehtävän tarkoituksena on pohtia näitä sääntöjä.

1. Kokonaislukuparit 1 ja 6, 2 ja 3 sekä -1 ja -6, -2 ja -3
2. Luvut 2 ja 3
3. $x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3$
4. $x(x + 2) + 3(x + 2)$
5. $(x + 3)(x + 2)$
6. $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Kysymyksiä voidaan visualisoida taululle symbolien avulla, seuraavasti:

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} = 5 \text{ ja } \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 6.$$

Yhteisen tekijän erottamista voidaan helpottaa erittemällä termien kertoimet ja alleviivaamalla tai värittämällä yhteiset tekijät

$$\underline{x} \cdot x + 2 \cdot \underline{x} + \underline{3} \cdot x + \underline{3} \cdot 2.$$

Lisäksi opiskelijoita voi pyytää pohtimaan toimiiko tällainen ratkaisutapa yleisesti. Miksi se toimii tässä tapauksessa? Entä jos toisen asteen termillä olisi kerroin ($\neq 1$)

Pohdinta A.10

1. $(2x - 3)^2$
2. $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
3. $x(x + 3)(x - 3)$
4. $(x + 4)^2$

Pohdinta A.13

Tehtävän tarkoituksena on tutkia tekijöihin jakamista ryhmittelemällä, mikä on usein haastavaa opiskelijoille. Tehtävässä arvioidaan valmista ratkaisua ja saatetaan se loppuun, mikä kehittää päättelyn eri muotoja. Tavoitteena on saada vinkkejä ryhmittelyyn, oppia selittämään sanallisesti ratkaisun vaiheita sekä tutkia, milloin tekijöihin jako on suoritettu loppuun saakka.

1. Tekijöihin jakoa ei ole suoritettu loppuun:
$$(x^2 - 4)(x + 3) = (x - 2)(x + 2)(x + 3).$$
2. Annukka on merkinnyt termit tuloina, jolloin hänen on helpompi tunnistaa yhteiset tekijät
3. $x = 2, x = -2$ tai $x = -3$.

Tarvittaessa kehota opiskelijaa laatimaan ratkaisua itse ja vertaamaan sitä Annukan ratkaisuun. Pyydä vertailemaan ratkaisuja, mitä yhteistä niissä on? Mitä eroja? Voisiko Annukan ratkaisusta ottaa jotakin oppia? Lisäksi opiskelijoita voi pyytää perustelemaan, milloin tekijöihin jako on tehty loppuun saakka.

Pohdinta A.16

Tarkoituksena on oppia ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälö erilaisilla menetelmillä ja arvioida niiden luotettavuutta.

1. a) Vastaukset ainakin yhden desimaalin tarkkuudella, noin $x = \pm 1{,}6$ tai noin $x = \pm 1{,}4$.
   b) Vakioterminä olevan luvun 6 mahdolliset kokonaislukukertoimet ovat 1 ja 6 tai 2 ja 3. Näistä lukujen -2 ja -3 summana saadaan luku -5, joka on lineaarisen termin kerroin. Nyt ryhmittelemällä saadaan

$$x^4 - 5x^2 + 6 = x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 2 \cdot 3 = x^2(x^2 - 3) - 2(x^2 - 3) = (x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

   Ratkaisemalla nollakohdat saadaan $x = \pm\sqrt{3}$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.
   c) Tehdään sijoitus $x^2 = t$

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

   Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan $t = 2$ tai $t = 3$. Kun otetaan huomioon alussa tehty sijoitus, niin

$$t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

   ja ratkaisuksi saadaan $x = \pm\sqrt{3}$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.

2. Opiskelijan tulisi arvioida kriittisesti vastauksen oikeellisuutta ja menetelmän luotettavuutta. Yleensä kuvasta katsominen ei riitä perusteluksi, vaikka nollakohdat olisivat helposti luettavissa.

B.2.2 Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

Kappaleen tavoitteena on, että opiskelija oppii ratkaisemaan korkeamman asteen epäyhtälöitä graafisesti kuvaajaa tulkitsemalla ja merkkikaaviota hyödyntäen sekä tekijöiden että testipisteiden avulla. Lisäksi pyritään parantamaan käsitystä ratkaisujoukosta ja harjoitellaan osoittamista.

Pohdinta A.17

Pohdinnan tarkoituksena on johdatella korkeamman asteen epäyhtälöiden graafiseen ratkaisuun ja tutustua merkkikaavion täyttämiseen sekä tulkitsemiseen. Merkkikaavioon tutustutaan korkemman asteen polynomin ensimmäisen asteen tekijöiden merkkejä tarkastelemalla. Epäyhtälöiden ratkaisujoukot ovat usein opiskelijoille hankalasti ymmärrettävissä, joten merkintöihin tulee kiinnittää huomiota. Ratkaisumenetelmä perustuu tulon nollasääntöön.

1. a) Kohdissa $x = -2$, $x = 2$ tai $x = 3$
   b) $x < -2$ tai $2 < x < 3$
   c) $-2 < x < 2$ tai $x < 3$

2.

	-2	2	3	
$x+2$	-	+	+	+
$x-2$	+	+	-	-
$x-3$	-	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-

3. Kolmatta astetta.

Tarvittaessa johdattele opiskelijoita kysymällä esimerkiksi "kuinka voit päätellä tulofunktion merkin tekijöitä vastaavien funktioiden merkkien avulla, jotka ovat tiedossa?". Jos ratkaisu ei edelleenkään selviä, voi vinkata tulon nollasäännöstä. Lisäksi voi pohtia, että miten merkkikaaviosta näkee, milloin $f(x) \leq 0$ tai milloin $f(x) > 0$. Merkkikaaviosta saatava vastaus voi olla hyvä ajatella lukusuoralle. Harjoitelkaa merkitsemään lukusuoralle vastaus, milloin $f(x) < 0$. Toinen asia, jota voi pyytää pohtimaan on se, miten funktio käyttäytyy kuvan ulkopuolella. Mitä tapahtuu, jos siellä olisi muita nollakohtia?

Merkkikaaviosta kannattaa käydä yhteisesti läpi ainakin seuraavia asioita:

- Tekijät tulee merkitä vasemmanpuoleiseen sarakkeeseen.
- Nollakohdat tulee merkitä pystyviivojen päälle.
- Tekijöiden merkit tulee tarkastella jokaisen nollakohdan välissä erikseen, käyttäen apuna tekijöitä vastaavien funktioiden kuvaajia.
- Tulofunktion merkit tulee merkitä alimmalle riville ja siitä voidaan lukea tehtävän ratkaisu.

Pohdinta A.18

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella korkeamman asteen epäyhtälön graafista ratkaisua sekä puuttua yleisimpiin ajatusvirheisiin, joita epäyhtälöiden ratkaisemiseen liittyy. Samalla hoksautellaan, että polynomifunktio voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan.

1. Tarua, funktio saa positiivisia arvoja, kun $-1 < x < 0$ ja $x > 1$.
2. Totta.
3. Tarua, funktion nollakohdat pysyvät samana kerrottaessa sitä jollakin vakiolla a.
4. Tarua, $f(x) \leq 0$, kun $x \leq -1$ tai $0 \leq x \leq 1$.
5. Totta.
6. Tarua, kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme nollakohtaa, jotka näkyvät kuvassa.

Kohta 1 on melkein totta, mistä voi keskustella tunnilla samalla muistuttaen opiskelijoita olemaan tarkkana merkintöjen kanssa. Kohdassa 2 voi olla hyvä keskustella, mitä ääretön tarkoittaa ja havainnollistaa sitä esimerkiksi lukusuoran avulla. Lisäksi voi miettiä, että miten ratkaisut muuttuisivat, jos ei tiedettäisi funktion olevan astetta kolme?

Pohdinta A.20

Tehtävän tarkoituksena on oppia ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiepäyhtälö merkkikaavion avulla käyttämällä hyödyksi ensimmäisen ja toisen asteen epäyhtälöiden ratkaisumenetelmiä. Tehtävän pitäisi olla melko yksinkertainen, sillä tekijöihin jakaminen on tuttua ja merkkikaavioon tutustuttiin aiemmassa pohdintatehtävässä.

Epäyhtälö toteutuu, kun $x < -1$ ja $0 < x < 3$.

Lisäksi voi pohtia, että miten korkeamman asteen polynomiepäyhtälö voidaan ratkaista, jos polynomia ei voida jakaa tekijöihin?

Pohdinta A.21

Pohdinnassa opitaan ratkaisemaan polynomiepäyhtälö testipisteiden avulla. Opiskelijan tulee selittää ratkaisun vaiheita sanallisesti, mikä voi auttaa hahmottamisessa. Pohdinta toimii myös mallitehtävänä, joka kattaa molemmat tässä osiossa opitut ratkaisumenetelmät sekä opettaa merkkikaavion tulkintaan. Lisäksi esiin on nostettu esimerkki huonosta ratkaisutavasta, mikä ei tuota oikeaa ratkaisua tässä tilanteessa. Opiskelijan tulee löytää virhe ja antaa ohjeita ratkaisun parantamiseksi.

1. Polynomifunktio on jatkuva funktio ja voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan.

2. Teija on ratkaissut epäyhtälön testipisteiden avulla, Marjo tekijöiden kuvaajia tulkitsemalla ja Heikki on koettanut ratkaista epäyhtälön peruslaskutoimitusten avulla.

3. Teijan ratkaisu testipisteiden kanssa on pätevä ja nopeasti ratkaistavissa. Joskus voi tulla tilanne, jossa testipisteiden arvot ovat hankalasti laskettavissa. Marjon ratkaisu on myös pätevä ja tekijöitä vastaavat funktiot ovat usein pientä astetta, jolloin niiden kuvaajien kulku on tiedossa ja merkkikaavion täydentäminen on helppoa. Joskus voi tulla tilanne, jossa tekijöihin jakaminen ei ole mahdollista.

4. Heikin tulee huomioida, mitä arvoja muuttuja x voi saada ja miten se vaikuttaa epäyhtälöön, kun hän jakaa yhtälöä puolittain x^3:lla.
   i) Kun $x = 0$, niin yhtälö ei toteudu.
   ii) Kun $x > 0$, niin jaettaessa yhtälöä puolittain x^3:lla saadaan
   $$x^4 < 5x^3$$
   $$x < 5.$$
   iii) Kun $x < 0$, niin jaettaessa yhtälöä puolittain x^3:lla saadaan
   $$x^4 < 5x^3$$
   $$x > 5,$$
   mikä ei ole mahdollista.
   Kun yhdistetään määrittelyvälit, saadaan ratkaisuksi $0 < x < 5$.

C Tehtävien vastaukset

Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys

1. f-2, g-4, h-1, i-3

2. a) $x = -2, x = -2, x = 1$ tai $x = 2$
   b) $-2 < x < -1$ tai $1 < x < 2$
   c) $x < -2$ tai $-1 < x < 1$ tai $x > 2$
   d) $-1{,}5 < x < 0$ tai $x > 1{,}5$
   e) $x < -1{,}5$ tai $0 < x < 1{,}5$

3. a) $\frac{1}{2}(x^3 - x)$
   b) Esim. $3x^4 - 5x^3 + x^2$
   c) Esim. $-x^3 + 3x^2 - 4$

4. a) $2x^2 - 30x + 108$
   b) $(x - 3)(x + 4)$
   c) Vertaa tulo- ja summamuotoja

Korkeamman asteen polynomiyhtälö

5. a) $x^2 - x$
   b) $\frac{x+3}{2}$
   c) $2 + z$

6. a) $x = -5$ tai $x = 0$
   b) $x = 5$
   c) $x = 0$ tai $x = 7$
   d) $x = -2$ tai $x = 2$

7. a) $x = -\sqrt{3}, x = -1$ ja $x = \sqrt{3}$
   b) $x = -1, x = 0$ ja $x = 1$
   c) 1, 2 ja 3

8. $a = 1$. Tällöin muut juuret ovat $x = -4$ ja $x = 0$

Korkeamman asteen polynomiepäyhtälö

9. a) $-1 < x < 0$ ja $x > 3$
   b) $x \leq -1$ tai $0 \leq x \leq 3$
   c) $x < -1$ tai $0 < x < 3$

10. a) Luvut $-1 < x < 0$ tai $x > 1$
    b) Luvut $x < 0$ tai $0 < x < 1$

11. Jaa tekijöihin $x(x^2 + ax + a^2 + 1)$ ja osoita, että $x^2 + ax + a^2 + 1 > 0$ kaikilla a:n arvoilla

12. $x \leq -3$ tai $1 \leq x \leq 4$