Metristen avaruuksien täydellistymät ja Arzelà–Ascolin lause

LuK-tutkielma
Lauri Sipilä
Y68378246
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2024

Sisällys

Johdanto

Tutkielmassa tarkastellaan metrisiä avaruuksia ja niiden ominaisuuksia. Metrinen avaruus on mikä tahansa epätyhjä joukko, jossa on määritelty metriikka eli joukon alkioiden välinen etäisyys. Tutkielmassa on kaksi päätulosta, jotka todistetaan. Ensiksi jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä, ja mitkä tahansa kaksi täydellistymää ovat isometriset keskenään. Toiseksi tarkastellaan Arzelà–Ascolin lausetta, joka koskee yhtäjatkuvia funktioperheitä. Tutkielmassa todistetaan useita muita metristen avaruuksien ominaisuuksiin liittyviä tuloksia. Näitä tuloksia tarvitaan kahden päätuloksen todistamisessa. Määritellään tutkielmassa tarvittavat käsitteet.

Aluksi esitellään joukko-opin käsitteitä, merkintöjä ja muita matemaattisia käsitteitä. Määritellään metrinen avaruus ja tarkastellaan niihin liittyviä peruskäsitteitä avoin pallo, avoin ja suljettu joukko, rajoitettu joukko, kasautumispiste, sulkeuma, tiheä joukko ja isometria. Sen jälkeen tarkastellaan jonoja ja Cauchyn jonoja. Jonot ja niiden suppeneminen ovat usein keskeisiä tutkittaessa metristen avaruuksien ominaisuuksia. Metrinen avaruus on täydellinen, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee. Muodostetaan metrisen avaruuden täydellistymä, joka on täydellinen metrinen avaruus. Tämän jälkeen määritellään jatkuvuus ja yhtäjatkuvuus sekä tasainen jatkuvuus ja tasainen yhtäjatkuvuus. Perehdytään kompakteihin metrisiin avaruuksiin. Todistetaan useita kompakteihin avaruuksiin yleisesti liittyviä tuloksia. Tarkastellaan käsitettä täysin rajoitettu. Lopuksi todistetaan Arzelà–Ascolin lause.

Metrinen avaruus on myös topologinen avaruus. Topologisissa avaruuksissa alkioiden välille ei määritellä etäisyyttä, vaan topologia muodostuu avoimista joukoista. Lukijalta oletetaan tunnetuksi matemaattisen analyysin peruskäsitteet. Tutkielman ensisijaisena lähteenä on käytetty S. Kumaresanin teosta Topology of Metric Spaces [3]. Lähteinä on käytetty myös teoksia [4], [5] ja [6] sekä luentomateriaaleja [1] ja [2].

1 Joukko-oppia, merkintöjä ja käsitteitä

Joukko on kokoelma objekteja, joita kutsutaan joukon *alkioiksi*. Jos alkio a kuuluu joukkoon A, merkitään $a \in A$. Jos a ei kuulu joukkoon A, merkitään $a \notin A$. Jos kaikki joukon A alkiot kuuluvat myös joukkoon B, niin A on joukon B *osajoukko* ja sitä merkitään $A \subseteq B$. Jos jokin joukon A alkio ei kuulu joukkoon B, niin $A \not\subseteq B$ eli A ei ole joukon B osajoukko. *Tyhjässä joukossa* $\emptyset$ ei ole yhtään alkiota. Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ sisältää kaikki alkiot, jotka kuuluvat joukkoon A tai B. Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ sisältää kaikki alkiot, jotka kuuluvat joukkoihin A ja B. Joukkojen A ja B *erotus* $A \setminus B$ sisältää kaikki alkiot, jotka kuuluvat joukkoon A, mutta eivät kuulu joukkoon B. Kun tarkastellaan yleisesti joukkoa X, missä $A \subseteq X$, niin joukon A *komplementti* on $X \setminus A$ ja siihen kuuluu kaikki alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon A. Joukot voivat sisältää myös muita joukkoja, jolloin joukkoa voidaan kutsua *kokoelmaksi* tai *perheeksi*. Kokoelman $\{A_i\}_{i\in I}$ kaikkien joukkojen A_i yhdiste on $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$, ja niiden leikkaus on $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$, missä I on jokin *indeksijoukko*.

Joukon A *supremum* on sen pienin yläraja ja sitä merkitään $\sup A$. *Täydellisyysaksiooman* mukaan jokaisella ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on supremum. Merkitään luonnollisten lukujen joukkoa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Kuvaus tai *funktio* $f : X \to Y$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon X alkioon x yhden alkion $f(x)$ joukosta Y. Kuvaus f on *injektio*, jos ehdosta $f(x) = f(x')$ seuraa, että $x = x'$. Kuvaus f on *surjektio*, jos jokaiselle $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$. Kuvaus f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

2 Metrinen avaruus

Määritelmä 2.1. Olkoon X epätyhjä joukko. Kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty[$ on *metriikka* joukossa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$.

(1) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$. (symmetrisyys)

(3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$. (*kolmioepäyhtälö*)

Pari (X, d) on *metrinen avaruus*. Luku $d(x, y)$ on pisteiden x ja y välinen *etäisyys*.

Samalle joukolle voidaan määritellä useita erilaisia metriikoita. Metristä avaruutta (X, d) voidaan merkitä lyhyesti X, jos metriikka on selvä kontekstin perusteella tai mielivaltainen. Metrisen avaruuden alkioita voidaan kutsua pisteiksi. Tutkielmassa hyödynnetään usein kolmioepäyhtälöä todistuksissa.

Esimerkki 2.2. Reaalilukujen joukko, jossa metriikan määrittelee pisteiden x ja y välisen erotuksen itseisarvo $|x - y|$, on metrinen avaruus ja sitä merkitään $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Jos A on joukon X epätyhjä osajoukko ja metriikka d määritellään pelkästään joukossa $A \times A$, niin myös pari (A, d) on metrinen avaruus. Tällöin (A, d) on avaruuden (X, d) *aliavaruus*.

Määritelmä 2.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

on x-keskeinen, r-säteinen *avoin pallo*.

Määritelmä 2.4. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *avoin*, jos kaikille $x \in A$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq A$.

Lause 2.5. *Avoin pallo $B(x, r)$ metrisessä avaruudessa (X, d) on avoin joukko.*

Todistus. Osoitetaan, että jokaiselle $y \in B(x, r)$ on olemassa $s > 0$ siten, että $B(y, s) \subseteq B(x, r)$. Olkoon $y \in B(x, r)$ mikä tahansa. Valitaan $s := r - d(x, y) > 0$. Jos $z \in B(y, s)$, niin $d(y, z) < s$ ja

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s = d(x, y) + r - d(x, y) = r.$$

Siispä $z \in B(x, r)$ eli $B(y, s) \subseteq B(x, r)$. Näin ollen $B(x, r)$ on avoin joukko. $\square$

Määritelmä 2.6. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *suljettu*, jos sen komplementti $X \setminus A$ on avoin.

Huomautus 2.7. Käsitteet suljettu ja avoin eivät ole toistensa vastakohtia.

Määritelmä 2.8. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *rajoitettu*, jos on olemassa piste $x_0 \in X$ ja $R > 0$ siten, että $A \subseteq B(x_0, R)$.

Toisaalta A on rajoitettu, jos ja vain jos on olemassa $M > 0$ siten, että $d(x, y) \leq M$ kaikilla $x, y \in A$.

Määritelmä 2.9. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Piste $x \in X$ on joukon A *kasautumispiste*, jos kaikilla $r > 0$ on voimassa

$$(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Toisin sanoen x on kasautumispiste, jos jokainen x-keskeinen avoin pallo sisältää sellaisen joukon A pisteen, joka on eri kuin piste x.

Määritelmä 2.10. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Olkoon A' joukon A kasautumispisteiden joukko. Joukon A *sulkeuma* $\overline{A}$ on $A \cup A' = \overline{A}$.

Sulkeuman piste on siis joko joukon A piste tai joukon A kasautumispiste. Jokaiselle sulkeuman pisteelle $x \in \overline{A}$ on voimassa $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$ eli jokainen x-keskeinen avoin pallo sisältää joukon A pisteen.

Lause 2.11. *Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on suljettu, jos ja vain jos $A = \overline{A}$.*

Todistus. Olkoon A suljettu, jolloin $X \setminus A$ on avoin. Jos $x \in X \setminus A$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subseteq X \setminus A$. Tällöin $B(x,r) \cap A = \emptyset$ ja siten $x \notin \overline{A}$. Tästä seuraa, että $\overline{A} \subseteq A$. Määritelmän mukaan $A \subseteq \overline{A}$, joten $A = \overline{A}$.

Käänteisesti oletetaan, että $A = \overline{A}$. Jos $x \in X \setminus A$, niin $x \notin \overline{A}$, joten on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Siispä $B(x,r) \subseteq X \setminus A$, jolloin $X \setminus A$ on avoin ja A on suljettu. $\square$

Määritelmä 2.12. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *tiheä* avaruudessa X, jos $\overline{A} = X$.

Tiheän joukon A sulkeuma on siis koko joukko X, jolloin jokainen piste joukossa X on joko joukon A piste tai joukon A kasautumispiste. Jokainen avoin pallo joukossa X sisältää tiheän joukon A pisteen eli kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$ on voimassa $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Määritelmä 2.13. Olkoot (X,d) ja (Y,ρ) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *isometria*, jos

$$d(x,y) = \rho(f(x), f(y))$$

kaikilla $x, y \in X$.

Isometriassa kaksi erisuurta pistettä ei voi kuvautua samaan pisteeseen, sillä etäisyydet säilyvät yhtä suurena, joten isometria on aina injektio. Jos on olemassa isometria $f : X \to Y$, joka on myös surjektio, niin f on bijektio ja metriset avaruudet X ja Y ovat *isometriset*.

Topologinen avaruus X on *Hausdorff-avaruus*, jos kaikille erisuurille pisteille $x, y \in X$ on olemassa avoimet joukot U ja V siten, että $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Olkoon X metrinen avaruus, $x, y \in X$, $x \neq y$ ja merkitään $r := d(x,y)$. Tällöin $B(x, \frac{r}{3}) \cap B(y, \frac{r}{3}) = \emptyset$, missä joukot $B(x, \frac{r}{3})$ ja $B(y, \frac{r}{3})$ ovat avoimia. Siispä metrinen avaruus on aina Hausdorff-avaruus.

3 Jonot, suppeneminen ja Cauchyn jonot

Jono metrisessä avaruudessa X on kuvaus, jossa jokaista luonnollista lukua n kohti on piste x_n joukossa X. Merkitään jonoa $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tai (x_n) tai $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Jonon (x_n) *osajonon* $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ muodostavat mitkä tahansa jonon (x_n) pisteet x_{n_k}, joille $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Määritelmä 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) jono joukossa X. Jono (x_n) *suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x) < r \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_0.$$

Tällöin jono (x_n) suppenee avaruudessa X. Piste x on jonon (x_n) *raja-arvo*. Tätä merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ tai $x_n \to x$, kun $n \to \infty$.

Lause 3.2. *Jonon raja-arvo metrisessä avaruudessa on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitetaan väite olettamalla, että metrisen avaruuden (X, d) jonolla (x_n) on kaksi raja-arvoa, jolloin tästä seuraa välttämättä, että raja-arvot ovat samat. Oletetaan, että $x_n \to x$ ja $x_n \to y$, kun $n \to \infty$, missä $x, y \in X$. Olkoon $r > 0$. Koska jono (x_n) suppenee kohti pistettä x, niin on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ aina, kun $n \geq n_1$. Koska jono (x_n) suppenee kohti pistettä y, niin on olemassa $n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, y) < \frac{r}{2}$ aina, kun $n \geq n_2$. Valitaan $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin kaikilla $n \geq n_0$ on voimassa

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Koska $d(x, y) < r$ kaikilla $r > 0$, niin $d(x, y) = 0$. Metriikan määritelmän mukaan $x = y$. □

Lause 3.3. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon A joukon X epätyhjä osajoukko. Tällöin piste x kuuluu joukon A sulkeumalle, jos ja vain jos on olemassa sellainen jono (x_n) joukossa A, joka suppenee kohti pistettä x.*

Todistus. Olkoon $x \in \overline{A}$. Jos $x \in A$, niin vakiojono $(x, x, \ldots)$ suppenee kohti pistettä x. Oletetaan sitten, että x on joukon A kasautumispiste. Nyt jokainen x-keskeinen avoin pallo sisältää sellaisen joukon A pisteen, joka on eri kuin piste x. Valitaan säteeksi $\frac{1}{n}$, missä n on jokin luonnollinen luku. Tällöin

$$(B(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Voidaan siis valita jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti piste x_n, joka kuuluu joukkoon $(B(x, \dfrac{1}{n}) \setminus \{x\}) \cap A$. Jokainen piste x_n kuuluu siis joukkoon A sekä avoimeen palloon $B(x, \frac{1}{n})$, missä $x \neq x_n$. Tällä tavalla muodostetaan jono (x_n) joukossa A, jolle pätee $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $r > 0$. On olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{n_0} < r$, jolloin

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < r$$

kaikilla $n \geq n_0$. Näin ollen jono (x_n) suppenee kohti pistettä x.

Todistetaan väite toiseen suuntaan. Olkoon $x \in X$ ja (x_n) sellainen jono joukossa A, joka suppenee kohti pistettä x. Nyt kaikille $r > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < r$ eli $x_n \in B(x, r)$ aina, kun $n \geq n_0$. Siispä $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Täten $x \in \overline{A}$. □

Määritelmä 3.4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) jono joukossa X. Jono (x_n) on *Cauchyn jono*, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x_m) < r \quad \text{aina, kun} \quad n, m \geq n_0.$$

Lause 3.5. *Jokainen suppeneva jono metrisessä avaruudessa on Cauchyn jono.*

Todistus. Valitaan mikä tahansa suppeneva jono (x_n) metrisessä avaruudessa (X, d) ja osoitetaan, että (x_n) on Cauchyn jono. Olkoon piste $x \in X$ jonon (x_n) raja-arvo ja $r > 0$. Koska jono (x_n) suppenee kohti pistettä x, niin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ aina, kun $n \geq n_0$. Näin ollen kaikilla $n, m \geq n_0$ on voimassa

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Siispä (x_n) on Cauchyn jono. □

Lause 3.6. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) Cauchyn jono avaruudessa X. Cauchyn jono (x_n) suppenee, jos ja vain jos sillä on suppeneva osajono.*

Todistus. Osoitetaan, että Cauchyn jono (x_n) suppenee kohti samaa pistettä kuin sen suppeneva osajono. Olkoon (x_{n_k}) jonon (x_n) suppeneva osajono, jonka raja-arvo on $x \in X$. Olkoon $r > 0$. Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin voidaan valita sellainen $n_1 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_m) < \frac{r}{2}$ aina, kun $n, m \geq n_1$. Jono (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä x, jolloin on olemassa sellainen $n_{k_1} \in \mathbb{N}$, että $d(x_{n_k}, x) < \frac{r}{2}$ aina, kun $n_k \geq n_{k_1}$. Valitaan $n_{k_0} \in \mathbb{N}$

siten, että $n_{k_0} \geq \max\{n_1, n_{k_1}\}$. Nyt $x_{n_{k_0}}$ on osajonon (x_{n_k}) sekä myös jonon (x_n) yksittäinen piste, jolle erityisesti pätee $d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{r}{2}$, koska $n_{k_0} \geq n_{k_1}$. Tällöin kaikilla $n \geq n_{k_0}$ on voimassa

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Näin ollen Cauchyn jonolla (x_n) on raja-arvo $x \in X$, joten se suppenee avaruudessa X.

Käänteisesti oletetaan, että Cauchyn jono (x_n) suppenee. Jono (x_n) on sen suppeneva osajono. □

4 Täydellisyys ja täydellistymät

Jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono, mutta jokainen Cauchyn jono ei suppene. Jotta jono suppenee avaruudessa X, niin sen raja-arvon täytyy kuulua samaan joukkoon X. Siten vaikka Cauchyn jonon pisteet saadaan rajattua mielivaltaisen pienelle etäisyydelle aina jostakin pisteestä alkaen, niin tässä samassa metrisessä avaruudessa ei välttämättä ole pistettä, jota kohti jono lähestyy.

Määritelmä 4.1. Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa (X, d).

Esimerkki 4.2. Metrinen avaruus $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on täydellinen. Todistus perustuu täydellisyysaksioomaan.

Esimerkki 4.3. Metrinen avaruus $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ei ole täydellinen. Esimerkiksi $\lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n = e$. Toisin sanoen jono $(x_n) := \big((1 + \frac{1}{n})^n\big)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti Neperin lukua $e = 2,718281\ldots$ avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Siten (x_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Piste $(1 + \frac{1}{n})^n$ on rationaaliluku jokaisella $n \in \mathbb{N}$ eli $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$, jolloin (x_n) on Cauchyn jono myös avaruudessa $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Raja-arvo e ei kuitenkaan ole rationaaliluku, joten Cauchyn jono (x_n) ei suppene avaruudessa $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Lause 4.4. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $Y \subseteq X$. Tällöin aliavaruus Y on täydellinen, jos ja vain jos Y on suljettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että aliavaruus Y on täydellinen. Olkoon $x \in \overline{Y}$. Lauseen 3.3 mukaan on olemassa sellainen jono (x_n) joukossa Y, joka suppenee kohti pistettä x. Suppeneva jono (x_n) on Cauchyn jono Lauseen 3.5 nojalla. Koska Y on täydellinen, niin Cauchyn jonolla on raja-arvo joukossa

Y. Raja-arvo on yksikäsitteinen Lauseen 3.2 nojalla, joten $x \in Y$. Näin ollen $\overline{Y} \subseteq Y$. Määritelmän mukaan $Y \subseteq \overline{Y}$. Siten $Y = \overline{Y}$ ja Lauseen 2.11 nojalla Y on suljettu.

Oletetaan sitten, että aliavaruus Y on suljettu. Olkoon (x_n) Cauchyn jono joukossa Y. Koska Y on joukon X osajoukko, niin (x_n) on Cauchyn jono myös joukossa X. Cauchyn jono (x_n) suppenee täydellisessä avaruudessa X kohti pistettä $x \in X$. Nyt jono (x_n) kuuluu joukkoon Y ja se suppenee kohti pistettä $x \in X$, jolloin Lauseen 3.3 nojalla $x \in \overline{Y}$. Suljettu joukko $Y = \overline{Y}$ Lauseen 2.11 nojalla. Siispä $x \in Y$. Näin ollen jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa Y, joten Y on täydellinen. □

Jos metrinen avaruus ei ole täydellinen, niin sille voidaan muodostaa täydellistymä, joka on täydellinen metrinen avaruus. Täydellistymässä Cauchyn jonojen puuttuvat raja-arvopisteet ikään kuin lisätään mukaan.

Määritelmä 4.5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Täydellinen metrinen avaruus $(\tilde{X}, \tilde{d})$ on avaruuden (X, d) *täydellistymä*, jos on olemassa sellainen kuvaus $\varphi : X \to \tilde{X}$, että

(i) kuvaus φ on isometria ja

(ii) arvojoukko $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

Lause 4.6. *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä, ja mitkä tahansa kaksi täydellistymää ovat isometriset keskenään.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jaetaan todistus seuraaviin vaiheisiin.

1. Muodostetaan metrinen avaruus $(\tilde{X}, \tilde{d})$.
2. Määritellään isometria $\varphi : X \to \tilde{X}$.
3. Osoitetaan, että $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa $(\tilde{X}, \tilde{d})$.
4. Osoitetaan, että metrinen avaruus $(\tilde{X}, \tilde{d})$ on täydellinen.
5. Osoitetaan, että jos $\tilde{Y}$ ja $\tilde{Z}$ ovat metrisen avaruuden X kaksi täydellistymää, niin $\tilde{Y}$ ja $\tilde{Z}$ ovat isometriset keskenään.

1\. Olkoon joukko C metrisen avaruuden (X, d) kaikkien Cauchyn jonojen joukko. Määritellään relaatio $\sim$ joukossa C siten, että Cauchyn jonot (x_n) ja (y_n) ovat relaatiossa, jos niiden välinen etäisyys lähestyy nollaa. Toisin sanoen $(x_n) \sim (y_n)$ jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Osoitetaan, että relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa C. Olkoon $(x_n), (y_n), (z_n) \in C$.

i) Nyt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, jolloin $(x_n) \sim (x_n)$. (refleksiivisyys)

ii) Olkoon $(x_n) \sim (y_n)$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0$, joten $(y_n) \sim (x_n)$. (symmetrisyys)

iii) Olkoon $(x_n) \sim (y_n)$ ja $(y_n) \sim (z_n)$. Koska

$$d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

niin raja-arvon laskusääntöjen mukaisesti

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) &\le \lim_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Siispä $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$, jolloin $(x_n) \sim (z_n)$. (transitiivisuus)

Kohtien i) – iii) nojalla relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Cauchyn jonon $(x_n) \in C$ määräämä ekvivalenssiluokka on joukko

$$[(x_n)] = \{(y_n) \in C : (y_n) \sim (x_n)\}.$$

Näin ollen aina, kun $(x_n) \sim (y_n)$ eli $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, niin Cauchyn jonot (x_n) ja (y_n) määräävät saman ekvivalenssiluokan. Merkitään joukon C kaikkien ekvivalenssiluokkien joukkoa $\tilde{X} := C/\sim$. Merkitään joukon $\tilde{X}$ alkioita kreikkalaisilla aakkosilla, jolloin $\alpha := [(a_n)], \beta := [(b_n)]$ ja $\gamma := [(c_n)]$, kun $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{X}$.

Seuraavaksi määritellään metriikka $\tilde{d}$ joukossa $\tilde{X}$. Määritellään kuvaus $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty[$ siten, että $\tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. Osoitetaan, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$ on olemassa ja yksikäsitteinen, jolloin kuvaus $\tilde{d}$ on hyvin määritelty. Olkoon $(d(a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ jono joukossa $\mathbb{R}$, missä (a_n) ja (b_n) ovat Cauchyn jonoja joukossa C. Osoitetaan, että jono $(d(a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee. Kolmioepäyhtälöstä seuraa, että kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\begin{aligned}d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m) &\le d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) - d(a_m, b_m) \\ &= d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}d(a_m, b_m) - d(a_n, b_n) &\le d(a_m, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b_m) - d(a_n, b_n) \\ &= d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m),\end{aligned}$$

jolloin

$$|d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| \leq d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m).$$

Koska (a_n) ja (b_n) ovat Cauchyn jonoja avaruudessa (X, d), niin kaikille $r > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| \leq d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

kun $n, m \geq n_0$. Näin ollen jono $(d(a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Koska $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on täydellinen, niin Cauchyn jonolla $(d(a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ on raja-arvo joukossa $\mathbb{R}$ eli $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$ on olemassa.

Ollakseen yksikäsitteinen, kuvauksen $\tilde{d}$ täytyy olla riippumaton ekvivalenssiluokkien edustajista. Valitaan kaksi jonoa kahdesta eri luokasta eli olkoon $(a_n), (a'_n) \in \alpha$ ja $(b_n), (b'_n) \in \beta$. Osoitetaan, että etäisyys $\tilde{d}$ on sama riippumatta luokkien edustajista. Toisin sanoen osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n)$$

aina, kun $(a_n) \sim (a'_n)$ ja $(b_n) \sim (b'_n)$. Nyt siis pätee $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a'_n) = 0$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} d(b_n, b'_n) = 0$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa epäyhtälöt

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a'_n) + d(a'_n, b'_n) + d(b'_n, b_n)$$

ja

$$d(a'_n, b'_n) \leq d(a'_n, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b'_n),$$

joista seuraa raja-arvon laskusääntöjen mukaisesti, että

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(a_n, a'_n) + d(a'_n, b'_n) + d(b'_n, b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(a_n, a'_n) + \lim_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n) + \lim_{n\to\infty} d(b'_n, b_n) \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n) + 0 = \lim_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n)
\end{aligned} \tag{1}$$

ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(a'_n, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b'_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(a'_n, a_n) + \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) + \lim_{n\to\infty} d(b_n, b'_n) \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) + 0 = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).
\end{aligned} \tag{2}$$

Kun yhdistetään epäyhtälöt (1) ja (2), niin $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(a'_n, b'_n) = \tilde{d}(\alpha, \beta)$. Kuvaus $\tilde{d}$ on siten yksikäsitteinen. Siispä $\tilde{d}$ on hyvin määritelty.

Osoitetaan sitten, että $\tilde{d}$ on metriikka joukossa $\tilde{X}$. Olkoon $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{X}$.

i) Tällöin $\tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$ jos ja vain jos $(a_n) \sim (b_n)$, jolloin jonot (a_n) ja (b_n) määräävät saman ekvivalenssiluokan eli $\alpha = \beta$.

ii) Nyt $\tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n) = \tilde{d}(\beta, \alpha)$.

iii) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)$, joten

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(a_n, c_n) + \lim_{n\to\infty} d(c_n, b_n) \\ &= \tilde{d}(\alpha, \gamma) + \tilde{d}(\gamma, \beta).\end{aligned}$$

Siispä $\tilde{d}(\alpha, \beta) \leq \tilde{d}(\alpha, \gamma) + \tilde{d}(\gamma, \beta)$.

Kohtien i) – iii) nojalla kuvaus $\tilde{d}$ on metriikka joukossa $\tilde{X}$. Pari $(\tilde{X}, \tilde{d})$ on metrinen avaruus.

2. Jokainen vakiojono $(x, x, \ldots)$ on Cauchyn jono, sillä $d(x, x) = 0$. Merkitään vakiojonon määräämää ekvivalenssiluokkaa $\tilde{x} := [(x, x, \ldots)] \in \tilde{X}$. Määritellään kuvaus $\varphi : X \to \tilde{X}$ siten, että $\varphi(x) = \tilde{x}$. Kuvaus φ on hyvin määritelty, sillä $\varphi(x) \in \tilde{X}$ on yksikäsitteinen ja olemassa. Näin ollen

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$, joten φ on isometria.

3. Seuraavaksi osoitetaan, että arvojoukon $\varphi(X)$ sulkeuma $\overline{\varphi(X)} = \tilde{X}$, jolloin $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa $\tilde{X}$. Olkoon α mikä tahansa joukon $\tilde{X}$ alkio ja jono (a_n) ekvivalenssiluokan α edustaja. Olkoon $r > 0$. Koska (a_n) on Cauchyn jono, niin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(a_n, a_m) < \frac{r}{2}$, kun $n, m \geq n_0$. Erityisesti $d(a_n, a_{n_0}) < \frac{r}{2}$ kaikilla $n \geq n_0$. Kun valitaan joukosta $\varphi(X)$ alkio $\varphi(a_{n_0}) = \tilde{a}_{n_0} = [(a_{n_0}, a_{n_0}, \ldots)]$, niin

$$\tilde{d}(\alpha, \tilde{a}_{n_0}) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{n_0}) \leq \frac{r}{2} < r.$$

Nyt $\tilde{d}(\alpha, \tilde{a}_{n_0}) < r$, joten kaikilla $\alpha \in \tilde{X}$ on voimassa $B(\alpha, r) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$, missä $r > 0$ on mielivaltainen. Siispä $\overline{\varphi(X)} = \tilde{X}$ eli $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa $\tilde{X}$.

4. Osoitetaan, että jokainen joukon $\tilde{X}$ Cauchyn jono suppenee avaruudessa $(\tilde{X}, \tilde{d})$, jolloin $(\tilde{X}, \tilde{d})$ on täydellinen. Olkoon (α_n) mikä tahansa Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{X}$. Tässä (α_n) on siis ekvivalenssiluokkien muodostama jono $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Koska $\varphi(X)$ on tiheä joukossa $\tilde{X}$, niin $B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$ kaikilla $\alpha \in \tilde{X}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita sellainen alkio x_n joukosta X, että

$$\tilde{d}(\alpha_n, \varphi(x_n)) < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Näin muodostuu jono (x_n) avaruudessa (X, d).

Seuraavaksi osoitetaan ensin, että jono $(\varphi(x_n))$ on Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{X}$. Koska φ on isometria, niin tästä seuraa, että (x_n) on Cauchyn jono avaruudessa X. Olkoon $r > 0$. Jono $(\varphi(x_n))$ on vakiojonojen $(x_n, x_n, \ldots)$ määräämien ekvivalenssiluokkien $\tilde{x}_n = [(x_n, x_n, \ldots)] \in \tilde{X}$ muodostama jono $(\tilde{x}_n)$ joukossa $\varphi(X)$ eli $(\varphi(x_n)) = (\tilde{x}_n)$. Nyt (α_n) on Cauchyn jono, jolloin valitaan sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $\tilde{d}(\alpha_n, \alpha_m) < \frac{r}{3}$ aina, kun $n, m \geq n_0$. Tämän ja epäyhtälön (3) nojalla kaikilla $n, m \geq n_0$ on voimassa

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) &\leq \tilde{d}(\tilde{x}_n, \alpha_n) + \tilde{d}(\alpha_n, \alpha_m) + \tilde{d}(\alpha_m, \tilde{x}_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{r}{3} + \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Valitaan $n_1 \geq \max\{n_0, \frac{3}{r}\}$. Nyt kaikilla $n, m \geq n_1$ on voimassa $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} \leq \frac{r}{3}$ ja $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_1} \leq \frac{r}{3}$, jolloin

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \frac{1}{n} + \frac{r}{3} + \frac{1}{m} \leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r.$$

Koska φ on isometria, niin

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \tilde{d}(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) = d(x_n, x_m) < r$$

kaikilla $n, m \geq n_1$. Täten $\varphi(x_n)$ on Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{X}$ ja (x_n) on Cauchyn jono avaruudessa X.

Merkitään $\xi := [(x_n)] \in \tilde{X}$ ja osoitetaan, että (α_n) suppenee kohti pistettä ξ. Olkoon $r > 0$. Koska (x_n) on Cauchyn jono, on olemassa $n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x_m) < \frac{r}{3} \quad \text{aina, kun} \quad n, m \geq n_2.$$

Näin ollen kaikilla $n \geq n_2$ on voimassa

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, \xi) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{r}{3} < \frac{r}{2}. \tag{4}$$

Toisin sanoen vakiojonojen $(x_n, x_n, \ldots)$ määräämien ekvivalenssiluokkien $\tilde{x}_n$ muodostama jono $(\tilde{x}_n)$ suppenee kohti pistettä ξ avaruudessa $\tilde{X}$. Kun valitaan $n_3 \in \mathbb{N}$ siten, että $n_3 \geq \max\{n_2, \frac{2}{r}\}$, niin epäyhtälöistä (3) ja (4) seuraa, että

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\alpha_n, \xi) &\leq \tilde{d}(\alpha_n, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{x}_n, \xi) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\end{aligned}$$

kaikilla $n \geq n_3$. Tässä $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_3} \leq \frac{r}{2}$. Siispä $\alpha_n \to \xi$, kun $n \to \infty$. Näin ollen jokainen Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{X}$ suppenee eli $\tilde{X}$ on täydellinen. Vaiheiden 1–4 nojalla avaruudella (X, d) on täydellistymä $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

5. Olkoon $(\tilde{Y}, d_Y)$ ja $(\tilde{Z}, d_Z)$ kaksi metrisen avaruuden (X, d) täydellistymää. Muodostetaan isometrinen bijektio φ avaruuksien $\tilde{Y}$ ja $\tilde{Z}$ välille. On olemassa isometria $f : X \to \tilde{Y}$, missä $f(X)$ on tiheä avaruudessa $\tilde{Y}$ ja isometria $g : X \to \tilde{Z}$, missä $g(X)$ on tiheä avaruudessa $\tilde{Z}$. Olkoon $y \in \tilde{Y}$. Koska $\overline{f(X)} = \tilde{Y}$, niin Lauseen 3.3 nojalla on olemassa sellainen jono $(f(x_n)) \subseteq f(X)$, että $f(x_n) \to y$, kun $n \to \infty$. Toisin sanoen on olemassa jono (x_n) joukossa X siten, että $f(x_n) \to y$, kun $n \to \infty$. Koska jono $(f(x_n))$ suppenee, niin se on Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{Y}$. Lisäksi kuvaukset f ja g ovat isometrioita. Näin ollen kaikille $r > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) = d(x_n, x_m) = d_Z(g(x_n), g(x_m)) < r$$

aina, kun $n, m \geq n_0$. Tällöin $(g(x_n))$ on Cauchyn jono avaruudessa $\tilde{Z}$. Koska $\tilde{Z}$ on täydellinen, niin on olemassa piste $z \in \tilde{Z}$, jota kohti Cauchyn jono $(g(x_n))$ suppenee. Määritellään kuvaus $\varphi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ siten, että $\varphi(y) = z$. Tarkistetaan kuvauksen yksikäsitteisyys olettamalla, että on olemassa jono (x'_n) joukossa X siten, että $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Tällöin

$$d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \leq d_Y(f(x_n), y) + d_Y(y, f(x'_n)) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Koska kuvaukset f ja g ovat isometrioita, niin

$$d_Z(g(x_n), g(x'_n)) = d(x_n, x'_n) = d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Näin ollen

$$d_Z(g(x'_n), z) \leq d_Z(g(x'_n), g(x_n)) + d_Z(g(x_n), z) \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Siispä myös jono $(g(x'_n))$ suppenee kohti pistettä $z \in \tilde{Z}$. Näin ollen $\varphi(y)$ on yksikäsitteinen ja olemassa, jolloin kuvaus φ on hyvin määritelty.

Olkoon nyt $y, y' \in \tilde{Y}$ ja olkoot jonot (x_n) ja (x'_n) joukossa X siten, että $f(x_n) \to y$ ja $f(x'_n) \to y'$, kun $n \to \infty$. Tällöin $g(x_n) \to \varphi(y)$ ja $g(x'_n) \to \varphi(y')$, kun $n \to \infty$. Täten

$$d_Y(y, y') = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_n)) = \lim_{n\to\infty} d_Z(g(x_n), g(x'_n)) = d_Z(\varphi(y), \varphi(y')).$$

Siispä kuvaus φ on isometria.

Osoitetaan vielä, että φ on surjektio. Koska $\overline{g(X)} = \tilde{Z}$, niin Lauseen 3.3 nojalla jokaiselle $z \in \tilde{Z}$ on olemassa jono (x_n) joukossa X siten, että $g(x_n) \to z$, kun $n \to \infty$. Lisäksi on olemassa piste $y \in \tilde{Y}$ siten, että $f(x_n) \to y$, jolloin $\varphi(y) = z$. Näin ollen isometria φ on surjektio eli φ on bijektio. Siispä metriset avaruudet $\tilde{Y}$ ja $\tilde{Z}$ ovat isometriset keskenään. $\square$

Esimerkki 4.7. Metrisen avaruuden $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ täydellistymä on $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sillä $\mathbb{R}$ on täydellinen ja $\mathbb{Q}$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$. Tässä tapauksessa isometria on $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$.

5 Jatkuvuus ja yhtäjatkuvuus

Määritelmä 5.1. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in X$, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\rho(f(x), f(x_0)) < r \quad \text{aina, kun} \quad d(x, x_0) < \delta.$$

Kuvaus f on *jatkuva*, jos f on jatkuva jokaisessa joukon X pisteessä.

Jatkuvuudessa deltan arvo riippuu luvun r lisäksi pisteestä x_0.

Määritelmä 5.2. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *tasaisesti jatkuva*, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < r \quad \text{kaikilla } x_1, x_2 \in X, \text{ joille } d(x_1, x_2) < \delta.$$

Tasaisessa jatkuvuudessa deltan arvo ei riipu pisteestä, jossa jatkuvuutta tarkastellaan, vaan ainoastaan luvusta r. Tasaisesti jatkuva funktio on aina myös jatkuva.

Määritelmä 5.3. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Olkoon A funktioperhe, missä $f : X \to Y$, kun $f \in A$. Funktioperhe A on *yhtäjatkuva pisteessä* $x_0 \in X$, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\rho(f(x), f(x_0)) < r \quad \text{kaikilla } f \in A \quad \text{aina, kun} \quad d(x, x_0) < \delta.$$

Funktioperhe A on *yhtäjatkuva*, jos A on yhtäjatkuva jokaisessa joukon X pisteessä.

Yhtäjatkuvuudessa deltan arvo riippuu luvun r lisäksi pisteestä x_0, mutta se ei riipu funktiosta f.

Esimerkki 5.4. Funktioperhe $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ on yhtäjatkuva pisteessä $x_0 = 0$, mutta se ei ole yhtäjatkuva pisteessä $x_0 = 1$. Pisteessä $x_0 = 0$ kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta = \min\{r, 1\}$ siten, että

$$|f_n(x) - f_n(0)| = |x^n - 0| = |x|^n \leq |x| < r \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ aina, kun } |x| < \delta.$$

Olkoot $x_0 = 1$, $r = \frac{1}{2}$ ja olkoon $\delta > 0$ mikä tahansa. Kaikilla $0 < x < 1$ pätee $x^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Siten, kun $|x - 1| < \delta$, niin on olemassa $0 < x < 1$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $x^n \leq \frac{1}{2}$. Siispä $x^n - 1 \leq -\frac{1}{2}$ ja $|x^n - 1| \geq \frac{1}{2}$. Näin ollen

$$|f_n(x) - f_n(1)| = |x^n - 1^n| = |x^n - 1| \geq \frac{1}{2}.$$

Määritelmä 5.5. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Olkoon A funktioperhe, missä $f : X \to Y$, kun $f \in A$. Funktioperhe A on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < r \text{ kaikilla } f \in A \text{ ja kaikilla } x_1, x_2 \in X, \text{ joille } d(x_1, x_2) < \delta.$$

Tasaisessa yhtäjatkuvuudessa deltan arvo ei riipu funktiosta f eikä myöskään pisteestä, jossa yhtäjatkuvuutta tarkastellaan, vaan ainoastaan luvusta r. Tasaisesti yhtäjatkuva funktioperhe on aina myös yhtäjatkuva.

6 Kompaktius

Määritelmä 6.1. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Olkoon $\{U_i\}_{i \in I}$ kokoelma joukon X epätyhjiä osajoukkoja.

1. Jos $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, niin $\{U_i\}_{i \in I}$ on joukon A *peite.*
2. Jos kaikki joukot U_i ovat avoimia avaruudessa X ja $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, niin $\{U_i\}_{i \in I}$ on joukon A *avoin peite.*
3. Jos $\{U_i\}_{i \in I}$ on joukon A peite ja J on joukon I osajoukko siten, että ja $A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$, niin $\{U_j\}_{j \in J}$ on peitteen $\{U_i\}_{i \in I}$ *osapeite.*
4. Jos $\{U_i\}_{i \in I}$ on joukon A peite ja J on joukon I äärellinen osajoukko siten, että $A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$, niin $\{U_j\}_{j \in J}$ on peitteen $\{U_i\}_{i \in I}$ *äärellinen osapeite.*

Huomautus 6.2. Peitteeseen kuuluvien joukkojen ei tarvitse sisältyä joukkoon A.

Määritelmä 6.3. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *kompakti*, jos jokaisella joukon A avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki 6.4. Suljettu väli $[0,1]$ on kompakti avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Lause 6.5. *Olkoon X metrinen avaruus ja $Y \subseteq X$. Jos Y on kompakti, niin Y on suljettu.*

Todistus. Olkoon $Y \subseteq X$ kompakti. Osoitetaan, että joukon Y komplementti $X \setminus Y$ on avoin. Jos $Y = X$, niin $X \setminus Y = \emptyset$ on avoin. Olkoon $X \neq Y$ ja olkoon $x \in X \setminus Y$. Koska metrinen avaruus X on Hausdorff-avaruus, niin jokaiselle $y \in Y$ voidaan valita sellainen $r_y > 0$, että $B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Kokoelma $\{B(y, r_y)\}_{y \in Y}$ on joukon Y avoin peite, sillä $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} B(y, r_y)$. Koska Y on kompakti, niin avoimella peitteellä $\{B(y, r_y)\}_{y \in Y}$ on äärellinen osapeite $\{B(y_i, r_{y_i}) : i = 1, \ldots, n\}$. Siispä $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_{y_i})$. Merkitään $B := \bigcap_{i=1}^{n} B(x, r_{y_i})$. Osoitetaan, että $B \cap Y = \emptyset$ tekemällä vastaoletus, että on olemassa piste $x_0 \in B \cap Y$. Koska $x_0 \in Y$, niin $x_0 \in B(y_j, r_{y_j})$ jollakin $j = 1, \ldots, n$. Lisäksi $x_0 \in B \subseteq B(x, r_{y_i})$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Siten $x_0 \in B(x, r_{y_j}) \cap B(y_j, r_{y_j})$, joka on ristiriita luvun r_y valinnan kanssa. Siispä $B \cap Y = \emptyset$, joten $B \subseteq X \setminus Y$. Valitaan $r := \min\{r_{y_i} : i = 1, \ldots, n\}$, jolloin $B(x, r) \subseteq B \subseteq X \setminus Y$. Näin ollen jokaista komplementin $X \setminus Y$ pistettä x kohti on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq X \setminus Y$. Siispä $X \setminus Y$ on avoin ja Y on suljettu. □

Määritelmä 6.6. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *täysin rajoitettu*, jos kaikille $r > 0$ on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, että $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

Tässä joukko $\{B(x_i, r) : i = 1, \ldots, n\}$ on joukon A äärellinen avoin peite. Täysin rajoitettu joukko on aina myös rajoitettu.

Esimerkki 6.7. Suljettu väli $[-M, M]$ avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on täysin rajoitettu kaikilla $M > 0$. Olkoon $r > 0$. Olkoon $x_i = ir$ kaikilla $i = 0, 1, \ldots, n$, missä $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ on sellainen, että $n \leq \frac{M}{r} < n + 1$ eli $nr \leq M < nr + r$. Tällöin jokainen $x \in [0, M]$ kuuluu jollekin välille $]ir - r, ir + r[$. Siten $[0, M] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, r)$ ja $[-M, M] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(-x_i, r) \cup \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, r)$.

Määritelmä 6.8. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Olkoon U joukon A peite. Luku $\lambda > 0$ on peitteen U *Lebesguen luku*, jos jokaiselle $x \in A$ on olemassa joukko $U_i \in U$ siten, että $B(x, \lambda) \subseteq U_i$.

Seuraava lause eli Lebesguen peitelause voidaan kirjoittaa myös siten, että kompaktissa metrisessä avaruudessa jokaisella avoimella peitteellä on Lebesguen luku. Osoitetaankin Lauseessa 6.12, että joukon kompaktius on yhtäpitävää sen kanssa, että sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Sen todistamista varten osoitetaan ensin seuraava lause ja kaksi lemmaa.

Lause 6.9 (Lebesguen peitelause). *Olkoon X sellainen metrinen avaruus, jossa jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Tällöin jokaisella joukon X avoimella peitteellä on Lebesguen luku $\lambda > 0$.*

Todistus. Olkoon $U = \{U_i\}_{i \in I}$ joukon X avoin peite. Tehdään vastaoletus, että peitteellä U ei ole Lebesguen lukua $\lambda > 0$. Erityisesti $\frac{1}{n}$ ei ole Lebesguen luku kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa piste $x_n \in X$ siten, että $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq U_i$ kaikilla $i \in I$, jolloin muodostuu jono (x_n). Oletuksen mukaan jonolla (x_n) on olemassa osajono (x_{n_k}), joka suppenee kohti pistettä $x \in X$. Nyt x kuuluu peitteeseen U ja siten $x \in U_i$ jollakin $i \in I$. Koska U_i on avoin, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq U_i$. Koska (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä $x \in X$, niin on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_{n_k}, x) < \frac{r}{2}$ aina, kun $k \geq k_0$. Erityisesti voidaan valita sellainen $k \geq k_0$, että $n_k > \frac{2}{r}$. Oletetaan nyt, että $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, jolloin $d(y, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$. Näin ollen

$$d(y, x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \quad \text{eli} \quad y \in B(x, r),$$

joka tarkoittaa, että $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(x, r) \subseteq U_i$. Nyt vastaoletus johtaa ristiriitaan, sillä jono (x_n) muodostettiin siten, että $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq U_i$ kaikilla $i \in I$. Peitteellä U on näin ollen Lebesguen luku. $\square$

Lemma 6.10. *Olkoon (x_n) jono metrisessä avaruudessa X ja $x \in X$. Jos jokaisella $r > 0$ avoin pallo $B(x, r)$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) pistettä, niin jonolla (x_n) on osajono, joka suppenee kohti pistettä x.*

Todistus. Olkoon n_1 sellainen, että $x_{n_1} \in B(x, 1)$. Koska myös $B(x, \frac{1}{2})$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) pistettä x_n, niin voidaan valita sellainen $n_2 > n_1$, että $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2})$. Induktiivisesti kaikille $n_1, n_2, \ldots, n_m$, missä $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ voidaan valita sellainen $n_{m+1} > n_m$, että $x_{n_{m+1}} \in B(x, \frac{1}{m+1})$, sillä $B(x, \frac{1}{m+1})$ sisältää äärettömän monta jonon pistettä x_n. Näin muodostettu jonon (x_n) osajono (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä x, sillä kaikille $r > 0$ on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < r$ aina, kun $k \geq k_0$. $\square$

Lemma 6.11. *Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Jos jokaisella jonolla joukossa A on suppeneva osajono, niin A on täysin rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan, että jokaisella jonolla joukossa A on suppeneva osajono ja tehdään vastaoletus, että A ei ole täysin rajoitettu. Nyt on olemassa $r > 0$ siten, että $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$ jokaisella äärellisellä joukolla $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$. Muodostetaan jono, jolla ei ole suppenevaa osajonoa. Olkoon $x_1 \in A$ mikä tahansa. Koska $A \not\subseteq B(x_1, r)$, niin on olemassa $x_2 \in A$ siten, että $d(x_1, x_2) \geq r$. Nyt $A \not\subseteq B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$, joten on olemassa $x_3 \in A$ siten, että $d(x_1, x_3) \geq r$ ja $d(x_2, x_3) \geq r$. Induktiivisesti kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pätee $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r)$, jolloin on olemassa $x_{m+1} \in A$ siten, että $d(x_i, x_{m+1}) \geq r$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Tällä tavalla muodostetulle jonolle (x_n) on voimassa $d(x_n, x_m) \geq r$ aina, kun $n \neq m$. Täten jonolla (x_n) ei ole sellaista osajonoa, joka on Cauchyn jono eikä siten Lauseen 3.5 nojalla myöskään sellaista osajonoa, joka suppenee. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, josta seuraa, että A on täysin rajoitettu. □

Lause 6.12. *Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on kompakti, jos ja vain jos jokaisella jonolla joukossa A on suppeneva osajono, joka suppenee avaruudessa A.*

Todistus. Oletetaan ensin, että A on kompakti ja (x_n) jono joukossa A. Tehdään vastaoletus, että jonolla (x_n) ei ole suppenevaa osajonoa, jonka raja-arvo kuuluu joukkoon A. Näin ollen Lemmasta 6.10 seuraa, että jokaiselle $x \in A$ on olemassa sellainen $r_x > 0$, että avoin pallo $B(x, r_x)$ sisältää ainoastaan äärellisen monta jonon (x_n) pistettä. Kokoelma $\{B(x, r_x)\}_{x \in A}$ on joukon A avoin peite, jolla on olemassa äärellinen osapeite, sillä A on kompakti. Tässä osapeitteessä on äärellinen määrä joukkoja $B(x, r_x)$, joista jokainen sisältää äärellisen määrän jonon (x_n) pisteitä. Tästä seuraa, että jonossa (x_n) on vain äärellinen määrä pisteitä, joka on ristiriita. Siispä jonolla (x_n) on suppeneva osajono, joka suppenee avaruudessa A.

Oletetaan sitten, että jokaisella jonolla joukossa A on suppeneva osajono, joka suppenee avaruudessa A. Olkoon U mikä tahansa joukon A avoin peite. Lebesguen peitelauseen mukaan peitteellä U on Lebesguen luku $\lambda > 0$. Lemman 6.11 nojalla A on täysin rajoitettu, jolloin on olemassa äärellinen joukko $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq A$ siten, että $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \lambda)$. Koska λ on peitteen U Lebesguen luku, niin jokaiselle $x_i \in \{x_1, \ldots, x_k\}$ on olemassa $U_i \in U$ siten, että $B(x_i, \lambda) \subseteq U_i$. Tällöin

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \lambda) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Näin ollen $\{U_1, \dots, U_k\}$ on peitteen U äärellinen osapeite. Siispä A on kompakti. $\square$

Lause 6.13. *Metrinen avaruus X on kompakti, jos ja vain jos se on täydellinen ja täysin rajoitettu.*

Todistus. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $r > 0$. Kokoelma $\{B(x,r)\}_{x\in X}$ on joukon X avoin peite. Koska X on kompakti, niin peitteellä $\{B(x,r)\}_{x\in X}$ on olemassa äärellinen osapeite $\{B(x_i,r) : i = 1, \dots, n\}$. Tällöin $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,r)$ eli X on täysin rajoitettu. Olkoon (x_n) mielivaltainen Cauchyn jono joukossa X. Lauseen 6.12 nojalla kompaktissa avaruudessa jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Lauseen 3.6 nojalla Cauchyn jono (x_n) suppenee, koska sillä on suppeneva osajono. Siispä X on täydellinen.

Käänteisesti oletetaan, että X täydellinen ja täysin rajoitettu metrinen avaruus ja osoitetaan, että jokaisella jonolla joukossa X on suppeneva osajono, jolloin X on kompakti. Olkoon (x_n) mikä tahansa jono joukossa X. Koska X on täysin rajoitettu, niin voidaan valita joukon X äärellinen peite C_1, joka koostuu sellaisista avoimista palloista, joiden säde on 1. Koska peitteessä C_1 on äärellinen määrä avoimia palloja $B(y,1)$ ja jonon pisteitä on ääretön määrä, niin jossakin näistä palloista täytyy olla äärettömän monta jonon (x_n) pistettä. Merkitään tätä kyseistä 1-säteistä palloa $B(y_1,1)$. Samalla tavalla valitsemalla säteeksi $\frac{1}{2}$ voidaan valita joukon X äärellinen peite C_2 avoimista palloista $B(y,\frac{1}{2})$. Koska pallo $B(y_1,1)$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) pistettä, niin peitteessä C_2 on olemassa $\frac{1}{2}$-säteinen pallo $B(y_2,\frac{1}{2})$ siten, että leikkaukseen $B(y_1,1)\cap B(y_2,\frac{1}{2})$ täytyy kuulua äärettömän monta jonon (x_n) pistettä. Vastaavasti edelleen on olemassa $\frac{1}{3}$-säteinen avoin pallo $B(y_3,\frac{1}{3})$ siten, että leikkauksessa $B(y_1,1)\cap B(y_2,\frac{1}{2})\cap B(y_3,\frac{1}{3})$ on äärettömän monta jonon (x_n) pistettä. Jokaista luonnollista lukua $k \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa näin ollen sellainen avoin pallo $B(y_k,\frac{1}{k})$, että leikkaus $\bigcap_{m=1}^{k} B(y_m,\dfrac{1}{m})$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) pistettä. Voidaan täten muodostaa jonon (x_n) osajono (x_{n_k}) siten, että $x_{n_k} \in \bigcap_{m=1}^{k} B(y_m,\dfrac{1}{m})$ ja $n_{k+1} > n_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jokainen piste $x_{n_k} \in B(y_{k_0},\dfrac{1}{k_0}) \subseteq \bigcap_{m=1}^{k_0} B(y_m,\dfrac{1}{m})$ aina, kun $n_k \geq n_{k_0}$. Näin ollen jono (x_{n_k}) on Cauchyn jono, sillä kaikille $r > 0$ on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_{n_k},x_{n_l}) \leq d(x_{n_k},y_{k_0}) + d(y_{k_0},x_{n_l}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < r \text{ , kun } n_k, n_l \geq n_{k_0}.$$

Koska X on täydellinen niin Cauchyn jono (x_{n_k}) suppenee. Jokaisella joukon X jonolla (x_n) on siten suppeneva osajono, jolloin X on kompakti Lauseen 6.12 nojalla. □

Lause 6.14. *Jokainen kompaktissa metrisessä avaruudessa määritelty jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Olkoon X kompakti, $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus ja $r > 0$. Koska f on jatkuva, niin jokaista pistettä $x \in X$ kohti on olemassa $\delta_x > 0$ siten, että

$$\rho(f(x), f(y)) < \frac{r}{2} \quad \text{aina, kun} \quad d(x, y) < \delta_x. \tag{5}$$

Muodostetaan avoimista palloista $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ joukon X peite $\{B(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in X}$. Koska X on kompakti, niin avoimella peitteellä $\{B(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in X}$ on äärellinen osapeite $\{B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) : i = 1, \ldots, n\}$. Koska osapeite on äärellinen, niin säteistä voidaan valita minimiarvo $\delta := \min\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1, \ldots, n\}$. Olkoon nyt $x, y \in X$ siten, että $d(x, y) < \delta$. Koska peite sisältää jokaisen pisteen joukossa X, niin $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ jollakin $i = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen jokaisen pisteen $x \in X$ etäisyys jostakin äärellisen joukon $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ pisteestä x_i on pienempi kuin $\frac{\delta_{x_i}}{2}$. Täten

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

Siispä pisteen y etäisyys kyseisestä pisteestä x_i on pienempi kuin δ_{x_i}. Näin ollen $d(y, x_i) < \delta_{x_i}$ ja $d(x_i, x) < \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$. Luvun δ_x valinnasta epäyhtälössä (5) seuraa, että

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(y)) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Siispä $\rho(f(x), f(y)) < r$ kaikilla $x, y \in X$, joille $d(x, y) < \delta$. Deltan valinta ei riipu tarkasteltavasta pisteestä ja f on tasaisesti jatkuva. □

Lause 6.15. *Jokainen kompaktissa metrisessä avaruudessa määritelty yhtäjatkuva funktioperhe on tasaisesti yhtäjatkuva.*

Todistus. Lauseen todistuksen vaiheet vastaavat suurelta osin Lauseen 6.14 todistusta. Olkoot (X, d) ja (Y, ρ) metrisiä avaruuksia. Olkoon X kompakti ja olkoon A yhtäjatkuva funktioperhe, missä $f : X \to Y$, kun $f \in A$. Olkoon $r > 0$. Koska funktioperhe A on yhtäjatkuva, niin jokaista pistettä $x \in X$ kohti on olemassa $\delta_x > 0$ siten, että

$$\rho(f(x), f(y)) < \frac{r}{2} \quad \text{kaikilla } f \in A \quad \text{aina, kun} \quad d(x, y) < \delta_x. \tag{6}$$

Muodostetaan joukon X avoin peite $\{B(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x\in X}$. Koska X on kompakti, niin tällä peitteellä on äärellinen osapeite $\{B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) : i = 1, \dots, n\}$. Valitaan $\delta := \min\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1, \dots, n\}$. Olkoon nyt $x, y \in X$ siten, että $d(x, y) < \delta$. Kaikille pisteille x on olemassa x_i siten, että $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$. Edelleen

$$d(y, x_i) \le d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \le \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

Siispä $d(x, x_i) < \delta_{x_i}$ ja $d(y, x_i) < \delta_{x_i}$. Funktioperhe A on yhtäjatkuva, joten epäyhtälön (6) nojalla on voimassa

$$\rho(f(x), f(y)) \le \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(y)) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

kaikilla $f \in A$. Näin ollen $\rho(f(x), f(y)) < r$ kaikilla $f \in A$ ja kaikilla $x, y \in X$, joille $d(x, y) < \delta$. Siispä funktioperhe A on tasaisesti yhtäjatkuva. Deltan valinta ei riipu funktioperheen A funktiosta eikä tarkasteltavasta pisteestä. □

7 Arzelà–Ascoli

Merkitään kaikkien jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden $f : X \to \mathbb{R}$ joukkoa $C(X)$. Merkitään kirjaimella D supremumin avulla määriteltyä metriikkaa eli sup-metriikkaa joukossa $C(X)$, missä X on kompakti. Tällöin joukon $C(X)$ funktioiden f ja g välinen etäisyys on

$$D(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \quad \text{kaikilla } f, g \in C(X).$$

Tarvitaan vielä seuraavaa tulosta Arzelà–Ascolin lauseen todistuksessa.

Lause 7.1. *Olkoon X kompakti metrinen avaruus ja D sup-metriikka joukossa $C(X)$. Metrinen avaruus $(C(X), D)$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (f_n) Cauchyn jono joukossa $C(X)$. Osoitetaan, että jono (f_n) suppenee avaruudessa $(C(X), D)$. Olkoon $r > 0$. Koska (f_n) on Cauchyn jono, voidaan valita $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$D(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{r}{2} \quad \text{kaikilla } n, m \ge n_0.$$

Tällöin

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{r}{2} \quad \text{kaikilla } x \in X \text{ ja } n, m \ge n_0. \tag{7}$$

Tästä seuraa, että $(f_n(x))$ on Cauchyn jono kaikilla $x \in X$, missä $f_n(x)$ on jono reaalilukuja. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, niin Cauchyn jono $f_n(x)$ suppenee avaruudessa $\mathbb{R}$. Olkoon nyt luku $f(x)$ jonon $f_n(x)$ raja-arvo eli toisin sanoen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in X$. Tällöin jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f : X \to \mathbb{R}$. Epäyhtälön (7) nojalla

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{r}{2} \text{ kaikilla } x \in X \text{ ja } n \geq n_0. \tag{8}$$

Osoitetaan sitten, että f on jatkuva. Olkoon $x_0 \in X$. Valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_N(x) - f(x)| < \frac{r}{3}$ kaikilla $x \in X$. Koska jonon (f_n) jokainen funktio on jatkuva, niin f_N on jatkuva. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{r}{3} \quad \text{aina, kun } |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin kaikilla $|x - x_0| < \delta$ on voimassa

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r. \end{aligned}$$

Siispä $f \in C(X)$. Epäyhtälön (8) nojalla

$$D(f_n, f) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{r}{2} < r \quad \text{kaikilla } n \geq n_0.$$

Toisin sanoen Cauchyn jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f eli (f_n) suppenee avaruudessa $(C(X), D)$. Siispä $(C(X), D)$ on täydellinen. □

Reaaliarvoisten funktioiden $f : X \to \mathbb{R}$ kokoelma $\mathcal{B}$ on rajoitettu silloin, kun on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $f \in \mathcal{B}$ ja kaikilla $x \in X$. Tämä tarkoittaa samaa kuin, että $\mathcal{B}$ on *tasaisesti rajoitettu.*

Lause 7.2 (Arzelà–Ascolin lause)**.** *Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja D sup-metriikka joukossa $C(X)$. Olkoon $\mathcal{B} \subseteq C(X)$. Metrinen avaruus $(\mathcal{B}, D)$ on kompakti, jos ja vain jos se on rajoitettu, suljettu ja yhtäjatkuva.*

Todistus. Oletetaan ensin, että joukko $\mathcal{B} \subseteq C(X)$ on kompakti. Kompakti joukko on Lauseen 6.5 mukaan suljettu ja Lauseen 6.13 mukaan täysin rajoitettu ja siten myös rajoitettu. Osoitetaan vielä, että $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. Olkoon $r > 0$. Koska $\mathcal{B}$ on täysin rajoitettu, niin on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{B}$, että $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \frac{r}{3})$. Näin ollen jokaiselle avaruuden $\mathcal{B}$ funktiolle f on olemassa funktio $f_i \in \{f_1, \ldots, f_n\}$ siten, että niiden välinen etäisyys on pienempi kuin $\frac{r}{3}$ eli $D(f, f_i) < \frac{r}{3}$. Tällöin kaikilla $x \in X$ on voimassa

$$|f(x) - f_i(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - f_i(x)| = D(f, f_i) < \frac{r}{3}. \tag{9}$$

Koska X on kompakti ja joukon $\mathcal{B} \subseteq C(X)$ funktiot ovat jatkuvia, niin Lauseen 6.14 nojalla jokainen funktio joukossa $\mathcal{B}$ on tasaisesti jatkuva. Täten jokaiselle $f_i \in \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{B}$ voidaan valita $\delta_i > 0$ siten, että

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{r}{3} \quad \text{aina, kun } d(x, y) < \delta_i. \tag{10}$$

Valitaan $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Epäyhtälöiden (9) ja (10) nojalla kaikille $f \in \mathcal{B}$ on olemassa $i \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &< \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r \end{aligned}$$

aina, kun $d(x, y) < \delta$. Näin ollen $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva jokaisessa joukon X pisteessä x eli $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. Deltan arvo ei siis riipu joukon $\mathcal{B}$ funktiosta. Itse asiassa deltan arvo ei riipu myöskään pisteestä x, joten $\mathcal{B}$ on myös tasaisesti yhtäjatkuva. Metrinen avaruus $\mathcal{B} \subseteq C(X)$ on siis rajoitettu, suljettu ja yhtäjatkuva aina, kun $\mathcal{B}$ on kompakti.

Käänteisesti oletetaan, että $\mathcal{B}$ on rajoitettu, suljettu ja yhtäjatkuva. Lauseen 7.1 nojalla $(C(X), D)$ on täydellinen. Suljettu aliavaruus $\mathcal{B} \subseteq C(X)$ on täydellinen Lauseen 4.4 nojalla. Kun lisäksi osoitetaan, että $\mathcal{B}$ on täysin rajoitettu, niin $\mathcal{B}$ on kompakti.

Olkoon $r > 0$. Koska $\mathcal{B}$ on rajoitettu, niin on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $f \in \mathcal{B}$ ja kaikilla $x \in X$. Näin ollen $f(X) \subseteq [-M, M]$ kaikilla $f \in \mathcal{B}$. Koska X on kompakti, niin Lauseesta 6.15 seuraa, että yhtäjatkuva joukko $\mathcal{B}$ on tasaisesti yhtäjatkuva ja voidaan valita sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \frac{r}{4} \quad \text{kaikilla } f \in \mathcal{B} \text{ aina, kun } d(x, y) < \delta. \tag{11}$$

Koska X on kompakti, niin se on täysin rajoitettu Lauseen 6.13 nojalla. Näin ollen on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X$, että $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta)$. Suljettu väli $[-M, M] \subseteq \mathbb{R}$ on täysin rajoitettu. On siis olemassa äärellinen osajoukko $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq [-M, M]$ siten, että $f(X) \subseteq [-M, M] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \frac{r}{4})$. Kun $f \in \mathcal{B}$, niin jokainen piste $f(x)$

kuuluu siis johonkin avoimeen palloon $B(y_j, \frac{r}{4})$, missä $y_j \in \{y_1, \ldots, y_n\}$. Muodostetaan kokoelma A, joka sisältää kaikki sellaiset kuvaukset α, missä α kuvautuu joukolta $\{x_1, \ldots, x_m\}$ joukolle $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Toisin sanoen $A := \{\alpha : \{x_1, \ldots, x_m\} \to \{y_1, \ldots, y_n\}\}$. Nyt määrittelyjoukon pisteitä on m kappaletta, jotka voivat kuvautua n eri tavalla, joten joukon A funktioita α on $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ kpl}} = n^m$ kappaletta. Joukon A kardinaliteetti on n^m eli joukko A on äärellinen. Muodostetaan nyt jokaista joukon A funktiota α kohti joukko

$$U_\alpha := \{f \in \mathcal{B} : |f(x_i) - \alpha(x_i)| \le \frac{r}{4} \quad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, m\},$$

missä $\alpha(x_i) = y_j$, jollakin $j = 1, \ldots, n$. Olkoon $f, g \in U_\alpha$. Osoitetaan, että kaikilla joukon U_α funktioilla on voimassa $|f(x) - g(x)| \le r$ kaikilla $x \in X$. Olkoon $x \in X$ mikä tahansa, jolloin $x \in B(x_i, \delta)$ jollakin $i = 1, \ldots, m$. Koska $d(x, x_i) < \delta$, niin joukon $\mathcal{B}$ tasaisesta yhtäjatkuvuudesta (11) seuraa, että

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{r}{4} \quad \text{ja} \quad |g(x) - g(x_i)| < \frac{r}{4}. \tag{12}$$

Funktiot f ja g kuuluvat joukkoon U_α, joten

$$|f(x_i) - \alpha(x_i)| \le \frac{r}{4} \quad \text{ja} \quad |g(x_i) - \alpha(x_i)| \le \frac{r}{4}.$$

Tästä seuraa, että

$$|f(x_i) - g(x_i)| \le |f(x_i) - \alpha(x_i)| + |\alpha(x_i) - g(x_i)| \le \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}. \tag{13}$$

Epäyhtälöiden (12) ja (13) nojalla

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\ &\le \frac{r}{4} + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = r \end{aligned} \tag{14}$$

kaikilla $f, g \in U_\alpha$. Jokaista funktiota α kohti on nyt joukko U_α ja joukkoja U_α on äärellinen määrä. Osoitetaan, että $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ osoittamalla, että jokainen funktio joukossa $\mathcal{B}$ kuuluu johonkin joukkoon U_α. Olkoon $f \in \mathcal{B}$. Jokaiselle $i \in \{1, \ldots, m\}$ valitaan $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $f(x_i) \in B(y_{j_i}, \frac{r}{4})$. Joukkoon A kuuluu nyt sellainen funktio α, että $\alpha(x_i) = y_{j_i}$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Tällöin $|f(x_i) - \alpha(x_i)| < \frac{r}{4}$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$ ja siten $f \in U_\alpha$. Valitaan $f_\alpha \in U_\alpha \subseteq \mathcal{B}$. Epäyhtälön (14) nojalla jokaiselle $g \in U_\alpha$ pätee

$$D(f_\alpha, g) = \sup_{x \in X} |f_\alpha(x) - g(x)| \le r < 2r,$$

joten $U_\alpha \subseteq B(f_\alpha, 2r)$ kaikilla $\alpha \in A$. Näin ollen $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} B(f_\alpha, 2r)$, missä funktioita $f_\alpha \in \mathcal{B}$ on äärellinen määrä ja $2r > 0$ on mielivaltainen. Joukko $\mathcal{B}$ on siten täysin rajoitettu. Koska $\mathcal{B}$ on täydellinen ja täysin rajoitettu, niin Lauseen 6.13 nojalla $\mathcal{B}$ on kompakti. □

Kompaktissa joukossa määritelty yhtäjatkuva funktioperhe on aina tasaisesti yhtäjatkuva, joten Arzelà–Ascolin lauseessa yhtäjatkuvuus tarkoittaa myös tasaista yhtäjatkuvuutta.

Esimerkki 7.3. Funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz-kuvaus* vakiolla K, jos on olemassa $K > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Olkoon $K > 0$, $M > 0$ ja olkoon funktioperhe

$$A := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, |f(x)| \leq M\}.$$

Toisin sanoen $A \subseteq C([0,1])$ on rajoitettu joukko, johon kuuluu kaikki sellaiset funktiot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka ovat Lipschitz-kuvauksia samalla vakiolla K. Olkoon D sup-metriikka joukossa $C([0,1])$. Osoitetaan, että (A, D) on kompakti käyttäen Arzelà–Ascolin lausetta.

Olkoon $(f_n) \subseteq A$ mikä tahansa avaruudessa $(C([0,1]), D)$ suppeneva jono. Siten jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $f \in C([0,1])$. Osoitetaan, että $f \in A$, jolloin A on suljettu. Olkoon $r > 0$. On olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$D(f_n, f) = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{r}{2} \quad \text{aina, kun } n \geq n_0.$$

Olkoot $x, y \in [0,1]$ mitkä tahansa. Nyt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{r}{2}$, kun $n \geq n_0$. Koska $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\lim_{n \to \infty} |f_n(x)| = |f(x)| \leq M$. Nyt f_{n_0} on Lipschitz-kuvaus, jolloin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< \frac{r}{2} + K|x - y| + \frac{r}{2} = K|x - y| + r. \end{aligned}$$

Koska $|f(x) - f(y)| < K|x-y| + r$ kaikilla $r > 0$, niin $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Siispä raja-arvo f on Lipschitz-kuvaus vakiolla K ja $f \in A$.

Joukko A on yhtäjatkuva, koska kaikille $r > 0$ on olemassa $\delta = \frac{r}{K}$ siten että, kun $|x - y| < \delta$, niin

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = K\frac{r}{K} = r \quad \text{kaikilla } f \in A.$$

Näin ollen A on rajoitettu, suljettu ja yhtäjatkuva, jolloin Arzelà–Ascolin lauseen nojalla A on kompakti.

Viitteet

[1] M. Filali. *Topology I.* Oulun Yliopisto, Lecture Notes, 2007.

[2] M. Filali. *Metriset avaruudet.* Oulun Yliopisto, Luentomoniste, 2022.

[3] S. Kumaresan. *Topology of Metric Spaces.* Alpha Science International, Oxford, 2. edition, 2011.

[4] S. Lipschutz. *Schaums Outline of General Topology.* McGraw–Hill Education, 2011.

[5] H. L. Royden. *Real analysis.* Macmillan, New York, N.Y., 2. edition, 1968.

[6] Wilson A. Sutherland. *Introduction to Metric and Topological Spaces.* Oxford : Oxford University Press, 2. edition, 2009.