Monitavoiteoptimointi

Tuukka Vuontisjärvi

LuK-tutkielma
Tuukka Vuontisjärvi
tvuontis20@student.oulu.fi
Y62946753
Matemaattisten tieteiden yksikkö
Oulun yliopisto
Syksy 2023

Contents

1 Johdanto

Tämä teos perustuu lähinnä Kalyanmoy Debin teokseen *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, josta käsitellään pääasiassa ensimmäistä kolmea osiota.

Optimoinnissa on tarkoituksena löytää yksi tai useampi **ratkaisu**, jotka ovat **tavoitteiden** kannalta suosiollisimpia. Arkisia esimerkkejä tavoitteista ovat hinta ja laatu. Muita ostopäätökseen vaikuttavia tekijöitä huomioimatta, pyritään ostotapahtumassa hinta minimoimaan ja laatu maksimoimaan. Käytännössä optimoinnissa pyritään siis löytämään ratkaisuja, joiden ominaisuudet ovat mahdollisimman suotuisia. Vaikeaksi optimiratkaisujen löytämisen tekee tavoitteiden luontainen ristiriitaisuus. Laadukkain tuote on harvoin edullisin vaihtoehto. Useimmiten päätöksenteossa vaihtoehtoisten ratkaisujen ominaisuudet vaihtelevat suurestikin, joten on tärkeää pystyä eliminoimaan huonoja vaihtoehtoja ja löytämään parhaita tilanteeseen sopivia ratkaisuja. Optimoinnin tarvetta esiintyy kaikkialla arkisesta päätöksenteosta aina suurimpienkin projektien organisointiin.

Jos päätöksenteko yksinkertaistetaan tilanteeseen, jossa ainoastaan yhdellä ominaisuudella on väliä, on optimiratkaisun löytäminen helpompaa. Jos laadulla ei olisi väliä, valittaisiin ostotapahtumassa edullisin vaihtoehto. Tällöin käsiteltäessä vain yhtä **tavoitefunktiota**(usein käytetään nimitystä *kohdefunktio*), puhutaan ongelmanratkaisussa **yksitavoiteoptimoinnista**.

Todellisuudessa optimointi on harvoin näin yksinkertaista, sillä ominaisuudet riippuvat monista sekä objektiivisista että subjektiivisista tekijöistä. Hinta-laatu -esimerkkiin palaten laatu voidaan helposti jakaa koostumaan käytännöllisyydestä, terveydellisyydestä ja alkuperästä jne. Vastavaasti ostotapahtumaan voi liittyä muitakin kustannuksia kuin varsinaisen hankittavan tuoteen oma hinta. Halvempaa tuotetta voi joutua hankkimaan kauempaa, jolloin matkastakin aiheutuu rahallisia tai ainakin ajallisia kuluja.

Kuitenkin nämä ominaisuudet pelkistäen hinnaksi ja laaduksi, käsitellään ostotapahtumassa kahta tavoitefunktiota. Useampaa tavoitefunktiota käsittelevää optimointiongelmaa sanotaan **monitavoiteoptimointiongelmaksi**. Yksitavoiteoptimointi on loogisesti monitavoiteoptimoinnin erikoistapaus.

Selvästi pyrittäessä kohti montaa ristiriitaista tavoitetta, ei yhden ominaisuuden optimoiva ratkaisu yleensä tuota kokonaisuuden kannalta mieleistä ratkaisua. Positiivinen muutos yhden ominaisuuden suhteen johtaa negatiiviseen muutokseen toisen ominaisuuden suhteen. Tämä voi estää valitsemasta ratkaisua, joka on optimi vain yhden tavoitteen suhteen.

Käsitellään päätöksentekoa puhelimen ostamisen yhteydessä(Figure 1). Vaihtoehtoja A ja D punnitessa köyhälle ostajalle on luontevaa valita edullinen vaihtoehto A ja rikkaalle ostajalle on luontevaa valita laadukkain vaihtoehto D. Näiden ratkaisujen välillä on ratkaisuja, jotka joustavat ominaisuuksien välillä. Havaitaan, että verrattaessa mielivaltaista kahta esitetyistä vaihtoehdoista, paremmuus yhden tavoitteen suhteen tarkoittaa huonommuutta toisen tavoitteen suhteen.

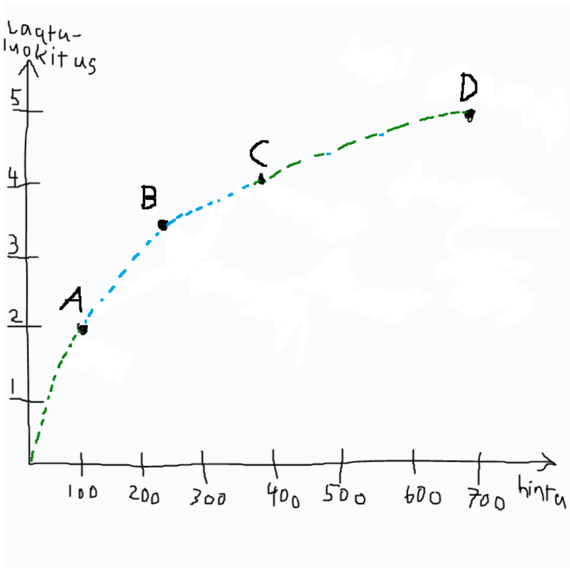

Figure 1: Puhelimien hinta ja laatu

2 Yksi- ja monitavoiteoptimointi

Lukion käyneille tuttu tapa funktion ääriarvojen löytämiselle on derivaatta ja korkeakoulutuksessa voidaan oppia optimin löytämistä rajoitteiden vallitessa. Rajoitteet huomioiva optimointi on tärkeää käytännön kannalta tosielämän systeemien ominaisuuksista johtuen. Syventävissä opinnoissa voidaan käsitellä muun muassa optimoinnin teoreettisia aspekteja ja optimointitekniikoita tai -algoritmeja erilaisille optimointitehtäville. Varsinaista monitavoiteoptimointia ei kuitenkaan juurikaan käsitellä.

Klassisissa monitavoiteoptimointitekniikoissa tehtävää pyritään yksinkertaistamaan muuttamalla ongelma yksitavoiteongelmaksi ja monitavoiteoptimointia kohdellaan jopa sovelluksena yksitavoiteoptimoinnille. Useimmat monitavoiteoptimointia koskevat tutkielmat keskittyvät tavoitteiden yhdistelyyn ja tekniikoiden keskenäiseen vertailuun. Yksitavoiteoptimoinnin käsittelyssä monitavoiteoptimoinnin erikoistapauksena voidaan havaita perusteellinen ero varsinaisen monitavoiteoptimoinnin kanssa.

2.1 Perusteellinen ero

Esimerkkiongelmassa kumpaakin tavoitetta vastaa ratkaisujoukossa {A, B, C, D} erikseen oma optimiratkaisunsa(ratkaisu A hinnan suhteen ja ratkaisu D laadun suhteen). Näistä yhden tavoitteen suhteen optimeista ratkaisuista voidaan joustaa, jolloin päädytään tarkastelemaan myös ratkaisuja B ja C. Tärkeä kysymys kuuluukin: Voidaanko kaikista vaihtoehtoisista ratkaisuista löytää paras, molemmat tavoitteet huomioiden?

Yksikään joukon ratkaisu ei nyt ole toisia joukon ratkaisuja parempi molempien tavoitteiden suhteen ja ilman lisätietoa ei voida minkään joukon ratkaisun sanoa olevan paras valinta. Nyt ei siis ole vain yhtä optimiratkaisua vaan useampi optimiratkaisu. Voidaan päätellä monitavoiteongelman ratkaisussa olevan tärkeää löytää lopullista valintaa varten *laaja* joukko sopivia vaihtoehtoisia ratkaisuja.

2.2 Kaksi lähestymistapaa

Vaikka perusteellinen ero yksi- ja monitavoiteoptimoinnin välillä onkin optimiratkaisujoukon kardinaliteetissa(joukon alkioiden lukumäärä), käytännössä myös monitavoiteongelmassa tarvitaan lopulta vain yksi ratkaisu toteutusta varten. Kuinka optimiratkaisujoukosta sitten tulisi valita paras ratkaisu?

Puhelinesimerkissä päätökseen vaikuttavia tekijöitä voisivat olla käytettävissä olevat varat, tarkemmat käyttötarkoitukset ja käyttäjän tottumukset. Tällainen **ylemmän tason tieto** on usein subjektiivista. Kuitenkin etsimällä ensin joukko vaihtoehtoisia optimiratkaisuja, voidaan verrata vaihtoehtoja ja tehdä päätös. Näin monitavoiteoptimoinnissa halutaan siis löyttää joukko optimiratkaisuja, joissa kaikki tavoitteet huomioidaan tärkeinä.

Ideaalinen toimintaohje monitavoiteoptimoinnille voidaan muotoilla seuraavasti:

Askel 1: Etsitään useampi, toisistaan mahdollisimman paljon poikkeava, vaihtoehtoinen optimiratkaisu

Askel 2: Valitaan ylemmän tason tiedon avulla yksi optimiratkaisu

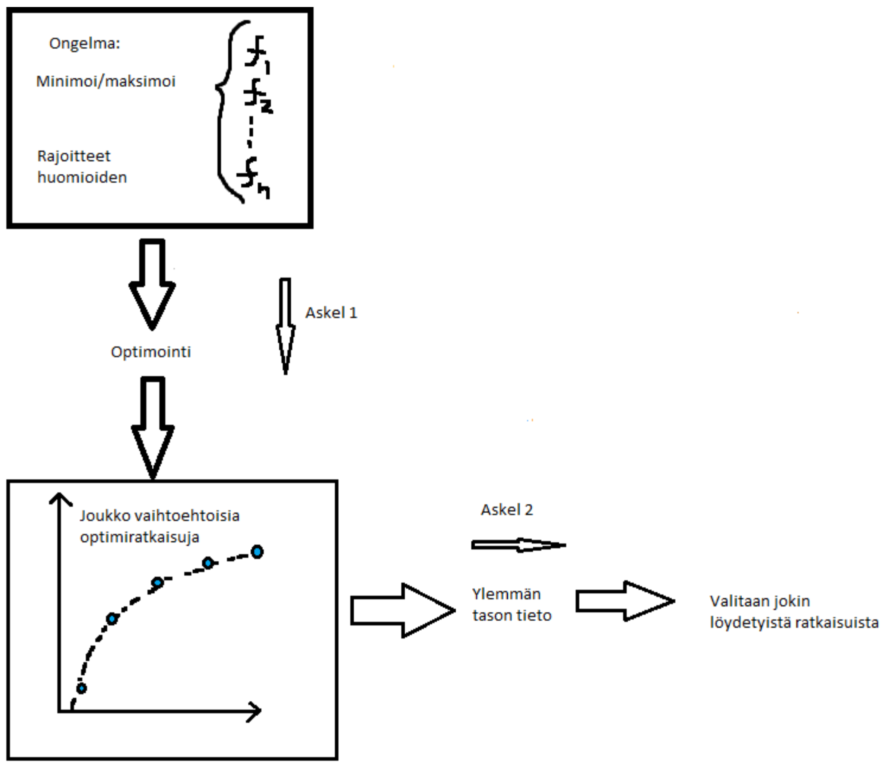

Figure 2: Monitavoiteoptimoinnin kulku

Toinen lähestymistapa monitavoiteoptimointiin on ylemmän tason tiedon käyttö etukäteen(preferennsipohjanen monitavoiteoptimointi), jolloin saadaan yksitavoitefunktio optimointia varten. Näin voidaan tehdä skalaamalla tavoitefunktiot niiden tärkeyksiä kuvaavilla painokertoimilla ja muodostamalla niiden summana yhdistelmätavoitefunktio. Toinen tapa on asettaa osalle tavoitteista ylä- ja alarajat, jolloin niitä voidaan käsitellä rajoitteina.

Yksitavoiteoptimointiongelman voi esittää yleisessä muodossa seuraavasti:

$$\begin{cases} Minimoi/maksimoi \quad f(x) & \\ \quad rajoitteilla \quad g_j(x) \geq 0, & j = 1, 2, ..., J; \\ \quad h_k(x) = 0, & k = 1, 2, ..., K; \\ \quad x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, & i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Maksimoitavan tavoitefunktion voi muuntaa minimoitavaksi kertomalla luvulla -1. Jokainen ratkaisu x on n **päätösmuuttujaa** sisältävä piste $x =$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$. Jokaista päätösmuuttujaa x_i rajoittavat alaraja $x_i^{(L)}$ ja yläraja $x_i^{(U)}$, mikäli ne ovat olemassa. Nämä rajat määräävät **päätösmuuttuja-avaruuden D**(Decision variable space).

Optimointiongelmissa esintyy myös **rajoitefunktioita** $g_j(x)$ ja $h_k(x)$, joita mielivaltaisen ratkaisun tulee noudattaa ollakseen **käypä**. Vaihtoehtoisesti myös rajoitefunktiot $g_j(x)$ voitaisiin kertomalla luvulla -1 asettaa noudattamaan ehtoa $g_j(x) \leq 0$. Ratkaisu x, joka noudattaa kaikkia (J+K) annettuja rajoitefunktioita ja päätösmuuttujien ylä- ja alarajoja on käypä ratkaisu. Piste x, joka ei noudata kaikkia annettuja ehtoja on ei-käypä/toteuttamiskelvoton ratkaisu. Huomionarvoisesti rajoitteiden vallitessa koko päätösmuuttuja-avaruus ei ole käypää aluetta. Päätösmuuttuja-avaruuden käypää aluetta kutsutaan päätösmuuttuja-avaruuden **hakualueeksi S**(Search space).

Selvästi preferennsipohjaisessa optimoinnissa muodostetulla yksitavoitefunktiolla löydetty ratkaisu riippuu valtavasti subjektiivisesta ylemmän tason tiedosta ja vaatii kriittistä analysointia. Aiemmin esitetyssä monitavoiteoptimoinnin toimintaohjeessä tätä ongelmaa ei ole.

3 Monitavoiteoptimointiongelma

3.1 Matemaattinen muotoilu

Monitavoiteoptimointiongelmassa on useampi tavoitefunktio, jotka tahdotaan minimoida tai maksimoida. Usein optimoinnissa tavoitefunktiot muunnetaan minimoitaviksi, ja monet algoritmit ovatkin suunniteltu ratkaisemaan juuri minimointiongelmia.

Monitavoiteongelman voi esittää yleisessä muodossa seurvaavasti:

$$\begin{cases} Minimoi/maksimoi \quad f_m(x), & m = 1, 2, ..., M; \\ \qquad rajoitteilla \quad g_j(x) \geq 0, & j = 1, 2, ..., J; \\ \qquad\qquad h_k(x) = 0, & k = 1, 2, ..., K; \\ \qquad\qquad x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, & i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Tavoitteiden määrän lisäksi suuri ero yksitavoiteoptimoinnin ja monitavoiteoptimoinnin välillä on, että monitavoiteoptimoinnissa tavoitefunktiot virittävät moniulotteisen **tavoiteavaruuden Z**(Objective space). Jokainen päätösmuuttuja-avaruuden käypä ratkaisu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ kuvautuu tavoiteavaruuden hakualueen pisteeksi $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = z = (z_1, z_2, ..., z_M)$.

3.2 Lineaarisuus ja konveksisuus

Jos kaikki tavoite- ja rajoitefunktiot ovat lineaarisia(suurin asteluku on 1), on myös monitavoiteongelma lineaarinen. Vastaavasti jonkin tavoite- tai rajoitefunktion ollessa epälineaarinen, on monitavoiteongelma epälineaarinen. Useimmat monitavoiteongelmat ovat luonnostaan epälineaarisia.

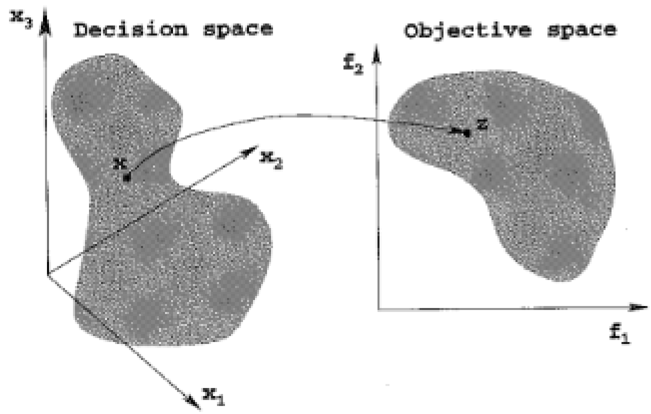

Figure 3: Ratkaisun x kuvautuminen päätösavaruudesta tavoiteavaruuden pisteeseen z.

Määritelmä: 3.1 *Funktio $f : R^n \Longrightarrow R$ on **konveksi**, jos mielivaltaisille pisteille $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n$, seuraava ehto on tosi:*

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \tag{1}$$

kaikilla $0 \leq \lambda \leq 1$.

Epäyhtälön (1) $>$-merkillä toteuttava funktio on epäkonveksi ja $\geq$-merkillä toteuttava funktio on konkaavi.

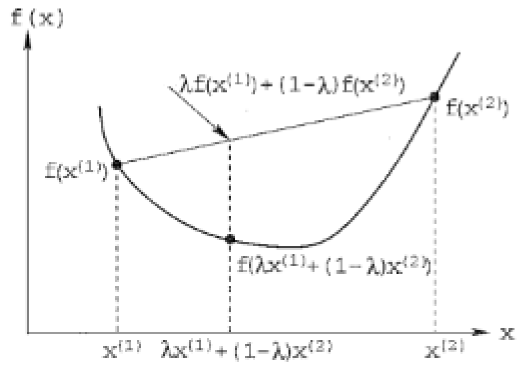

Figure 4: Funktion konveksisuutta on helppo havainnoillistaa geometrisesti: Konveksin funktion f kahta mielivaltaista pistettä yhdistävä jana asettaa ylärajan funktiolle f

Monitavoiteongelma on konveksi, jos

- kaikki sitä koskevat tavoitefunktiot ovat konvekseja
- tavoiteavaruuden käypä alue on konveksi.

Jotta käypä alue olisi konveksi, tulee rajoitefunktioiden g(x) olla konkaaveja ja rajoitefunktioiden h(x) lineaarisia. Optimointiongelmien konveksisuus on oleellista, sillä monet ratkaisumenetelmät ja algoritmit kohtaavat vaikeuksia epäkonvekseissa ongelmissa.

3.3 Tavoiteet MTOOssa

Monitavoiteoptimoinnissa on kaksi päämäärää:

- Löytää joukko ratkaisuja mahdollisimman lähetä pareto-optimia rintamaa
- Löytää mahdollisimman monipuolinen ratkaisujoukko

Ensimmäinen päämäärä, sopivan ratkaisujoukon löytäminen, on pakollinen kaikissa optimointitehtävissä. Lähestyminen ratkaisujoukkoa, joka ei ole lähellä pareto-optimia joukkoa ei ole toivottavaa. Toinen päämäärä taas koskee vain monitavoiteoptimointia. Vain monipuolisuuteen pyrkimällä saadaan kaikkien tavoitteiden tärkeydet huomioiva joukko ratkaisuja.

Jos tavoitteet eivät kuitenkaan ole ristiriidassa keskenään, löytyy vain yksi pareto-optimi ratkaisu. Joissain tapauksissa ei ole ilmiselvää, etteivät tavoitteet ole ristiriitaisia keskenään.

Tavoitteiden lukumäärän lisäksi yksitavoiteoptimoinnilla ja monitavoiteoptimoinnilla on perusteellisia eroja:

- Kaksi päämäärää yhden sijaan
- Kahden hakualueen käsittely
- Ei muunnosta yksitavoiteongelmaksi

3.4 Kaksi päämäärää yhden sijaan

Lähtökohtaisesti yksitavoiteoptimoinnin ainoa päämäärä on löytää globaali optimiratkaisu. Useimmat yksitavoitealgoritmit pyrkivät löytämään vain yhden globaalin optimiratkaisun, vaikka useampia olisikin Monitavoiteoptimoinnissa on kaksi päämäärää. Eteneminen kohti pareto-optimia rintamaa ja ei-dominoidun joukon pitäminen monipuolisena. Onkin tärkeää tiedostaa, että vaikka algoritmi olisi tehokas yhden päämäärän suhteen, ei algoritmin kelvollisuus toisen päämäärän saavuttamisen suhteen ole taattua.

3.5 kahden hakualueen käsittely

Yksitavoiteoptimoinnissa käsitellään vain päätösmuuttuja-avaruutta D, kun taas monitavoiteoptimoinnissa käsitellään myös tavoiteavaruutta Z. Pisteen kuvautuminen $D \rightarrow Z$ ei usein ole lineaarista, ja siten ratkaisujen $x^{(1)}$ ja $x^{(2)}$ pieni etäisyys päätömuuttuja-avaruudessa D ei takaa pientä etäisyyttä tavoiteavaruudessa Z. Laajaan ratkaisujoukkoon voidaan tehtäväkohtaisesti pyrkiä sekä päätösmuuttuja-avaruudessa, että tavoiteavaruudessa.

3.6 Ei muunnosta yksitavoiteongelmaksi

Koska perinteisti tapoja varsinaiseen monitavoiteoptimointiongelmiin ei ollut, on luotu menetelmiä muuntamaan monitavoiteongelma yksitavoiteongelmaksi. Monitavoiteoptimointimenetelmät useiden pareto-optimien ratkaisujen löytämiseksi poistaa tarpeen moisten menetelmien käyttämiselle. Vaikka lopullinen toimeenpano optimoinnin jälkeen vaatisikin vain yhden ratkaisun, tieto useammasta pareto-optimista vaihtoehdosta voi auttaa päätöksentekijää vertailemaan ja valitsemaan mahdollisimman hyvän ratkaisun.

4 Dominointi ja pareto-optimaalisuus

4.1 Dominointiperiaate

Useimmat Monitavoiteoptimointialgoritmit käyttävät **dominointiperiaatetta**. Algoritmeissa kahta ratkaisua verrataan keskenään, tutkien dominoiko toinen toista vai ei. Kattaaksemme minimoinnin ja maksimoinnin yhdenaikaisesti, otetaan käyttöön seuraavat vertailumerkinnät:

- $i \triangleleft j$, eli "ratkaisu i on käsiteltävän tavoitteen suhteen parempi kuin ratkaisu j"

- $i \triangleright j$, vastaavasti ”ratkaisu i on käsiteltävän tavoitteen suhteen huonompi kuin ratkaisu j” .

Relaatiossa kolmion kärki osoittaa kohti parempaaa ratkaisua, sillä optimointitehtävissä halutaan useimminten minimoida.

Määritelmä: 4.1 *Ratkaisu $x^{(1)}$ dominoi ratkaisua $x^{(2)}$, mikäli seuraavat ehdot ovat voimasssa:*

- *Ratkaisu $x^{(1)}$ ei ole huonompi kuin $x^{(2)}$ minkään tavoiteen suhteen, eli $f_j(x^{(1)}) \triangleright f_j(x^{(2)})$ on epätosi kaikilla $j = 1, 2, ..., M$.*

- *Ratkaisu $x^{(1)}$ on* aidosti *parempi kuin ratkaisu $x^{(2)}$ vähintään yhden tavoitteen suhteen, eli $f_j(x^{(1)}) \triangleleft f_j(x^{(2)})$, jollain $j \in 1, 2, ..., M$.*

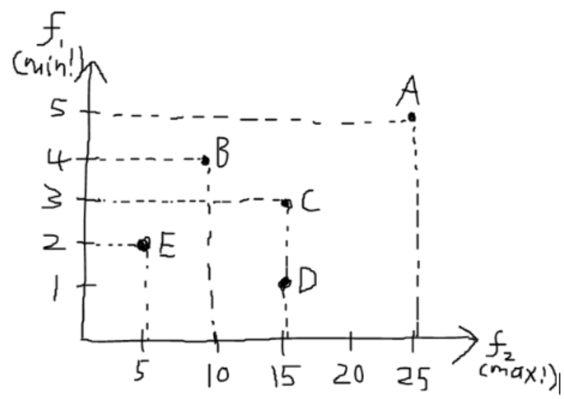

Figure 5: Ratkaisujoukko tavoiteavaruuteen kuvattuna. ”Piste A” tarkoittaa kuvassa nyt siis pistettä $(f_2(A), f_1(A))$

Käsitellään kuvan 5 mukaista kaksitavoiteongelmaa, jossa on 5 eri ratkaisua kuvattuna tavoiteavaruuteen. Olkoon päämääränä minimoida funktio f_1 ja maksimoida funktio f_2. Dominointiperiaatteen avulla voidaan vertailla ratkaisuja keskenään.

Tarkastellessa ratkaisuja D ja E, saa ratkaisu D tavoitefunktion f_1 pienemmän arvon. Koska f_1 tahdotaan minimoida, on nyt $f_1(D) \triangleleft f_1(E)$. Toisaalta D saavuttaa suuremman arvon maksimoitavan tavoitefunktion f_2 suhteen, joten myös $f_2(D) \triangleleft f_2(E)$. Dominointiehdot ovat nyt voimassa kaikkien tavoitteiden osalta, joten ratkaisu D dominoi ratkaisua E.

Tarkastellessa ratkaisuja C ja D, saa ratkaisu D minimoitavan tavoitefunktion f_1 jälleen pienemmän arvon, joten $f_1(D) \triangleleft f_1(C)$. Tavoitefunktion f_2 suhteen C ja D saavat saman arvon. D on siis parempi funktion f_1 suhteen ja yhtä hyvä funktion f_2. Tämä riittää dominointiehtojen täyttymiseen ja ratkaisu D dominoi siis myös ratkaisua C.

4.2 Pareto-optimaalisuus

Jatketaan kuvan 5 esimerkin käsitelyä vertaamalla ratkaisuja B ja E. Havaitaan ratkaisun E olevan parempi tavoitefunktion f_1 suhteen eli $f_1(E) \triangleleft f_1(B)$. Toisaalta havaitaan ratkaisun B olevan parempi tavoitefunktion f_2 suhteen eli $f_2(E) \triangleright f_1(B)$. Nyt ei voida todeta ratkaisun B dominoivan ratkaisua E, eikä päinvastoin.

Koska ei voida sanoa kummankaan ratkaisun olevan parempi, ovat ratkaisut B ja E keskenään **ei-dominoidut**. Äärelliselle joukolle ratkaisuja voidaan suorittaa kaikki mahdolliset parittaiset dominointiperiaatteen mukaiset vertailut. Vertailujen lopuksi saadaan muodostettua **ei-dominoitu joukko**:

Määritelmä: 4.2 *Ratkaisujoukossa P ei-dominoitu joukko P' muodostuu ratkaisuista joita ei dominoi mikään joukon P ratkaisu.*

Joukon P ollessa koko päätösmuuttuja-avaruuden hakualue(P=S), saatava ei-dominoitu joukko on globaali **pareto-optimaalinen** joukko. Usein puhuttaessa pareto-optimista joukosta, tarkoitetaankin juuri globaalia pareto-optimia joukkoa(Myöskin tässä työssä). Koska pareto-optimin joukon ratkaisuja ei dominoi mikään käypä ratkaisu, sisältää joukko MTOOn optimiratkaisut.

4.3 Ei-dominoidun joukon löytäminen

Ei-dominoidun joukon löytämiseen äärellisestä ratkaisujoukosta on useita toimivia algoritmeja. Esitellään seuraavaksi eräs sopiva algoritmi ei-dominoidun joukon P' löytämiselle N ratkaisun joukosta:

Askel 1. Aloita asettamalla joukko P'={1} ja i=2

Askel 2. Aseta joukon P' ratkaisulaskuriin j=1

Askel 3. Vertaa ratkaisujen i ja j keskenäistä dominointisuhdetta

Askel 4. Tapauskohtainen edellisen askeleen mukaan:

- Askel 4.1. Jos ratkaisu i dominoi ratkaisua j:
  Poista ratkaisu j joukosta P' ja
  - Askel 4.1.1. Jos $j < |P'|$:
    aseta $j = j + 1$ ja siirry askeleeseen 3
  - Askel 4.1.2. Jos $j \geq |P'|$
    Siirry askeleeseen 5
- Askel 4.2. Jos ratkaisu j dominoi ratkaisua i:
  - Askel 4.2.1. Jos $i < N$
    aseta $i = i + 1$ ja siirry askeleeseen 2

Askel 4.2.2. Jos $i = N$
Lopeta. Joukko P' on nyt ei-dominoitu joukko

Askel 4.3. Jos ratkaisut i ja j ovat keskenään ei-dominoidut:

Askel 4.3.1. Jos $j < |P'|$
aseta $j = j + 1$ "ja siirry askeleeseen 3"

Askel 4.3.2. Jos $j = |P|$
Siirry askeleeseen 5

Askel 5. Päivitä $P' = P' \cup \{i\}$

Askel 5.1. Jos $i < N$
Aseta $i = i + 1$ ja siirry askeleeseen 2

Askel 5.2. Jos $i = N$
Lopeta. Joukko P' on nyt ei-dominoitu joukko

Ratkaistaan esitetyllä algoritmilla kuvan 5 esimerkin joukosta {A, B, C, D, E} ei-dominoitu joukko P':

(1) Askel 1 Aloitus $P' = \{A(=1)\}$. Ja asetetaan $i = 2$

(2) Askel 2 Asetetaan joukon P' laskuri $j = 1$

(3) Askel 3 Verrataan ratkaisua B(i=2) joukon P' jäseneen A(j=1) tutkien dominointia. Ratkaisut ovat keskenään ei-dominoidut

(4) Askel 4 Koska $j = |P'|$, siirrytään askeleeseen 5

(5) Askel 5 Lisätään ratkaisu B joukkoon P' ja nyt $P' = \{A, B\}$. Nyt $i < 5$, joten asetetaan $i = i + 1 = 3$.

(6) Askel 2 Asetetaan $j = 1$

(7) Askel 3 Verrataan ratkaisua C(i=3) joukon $P' = \{A, B\}$ jäseneen A(i=1). Ratkaisut ovat keskenään ei-dominoidut.

(8) Askel 4 Nyt $j < |P'|$, joten asetetaan $j = j + 1$ ja siirrytään askeleeseen 3

(9) Askel 3 Verrataan ratkaisua C(i=3), joukon $P' = \{A, B\}$ ratkaisuun B(j=2). Ratkaisu C dominoi ratkaisua B.

(10) Askel 4 Ratkaisu i dominoi ratkaisua j, joten poistetaan j:nnes jäsen, jonka jälkeen $P' = \{A\}$ ja $j \geq |P'|$, joten siirrytään askeleeseen 5

(11) Askel 5 Lisätään ratkaisu C joukkoon P' jolloin $P' = \{A, C\}. i < 5$, joten asetetaan $i = i + 1 = 4$. Ja siirrytään askeleeseen 2.

(12) Askel 2 Asetetaan $j = 1$

(13) Askel 3 Verrataan ratkaisua D(i=4), joukon $P' = \{A, C\}$ ratkaisuun A(j=1). Ratkaisut ovat keskenään ei-dominoidut.

(14) Askel 4 Nyt $j < |P'|$, joten asetetaan $j = j+1$ ja siirrytään askeleeseen 3

(15) Askel 3 Verrataan ratkaisua D(i=4), joukon $P' = \{A, C\}$ ratkaisuun C(j=2). Ratkaisu D dominoi ratkaisua C

(16) Askel 4 Ratkaisu i dominoi ratkaisua j, joten poistetaan j:nnes jäsen. Nyt $P' = \{A\}$ ja $j \geq |P'|$, joten siirrytään askeleeseen 5

(17) Askel 5 Lisätään ratkaisu D joukkoon P' ja nyt $P' = \{A, D\}$. Nyt $i < 5$, joten asetetaan $i = i + 1 = 5$. Ja siirrytään askeleeseen 2.

(18) Askel 2 Asetetaan $j = 1$

(19) Askel 3 Verrataan ratkaisua E(i=5), joukon $P' = \{A, D\}$ ratkaisuun A(j=1). Ratkaisut ovat keskenään ei-dominoidut

(20) Askel 4 Nyt $j < |P'|$, joten asetetaan $j = j+1$ ja siirrytään askeleeseen 3

(21) Askel 3 Verrataan ratkaisua E(i=5), joukon $P' = \{A, D\}$ ratkaisuun D(j=2). Ratkaisu D dominoi ratkaisua E.

(22) Askel 4 Ratkaisu j dominoi ratkaisua i, joten ratkaisu E hylätään. Nyt $i = 5 = N$, joten voidaan julistaa joukko $P' = \{A, D\}$ ei-dominoiduksi joukoksi.

Ei-dominoituun päädyttiin joukkoon yhteensä 22 askeleella

Tarkastellaan alkiota A algoritmin kannalta:
A saavuttaa tavoittefunktion f_1 kannalta parhaan arvon, mutta tavoitefunktion f_2 kannalta huonoimman arvon. A ei dominoi mitään muuta ratkaisua ja mikään muu ratkaisu ei dominoi ratkaisua A. Tästä seuraa ylimääräisiä askelia ja siten hitautta algoritmille.

Jos algoritmin ajaminen aloitettaisiin ratkaisusta D, päästäisiin ei-dominoituun joukkoon vähemmillä askelilla.

5 Painotettu summamenetelmä

Painotetussa summamenetelmässä(weighted sum method) joukko käyttäjän asettamilla painokertoimilla kerrottuja ja minimoitavia tavoitefunktioita summataan yhteen yhdistelmätavoitefunktioksi. Metodin soveltamisen tuloksena on yksi tavoitefunktio, joka pyritään minimoimaan rajoitteiden puitteissa. Menetelmä on yksinkertaisin ja todennäköisesti eniten käytetty klassinen metodi monitavoiteongelmien ratkaisuun.

Idea on yksinkertainen, mutta miten painokertoimet tulisi valita? Selkeää vastausta ei ole, mutta valinnat riippuvat tavoitteiden tärkeyksistä ongelmaan liittyen. Tärkeämmille minimoitaville tavoitteille asetetaan suhteellisesti suuremmat painokertoimet, jolloin niillä on suurempi vaikutus optimiarvoon.

5.1 Painokertoimista

Tavoitteiden tärkeyden lisäksi sopivan painovektorin määrittämisessä on tärkeää huomioida eri tavoitefunktioiden kokoluokat. Monesti eri tavoitteiden kokoluokat voivat poiketa toisistaan suuresti. Tavoite f_1 voi vaihdella välillä [1, 10] ja tavoite f_2 välillä [500, 10000]. Voitaisiin vaikkapa kertoa tavoite A luvulla 10 ja tavoite B luvulla 10^{-2}, jolloin vaihteluvälit olisivat [10, 100] ja [5, 100]. Näin voidaan välttyä tilanteilta, joissa painokertoimet eivät olisi sopusuhtaisia(esim $w_1 = 10^{-4}$ ja $w_2 = 0.9999$).
Koska optimiratkaisu ei muutu kertomalla kaikki painot samalla vakiolla, käytänteenä on $\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$.

5.2 Menetelmän matemaattinen muotoilu

Tavoitteille laaditaan yhteistavoitefunktio $F(x)$ summaamalla painotetut, normalisoidut tavoitteet yhteen, jolloin monitavoiteongelma muuntuu yksitavoiteongelmaksi:

$$\begin{cases} Minimoi \quad \sum_{m=1}^{M} f_m(x) w_m, & m = 1, 2, ..., M; \\ rajoitteilla \quad g_j(x) \geq 0, & j = 1, 2, ..., J; \\ \qquad h_k(x) = 0, & k = 1, 2, ..., K; \\ \qquad x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, & i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

missä $w_m (\in [0, 1])$ on tavoitefunktion f_m paino ja $\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$.
Saatava ratkaisu on pareto-optimi, jos paino on positiivinen kaikille tavoitteille.

Tutkitaan seuraavaa MTOOta painotetulla summamenetelmällä:

$$\begin{cases} Minimoi & f_{1'}(x) = 100x_1^3 - 200x_2 \\ Minimoi & f_2(x) = x_2^2 - x_1 \\ Rajoittein & g(x) = x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 & > 0 \end{cases}$$

Normalisoidaan $f_{1'}$ kertomalla se luvulla 10^{-2}, jolloin MTOO on

$$\begin{cases} Minimoi & f_1(x) = x_1^3 - 2x_2 \\ Minimoi & f_2(x) = x_2^2 - x_1 \\ Rajoittein & g(x) = x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 & > 0 \end{cases}$$

Yhteistavoitefunktio on nyt:

$F(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$

$= w_1 x_1^3 - 2w_1 x_2 + w_2 x_2^2 - w_2 x_1$

Ratkaistaan yhtälöpari, jossa osittaisderivaatat ovat 0 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 3w_1 x_1^2 - w_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2w_1 + 2w_2 x_2 = 0 \end{cases}$

ja saadaan

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{w_2}{3w_1}} \\ x_2 = \frac{w_1}{w_2} \end{cases}$$

Edelleen voidaan ratkaista painokertoimien rajat, joilla kriittinen piste on käypä.

Rajoitefunktiosta $g(x) = x_1 - x_2 \geq 0$ saadaan:

$x_1 = \sqrt{\frac{w_2}{3w_1}} \geq \frac{w_1}{w_2} = x_2.$

$\sqrt{\frac{w_2}{3w_1}} \geq \frac{w_1}{w_2}$

$\frac{w_2}{3w_1} \geq \frac{w_1^2}{w_2^2}$

$\mathrm{w}_2^3 \geq 3w_1^3$

$\mathrm{w}_2 \geq \sqrt[3]{3}w_1$

1 - $\mathrm{w}_1 \geq \sqrt[3]{3}w_1$

$\sqrt[3]{3}w_1 + w_1 \leq 1$

$\mathrm{w}_1(\sqrt[3]{3} + 1) \leq 1$

$\mathrm{w}_1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$

Koska $w_1 = 1 - w_2$ ja

$0,409 \approx \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \geq w_1$

$\Rightarrow w_2 \geq 1 - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt{3}} \approx 0,591$

Sivuhuomautus:
Yhteistavoitefunktion Hessen matriisi on positiivisesti definiitti, kun $x_1 > 0$. F on tällöin konveksi ja sen globaali minimi löytyy kriittisestä pisteestä. Kriittinen piste on käypä, kun painokertoimet noudattavat saatuja rajoja.
Jos $w_1 > \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$, kriittinen piste ei ole käypä eikä tällöin myöskään optimiratkaisu.

Pareto-optimeja ratkaisuja voidaan löytää säätämällä painokertoimia. Koska $x_1, x_2 > 0$, voidaan laskuissa saatavat negatiiviset muuttujien arvot hylätä.

$w_1 = \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}},\ \ w_2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} 3 * \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} * x_1^2 - \frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt{3}} = 0 \\ -2 * \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} + 2 * \frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt{3}} * x_2 = 0 \end{cases}$$

josta saadaan $x_1 = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}$ ja $x_2 = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}$

jolloin $f_1(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}, \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}) = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}^3 - 2 * \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3} \approx -1.053$

ja $f_2(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}, \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}) = (\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3})^2 - \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3} \approx -0.213.$

$w_1 = \frac{1}{5}, w_2 = \frac{4}{5}$

$$\begin{cases} 3 * \frac{1}{5} * x_1^2 - \frac{4}{5} = 0 \\ -2 * \frac{1}{5} + 2 * \frac{4}{5} * x_2 = 0 \end{cases}$$

josta saadaan $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ja $x_2 = \frac{1}{4}$

jolloin $f_1(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}^3 - 2 * \frac{1}{4} \approx 1.040$

ja $f_2(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx -1.092$

$w_1 = \frac{4}{5}, w_2 = \frac{1}{5}$
Koska kriittinen piste ei nyt ole käypä($w_1 > \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$), löytyy minimi nyt aktiivisen rajoitteen avulla: $g(x) = x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$F(x_1, x_2) = F(x_1, x_1) = w_1 f_1(x_1, x_1) + w_2 f_2(x_1, x_1)$

$= \frac{4}{5}x_1^3 - \frac{8}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{5}x_1$

minimi löydetään derivaatan nollakohdasta.

$F'(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{9}{5} = 0,$

josta saadaan $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{109}-1}{12}$ ja edelleen

$f_1(\frac{\sqrt{109}-1}{12}, \frac{\sqrt{109}-1}{12}) = (\frac{\sqrt{109}-1}{12})^3 - 2 * \frac{\sqrt{109}-1}{12} \approx -1.087$

ja $f_2(\frac{\sqrt{109}-1}{12}, \frac{\sqrt{109}-1}{12}) = (\frac{\sqrt{109}-1}{12})^2 - \frac{\sqrt{109}-1}{12} \approx -0.168$

5.3 Menetelmän arviointia

Painotettu summamenetelmä on varmaankin yksinkertaisin tapa ratkaista monitavoiteoptimointiongelma. Konveksin pareto-optimin rintaman omaaville ongelmille, menetelmä löytää ratkaisuja koko pareto-optimaalisesta joukosta. Menetelmään kuitenkin liittyy myös ongelmatilanteita

- Tasaisesti jakautunut joukko painovektoreita ei välttämättä tuota joukkoa tasaisesti jakautuneita pareto-optimaalisia ratkaisuja.
- Eri painovektorit eivät aina johda eri ratkaisuihin. Epälineaarisissa optimointiongelmissa ei ole selvää millä eri vektoreilla ratkaisuun päädytään.
- Valittu painovektori voi johtaa useaan funktion F minimiratkaisun, joista kaikki eivät kuitenkaan ole alkuperäisen monitavoiteongelman optimiratkaisuja.
- Kaikkia pareto-optimeja ratkaisuja ei välttämättä löydetä.

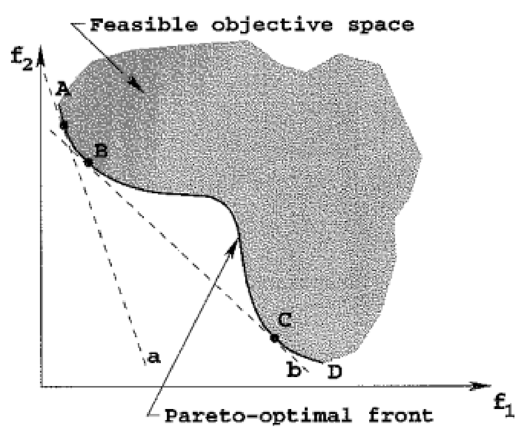

Figure 6: Painotettu summamenetelmä ei löydä pareto-optimaalisia ratkaisuja epäkonveksilta väliltä BC.

References

1 K. Deb: Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. John Wiley & Sons, 2001

2. A. L. Peressini, F. E. Sullivan, J. J. Uhl Jr: The Mathematics of Nonlinear Programming. Springer-Verlag, 1988