Kiintopisteet dynaamisissa systeemeissä

LuK-tutkielma
Pekkala Juho
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2022

Sisällys

Johdanto

Kiintopisteitä käytetään lukuisten numeerisen analyysin tuloksien johtamisessa. Kiintopisteiden tutkiminen tapahtuu dynaamisessa systeemissä. Tutkielmassa todistetaan Banachin kiintopistelause, jonka avulla voi johtaa numeerisen analyysin tuloksia. Tällainen tulos on esimerkiksi Newtonin lause. Numeerisessa analyysissa voidaan tietyissä tilanteissa muuttaa toivottu tulos kiintopisteeksi ja approksimoida tätä kiintopistettä.

1 Esitiedot

1.1 Normiavaruus

Normiavaruudet ovat *vektoriavaruuksia*, jotka ovat varustettu normilla. Itse aiheessa todistetaan väittämät juuri normiavaruuksien suhteen. Vektoriavaruus on joukko, jolle on määritelty vektoreiden summa sekä skalaarilla eli yleisimmin reaaliluvulla kertominen. Normiavaruus vektoriavaruudesta saadaan määrittämälle avaruudelle normi eli funktio $||\cdot||$, joka toteuttaa normin vaatimukset. Eräs tavallisin normiavaruus on reaaliluvut $\mathbb{R}$ varustettuna itseisarvolla $|\cdot|$. Intuitiivinen tapa ajatella normia on eräänlaisena etäisyyden määritelmänä avaruudessa. Seuraavissa määritelmissä käytetään merkintää $\mathbf{0}$ tarkoittamaan nollavektoria verrattuna merkintään 0, joka tarkoittaa reaalilukujen $\mathbb{R}$ nollaa.

Määritelmä 1.1. Olkoon V vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{R}$. *Normi* $||\cdot||$ on funktio $V \to [0, \infty[$, joka täyttää seuraavat vaatimukset:

1. (Aidosti positiivisuus) $||x|| = 0$ jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$
2. (Homogeenisyys) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ kaikille $x \in V\ ja\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. (Kolmio epäyhtälö) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ kaikille $x, y \in V$.

Tämä määritelmä on hyödyllinen analyysin käsitteiden kuten raja-arvon ja jatkuvuuden yleistämisessä, koska yllä olevat vaatimukset ovat minimivaatimukset moniin analyysin lauseisiin. Näin ollen nämä tulokset pätevät kaikkiin normilla varustettuihin vektoriavaruuksiin, jotka toteuttavat yllä olevat vaatimukset. Näistä tuloksista tulemme käyttämään dynaamisten systeemien tutkimisessa pääasiassa raja-arvoihin liittyviä lauseita. Tässä tutkielmassa esiteltyjä väittämiä voi siis käyttää kaikissa avaruuksissa, jotka voi todistaa toteuttavan normiavaruuden vaatimukset. Ensimmäiset kaksi vaatimusta on suhteellisen helppo todistaa monille normiavaruuksille, mutta kolmioepäyhtälön todistaminen voi olla välillä jonkin verran vaikeampaa.

Esimerkki 1.2. Esitellään nyt kahden ensimmäisen vaatimuksen todistaminen *Euklidisille avaruuksille* $\mathbb{R}^n$. Nämä ovat yleisimmin käytettyjä avaruuksia ja niihin kuuluu esimerkiksi reaalitaso $\mathbb{R}^2$ sekä kolmiulotteinen avaruus $\mathbb{R}^3$. Näiden avaruuksien normia kutsutaan nimellä Euklidinen normi. Pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ Euklidisen normin määritelmä on $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$. Operaatio $\cdot$ tarkoittaa *pistetuloa.* Kaikki Euklidisen avaruuden pisteet ovat muotoa $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Todistetaan ensiksi että Euklidinen normi on aidosti positiivinen. Olkoon piste $x \in \mathbb{R}^n$. Nyt todistetaan että $||x|| = 0$ jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$. Lähdetään ensiksi oletuksesta, että vektori on nollavektori. Nyt

$$x = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots 0).$$

Lasketaan tämän vektorin Euklidinen normi

$$\begin{aligned}||x|| = ||\mathbf{0}|| = \sqrt{\mathbf{0} \cdot \mathbf{0}} &= \sqrt{(0, 0, \ldots 0) \cdot (0, 0, \ldots 0)} \\ &= \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0} = \sqrt{0} = 0.\end{aligned}$$

Eli väittämä pitää tässä suunnassa paikkaansa. Todistetaan väittämä myös toisinpäin eli oletetaan että $||x|| = 0$. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}||x|| = \sqrt{x \cdot x} &= \sqrt{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &= \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \cdots + x_n \cdot x_n} = 0.\end{aligned}$$

Koska jokainen termi on on kahden samanarvoisen luvun tulo, jokainen summan termi on ei-negatiivinen. Tämä tarkoittaa, että jokaisen summan termin ja täten myös pisteen termien on pakko olla 0, koska jos yksikin termi olisi suurempi kuin 0 olisi myös summa suurempi kuin 0. Täten

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}.$$

Näin ollen on todistettu, että Euklidinen normi on aidosti positiivinen.

Todistetaan vielä, että Euklidinen normi on homogeeninen. Todistetaan että $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ kaikille luvuille $\alpha \in \mathbb{R}$ ja pisteille $x \in \mathbb{R}^n$. Aloitetaan yhtälön vasemmaltapuolelta kirjoittamalla

$$\begin{aligned}||\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x) \cdot (\alpha x)} &= \sqrt{\alpha x_1 \cdot \alpha x_1 + \alpha x_2 \cdot \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n \cdot \alpha x_n} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \cdots + \alpha^2 x_n^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots, x_n^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = |\alpha|||x||.\end{aligned}$$

Nyt on todistettu, että Euklidinen normi on homogeeninen. Kolmioepäyhtälön todistus on vaikeampaa.

1.2 Tärkeitä lauseita

Nyt esittelen lukuisia lauseita ja määritelmiä, joita käytetään todistusten aikana. Kaikki lauseet ja lemmat todistetaan kirjassa [1].

Lause 1.3. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ reaalilukuja. Oletetaan että funktio f on jatkuva välillä $]a, b[$ ja derivoituva välillä $[a, b]$. Nyt on olemassa piste $c \in [a, b]$, jossa*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tätä lausetta kutsutaan nimellä differentiaalilaskennan väliarvolause. Lauseen yhtälössä oikeallapuolella otetaan pisteiden $(a, f(a)$ ja $(b, f(b)$ kautta kulkevan funktion f kuvaajan sekantin kulmakerroin. Lause väittää, että välillä on olemassa piste, jossa funktion derivaatta on yhtäsuuri kuin edellä mainittu kulmakerroin funktion ollessa jatkuva koko välillä ja derivoituva välin sisäpisteissä.

Lause 1.4. *Olkoon I väli, johon kuuluu piste $a \in \mathbb{R}$. Olkoon g, f ja h funktioita, jotka ovat määritettyjä välillä I. Funktioiden ei tarvitse olla kuitenkaan määritettyjä itse pisteessä a. Oletetetaan nyt, että jokaiselle arvolle $x \in I$, joka ei ole yhtäsuuri luvun a kanssa pätee epäyhtälö*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ja yhtälö

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Tällöin

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Tätä lausetta kutsutaan puristuslauseeksi. Sen perusteella voi todistaa funktion suppenemisen tiettyyn arvoon kahden apufunktion avulla. Tämä vaatii, että apufunktioiden raja-arvot ovat samat sekä että toinen apufunktio on suurempi kuin tutkittava funktio ja toinen taas pienempi. Väittämä pätee myös äärettömille väleillä, kun otetaan raja-arvo $x \to \infty$.

Määritelmä 1.5. Jono $x_1, x_2, x_3 \ldots$ on *Cauchy-jono*, jos jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle ϵ on olemassa positiivinen kokonaisluku $N \in \mathbb{N}$, jolle pätee väittämä että kaikilla luonnollisilla luvuilla $m, n > N$,

$$|x_m - x_n| < \epsilon.$$

Tämän määritelmä liittyy jonojen suppenemisen todistamiseen. Cauchy-jonoista puhuttaessa on tärkeä myös eräs toinen määritelmä.

Määritelmä 1.6. Avaruus on *täydellinen*, jos jokainen siinä oleva Cauchy-jono suppenee.

Esimerkiksi reaaliluvut $\mathbb{R}$ on täydellinen. Täten Cauchy-jonojen avulla voi perustella myös reaalilukujen $\mathbb{R}$ jonojen raja-arvoja. Tässä työssä ovat tärkeitä myös *Banachin avaruudet*, jotka ovat täydellisiä normiavaruuksia.

Lemma 1.7. *Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos on olemassa reaaliluvut $x, C \in \mathbb{R}$ joille pätee $f(x) < C$, on olemassa $r > 0$, jolla kaikille arvoille $y \in [x - r, x + r]$, $f(y) < C$.*

Lemma tarkoittaa, että pisteessä, jossa jatkuva funktio saa lukua C aidosti pienemmän arvon, on ympäristö jossa funktio saa myös lukua C aidosti pienemmän arvon.

Määritelmä 1.8. Osajoukko C normiavaruudessa V on *suljettu*, jos jokaiselle osajoukon C jonolle (x_n), joka suppenee johonkin pisteeseen x, pätee että myös raja-arvo x on osajoukossa C.

Suljetut osajoukot ovat siis joukkoja, joissa kaikki osajoukon sisällä olevat suppenevat jonot suppenevat osajoukon sisälle.

2 Johdattelua

Dynaamisia systeemejä voidaan käsitellä niiden fysikaalisen tulkinnan kannalta. Tämä fysikaalinen systeemi on tietyssä avaruudessa X, jonka yksittäisiä pisteitä $x \in X$ voidaan ajatella systeemin tiloina. Tämä systeemi on kokoaikaisessa muutoksessa. Tätä muutosta voidaan kuvata funktiona $T(x)$, joka antaa systeemin uuden tilan seuraavalla diskreetillä ajanhetkellä.

Tässä tutkielmassa notaatio T^n ei tarkoita tavallisesti funktion potenssiin korotusta, vaan sitä että samaa funktiota iteroidaan n kertaa. X on tila-avaruus, jossa pisteet $x \in X$ ovat systeemin tiloja. Merkitään alkutilan arvoa pisteellä x_0. Näin ollen tila hetkellä n on

$$x_n = T^n(x_0).$$

Määritelmä 2.1. Oletetaan, että X on jonkin normiavaruuden osajoukko ja T on jatkuva funktio, joka kuvaa joukon X itseensä. Paria (X, T) kutsutaan *diskreetiksi dynaamiseksi systeemiksi*. Jokaiselle pisteelle $x \in X$ on olemassa etenevä *rata*, jonka määritelmä on $\mathscr{O}(x) := \{T^n x : n \geq 0\}$.

Tästä eteenpäin määritelmät sekä todistukset koskevat vain reaalilukuja $\mathbb{R}$ ja erityisesti siis osajoukkoa $X \subset \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.2. Piste x^* on funktion T *kiintopiste*, jos $T(x^*) = x^*$. Kiintopiste x^* on *puoleensavetävä* piste, jos on olemassa avoin ympäristö $U = (a, b)$, joka sisältää kiintopisteen x^* ja jossa kaikkien pisteiden $x \in U$ radat $\mathscr{O}(x)$ suppenevat kiintopisteeseen x^*. Kiintopiste x^* on *luotaantyöntävä*, jos on olemassa ympäristö $U = (a, b)$, johon sisältyy kiintopiste x^*, jossa kaikissa pisteissä $x \in U \setminus \{x^*\}$, rata $\mathscr{O}(x)$ ei jää välille U.

Esimerkki 2.3. Esimerkkinä dynaamisesta systeemistä voidaan käyttää funktiota $T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ reaalilukujen avaruudessa $\mathbb{R}$ eli toisin sanoen dynaaminen systeemi muodostuu parista $(\mathbb{R}, T)$. Tässä systeemissä funktion radat ovat hyvin yksinkertaisesti toimivia. Kokeellisesti aloittamalla esimerkiksi pisteestä $x_0 = 2$ on rata muotoa

$$\mathscr{O}(2) = \{2, 1.25, 0.875, 0.6875, 0.59375, 0.546875, 0.5234375, \dots\}.$$

Jos laskimen avulla iterointia jatketaan, jono vaikuttaa lähestyvän dynaamisen systeemin kiintopistettä $x^* = 0.5$. Piste $x^* = 0.5$ on kiintopiste, koska

$$T(0.5) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.25 = 0.5.$$

Seuraavan lemman avulla tämä piste voidaan todistaa puoleensavetäväksi kiintopisteeksi.

3 Kiintopisteiden ympäristö

Lemma 3.1. *Oletetaan että kuvauksella T on jatkuva derivaatta ja sen dynaamisella systeemillä on kiintopiste x^*. Jos $|T'(x^*)| < c < 1$, kiintopiste x^* on puoleensavetävä kiintopiste. Lisäksi on olemassa väli $U = (x^* - r, x^* + r)$ kiintopisteen x^* ympärillä, jonka jokaisen pisteen $x_0 \in U$ jono $\mathscr{O}(x_0)$ toteuttaa ehdon*

$$|x_n - x^*| \leq c^n |x_0 - x^*| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0|.$$

Jos $|T'(x^*)| > 1$, kiintopiste x^* on luotaantyöntävä kiintopiste.

Todistus. Todistus koostuu kolmesta vaiheesta. Ensimmäisessä vaiheessa johdetaan lemmaa muistuttava epäyhtälö. Toisessa vaiheessa käytetään tätä epäyhtälöä induktiotodistuksessa, joka todistaa lemman epäyhtälön. Viimeisessä vaiheessa käytetään puristuslausetta kiintopisteen puoleensavetävyyden todistamiseen. Myös $|T'(x^*)| > 1$ tapaukselle todistuksen kulku on lähes sama.

Oletetaan, että $|T'(x^*)| < c < 1$. Koska oletettiin että $x \to T'(x)$ on jatkuva, on myös $x \to |T'(x)|$ jatkuva. Lemman 1.7 avulla, tiedetään että on olemassa säde $r > 0$, jolla kaikki pisteet x välillä $U = (x^* - r, x^* + r)$ toteuttavat ehdon $|T'(x)| < c$.

Olkoon piste x_0 välillä U. Tarkastellaan jonoa $x_n = T^n x_0$. Käyttämällä differentiaalilaskennan väliarvolauseketta funktiolle T pisteissä x_n ja x^*, on pisteiden välillä olemassa piste z, niin että pätee

$$\frac{Tx_n - Tx^*}{x_n - x^*} = T'(z).$$

Tekemällä sijoitukset $Tx_n = x_{n+1}$ ja $Tx^* = x^*$ sekä ottamalla itseisarvon molemmilta puolilta saadaan yhtälö

$$|x_{n+1} - x^*| = |T'(z)||x_n - x^*|.$$

Oletettaessa että piste x_n kuuluu välille U, saamme ehdon $|T'(x)| < c$ avulla muokattua yhtälön muotoon

$$|x_{n+1} - x^*| < c|x_n - x^*|. \tag{1}$$

Nyt näemme että piste x_{n+1} on lähempänä kiintopistettä x^* kuin piste x_n. Täten myös piste x_{n+1} kuuluu välille U.

Seuraavaksi tämä väite kuuluu yleistää jonon jokaiselle pisteelle. Tämä onnistuu induktiolla. Induktion perusaskeleessa todistamme, että todistettava lemma pitää paikkaansa pisteessä $x_n = x_0$ edellä johdetun yhtälön (1) avulla. Tehdään sijoitus

$$|x_1 - x^*| < c^1|x_0 - x^*|.$$

Tästä näemme, että pisteessä x_1 väitös pitää paikkaansa. Nyt voimme tehdä induktioletuksen eli

$$|x_n - x^*| < c^n|x_0 - x^*|.$$

Induktioväitteessä tutkitaan pistettä x_{n+1}. Voimme tutkia tätä pistettä, koska kun x_n kuuluu välille U myös x_{n+1} kuluu välille U. Koska x_0 otettiin väliltä U, myös x_{n+1} kuuluu välille U ja täten yhtälö (1) pätee kaikille radan $\mathscr{O}(x_0)$ pisteille. Nyt tehtävämme on todistaa paikkaansa pitävyys yhtälölle

$$|x_{n+1} - x^*| < c^{n+1}|x_0 - x^*|.$$

Aloitetaan taas yhtälöstä (1) ja muokataan sitä hieman. Yhtälö

$$|x_{n+1} - x^*| < c|x_n - x^*|$$

kääntyy muotoon

$$\frac{1}{c}|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|.$$

Nyt voimme käyttää induktio-oletusta eli

$$\frac{1}{c}|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*| < c^n|x_0 - x^*|.$$

Nyt kertomalla molemmilta puolilta arvolla c saamme toivotun induktioväitteen eli

$$|x_{n+1} - x^*| < c^{n+1}|x_0 - x^*|.$$

Täten induktioperiaatteen nojalla lemmassa oleva epäyhtälö pitää paikkaansa. Perusteena puristuslauseelle nähdään selvästi, että $|x_n - x^*| \geq 0$. Näin ollen puristuslauseen alaraja $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ on todistettu. Todistettu epäyhtälö $|x_n - x^*| \leq c^n|x_0 - x^*|$ antaa taas puristuslauseen ylärajan. Tämä johtuu tiedosta, että $\lim_{n\to\infty} c^n|x_0 - x^*| = 0$, kun $c < 1$. Nyt meillä on epäyhtälö

$$0 \leq |x_n - x^*| \leq c^n|x_0 - x^*|,$$

jossa sekä ylä- että alaraja suppenee nollaan. Nyt siis myös $\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$. Tämä taas on puoleensavetävän kiintopisteen Määritelmä 2.2. Täten on todistettu, että kiintopiste x^* on puoleensavetävä.

Nyt siirrytään tapaukseen $|T'(x)| > 1$. Käyttämällä Lemmaa 1.7 ja tekemällä muutaman laskun epäyhtälöillä saamme väittämän, että on olemassa $r > 0$, jolle kaikille arvoille x välillä $U = [x^* - r, x^* + r]$ pätee $|T'(x)| > c$. Väliarvolausetta voi käyttää myös tässä todistuksessa samalla periaatteella, kun rata $\mathscr{O}(x_0)$ pysyy välillä U. Välin U ulkopuolella ei kuitenkaan tiedetä miten $\mathscr{O}(x_0)$ käyttäytyy. Joka tapauksessa niin kauan kun x_n pysyy välillä U, pätee epäyhtälö

$$|x_{n+1} - x^*| = |T'(z)||x_n - x^*| > c|x_n - x^*|.$$

Nyt käyttämällä samaa induktiotodistusta, kuin ensimmäisen tapauksen todistusta saamme epäyhtälön

$$|x_n - x^*| > c^n|x_0 - x^*|,$$

kunhan piste x_n kuuluu välille U. Koska etäisyyden alaraja lähestyy ääretöntä, täytyy myös itse etäisyyden lähestyä ääretöntä. Täten tarpeeksi iteroimalla radan $\mathscr{O}(x_0)$ on pakko siirtyä ulkopuolelle väliltä U. Täten x^* on luotaantyöntävä piste.

□

4 Kontraktio

4.1 Kontraktion perusteet

Lemman 3.1 todistuksessa käytettiin derivoituvuutta vain differentiaalilaskennan väliarvolauseessa. Kontraktion määritelmä kuitenkin mahdollistaa väliarvolauseella saavutettujen estimaatioiden käsittelyn suoraan. Kontraktion avulla voidaan yleistää Lemman 3.1 väittämät myös muihin avaruuksiin, joissa ei välttämättä voida derivoida. Määritelmä kuitenkin vaatii, että väittämä toteutuu koko määritysjoukolle.

Määritelmä 4.1. Olkoon joukko X normiavaruuden $(V, ||\cdot||)$ osajoukko. Kuvaus $T : X \to X$ on osajoukon X *kontraktio*, jos on olemassa positiivinen vakio $c < 1$, jolle pätee

$$||T(x) - T(y)|| \le c||x - y|| \, \text{kaikille} \, x, y \in X.$$

Toisin sanoen, kuvaus T on Lipschitz jatkuva vakiolla $c < 1$.

Esimerkki 4.2. Tutkaillaan funktiota $Tx = 1.8(x - x^3)$. Tämän funktion kiintopisteet ovat $-2/3$, 0 ja $2/3$. Tutkitaan kiintopistettä $x = 2/3$. Tämän kiintopisteen derivaatan itseisarvo $|T'(-2/3)| = |-0.6| < 1$. Täten kiintopiste on puoleensavetävä. Todistetaan että funktio T on kontraktio välillä $[0.5, 0.7]$.

Tällä välillä funktiolla T on yksi ääriarvo pisteessä $1/\sqrt{3}$, joka on paikallinen maksimi. Välin päätepisteiden arvot sekä ääriarvo ovat

$$T(0.5) = 0.675, \; T(1/\sqrt{3}) \approx 0.6928 \text{ja} \, T(0.7) = 0.6426.$$

Koska funktio T kasvaa välillä $[0.5, 1/\sqrt{3}]$ ja vähenee välillä $[1/\sqrt{3}, 0.7]$, funktio kuvaa välin $[0.5, 0.7]$ itseensä. Nyt voimme laskea välin suurimman derivaatan funktiolle T :

$$\sup_{0.5 \le x \le 0.7} |T'(x)| = \sup_{0.5 \le x \le 0.7} 1.8|1 - 3x^2| = \max(|0.45|, |-0.846|) = 0.846.$$

Tämän derivaatan ottamista voidaan perustella Lemman 3.1 todistuksella. Todistuksessa käytettiin differentiaalilaskennan väliarvolausetta. Tässä tehtävässä voimme ottaa vastaavalla tavalla väliarvon pisteiden x ja y väliltä. Näin saamme yhtälön

$$|Tx - Ty| = |T'(z)||x - y|,$$

jossa piste z on eräs piste pisteiden x ja y väliltä. Jotta ylläoleva väite olisi yhtäpitävä kontraktion määritelmän kanssa, täytyy sen pitää paikkaansa kaikille pisteille määrittelyjoukossa. Eli toisin sanoen yhtälön $|T'(z)| < 1$ pitää päteä koko määrittelyjoukossa. Näin ollen voimme kirjoittaa

$$|Tx - Ty| = |T'(z)||x - y| \leq \sup_{z \in [a,b]} |T'(z)||x - y|,$$

joka vastaa sekä kontraktion määritelmää että yllälaskettuja arvoja. Täten, funktio T on kontraktio välillä $[0.5, 0.7]$ ja sen kontraktiovakio on $c = 0.846$.

Tutkitaan myös kiintopistettä 0 välillä $[-1/3, 1/3]$. Koska $|T'(0)| = 1.8 > 1$, on kiintopiste luotaantyöntävä. Nyt tutkitaan välin derivaatan arvoja

$$\inf_{|x| \leq 1/3} |T'(x)| = \inf_{|x| \leq 1/3} 1.8|1 - 3x^2| = 1.2.$$

Näin ollen välin pienimmällekin derivaatalla pätee $1.2 > 1$. Täten differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla saamme

$$|Tx^* - Tx| = |Tx| \geq 1.2|x| = 1.2|x^* - x|$$

Täten jono $T^n x$ liikkuu kauemmas pisteestä 0, kunnes se lähtee väliltä.

Esimerkki 4.3. Tutkitaan nyt funktiota $Tx = mx + b$ kaikille pisteille $x \in \mathbb{R}$. Tekemällä sijoituksen Määritelmään 4.1 saamme yhtälön

$$|Tx - Ty| = |mx + b - my - b| = |mx - my| = |m||x - y|.$$

Tästä nähdään, että funktio T on kontraktio koko avaruudelle $\mathbb{R}$, jos $|m| < 1$. Funktion T kiintopiste x^* voidaan laskea yhtälöstä $x = mx + b$. Yhtälön ratkaisu on

$$x = \frac{b}{1 - m} \text{ olettaen että } m \neq 1.$$

Näin ollen kiintopiste on yksikäsitteinen määrittelyalueella. Nähdään myös, että funktion T derivaatta on m koko määrittelyalueella. Tämän perusteella voimme päätellä kiintopisteen $x^* = \frac{b}{1-m}$ olevan myös puoleensavetävä Lemman 3.1 perusteella, jos $|m| < 1$. Samaan tulokseen voidaan myös päätyä käyttämättä lemman tulosta.

Lähdetään oletuksesta, että $|m| < 1$. Voimme käsitellä funktiota T dynaamisena systeeminä avaruudessa $\mathbb{R}$, jossa funktio kuvaa jokaisen pisteen x pisteeseen Tx. Tästä saamme radan $\mathscr{O} = \{T^n x : n \geq 0\}$. Tästä saamme säännön rekursion avulla

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

Nyt voimme laskea jonon pisteitä

$$x_1 = mx_0 + b,$$

$$x_2 = m^2 x_0 + (1+m)b,$$

$$x_3 = m^3 x_0 + (1+m+m^2)b,$$

ja

$$x_4 = m^4 x_0 + (1+m+m^2+m^3)b.$$

Tästä voidaan silmämääräisesti päätellä yhtälö

$$x_n = m^n x_0 + (1+m+m^2+\cdots+m^{n-1})b.$$

Tämä yhtälö voidaan todistaa induktiolla. Yhtälö pitää johdattelun perusteella paikkaansa arvolle $n = 1$. Oletetaan että väite pätee arvolle n. Nyt voidaan johtaa yhtälö arvolle

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= mx_n + b = m((m^n x_0 + (1+m+m^2+\cdots+m^{n-1})b) + b \\ &= m^{n+1}x_0 + (m+m^2+m^3+\ldots m^n)b + b \\ &= m^{n+1}x_0 + (1+m+m^2+m^3+\ldots m^n)b. \end{aligned}$$

Tämä toteuttaa kaavan arvolle $n+1$ ja täten myös kaikille positiivisille kokonaisluvuille.

Nyt kontraktio tapauksessa $|m| < 1$ jonolla on raja-arvo, jonka saa summaamalla geometristä sarjaa eli

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= m^n x_0 + (1+m+m^2+\cdots+m^{n-1})b \\ &= 0 + b\sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{b}{1-m}. \end{aligned}$$

Näin ollen jono suppenee pisteeseen x^*. Täten x^* on puoleensavetävä kiintopiste, jonka löytää iteroimalla mitä tahansa pistettä joukossa $\mathbb{R}$ funktiolla T.

Kun $|m| > 1$, raja-arvo $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, joten jono hajaantuu. Kiintopiste on kuitenkin olemassa, mutta se on luotaantyöntävä. Tässä tapauksessa voimme ottaa funktion käänteisfunktion T^{-1}. Tämä käänteisfunktio on

$$T^{-1}x = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}.$$

Tämä funktio on kontraktio ja sitä voi tutkia vastaavalla tekniikalla kuin alkuperäistä funktiota. Jokainen piste voidaan siis saada kaavalla $x_{-n-1} =$

$T^{-1}x_{-n}$. Toisin sanoen "liikkumme menneisyyteen radalla". Tässä tapauksessa käänteisfunktio suppenee alkuperäisen funktion luotaantyöntävään kiintopisteeseen.

Tapauksessa $m = -1$ kiintopiste on olemassa, mutta tätä pistettä ei voi löytää radan raja-arvona. Tälle syynä on

$$T^2x = -(Tx) + b = -(-x + b) + b = x$$

eli toisin sanoen kaikissa pisteissä paitsi kiintopisteessä funktio toistaa kahta arvoa peräkkäin.

Huomautus 4.4. Edellisestä esimerkistä näkee, että derivaatan käyttö ei ole välttämättä pakollista selvitettäessä kiintopisteen luonnetta. Esimerkkitapauksissa dynaamisen systeemin ollessa kontraktio on kiintopiste ollut puoleensavetävä. Formalisoidaan seuraavaksi väite.

4.2 Banachin kiintopistelause

Lause 4.5. *Olkoon X suljettu osajoukko täydellisessä normiavaruudessa* $(V, \ \|\cdot\|\ )$. *Jos T on kontraktio joukosta X itseensä, kuvauksella T on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste x^*. Erityisesti, jos x on mikä tahansa piste osajoukosta X, on $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x$ ja*

$$||T^n x - x^*|| \leq c^n ||x - x^*|| \leq \frac{c^n}{1-c} ||x - T^n x||,$$

missä c on kuvauksen T Lipschitz vakio.

Todistus. Todistuksella on monia yhteyksiä lemman (3.1) todistukseen. Nyt etäisyysestimaatin muodostaminen on kuitenkin vaikeampaa. Tämän sijasta todistamme, että dynaamisen systeemin (X, T) radat ovat *Cauchy-jonoja* systeemin ollessa kontraktio. Tämän jälkeen käytetään Cauchy-jonon suppenevuutta ja todistetaan sen avulla kiintopisteen olemassaolo. Lopuksi todistetaan vielä kiintopisteen yksikäsitteisyys.

Valitaan mikä tahansa vektori $x_0 \in X$ ja muodostetaan jono $x_{n+1} = T^n x_0$ kaikille $n \geq 0$. Todistetaan että, tämän jono on Cauchy-jono. Aluksi muodostetaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} ||x_{n+1} - x_n|| &= ||Tx_n - Tx_{n-1}|| \leq c||x_n - x_{n-1}|| \\ &\leq c^2||x_{n-1} - x_{n-2}|| \leq c^n||x_1 - x_0|| = c^n D, \end{aligned} \tag{2}$$

jossa $D = ||x_1 - x_0|| < \infty$. Yllä olevassa epäyhtälössä tärkeintä on huomata, että siinä käytetään kontraktion määritelmää ja toistetaan sitä. Ensimmäiset kolme vaihetta näyttävät ensimmäisen iteraation, jota tämän jälkeen toistetaan kunnes saadaan laskettua kahden ensimmäisen vektorin etäisyys. Edellä lasketun epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön avulla saadaan yhtälö

$$||x_{n+m} - x_n|| \leq \sum_{i=0}^{m-1} ||x_{n+i+1} - x_{n+i}|| \leq \sum_{i=0}^{m-1} c^{n+i} D < \sum_{i=0}^{\infty} c^{n+i} D = \frac{c^n D}{1-c}. \quad (3)$$

Tätä yhtälöä on hyvä käsitellä tarkemmin. Aluksi otetaan mielivaltainen etäisyys $||x_{n+m} - x_n||$. Sitten siihen käytetään kolmioepäyhtälöä toistetusti. Ensimmäinen epäyhtälö siis saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}
||x_{n+m} - x_n|| &= ||x_{n+m} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq ||x_{n+m} - x_{n+1}|| + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&= ||x_{n+m} - x_{n+2} + x_{n+2} - x_{n+1}|| + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq ||x_{n+m} - x_{n+2}|| + ||x_{n+2} - x_{n+1}|| + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\dots \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} ||x_{n+i+1} - x_{n+i}||.
\end{aligned}$$

Tämän jälkeen käytetään aikaisemmin johdettua epäyhtälöä (2). Toiseksi viimeisessä yhtälön vaiheessa muutetetaan summa äärettömäksi. Tämän tekee siitä aidosti suuremman kuin äärellisestä summasta, koska kaikki summan arvot ovat positiivisia. Tämän jälkeen viimeisessä askeleessa käytetään geometrisen sarjan kaavaa.

Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Valitaan seuraavaksi kokonaisluku N, joka on tarpeeksi suuri että $c^N < \frac{\epsilon(1-c)}{D}$. Tämä on mahdollista, koska $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. Tällöin voimme kääntää yllä olevan yhtälön muotoon

$$\epsilon > \frac{c^N D}{1-c}.$$

Nyt luvuille $n \geq N$ ja $m \geq 0$ voimme johtaa epäyhtälön käyttämällä aikaisemmin johdettua epäyhtälöä (3):

$$\epsilon > \frac{c^N D}{1-c} > \frac{c^n D}{1-c} > ||x_{n+m} - x_n||.$$

Tämä epäyhtälö taas on yhtäpitävä Cauchy-jonon määritelmän kanssa, joten jono (x_n) on Cauchy-jono.

Koska avaruus V on täydellinen avaruus, jono (x_n) suppenee johonkin pisteeseen $x^* \in V$. Koska osajoukko X on suljettu, tämä raja-arvo x^* kuuluu joukkoon X. Koska funktio T on määritelmän mukaan Lipschitz jatkuva, on se myös tasaisesti jatkuva. Jatkuvuuden avulla voimme tutkia pistettä x^*, sillä

$$Tx^* = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = x^*.$$

Koska tutkittu vektori saa saman arvon funktioon syöttämisen jälkeen, on tämä vektori kiintopiste.

Todistetaan vielä kiintopisteen yksikäsitteisyys. Oletetaan että on olemassa vektori $y \in X$, joka on myös kiintopiste eli toisinsanoen $Ty = y$. Tällöin

$$||x^* - y|| = ||Tx^* - Ty|| \leq c||x^* - y||.$$

Koska $c < 1$, väitös pätee ainoastaan $||x^* - y|| = 0$. Tämän perusteella $x^* = y$ eli x^* on yksikäsitteinen kiintopiste.

Aloittamalla mistä tahansa vektorista x ja käyttämällä arviota (3) saamme lauseen yhtälön

$$||T^n x - x^*|| = ||T^n x - T^n x^*|| \leq c^n ||x - x^*||.$$

Kun $n \to \infty$, $c^n \to 0$. Täten puristuslauseen perusteella $T^n x \to x^*$. □

Banachin kiintopistelausetta 4.5 voidaan käytää monien dynaamisten systeemien tutkimiseen. Eräs lauseen eduista on mahdollisuus määrittää tarkasti osajoukkoja, joissa radat suppenevat kiintopisteisiin. Seuraavissa esimerkeissä tutkin trigonometristen funktioiden mahdollista kontraktiota ja sen seurauksia.

Esimerkki 4.6. Olkoon täydellinen normiavaruus V reaalilukujen avaruus $\mathbb{R}$, osajoukko X väli $[-1, 1]$ ja funktio $Tx = \cos x$. Väliarvolauseen perusteella jokaiselle pisteelle $x, y \in X$, on pisteiden välillä olemassa piste z joka toteuttaa ehdon

$$|Tx - Ty| = |x - y||\sin z|.$$

Koska z on pisteiden x ja y väliltä, piste $|z| < 1$. Koska $\sin x$ on kasvava funktio välillä $[-1, 1]$, voidaan todeta että

$$\max_{|z|\leq 1} |\sin z| = |\sin(\pm 1)| = \sin 1 < 1.$$

Täten funtkio T on kontraktio.

Esimerkki 4.7. Banachin kiintopistelauseessa kontraktion määritelmää ei voi heikentää muotoon $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$. Jos se heikennettäisiin, ei kiintopisteen olemassaoloa voisi enää taata. Tästä esimerkkinä toimii funktio

$Tx = x + 1$, kun osajoukko $X = \mathbb{R}$. Selvästi funktiolla ei ole yhtäkään kiintopistettä. Kuitenkin ehto $|Tx - Ty| = |x + 1 - (y + 1)| = |x - y|$ pätee.

Myöskään aidosti pienempi määritelmä $||Tx - Ty|| < ||x - y||$ ei päde. Tälle esimerkkinä voidaan käyttää funktiota $S = x + x^{-1}$ välillä $X = [1, \infty[$. Tässä tapauksessa

$$|Sx - Sy| = \left|\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right)\right| = \left|x - y + \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}\right|$$
$$= |x - y|\left(1 - \frac{1}{xy}\right) < |x - y|,$$

joten heikennetty ehto pätee. On kuitenkin selvää, että tälläkään funktiolla ei ole kiintopistettä.

Banachin kiintopistelause todistettiin täydellisissä normiavaruuksissa. Otetaan seuraavaksi esimerkki, joka tutkii lineaaristen yhtälöiden muodostamaa systeemiä.

Esimerkki 4.8. Olkoon $A = [a_{ij}]$ matriisi, joka muotoa $n \times n$. Olkoon vektori $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tutkitaan nyt yhtälön

$$x = Ax + b$$

muodostamaa systeemiä. Analysoidaan tätä yhtälöä tutkimalla dynaamista systeemiä $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jossa funktio T on

$$Tx = Ax + b.$$

Ratkaisu tutkittavaan yhtälöön on funktion T kiintopiste.

Avaruudelle $\mathbb{R}^n$ on olemassa lukuisia erilaisia normeja ja eri normit vaikuttavat kontraktion vaatimuksiin funktiolle T. Tässä esimerkissä käytetään *max normia* eli

$$||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Jos vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^n$ käsitellään reaaliarvoisina funktiona arvoilla $\{1, \ldots n\}$, sitten yllä oleva normi on *tasainen normi* arvoille $C(\{1, \ldots, n\}$. Todistetaan nyt että funktio T on kontraktio avaruudessa $\mathbb{R}$ max normille jos ja vain jos kontraktio vakio

$$c = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$$

Tämä vakio on matriisin A suurin rivin arvojen summa.

Oletetaan ensiksi, että $c \geq 1$. On olemassa kokonaisluku i_0, jolle pätee $c = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$. Asetetaan nyt komponentti $x_j = \text{sign}(a_{i_0 j})$. Funktio sign antaa luvun -1 funktioon syötetyn luvun ollessa negatiivinen, luvun 0 funktioon syötetyn luvun ollessa 0 ja luvun 1 funktioon syötetyn luvun ollessa positiivinen. Nyt

$$||x - 0||_\infty = ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1,$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned} ||Tx - T0||_\infty &= ||Ax + b - (A0 + b)||_\infty = ||Ax||_\infty \geq |(Ax)_{i_0}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = c \geq 1 = ||x - 0||_\infty. \end{aligned}$$

Täten T ei ole kontraktio. Edellä oleva päättely pätee, koska väitteen todistamiseen pitää löytää vain vastaesimerkki. Edellä olevassa todistuksessa vektorina y käytettiin nollavektoria. Vektorille x taas päätettiin, että vektorin jokainen komponentti vastaa matriisin i_0 sarakkeen arvojen sign funktion tuloksia. Nyt ylempi yhtälö toimii, koska vektorin x max normi on selvästi 1. Alempaa epäyhtälöä on taas parempi tarkastalle aloittamalla vakiosta c. Ensimmäinen yhtälö vasemmalle tulee vakion c määritelmästä. Seuraavassa yhtälössä käytetään sign funktion avulla muodostettua komponentin arvoa x_j, joka vastaa itseisarvoa käytettynä summafunktiossa. Seuraavassa yhtälössä käytetään matriisitulon määritelmää sarakkeelle i_0. Tämän jälkeen viimeisessä merkittävässä epäyhtälössä viitataan faktaan että koko matriisin A ja vektorin x luomassa vektorissa komponentin i_0 itseisarvo on joko max normi tai on olemassa sitä suurempi max normi.

Todistetaan nyt että $c < 1$ on kotraktio. Otetaan ensiksi vektorit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\begin{aligned} ||Tx - Ty||_\infty &= ||A(x - y)||_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||(x_j - y_j)| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \left(\max_{1 \leq j \leq n} |(x_j - y_j)| \right) = c||x - y||_\infty. \end{aligned}$$

Täten T on kontraktio. Tässä esimerkissä ensiksi max normi kirjoitetaan auki yhtälöryhmän suhteen. Tämän jälkeen ensimmäisessä epäyhtälössä käytetään kolmioepäyhtälöä. Seuraava epäyhtälö toteaa, että erillisten max funktioiden tulon on pakko olla suurempi tai yhtäkuin koko yhtälön kattavan max funktion. Lopussa käytetään kontraktiovakion c määritelmää.

Koska T on kontraktio, tiedetään Banachin kiintopistelauseen perusteella että on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu tutkittavalle yhtälölle. Tämän ratkaisun voi löytää iteroimalla mistä tahansa pisteestä. Valitaan aloituspisteeksi $x_0 = 0$. Nyt

$$x_1 = Tx_0 = b$$

$$x_2 = Tx_1 = b + Ab = (I + A)b$$

$$x_3 = Tx_2 = b + A(b + Ab) = (I + A + A^2)b.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $x_n = (I + A + \cdots A^{n-1})b$. Väittämä on jo osoitettu luvuille $n = 1, 2, 3$. Oletetaan, että väittämä on totta myös jollekkin luonnolliselle luvulle n. Nyt

$$x_{n+1} = Tx_n = b + A(I + A + \cdots A^{n-1})b = (I + A + \cdots A^n)b.$$

Väittämä pätee induktion perusteella.

Näin ollen ratkaisu tutkittavaan yhtälöryhmään on yksikäsitteinen kiintopiste

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(I + A + \cdots A^{n-1})b = \sum_{k=0}^{\infty} A^k b.$$

Voidaan todistaa, että tämä ääretön summa suppenee, koska T ja A ovat tässä tapauksessa kontraktiota. Tällöin

$$||A^k b||_\infty = ||A^k b - A^k 0||_\infty \leq c^k ||b - 0||_\infty = c^k ||b||.$$

Koska matriisien sarja on pienempi kuin suppeneva geometrinen sarja, myös matriisisarja suppenee. Näin voi perustella että jokaiselle vektorille $x \in \mathbb{R}^n$ yllä mainittu sarja suppenee. Täten summa $C = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ toimii lineaarikuvauksena. Erityisesti vektorille $x \in \mathbb{R}^n$ seuraa $\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$. Ratkaistu kiintopiste voidaan kirjoittaa myös muodossa $x^* = Cb$.

Jos yhtälö $x = Ax + b$ ratkaistaan lineaarialgebran keinoin, saadaan tulokseksi yhtälö $(I - A)x = b$. Jos $(I - A)$ on kääntyvä, yhtälö on muotoa $x = (I - A)^{-1}b$. Tämän perusteella kontraktioväittämä johtaa tulokseen, että $I - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $C = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Tämä voidaan todistaa laskemalla

$$\begin{aligned}
(I - A)Cx &= \lim_{n\to\infty}(I - A)(I + A + \cdots + A^{n-1})x \\
&= \lim_{n\to\infty}(I + A + \cdots + A^{n-1})x - (A + A^2 + \cdots + A^n)x \\
&= \lim_{n\to\infty} x - A^n x = x.
\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikille vektoreille $x \in \mathbb{R}^n$, matriisilla $I - A$ on käänteismatriisi C. Toisin sanoen

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

jos matriisi A toteuttaa kontraktiovaatimuksen. Ylläoleva matriisisarjan identiteetti vastaa reaalilukujen geometrisen summan identiteettiä

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \text{jos } |x| < 1.$$

Matriisien tapauksessa paikkaansa pitävyyden vaatimuksena on kontraktiovakio ja reaalilukujen kohdalla se on yksinkertaisempi $|x| < 1$.

Banachin kiintopistelauseen avulla pystyy todistamaan monia lauseita eri matematiikan osa-alueilta. Edellisessä esimerkissä yleistettiin geometrinen summa matriiseille. Lukuisissa tapauksissa haastavin osa Banachin kiintopistelauseen käytössä on kontraktion todistaminen.

Viitteet

[1] K. Davidson, A. Donsig: *Real Analysis and Applications; Theory in Practice*. Springer, New York, 2010.