Potenssi, neliö- ja kuutiojuuri sekä potenssifunktio ja -yhtälö lukiomatematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Tuuli Kuonanoja
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto

2023

Sisällys

Johdanto 3

1 Oppimateriaalin tavoitteet 4

1.1 Opetussuunnitelman tavoitteet . . . 4
1.2 Oppikirjan tekijöiden valitsemat tavoitteet . . . 5
1.2.1 Habits of Mind -tavoitteet . . . 6
1.2.2 Tehtävätyypit . . . 8

2 Oppimateriaalin perustelut 10

2.1 Potenssi . . . 10
2.2 Neliö- ja kuutiojuuri . . . 12
2.3 Potenssifunktio ja -yhtälö . . . 14

Lähdeluettelo 17

A Oppimateriaali 19

A.1 Potenssi . . . 19
A.2 Neliö- ja kuutiojuuri . . . 26
A.3 Potenssifunktio ja -yhtälö . . . 31

B Opettajan opas 35

B.1 Ajankäyttöehdotus . . . 35
B.2 Pohdintatehtävät . . . 35
B.2.1 Potenssi . . . 35
B.2.2 Neliö- ja kuutiojuuri . . . 37
B.2.3 Potenssifunktio ja -yhtälö . . . 38

C Tehtävien vastaukset 41

Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jossa tuotetaan avoimesti saatavilla olevaa oppimateriaalia lukion matematiikan moduuleille. Tutkielman sisältämä oppimateriaali on tehty lukiomatematiikan yhteiselle moduulille *Luvut ja yhtälöt* (MAY1) ja on yksi viidestä oppimateriaalipaketista, jotka yhdessä muodostavat kyseisen moduulin oppikirjan. Tässä työssä esitetyn oppimateriaalin sisältöjä ovat potenssi, neliö- ja kuutiojuuri sekä potenssifunktio ja -yhtälö, ja ne on suunniteltu käytäväksi läpi moduulin toiseksi viimeisinä aiheina ennen prosenttilaskentaa.

Oppimateriaali on rakennettu tutkielman tekohetkellä voimassa olevien Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 [13] sekä Avoin oppikirja -projektin oppikirjoille yhteisistä artikkeleista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [5] sekä *Collaborative Learning in Mathematics* [18] valittujen tavoitteiden ja tehtävätyyppien pohjalta. Lisäksi tutkielmassa on hyödynnetty muita tieteellisiä artikkeleja.

Oppimateriaali vastaa opetussuunnitelman perusteiden oppimiskäsitystä, jonka mukaan opiskelija oppii uutta aiemman tiedon päälle rakentaen ja yhteyksiä luoden, yhteistyössä muiden opiskelijoiden, opettajien tai muiden tahojen kanssa [13]. Oppimateriaalissa pyritään ottamaan huomioon opetussuunnitelman perusteiden tavoitteita, *Habits of Mind* -artikkelista valittuja ajattelumalleja sekä tieteellisistä artikkeleista poimittuja sisältöihin liittyviä erikoishuomioita. Näihin tavoitteisiin pääsemistä tukemaan on valittu kolme erilaista tehtävätyyppiä, jotka parhaiten vastaavat koko oppikirjan sisältöjen tarpeisiin.

Tutkielma koostuu viidestä osasta, joista ensimmäisessä käydään tarkemmin läpi edellä mainittujen opetussuunnitelman perusteiden sekä projektin yhteisten artikkelien tavoitteet sekä tehtävätyypit. Toisessa osassa on perusteltu oppimateriaalia tehdessä tehdyt valinnat edellä mainittujen lähteiden sekä tätä tutkielmaa varten etsittyjen tieteellisten artikkelien pohjalta. Kolmannesta osasta löytyy itse oppimateriaali, jossa asioihin johdatellaan pohdintatehtävillä. Jokaisesta kappaleesta löytyy myös sen sisältöihin liittyviä harjoitustehtäviä. Toiseksi viimeisessä osassa on opettajan opas, joka antaa opettajalle vinkkejä pohdintatehtäviin ja niiden eriyttämiseen sekä pohdintojen vastaukset. Lisäksi opettajan oppaassa on esitetty ajankäyttöehdotus oppimateriaalin kappaleille. Viimeisessä osassa on vielä harjoitustehtävien vastaukset.

1 Oppimateriaalin tavoitteet

Tässä kappaleessa esitellään lukion opetussuunnitelman perusteiden [13] sekä Avoin oppikirja -projektiin valituista artikkeleista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [5] sekä *Collaborative Learning in Mathematics* [18] tätä oppikirjaa varten valikoidut tavoitteet, joiden pohjalta tutkielman oppimateriaali on rakennettu.

1.1 Opetussuunnitelman tavoitteet

Vuonna 2019 julkaistuissa lukion opetussuunnitelman perusteissa esitellään lukio-opetuksen tavoitteet niin yleisessä, laaja-alaisessa kuin oppiainekohtaisessa kontekstissa, sekä lisäksi oppimiskokonaisuuksien eli moduulien mukaan [13]. Avoin oppikirja -projektissa tehdään tällä kertaa oppimateriaalit nykyisten opetussuunnitelman perusteiden ensimmäiselle matematiikan moduulille *Luvut ja yhtälöt* (MAY1). Moduuli on kaikille lukio-opiskelijoille yhteinen, ja sen voi sisällyttää lyhyen tai pitkän matematiikan oppimäärään [13].

Tämän tutkielman sisältämässä oppimateriaalissa käsitellään moduulin MAY1 keskeisistä sisällöistä potenssin laskusäännöt kokonaislukueksponenteilla, neliö- ja kuutiojuuri sekä toisen ja kolmannen asteen potenssifunktio ja -yhtälö. Näihin aiheisiin liittyviä, opetussuunnitelman perusteissa esitettyjä moduulin tavoitteita ovat, että opiskelija

- kertaa potenssin laskusäännöt
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää yhtälön ja yhtälöparin ratkaisemisen periaatteet
- oppii käyttämään ohjelmistoja funktion kuvaajan piirtämisessä, havainnoinnissa ja yhtälöiden ratkaisemisessa. [13]

Oppimateriaalin sisältöjä on tarkennettu Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton (MAOL) julkaiseman matematiikan tukimateriaalin avulla. Potenssin yhteydessä käsitellään laskusääntöjen lisäksi luvun kymmenpotenssimuotoa ja juurien yhteydessä irrationaalilukuja sekä luvun tarkkaa arvoa ja likiarvoa [11]. Lisäksi oppimateriaalissa pyritään vahvistamaan opiskelijan osaamista aiemmin moduulin oppikirjassa käsitellyissä sisällöissä, kuten murtolukujen laskutoimituksissa, vasta- ja käänteisluvuissa, itseisarvossa sekä lukujoukoissa, esimerkiksi tehtävien kautta [13].

Eräs matematiikan oppiaineen yleisistä tavoitteista on matematiikan käyttökelpoisuuden ymmärtäminen esimerkiksi mallintaessa tai ennustettaessa erilaisia ilmiöitä [13]. Tämä on pyritty ottamaan huomioon oppimateriaalissa etenkin potenssifunktioiden yhteydessä pohdinnassa A.19, jossa funktiota hyödynnetään tilanteen mallintamisessa. Tehtävässä yhdistetään myös matematiikkaa arkielämään, joka on toisaalta myös keino toteuttaa matematiikan laaja-alaisia tavoitteita, kuten opiskeluun innostamista [13]. Arkielämäyhteyttä ja opiskelijoita kiinnostavia aiheita on pyritty tästä syystä sisällyttämään myös muihin tehtäviin ja pohdintoihin.

Ryhmissä tai pareittain tehtäväksi suunniteltujen pohdintatehtävien kautta opiskelijoita kannustetaan myös tutkivaan ja kokeilevaan toimintaan, matematiikasta keskustelemiseen, ongelmanratkaisuun sekä väitteiden perusteluun, jotka ovat myös matematiikan opetuksen yleisiä tavoitteita [13]. Pohdinnoissa opiskelijaa pyydetään usein perustelemaan tekemänsä valinnat ja päätelmät tämän tavoitteen toteutumiseksi. Ryhmissä työskentelemisen ja sen myötä kyselevän ilmapiirin on puolestaan tarkoitus vahvistaa opiskelijan vuorovaikutusosaamista ja toisaalta auttaa opiskelijaa ymmärtämään useita erilaisia ratkaisutapoja [13].

Oppimateriaalissa on pyritty käyttämään sekä matemaattista kieltä ja erilaisia esitysmuotoja että puhuttua tai kirjoitettua kieltä, jotta opiskelija oppisi siirtymään erilaisista matematiikan esitysmuodoista toisiin. Tämä sekä matematiikan kielen käyttämisen ja erilaisten merkintöjen, kuvien ja välineiden hyödyntämisen opetteleminen ovat keinoja tukea laaja-alaisten tavoitteiden toteutumista matematiikassa [13]. Oppimateriaalissa on käytetty paljon symbolisia esityksiä esimerkiksi määritelmien yhteydessä, ja harjoitustehtävissäkin painottuu symbolit laskuissa lukujen sijaan. Tähän on kannustettu tukimateriaalissa [11]. Sen lisäksi muun muassa symbolien käyttö ja oppimateriaalin aihepiirit luovat opiskelijalle jatko-opintoja varten matemaattista perustaa, joka on myös matematiikan yleinen tavoite [13].

Opiskelijan tulisi matematiikan opinnoissaan oppia hyödyntämään erilaisia tarkoituksenmukaisia ohjelmistoja [13]. Matemaattisten ohjelmistojen käyttöä on pyritty ottamaan oppimateriaalissa esiin kahden ensimmäisen kappaleen kohdalla vinkeillä laskinohjelmistojen käyttöön ja viimeisessä kappaleessa hyödyntämällä GeoGebraa esimerkiksi pohdinnassa A.17, jossa opettaja voi olla opiskelijan tukena. Opiskelija harjoittelee ohjelmistojen käyttöä toisaalta myös itsenäisesti harjoitustehtävissä. Erityyppisillä tehtävillä sekä itsenäisellä ja ryhmässä tehtävällä työskentelyllä edistetään myös erilaisten työtapojen opettelun ja oman oppimisen säätelyn tavoitetta [13].

Lukion opetussuunnitelman perusteet perustuvat oppimiskäsitykseen, jossa opiskelija käyttää hyödykseen aiemmin oppimaansa tietoa uusissa konteksteissa [13]. Tämä näkyy erityisesti matematiikassa ja tämän tutkielman oppimateriaalissakin siten, että potenssin määritelmä pohjautuu aiemmin opittuun kertolaskuun, potenssien laskusäännöt perustuvat potenssin määritelmään, juuret ovat potensseille käänteisiä laskutoimituksia (ainakin parittomien eksponenttien tapauksessa), potenssifunktioissa tarvitaan tietoa potensseista ja funktioista, potenssiyhtälöiden ratkaisemiseen tarvitaan juuria, ja niin edelleen. Oppimateriaalin sisältöjen järjestys on siis pyritty valitsemaan tämän oppimiskäsityksen mukaisiksi.

1.2 Oppikirjan tekijöiden valitsemat tavoitteet

Avoin oppikirja -projektin oppikirjoille yhteisiä artikkeleita ovat *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [5] sekä *Collaborative Learning in Mathematics* [18]. MAY1-moduulin oppikirjaa tekevät henkilöt ovat yhdessä valinneet ensin mainitusta artikkelista kolme ajattelumallia ja jälkimmäisestä artikkelista kolme tehtävätyyppiä. Tehtävätyypit on valittu siten, että ne tukisivat opetussuunnitelman perusteiden tavoitteisiin sekä valittuihin ajattelumalleihin pääsemistä.

1.2.1 Habits of Mind -tavoitteet

Matematiikan alalla tärkeät sisällöt vaihtelevat ajan kuluessa, eikä tiettyjen aiheiden opettaminen siksi välttämättä ole aina järkevää tai edes perusteltua. Tärkeämpää olisi, että opiskelijoille muodostuisi tietynlaisia ajattelumalleja (*habits of mind*), joita he voivat tulevaisuudessa hyödyntää niin matematiikassa kuin muillakin tutkimukseen tai tutkimiseen jollain tavalla liittyvillä aloilla. Ajattelumallit auttavat opiskelijaa muodostamaan kokonaisvaltaisemman käsityksen matematiikasta ja siitä, miten matemaatikot ajattelevat. Näin ollen opiskelijan matemaattiset taidot eivät ole sidoksissa pelkästään kykyyn suorittaa laskuja mekaanisesti, jolloin täysin uudenlaisten ongelmien ratkaiseminenkaan ei ole mahdotonta. [5]

Kaikista lukio-opiskelijoista ei ole tarkoituskaan tehdä yliopistoon valmiita matemaatikkoja [5]. Tämä on erityisesti totta lukion ensimmäisellä matematiikan moduulilla, joka on kaikille opiskelijoille yhteinen tulevasta oppimäärästä riippumatta. Artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* on esitetty kahdeksan erilaista ajattelumallia, jotka ovat opiskelijalle hyödyllisiä tulevaisuutta ajatellen niin yleisesti kuin matematiikassakin [5]. Näistä kahdeksasta on tämän tutkimuksen oppimateriaalia varten valittu kolme, ja ne esitellään seuraavaksi.

Kokeilija

Opiskelijan pitäisi opintojensa aikana tulla kokeilijaksi (*experimenter*). Esimerkiksi erilaisten lukujen kokeileminen tai muuttujien vaihteleminen ovat yksinkertaisia mutta monesti toimivia tapoja edetä ongelmatilanteissa. Opiskelijan pitäisi pystyä hyödyntämään aiemmin hyväksi toteamiaan tapoja matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Tärkeää olisi myös, että opiskelija pystyisi kokeilemaan erilaisia tilanteita mielessään kirjoittamatta ajatuksiaan paperille. Opiskelijan tulisi kuitenkin huomata, että kokeilujen tulokset eivät ole aina sellaisenaan täydellisiä ratkaisuja, mutta ne voivat johdatella oikealle polulle. [5]

Oppimateriaalissa opiskelijan kokeilijuutta on pyritty tuomaan esiin pohdintatehtävien kautta. Esimerkiksi jo ensimmäisessä pohdinnassa A.1 opiskelija voi hyödyntää vaikkapa laskinta sen kokeilemiseksi, ovatko jotkin potenssilausekkeet keskenään yhtä suuria. Pohdinnoissa A.7 ja A.13 opiskelija voi kokeilla konkreettisia lukuja väitteiden todenperäisyyden tutkimiseksi. Vastaavaa ajattelua voidaan hyödyntää myös muissa pohdinnoissa ja joissakin harjoitustehtävissäkin. Neliö- ja kuutiojuureen johdattelevassa pohdinnassa A.10 opiskelija voi kokeilla eri lukujen potensseja vastausten löytämiseksi. Pohdinnassa A.17 taas opiskelija saa muuttaa parametrin arvoa liukusäätimellä ja tällä tavalla kokeilla erilaisia tilanteita. Myös opettajan oppaaseen on pohdintojen yhteyteen lisätty vinkkejä siitä, millä tavalla opiskelijoita voisi kannustaa kokeilevaan toimintaan tehtävissä edetäkseen.

Kuvailija

Opiskelijaa tulisi opettaa kuvailijaksi (*describer*), joka kykenee sujuvasti käyttämään matematiikan kieltä. Kuvailua on esimerkiksi omien ajatusten, tulosten, väitteiden, kysymysten, todistusten tai mielipiteiden kirjoittaminen ylös. Opiskelijan tulisi pystyä selittämään suorittamansa prosessit askel askeleelta niiden ymmärtämiseksi. Myös muiden opiskelijoiden kanssa väitteleminen ja omien näkökulmien perusteleminen on tärkeä kuvailijan kyky. Lisäksi uudenlaisten esitystapojen keksiminen auttaa opiskelijaa ilmaisemaan matematiikkaa, jota on joskus vaikea selittää luonnollisella kielellä. [5]

Oppimateriaalissa kuvailua on lähestulkoon jokaisessa pohdintatehtävässä tehtyjen valintojen tai laskujen perustelemisen kautta. Myös joissakin harjoitustehtävissä on erikseen pyydetty perusteluja, mutta perustelemisen harjoittelu pohdinnoissa toivottavasti saa opiskelijat tuottamaan perusteluja ilman erillistä huomautustakin. Pohdintatehtävät on suunniteltu pareittain tai ryhmissä tehtäviksi, jolloin opiskelija pääsee harjoittelemaan suullista argumentointiaan vertaistensa kanssa pohtiessaan ja väitellessään.

Sekä pohdinta- että harjoitustehtävissä opiskelija joutuu kirjoittamaan ratkaisujaan ylös harjoitellen matematiikan kielen kirjoittamista. Esimerkiksi pohdinnassa A.19 opiskelijan täytyy keksiä, miten sanallinen selitys ja taulukkoarvot voidaan ilmaista matemaattisesti funktion avulla. Myös muissa pohdinnoissa ja harjoitustehtävissä tulee vastaan sanallisten selitysten muokkaamista matemaattiseen muotoon. Oppimateriaalissa esitetyt määritelmät ja muu teoria on pyritty esittämään sekä sanallisesti että matemaattisesti, jotta opiskelijalle syntyisi käsitys siitä, miten matemaattisia symboleita ja merkintöjä voidaan hyödyntää erilaisen asioiden ilmaisemisessa.

Visualisoija

Opiskelijasta tulisi lisäksi kehittyä visualisoija (*visualizer*). Visualisointia voi tehdä matematiikassa kolmelle erityyppiselle asialle: visuaaliselle, ei ainakaan aluksi selkeästi visuaaliselle sekä ei ollenkaan visuaaliselle. Visuaalisia ovat esimerkiksi geometriaan liittyvät aiheet, taulukot tai kuvaajat. Ei selkeästi visuaalisissa aiheissa esimerkiksi laskutoimitusta kuvataan jollain tapaa visuaalisella apukeinolla asian selkeyttämiseksi. Ei ollenkaan visuaalisia asioita, esimerkiksi tietyntyyppisiä laskuja, voi myös visualisoida mielessä vaikkapa numeroiden lentelemisenä, jos siitä on itselle hyötyä. [5]

Oppimateriaalissa visualisointi näkyy jokaisessa kappaleessa. Neliö ja kuutio sekä neliö- ja kuutiojuuri on verrastettu neliön pinta-alaan ja kuution tilavuuteen asian selkeyttämiseksi. Juurten tapauksessa on myös palattu neliö- ja kuutiolukuihin, joiden osoittama määrä pisteitä voidaan asettaa neliön tai kuution muotoiseksi kuvioksi. Pohdinnassa A.10 opiskelija soveltaa tällaisia ajattelumalleja tehtävän ratkaisemiseksi. Luvun kymmenpotenssimuotoon muuttaminen on kuvattu visuaalisesti pilkun siirtämisenä laskemisen helpottamiseksi. Myös pohdinnassa A.14 tehtävä juurilausekkeiden sijoittaminen lukusuoralle visualisoi opiskelijalle lukujen suuruusluokkaa.

Potenssifunktioihin johdattelevassa pohdinnassa A.17 opiskelija piirtää funktioiden kuvaajat ja lisäksi suoran, jonka paikkaa voidaan muuttaa liukusäätimen avulla. Tällä tavoin funktioiden kuvaamisen lisäksi visualisoidaan muutosta ja sen myötä erilaisia tilanteita. Myös potenssiyhtälöiden ratkaisut on visualisoitu potenssifunktioiden kuvaajien avulla. Pohdintatehtävässä A.19 on koottu arvoja taulukkoon, joka on visuaalinen tapa esittää informaatiota.

1.2.2 Tehtävätyypit

Perinteisellä opetuksella ei saada aikaan pitkäikäistä, opiskelijaa motivoivaa, erilaisissa tilanteissa sovellettavaa oppimista. Yhteistyöhön perustuvassa opetuksessa matematiikka nähdään toisiinsa yhteydessä olevina ideoina ja perusteluprosesseina, joiden oppiminen pohjautuu yhteisiin aktiviteetteihin ja keskustelun kautta ymmärtämiseen. Opetuksessa esitetään ongelmat ennen ratkaisuja ja käytetään virheitä oppimisen lähteinä. Opetus on tehokkaampaa, kun se pohjautuu aiemmin opittuun, tuo esiin yleisiä virhekäsityksiä, kysyy syvempiä kysymyksiä, hyödyntää ryhmätyöskentelyä ja yhteistyössä ratkaistavia tehtäviä, kannustaa perusteluun, luo yhteyksiä aiheiden välille ja käyttää teknologiaa hyväkseen. [18]

Monet näistä opetuksen tavoitteista ovat tuttuja myös lukion opetussuunnitelman perusteista. Kaikkiin näihin tavoitteisiin pääsemistä käytännössä tukevien tehtävien keksiminen voi kuitenkin olla haastavaa [18]. Artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* on kuitenkin esitetty viisi erilaista yhteistyöhön perustuvaa tehtävätyyppiä, joista on valittu tämän tutkielman oppimateriaalia varten kolme, joista yksi on erään tehtävätyypin alakategoria. Tehtävätyyppeihin viitataan myöhemmin tässä tutkielmassa *Swanin tehtävätyyppeinä* artikkelin kirjoittajan Malcolm Swanin mukaan.

Erilaisten esitystapojen tulkinta

Ensimmäinen valituista tehtävätyypeistä on erilaisten esitystapojen tulkinta (*interpreting multiple representations*). Matematiikassa asioita voidaan usein esittää monissa eri muodoissa, kuten sanojen, diagrammien, symbolien tai taulukoiden avulla. Perinteisessä opetuksessa käytetään paljon aikaa esitystapojen muodostamiseen ja muokkaamiseen tarvittavien teknisten taitojen harjoitteluun. Tärkeää olisi kuitenkin, että opiskelijat saisivat harjoitella myös esitysmuotojen tulkintaa. Tällaisessa tehtävätyypissä opiskelijat yhdistävät saman asian erilaisia esitysmuotoja. Tehtäviin on hedelmällistä sisällyttää myös yleisiä virhekäsityksiä ja parittomia esitysmuotoja, joille opiskelijat keksivät erilaisia esitystapoja. Lisäksi opiskelijaa kannattaa kannustaa perustelemaan, miksi valitut esitystavat tarkoittavat samaa asiaa. [18]

Oppimateriaalin aloittava pohdinta A.1 on tällainen erilaisten esitystapojen tulkintatehtävä, jossa opiskelijat yhdistävät yhtä suuria potensseja. Tehtävässä opiskelija joutuu myös keksimään toisenlaisia esitysmuotoja sellaisille potensseille, joille ei löydy paria ruudukosta.

Matemaattisten väitteiden arviointi

Toinen valituista tehtävätyypeistä on matemaattisten väitteiden arviointi (*evaluating mathematical statements*). Tehtävätyypissä opiskelija päättelee, ovatko annetut matemaattiset väitteet totta aina, joskus vai ei koskaan. Erityisen tärkeää on, että opiskelijat perustelevat tekemänsä päätelmät vaikkapa esimerkeillä tai vastaesimerkeillä. Opiskelijaa voi myös pyytää määrittämään sellaisia ehtoja, joilla annetut väitteet olisivatkin aina totta. Tehtävätyypin tarkoitus on kehittää opiskelijan kykyä selittää, todistaa ja vakuuttaa. Opiskelijat voivatkin pohtia ja väitellä ryhmissä. Itse väitteissä kannattaa nostaa esiin yleisiä virhekäsityksiä sekä vaikeita aiheita. [18]

Oppimateriaalin pohdinnat A.7 ja A.13 ovat matemaattisten väitteiden arviointitehtäviä, joista jälkimmäisessä opiskelijan tulee myös määrittää ehdot sille, että joskus todet väitteet olisivat totta aina.

Päättelyvirheiden korjaus

Viimeinen valituista tehtävätyypeistä on päättelyn ja ratkaisujen analysointi (*analysing reasoning and solutions*) -tehtävätyypin alakategoria, päättelyvirheiden korjaus (*correcting mistakes in reasoning*). Pääkategorian tehtävät yleisesti tuovat opiskelijalle mahdollisuuden arvioida erilaisia ratkaisutapoja. Päättelyvirheiden korjaus -tehtävissä opiskelija tutkii valmista ratkaisua etsien ja korjaten siitä löytyviä virheitä. Tällä tavoin opiskelija asettuu neuvonantajan rooliin. Myös tämä tehtävätyyppi tuo mahdollisuuden nostaa esiin yleisiä virhekäsityksiä ja toimii hyvin ryhmäkeskusteluna, jolloin esiin voi nousta useita erilaisia ratkaisutapoja. [18]

Oppimateriaalin pohdinnoissa A.8 ja A.20 korjataan päättelyvirheitä valmiiksi tehdyistä ratkaisuista. Ratkaisuissa esiintyvät virheet on pyritty valitsemaan tehtäviin liittyvistä yleisistä virhekäsityksistä.

2 Oppimateriaalin perustelut

Tutkielman lopusta liitteestä A löytyvä oppimateriaali on osa lukion yhteisen matematiikan moduulille *Luvut ja yhtälöt* (MAY1) tehtyä oppikirjaa. Oppimateriaali sisältää moduulilla käsiteltävät aiheet potenssi, neliö- ja kuutiojuuri sekä potenssifunktio ja -yhtälö. Tässä osiossa on perusteltu oppimateriaalia suunnitellessa tehdyt valinnat kappaleittain lukion opetussuunnitelman perusteiden ja tukimateriaalin sekä tieteellisten artikkelien pohjalta.

2.1 Potenssi

Oppimateriaalin ja potenssi-kappaleen aloittava pohdinta A.1 on rakennettu Swanin artikkelin [18] useiden esitystapojen tulkitsemistehtävätyypin pohjalta. Swanin mukaan yksinkertaisessa yhdistämistehtävässä opiskelijat pääsevät keskittymään asian pohdiskeluun teknisen suorittamisen sijaan [18]. Tehtävässä on otettu huomioon myös potensseihin liittyviä yleisiä virhekäsityksiä. Samankantaisten potenssien tulon tapauksessa opiskelijat saattavat ajatella väärin ja kertoa eksponentit keskenään summaamisen sijaan [21]. Edelleen potenssin potenssin tapauksessa lienee yleistä korottaa eksponentti potenssiin eksponenttien tulon sijaan. Eksponentin vaikutusalue saattaa myös tuottaa hankaluuksia. Esimerkiksi potenssin vastaluku tulkitaan herkästi vastaluvun potenssina [3]. Etenkin negatiivisen ja nollaeksponentin merkitys voi ylipäätään olla opiskelijoille haastava [1, 10, 19].

Näitä yleisiä virhekäsityksiä on siis lisätty tehtävään, jotta opiskelijat pohdiskelun kautta huomaisivat ne vääräksi. Zielinskin ja Glaznerin mukaan virheet tulisi osoittaa ensin vääräksi ja sen jälkeen opettaa oikea tapa [21]. Siksi pohdinnan toisessa kohdassa keksitään parittomille ruuduille, jotka liittyvät näihin virhekäsityksiin, jokin toinen tapa ilmaista ne potenssien avulla. Tällöin opiskelijat pääsevät vielä pohtimaan, mitä kyseisissä tilanteissa oikeasti tapahtuu.

Yleensä potenssi määritellään aluksi toistuvana kertolaskuna positiiviselle kokonaislukueksponentille ja määritelmää laajennetaan vasta myöhemmin koskemaan kaikkia kokonaislukueksponentteja. Potenssin määritelmään A.1 on kuitenkin koottu kaikkien kokonaislukueksponenttien mukaan tehdyt määritelmät. Opiskelijan syvällisemmän ymmärryksen kannalta olisi tärkeää, että potensseille olisi jokin yksi yleinen määritelmä eksponentin lukualueesta riippumatta [1]. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [13] MAY1-moduulin sisällöissä mainitaan kuitenkin vain kokonaislukueksponentit. Valitsemani määritelmä onkin kompromissi näistä kahdesta ajatuksesta. Mielestäni opiskelijan on helpompi ymmärtää potenssin käsite konkreettisesta matemaattisesta määritelmästä kuin hankalasti sanoitetusta tekstistä. Avitzurin ehdottama yleinen määritelmä "Exponentiation is an operation that changes a given quantity multiplicatively based on the current size of the quantity" [1] tuntuu mielestäni joka tapauksessa pohjautuvan positiivisen kokonaislukueksponentin tapaukseen, eikä kerro ainakaan itselleni yleisestä tilanteesta yhtään enempää kuin matemaattinen määritelmäkään. Lukiolaisille potenssi on lisäksi jo entuudestaan tuttu käsite, joten uuden määritelmän tuominen saattaisi ennemminkin sekoittaa ajatuksia kuin syventää ymmärrystä. Jos jokin yhteinen määritelmä olisi, se pitäisi mielestäni opettaa heti kun potenssin käsite tulee esille ja sen pitäisi olla vähintään kansallisesti hyväksytty.

Matematiikan tukimateriaalissa [11] eritellään sisällöissä luvun neliö ja kuutio, joten oppimateriaalissa käydään läpi nämä potenssin erityistilanteet. Opiskelijoiden tulisi visualisoida matematiikkaa mahdollisuuksien mukaan [5]. Potenssit kannattaa myös yhdistää konkreettisiin suureisiin, jolloin opiskelijat eivät käsittele pelkästään ”tyhjiä” lukuja [1]. Luvun neliö ja kuutio on siksi yhdistetty muotojen pinta-aloihin niin sanallisesti kuin visuaalisestikin.

Esimerkissä A.4 käydään läpi potenssien laskusääntöjen pseudotodistus konkreettisilla eksponenteilla. Opiskelijoiden on tärkeää tietää, mistä potenssin laskusäännöt tulevat, mutta täydellinen todistus voi olla liian raskas ja vaikeaselkoinen [10], etenkin lukion ensimmäisellä matematiikan moduulilla. Pseudotodistuksella voidaan kuitenkin näyttää, miten potenssin määritelmää käytetään laskusääntöjen johtamiseksi ja eriytettäessä ylöspäin opiskelijat voivat käyttää esimerkkiä apuna yleisen todistuksen tekemiseksi.

Esimerkissä A.6 taas palataan potenssin määritelmän laajennuksen perusteluun. Opiskelijoiden tulisi ymmärtää, miksi potenssin määritelmä on valittu negatiivisen ja nollaeksponentin tapauksissa eri tavalla kuin positiivisen eksponentin tapauksessa. Kun potenssin laskusäännöt on käyty läpi, voidaan hyödyntää samankantaisten potenssien osamäärää määritelmän laajennuksen perustelemiseksi. Kuten edellä, esimerkissä ei mennä yleiseen tapaukseen, vaan käytetään konkreettisia eksponentteja, jotka ovat opiskelijan ymmärrettävissä. Tähän sisältyy taas mahdollisuus eriyttää ylöspäin yleisen tapauksen perustelemiseksi. Yleensä nollaeksponentin ja negatiivisen eksponentin tapaukset perustellaan erikseen [10], mutta idea yhteiseen perusteluun sai alkunsa artikkelista *Secondary School Students' Levels of Understanding in Computing Exponents* [14]. Artikkelissa eräs opiskelija selittää negatiivisen eksponentin tapauksessa potenssin määritelmän jakamalla aina edellistä potenssia sen kantaluvulla. Tämä on käytännössä sama asia kuin yleisemmin käytetty perustelu, mutta mielestäni asian sai tällä tavoin muotoiltua hyvin ymmärrettävään, mutta samalla kompaktiin esimerkkiin.

Pohdinnassa A.7 yhdistyvät Swanin matemaattisten väitteiden arviointitehtävä [18], *Habits of Mind* -artikkelin ajatus opiskelijoiden kokeilijuudesta [5], potensseihin liittyvien virhekäsitysten pohdinta sekä potenssien laskusääntöjen soveltaminen. Varsinkin nuoremmat oppilaat käyttävät helposti muistisääntöjä väärin uusissa konteksteissa, esimerkiksi ”kertominen kasvattaa” -ajatuksen yleistäminen muiden kuin luonnollisten lukujen tapaukseen [19]. Tällaisten ajatusten syvällisempi pohdinta ja konkreettisilla luvuilla kokeileminen voi auttaa ymmärtämään niiden virheellisyyden. Kun opiskelijat joutuvat pohtimaan myös, onko väite joskus totta, perinteisen tosi/epätosi-jaottelun sijaan, perustelujen tärkeys kasvaa [18]. Kohdat a–c on valittu siten, että ne edistäisivät opiskelijoiden ymmärrystä potenssista operaationa, ja kohdat d–e siten, että opiskelijat pääsisivät soveltamaan potenssin laskusääntöjä lukumääräisyyden tajun (*number sense*) kontekstissa. Lukumääräisyyden tajua, etenkään potenssien yhteydessä, ei opeteta tarpeeksi [8], joten halusin sisällyttää sitä tähän oppimateriaaliin.

Kymmenpotenssimuoto mainitaan matematiikan tukimateriaalissa [11]. Termi saattaa olla vaikea yhdistää tarkoitukseensa, joten halusin esittää kymmenpotenssimuodon määritelmän oppimateriaalissa ennen siihen liittyvää pohdintaa A.8. Pohdinnassa on käytetty Swanin perustelun virheiden korjaus -tehtävätyyppiä, jossa opiskelija pääsee ikään kuin opettajan rooliin ohjaamaan tehtävän tekijää [18]. Tehtävässä on yritetty esittää kymmenenpotenssimuodon taustalla tapahtuvia operaatioita, jotka saattavat jäädä ymmärtämättä pilkun siirto -strategian vuoksi. Kohdassa b on myös otettu esiin negatiivinen luku, jonka muuttaminen kymmenpotenssimuotoon saattaa olla hankalaa, jos ei ymmärrä kertoimen itseisarvolle määritettyä rajaa.

Harjoitustehtävässä 1 pyritään syventämään opiskelijan käsitystä potenssin määritelmästä. Vasta- ja käänteislukujen käsitteiden heikko ymmärtäminen saattaa olla joidenkin opiskelijoiden virhekäsitysten taustalla negatiivisten lukujen esiintyessä potenssissa [3]. Tehtävässä opiskelija joutuu keksimään tällaisille sanallisille selityksille matemaattisen vastineen ja täten ymmärtämään asiat paremmin.

Tehtävissä 2–3 opiskelija soveltaa potenssin laskusääntöjä. Tehtävässä 2 pyritään edistämään symbolista laskemista, mikä on yksi lukion opetussuunnitelman perusteiden tavoitteista [13]. Tehtävässä 3 taas opiskelija soveltaa sääntöjä myös toiseen suuntaan laskujen yksinkertaistamiseksi.

Tehtävän 4 tarkoitus on tuoda potenssilaskentaa arkipäivään sanallisen tehtävän kautta. Tehtävä 5 puolestaan yhdistää suullisen/kirjallisen kielen muuttamista matemaattiseen muotoon ja luvun muuttamista kymmenpotenssimuotoon.

2.2 Neliö- ja kuutiojuuri

Neliö- ja kuutiojuuri -kappaleen aloittavassa pohdintatehtävässä A.10 opiskelijaa johdatellaan kappaleen aiheisiin. Oppiminen on jo hankitun tiedon päälle kasaamista, ja opiskelijat hyötyvät matematiikan yhdistämisestä arkipäiväisiin esimerkkeihin [7]. Arkipäiväisten esimerkkien ja edellisessä kappaleessa tutuksi tulleitten potenssien kautta asiaan johdatteleminen on siten mielestäni hyvinkin perusteltua. Neliöjuuren määritelmässäkin korostuu yhteys (positiivisen) luvun neliöön sen käänteisoperaationa [7], mikä laajentuu koskemaan myös kuutiojuurta käänteisoperaationa luvun kuutiolle.

Pohdinnan kohdissa a ja c–d neliön pinta-alasta sivun pituuteen tai kuution tilavuudesta särmän pituuteen pääsemistä voidaan tavallaan ajatella myös Swanin ”tekemisen” ja ”kumoamisen” tehtävätyyppinä [18], jossa tehdään vain ”kumoaminen”, eli tutulle potenssiin korotukselle vastakkainen operaatio. Toisaalta pohdinnassa nousee esiin myös *Habits of Mind* -artikkelin ajatus opiskelijoiden kokeilijuudesta [5], sillä opiskelijat saattavat päästä lopputulokseen kokeilemalla eri lukujen toisia ja kolmansia potensseja annetun pinta-alan tai tilavuuden saamiseksi.

Kohdissa b ja e opiskelija joutuu pohtimaan lisäksi, kuinka tietty lukumäärä kappaleita voidaan asetella neliön tai kuution muotoon ja miten tämä liittyy potensseihin tai neliö- ja kuutiojuureen. Opiskelija voi esimerkiksi kokeilla piirtää tilanteen ja laskea piirtämästään kuvasta vastauksen. Tässä yhdistyvät *Habits of Mind* -artikkelin kokeilija ja visualisoija [5]. Lukujen visuaalinen esittäminen neliönä järjestelemällä pisteitä tai muita kappaleita neliön muotoon saattaa auttaa opiskelijaa ymmärtämään neliöjuurta paremmin [7, 16]. Tämä voidaan helposti laajentaa koskemaan myös kuutiojuurta. Neliöesityksestä on erityisesti hyötyä myöhemmin neliöjuuren laskusääntöjä opiskellessa, sillä neliön täyttäminen pienemmillä neliöillä auttaa opiskelijaa hahmottamaan neliöjuurten sieventämistä [16].

Pohdinta A.13 pohjautuu Swanin matemaattisten väitteiden arviointitehtävään [18]. Opiskelijan tulee väitteiden todenperäisyyden pohtimisen lisäksi määrittää joskus tosien väitteiden tapauksessa ehdot, joilla väitteet olisivat totta aina. Määrittäessään ehtoja opiskelija toivon mukaan syventää ymmärrystään kyseisestä asiasta. Oman kokemukseni perusteella opiskelijoiden voi olla hankala ymmärtää, miksi neliöjuuri voidaan ottaa vain positiivisesta luvusta, mutta kuutiojuurelle vastaavaa määrittelyehtoa ei ole olemassa. Siksi kohdissa a–b kerrataan vielä neliö- ja kuutiojuuren mahdollista merkkiä.

Opiskelija saattaa helposti ajatella, että kahden luvun neliöjuurten summa on aina näiden lukujen summan neliöjuuri, esimerkiksi potenssin laskusääntöjen väärinkäytön vuoksi [17]. Kohdassa c käsitellään tällaista väitettä konkreettisilla luvuilla, jotta opiskelija voisi esimerkiksi laskemalla huomata tämän käsityksen olevan virheellinen. Kohtien d–e tarkoitus on vahvistaa opiskelijan lukumääräisyyden tajua, joka on myös neliöjuurten tapauksessa tärkeä kyky [20].

Kuten potenssienkin tapauksessa, neliö- ja kuutiojuuri on esitetty myös visuaalisesti ja yhdistetty geometristen muotojen ominaisuuksiin, mistä on hyötyä opiskelijan ymmärryksen kannalta [5, 7, 16].

Pohdintatehtävässä A.14 yhdistyy laskurutiinin muodostuminen laskemisen kautta sekä lukumääräisyyden tajun kehittäminen lukusuoralle sijoittamisen kautta. Monien opettajaopiskelijoiden ja opettajienkin mielestä irrationaalilukuja, kuten $\sqrt{2}$, ei voi asettaa lukusuoralle tarkasti [4]. Tästä voinee olettaa, että opiskelijoilla voi olla sama virhekäsitys. Siksi rakensin pohdinnan lukusuoralle sijoittamisen ympärille. Vaikka suuri osa tehtävän juurilausekkeiden arvoista onkin kokonaislukuja, niin muutama irrationaaliluku löytyy myös joukosta tämän virhekäsityksen kumoamiseksi.

Irrationaalisten neliöjuurten paikan arvioimisessa ilman laskinta voidaan käyttää artikkelin *Enhancing Students' Understanding of Square Roots* tyylistä approksimointia, jossa etsitään irrationaalista neliöjuurta lähimmät neliölukujen neliöjuuret karkean arvion saamiseksi. Tämän jälkeen arviota voidaan tarkentaa pohtimalla, kumpaa neliöjuurta lähempänä irrationaalinen neliöluku on. Tällainen pohdinta helpottaa opiskelijan kykyä muodostaa itselleen käsitys neliöjuurista, ja neliöjuurten asettaminen lukusuoralle auttaa ymmärtämään lukujen suuruusluokkaa. [20]

Tehtävässä on otettu huomioon myös muita mahdollisia ongelmanlähteitä, kuten aiemmin mainittu neliöjuurten summa, miinusmerkin vaikutusalue esimerkiksi potenssilausekkeissa, juuren vastaluku sekä negatiiviset juuret.

Neliöluvun osoittama määrä pisteitä asetettuna neliön muotoon antaa opiskelijalle konkreettisen keinon määrittää luvun neliöjuuri laskemalla kuviosta rivillä olevien pisteiden määrän [16]. Tämän voidaan vastaavasti olettaa pätevän kuutiojuurelle kuutiolukujen tapauksessa. Ongelmaksi kuitenkin saattaa nousta irrationaalisten juurien laskeminen, sillä pisteitä ei tällöin voidakaan asettaa täydelliseksi kuvioksi [7, 16]. Halusin korostaa oppimateriaalissa, että osa kokonaislukujen juurista on kokonaislukuja ja osa irrationaalilukuja. Irrationaaliset juuret on helppo löytää edellä kuvatulla tavalla käyttämällä neliö- ja kuutiolukujen juuria, joten mielestäni neliö- ja kuutiolukujen sisällyttäminen oppimateriaaliin on perusteltua, vaikkei näitä opetussuunnitelman perusteissa mainitakaan.

Harjoitustehtävissä 6 ja 7 opiskelijan on tarkoitus kehittää kykyään muuttaa suullista tai kirjallista kieltä matemaattiseen muotoon. Tehtävässä 6 opiskelija kehittää laskurutiiniaan neliöjuurilausekkeilla ja harjoittaa vastausten perustelemista neliöjuuren määritelmän ymmärtämiseksi. Tehtävässä 7 opiskelija harjoittelee käyttämään laskinohjelmistoa, mikä on yksi lukion opetussuunnitelman perusteiden matematiikan opetuksen yleisistä tavoitteista [13].

Tehtävässä 8 opiskelija harjoittelee neliö- ja kuutiojuurilausekkeita ilman laskinta. Tehtävässä 9 opiskelijan on tarkoitus pohtia neliöjuuren ja luvun neliön sekä kuutiojuuren ja luvun kuution yhteyttä vastauksen määrittämiseksi.

Tehtävässä 10 palataan potenssien yhteydessä hankaliksi todettuihin vasta- ja käänteislukujen käsitteisiin yhdistäen ne nyt juuriin. Opiskelija joutuu pohtimaan, mitä käsitteet tarkoittavat ja miten luvut voidaan osoittaa toistensa vasta- tai käänteisluvuiksi. Opiskelija pääsee tekemään oletuksia ja tutkimaan niiden oikeellisuutta, mikä on myös opetussuunnitelman perusteiden tavoite [13].

2.3 Potenssifunktio ja -yhtälö

Lukioikäisten opiskelijoiden ymmärrys yhtälöiden yhteydestä kuvaajiin on usein pinnallista [9]. Siksi halusin aloittaa oppimateriaalin viimeisen, Potenssifunktio ja -yhtälö -kappaleen pohdinnalla A.17, jossa korostuu opiskelijan oma pohdinta toisen ja kolmannen asteen potenssifunktioiden yhteydestä neliö- ja kuutioyhtälöihin. Yleisimpiä virheitä toisen asteen yhtälöiden ratkaisemisessa ovat jonkin ratkaisun, yleensä negatiivisen, unohtaminen positiivisilla funktion arvoilla ja ylimääräiset ratkaisut nollan tai negatiivisen funktion arvon tapauksissa [2]. Siksi tehtävässä lähdetään heti aiheeseen johdatellessa pohtimaan potenssiyhtälöiden ratkaisujen määrää erilaisilla funktion arvoilla. Tavoitteena on, että opiskelija huomaisi heti aluksi neliö- ja kuutioyhtälöiden ratkaisujen määrien erot sekä muistaisi jatkossa neliöyhtälön ratkaisujen määrät eri tapauksissa. Lisäksi opiskelija pääsee harjoittamaan ohjelmistotaitojaan potenssifunktioiden kontekstissa Lukion opetussuunnitelman perusteiden [13] tavoitteiden mukaisesti.

Opiskelijoilla on usein sellainen kuva, että yhtälöitä voidaan ratkaista vain algebrallisesti, eivätkä he siksi välttämättä osaa hyödyntää kuvaajia graafiseen ratkaisemiseen [9]. Siksi oppimateriaalissa on huomautettu, että edellisessä pohdinnassa käytetty graafinen leikkauspistemenetelmä on yksi tapa ratkaista potenssiyhtälöitä, vaikka kappaleessa keskitytäänkin enemmän algebralliseen ratkaisemiseen.

Seuraavaksi on esitetty potenssifunktion yleinen määritelmä, jota tarvitaan kappaleessa käsiteltävien toisen ja kolmannen asteen potenssifunktioiden esittämiseksi. Yleinen määritelmä tuo opiskelijalle myös mahdollisuuden pohtia jo korkeampien asteiden potenssifunktioita, vaikka ne ovatkin vasta tulevien matematiikan moduulien asiaa. Sitten on esitetty oppimateriaalissa käsiteltävien potenssifunktioiden kuvaajat ja tutustuttu niiden ominaisuuksiin, mikä on yksi opetussuunnitelman perusteiden tavoitteista [13]. Kuvaajat ovat myös yksi keino visualisoida funktioita, mikä edistää oppimista [5].

Pohdinnassa A.19 opiskelijan tulee päätellä annettujen taulukkoarvojen perusteella kysyttyä arvoa kuvaava funktio ja laskea sen avulla funktion sekä muuttujan arvoja annetuissa tilanteissa. Opiskelijat pystyvät rutiininomaisesti piirtämään kuvaajia annetuista funktioista, mutta päinvastaisessa tilanteessa funktion päätteleminen annetusta kuvaajasta ei välttämättä onnistukaan [9]. Pohdinnan lähtökohdat vastaavat tällaista tilannetta, sillä annetut arvot vastaavat kuvaajaa, jonka funktio on tuntematon. Kappaleessa käsitellään vain kahta kuvaajaa, jotka tulevat helposti tutuksi, eivätkä niiden tunnistamista vaativat tehtävät siksi tuntuneet mielekkäiltä oppimista ajatellen. Annetuista arvoista funktion päätteleminen sen sijaan on hiukan haastavampaa ja antaa opiskelijalle mahdollisuuden pohtia funktioita myös päinvastaiseen suuntaan kuin tavallisesti.

Pohdinnan b-kohdassa opiskelija saa harjoitella potenssifunktion arvon ratkaisemista annetulla muuttujan arvolla. Kohdassa c opiskelijaa pyritään johdattelemaan edelleen yhtälön muodostamiseen funktion lausekkeesta ja annetusta arvosta, sekä sen ratkaisemiseen. Opiskelijoilla on enemmän vaikeuksia sanallisten yhtälönratkaisutehtävien tekemisessä verrattuna symbolisiin tehtäviin, joten opetuksessa kannattaa käsitellä myös sanallisia tehtäviä [6]. Siksi tämä pohdinta on rakennettu sanalliseksi tehtäväksi.

Seuraavaksi oppimateriaalissa avataan potenssifunktioiden ja -yhtälöiden yhteyttä, jota edeltävissä pohdinnoissa A.17 ja A.19 pohjustettiin. Yhteyttä on sanallisen selityksen lisäksi kuvattu funktioiden kuvaajien avulla asian visualisoimiseksi. Lisäksi on annettu konkreettisia esimerkkejä, joiden avulla opiskelija toivottavasti ymmärtää asian paremmin kuin pelkällä yleisellä selityksellä.

Opiskelijan voi olla vaikea ymmärtää, miksi neliöyhtälöllä voi olla kaksi ratkaisua, vaikka positiivisen luvun neliöjuuren arvo on aina positiivinen. Neliön neliöjuuren esittäminen juurrettavan kantaluvun itseisarvona saattaa kuitenkin helpottaa opiskelijan ymmärrystä tästä asiasta. [15] Siksi neliöyhtälön mahdolliset kaksi ratkaisua on selitetty myös muuttujan itseisarvon avulla muiden tapojen lisäksi.

Oletan, että kuutioyhtälön ratkaisujen määrän ero neliöyhtälöön verrattuna saattaa myös aiheuttaa opiskelijoille ongelmia. Siksi oppimateriaalissa on pyritty korostamaan neliö- ja kuutioyhtälöiden eroja niin pohdintojen kuin teoriankin kautta. Teoriaosuudessa on mainittu kuution ja kuutiojuuren olevan toistensa käänteisoperaatioita, mikä toivottavasti auttaa opiskelijaa ymmärtämään kuutioyhtälön ratkaisun yksikäsitteisyyttä.

Pohdinta A.20 on rakennettu Swanin perustelun virheiden korjaus -tehtävätyyppiä mukaillen tarkistamalla oppimiseksi [18]. Yleisten virheiden esittämistä ja niiden korjaamista kannattaa sisällyttää opetukseen myös yhtälönratkaisun kontekstissa, sillä opiskelija voi oppia virheistä, mitä ei kannata tehdä [2]. Tehtävän kohdassa a on nostettu esiin yksi yleisimmistä virheistä, eli negatiivisen ratkaisun unohtaminen neliöyhtälöä ratkaistessa [2, 6, 12, 15]. Kohdassa b taas käsitellään tilannetta, jossa neliöyhtälön ratkaisuksi saadaan näennäisesti kaksi ratkaisua, positiivinen ja negatiivinen nolla, kun ratkaisuja pitäisi olla vain yksi, eli nolla [2]. Kohdassa c keskitytään negatiivisen luvun neliöjuureen, jonka jotkin opiskelijat saavat jotenkin laskettua, vaikkei sitä olekaan määritelty [2]. Tehtävän viimeisessä kohdassa taas esiintyy omalla kokemuksellani sanoen yleinen, yleisestikin yhtälönratkaisussa esiintyvä merkkien sekoittaminen yhtälön kummallekin puolelle tehtävissä laskutoimituksissa. Lisäksi ajattelen kuutiojuuren muuttuvan merkitsemissyistä helposti neliöjuureksi, joten tämä virhe on vielä lisätty tehtävään.

Jotta opiskelijoille ei jäisi väärinkäsityksiä potenssiyhtälön muodosta, pohdinnan jälkeen on vielä erikseen korostettu, että kaikki tehtävässä esitellyt yhtälöt eivät alun perin ole potenssiyhtälöitä, vaan ne voitiin muokata potenssiyhtälömuotoon.

Harjoitustehtävät 11 ja 12 ovat potenssifunktioihin liittyviä tehtäviä. Tehtävässä 11 opiskelija pääsee harjoittelemaan funktion arvon laskemista, kun muuttujan arvo on tiedossa. Huomioon on otettu erilaisia lukuja: positiivisia, nollaa, negatiivisia, kokonaislukuja, murtolukuja sekä desimaalilukuja, eri tyyppisillä luvuilla laskemisen harjoittelemiseksi. Tehtävässä 12 opiskelija määrittää sekä funktion arvoja että muuttujan arvoja GeoGebralla piirtämiensä funktioiden kuvaajien avulla pohdinnassa A.17 oppimallaan menetelmällä tai arvioimalla tarpeeksi tarkoilla koordinaatiston asetuksilla.

Tehtävät 13–15 liittyvät potenssiyhtälöihin. Tehtävä 13 on symbolinen yhtälönratkaisutehtävä ja tehtävät 14 ja 15 sanallisia, koska opetukseen kannattaa sisällyttää molempia [6]. Tehtävässä 13 tarkistetaan vastaus sijoittamalla algebrallisesti ratkaistut muuttujan arvot takaisin alkuperäiseen yhtälöön, sillä ratkaisujen oikeellisuuden tarkastelu on tehokas tapa kehittyä yhtälönratkaisussa [12].

Oman kokemukseni perusteella opiskelijan on helppo ajatella esimerkiksi neliön sivun pituuden kaksinkertaistuessa sen pinta-alankin kaksinkertaistuvan. Siksi halusin yhdistää tällaisen ongelmanratkaisun yhtälön muodostamiseen ja ratkaisemiseen tehtävässä 14. Oppimateriaalin päättävä harjoitustehtävä 15 on hieman samantyylinen yhtälön muodostamis- ja ratkaisutehtävä kuin edellinen, mutta haastavampi useamman ratkaistavan suureen takia. Tehtävässä yhdistetään matematiikkaa myös arkipäivään, mikä on yksi opetussuunnitelman perusteiden tavoitteista [13].

Lähdeluettelo

[1] Avitzur, A. (2012). Exponentiation Is Not Repeated Multiplication: Developing Exponentiation as a Continuous Operation. Teoksessa L. R. Van Zoest, J.-J. Lo & J. L. Kratky (Toim.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 919–926).

[2] Barbieri, C. A., & Booth, J. L. (2020). Mistakes on display: Incorrect examples refine equation solving and algebraic feature knowledge. *Applied Cognitive Psychology*, *34*(4), 862–878.

[3] Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J., & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 69–82.

[4] Caylan Ergene, B., & Ergene, Ö. (2020). Repeating Decimals and Irrational Numbers on the Number Line: Through the Lens of Pre-service and In-service Mathematics Teachers. *Acta Didactica Napocensia*, *13*(2), 215–232.

[5] Cuoco, A., Paul Goldenberg, E., & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375–402.

[6] Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15*(4), 1137–1150.

[7] Gough, J. (2007). Teaching square roots: Conceptual complexity in mathematics language. *Australian Senior Mathematics Journal*, *21*(1), 53–57.

[8] İymen, E., & Duatepe-Paksu, A. (2015). Analysis of 8th Grade Students' Number Sense Related to the Exponents in Terms of Number Sense Components. *Education and Science*, *40*(177), 109–125.

[9] Knuth, E. J. (2000). Understanding Connections between Equations and Graphs. *The Mathematics Teacher*, *93*(1), 48–53.

[10] Lyons, W. J. (1931). The Problem of the Teaching of Exponents. *The Mathematics Teacher*, *24*(8), 483–491.

[11] MAOL. (2020). *Pitkän matematiikan tukimateriaalia*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lops2019_maa.pdf

[12] O'Connor, B. R. (2022). Improving student proficiency in solving quadratic equations. *Australian Mathematics Education Journal*, *4*(2), 29–38.

[13] Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

[14] Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 301–311.

[15] Popovic, G. (2015). Irrational Numbers, Square Roots, and Quadratic Equations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(8), 468–474.

[16] Schultz, K. T., & Bismarck, S. F. (2013). Radical Thoughts on Simplifying Square Roots. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *19*(4), 222–228.

[17] Shinno, Y. (2018). Reification in the Learning of Square Roots in a Ninth Grade Classroom: Combining Semiotic and Discursive Approaches. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(2), 295–314.

[18] Swan, M. (2006). Collaborative Learning in Mathematics. *A Challenge to our Beliefs*, 162–176.

[19] Ulusoy, F. (2019). Serious Obstacles Hindering Middle School Students' Understanding of Integer Exponents. *International Journal of Research in Education and Science*, *5*(1), 52–69.

[20] Wiesman, J. L. (2015). Enhancing Students' Understanding of Square Roots. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(9), 556–558.

[21] Zielinski, S. F., & Glazner, M. (2019). The No-to-Yes Project: Conquering Common Algebraic Mistakes That Drive Us and Our Students Crazy. *The Mathematics Teacher*, *112*(6), 432–438.

A Oppimateriaali

A.1 Potenssi

Pohdinta A.1 Alla olevassa ruudukossa on esitetty erilaisia potensseja ja lukuja.

a) Etsi ja yhdistä ruudut, joiden sisällöt ovat yhtäsuuret. Perustele vastauksesi.

b) Kaikille ruuduille ei löydy yhtä suurta vastinetta. Keksi niille samaa tarkoittava, erilainen merkintätapa hyödyntäen potensseja.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$\frac{1}{7^4}$	3^6	12^3	$3^{2 \cdot 3}$
$(4 \cdot 3)^3$	$12^3 \cdot 12^3$	2^4	1	3^{2+3}
$(3^2)^3$	1^{13}	$\left(\frac{4}{9}\right)^6$	7^{-4}	$27 \cdot 4^3$
12^9	2^2	$4^3 \cdot 3^3$	$3^2 \cdot 3^3$	$(-7)^4$
$\frac{4^6}{9^6}$	-7^4	3^{2^3}	$\frac{2^5}{2^3}$	39^0

Pohdinnassa A.1 palautettiin mieleen sekä potenssin määritelmä että potenssien laskusääntöjä.

Määritelmä A.2 Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja a reaaliluku.

1. Luvun a n. *potenssi* on tulo, jonka tekijöinä on luku a n kertaa:

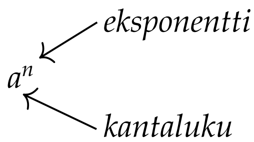
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{kpl}}.$$

2. Potenssin a^0 arvo on aina yksi:
$$a^0 = 1.$$

3. Potenssi a^{-n} on luvun $a \neq 0$ käänteisluvun n. potenssi:
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

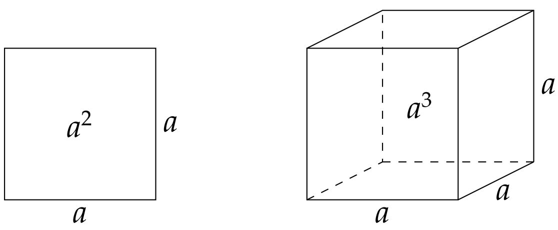
Huomautus A.3 Erityisesti murtoluvulle $\frac{a}{b}$, jossa $a \neq 0$ ja $b \neq 0$ ovat kokonaislukuja, pätee
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Potenssissa a^n lukua a kutsutaan *kantaluvuksi* ja lukua n *eksponentiksi*.



Esimerkiksi potenssi 3^4 voidaan lausua joko ”kolme (korotettuna) potenssiin neljä”, ”luvun kolme neljäs potenssi” tai yksinkertaisemmin ”kolme neljänteen”.

Luvun a toista potenssia a^2 kutsutaan myös luvun a neliöksi ja kolmatta potenssia a^3 luvun a kuutioksi. Positiivisen luvun toinen tai kolmas potenssi voidaankin ajatella neliön pinta-alana tai kuution tilavuutena. Kun neliön sivun tai kuution särmän pituus on a, neliön pinta-ala on a^2 ja kuution tilavuus on a^3.



Potenssi oli aluksi määritelty vain siinä tapauksessa, että eksponentti on positiivinen kokonaisluku. Myöhemmin määritelmää on kuitenkin laajennettu myös eksponentin ollessa nolla tai negatiivinen kokonaisluku.

Tarkastellaan esimerkkien avulla, kuinka potenssien laskusäännöt saadaan potenssin määritelmästä positiivisen kokonaislukueksponentin tapauksessa.

Esimerkki A.4

1. Samankantaisten potenssien tulossa eksponentit lasketaan yhteen, sillä potenssit voidaan avata määritelmän mukaan kertolaskuiksi, joissa kerrottavien termien lukumäärän osoittavat eksponentit (esimerkiksi $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$):

$$a^4a^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)}_{4+3=7\,\text{kpl}} = a^7.$$

2. Samankantaisten potenssien osamäärässä osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti, sillä kun potenssit avataan kertolaskuiksi, osa tekijöistä supistuu pois:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}^{5-2=3\,\text{kpl}}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3.$$

3. Tulon potenssissa kaikki kantaluvun termit korotetaan samaan potenssiin, sillä kertolaskun vaihdannaisuuden vuoksi tekijöiden järjestystä voidaan vaihtaa lopputuloksen muuttumatta:

$$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\,\text{kpl}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{3\,\text{kpl}} = a^3b^3.$$

4. Osamäärän potenssissa sekä osoittaja että nimittäjä korotetaan samaan potenssiin murtolukujen laskusääntöjen perusteella:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}^{4\,\text{kpl}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4\,\text{kpl}}} = \frac{a^4}{b^4}.$$

5. Potenssin potenssissa eksponentit kerrotaan keskenään, sillä ulompi eksponentti kertoo kantalukuna olevien potenssien lukumäärän ja sisempi eksponentti kussakin näissä potensseissa olevien tekijöiden lukumäärän:

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)}_{2\cdot 3=6\,\text{kpl}} = a^6.$$

Kun esimerkit viedään yleiseen tapaukseen, tulee johdettua potenssien laskusäännöt.

Lause A.5 *Potenssien laskusääntöjä*

Olkoon m ja n kokonaislukuja sekä $a \neq 0$ ja $b \neq 0$ reaalilukuja.

1. Samankantaisten potenssien tulo
$$a^m a^n = a^{m+n}.$$
2. Samankantaisten potenssien osamäärä
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$
3. Tulon potenssi
$$(ab)^n = a^n b^n.$$
4. Osamäärän potenssi
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$
5. Potenssin potenssi
$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Tarkastellaan vielä, miten potenssin määritelmän laajennus on valittu laskusääntöjen säilyttämiseksi eksponentin ollessa nolla tai negatiivinen kokonaisluku.

Esimerkki A.6 Kun potenssi jaetaan sen kantaluvulla, eksponentti pienenee yhdellä (ks. samankantaisten potenssien osamäärä). Täten voidaan kirjoittaa esimerkiksi

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ 2^2 &= \frac{2^3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ 2^1 &= \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ 2^0 &= \frac{2^1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2^{-1} &= \frac{2^0}{2} = \frac{1}{2} \\ 2^{-2} &= \frac{2^{-1}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\ 2^{-3} &= \frac{2^{-2}}{2} = \frac{\frac{1}{2^2}}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Tästä huomataan, että $2^0 = 1$ ja $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ ainakin, kun $n = 1, 2, 3$.

Jos esimerkkiä vietäisiin pidemmälle yleiseen tapaukseen, määritelmän laajennus voitaisiin perustella tarkemmin.

Pohdinta A.7 Ovatko seuraavat väitteet totta aina/joskus/ei koskaan? Perustele vastauksesi.

a) Potenssin arvo on kantalukua suurempi.

b) Kun negatiivinen luku korotetaan potenssiin n, saadaan vastaukseksi positiivinen luku.

c) Kun positiivinen luku korotetaan potenssiin n, saadaan vastaukseksi negatiivinen luku.

d) Luku 3^{x+1} on kolminkertainen verrattuna lukuun 3^x.

e) Luku 2^{2x-1} on suurempi kuin luku 4^x.

Suuria ja pieniä lukuja voidaan ilmoittaa kätevämmin kymmenen potenssien avulla. Luvun *kymmenpotenssimuoto*

$$a \cdot 10^n$$

koostuu kertoimesta a, joka valitaan yleensä siten, että $1 \leq |a| < 10$, sekä kymmenen potenssista, jossa eksponentti n on kokonaisluku.

Pohdinta A.8 Kaisu ratkaisi seuraavan tehtävän alla kuvatulla tavalla. Pohdi, mitä Kaisu on ratkaisussaan tehnyt. Selitä, mitä tekisit itse eri tavalla. Muista perustelut.

a) Suomen väkiluku oli vuoden 2023 helmikuussa 5 567 868. Ilmoita väkiluku kymmenpotenssimuodossa yhden desimaalin tarkkuudella.

b) Eräs pieni esine on upotettu hieman alle valitun nollatason, $-0{,}000\,000\,034$ m syvyyteen. Ilmoita esineen paikka kymmenpotenssimuodossa.

c) Vihreän valon aallonpituus on noin 520 nm. Ilmoita aallonpituus metreinä ilman kymmenen potenssia, kun nano (n) tarkoittaa lukua 10^{-9}.

Ratkaisu:

a)
$$\begin{aligned} &5\,567\,868 \\ &= 55{,}67868 \cdot 10\,000 \\ &\approx 55{,}7 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &-0{,}000\,000\,034\,\mathrm{m} \\ &= 3{,}4 \cdot (-10)^8\,\mathrm{m} \\ &= 3{,}4 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} &520 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \\ &= 520 \cdot \frac{1}{10^9}\,\mathrm{m} \\ &= \frac{520}{1\,000\,000\,000}\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}000\,000\,000\,520\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Kymmenpotenssimuodossa $a \cdot 10^n$ eksponentti n kertoo, kuinka monta kertaa kerrointa a

kerrotaan tai jaetaan kymmenellä. Tämä voidaan ajatella desimaalilukujen tapauksessa myös pilkun siirtämisenä. Esimerkiksi tapauksessa

$$-254000 = -2,54 \cdot 10^5$$

pilkkua siirretään viisi askelta vasemmalle, ja tapauksessa

$$0,00056 = 5,6 \cdot 10^{-4}$$

pilkkua siirretään neljä askelta oikealle.

Jos kymmenpotenssimuodossa esitetty luku pyydetään ilmoittamaan tietyllä desimaalisella tarkkuudella, niin pyöristys tehdään kertoimelle.

Lisätieto A.9 Laskimissa on useimmiten oma toiminto kymmenpotenssimuodolle, esimerkiksi E tai EE. Esimerkiksi luku $3,45 \cdot 10^{-2}$ voitaisiin syöttää laskimeen muodossa $3,45\mathrm{E}-2$.

Harjoitustehtävät

1. Merkitse ja laske.

a) Potenssi $(-3)^4$ tulona.

b) Tulo $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ potenssina.

c) Luvun -7 käänteisluvun kuutio.

d) Luvun 6 neliön vastaluku.

e) Potenssi, jonka kantaluku on -2 ja eksponentti on -6.

2. Sievennä.

a) $x^{-4} \cdot x^7 \cdot (2x)^3$

b) $(x^2)^9 + (x^6)^3$

c) $\dfrac{x^5}{x \cdot x^8}$

d) $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)^{-3}$

e) $\left(\dfrac{-3x^2 \cdot x^4}{2}\right)^2$

3. Laske ilman laskinta.

a) $\dfrac{75^2}{15^2}$

b) $4^{1232} \cdot 0,25^{1230}$

c) $\dfrac{6^{190} \cdot 7^{190}}{42^{190}}$

d) $500^0 + 4^{-3} - 2^{-6}$

e) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$

4. Pertti päätti aloittaa koeviikon kokeisiin lukemisen hyvissä ajoin. Hän aikoo lukea seuraavana päivänä aina kaksi kertaa niin monta sivua kuin hän luki edellisenä päivänä. Jos Pertti lukee tänään 8 sivua, niin kuinka monta sivua hän lukee/luki

a) huomenna

b) kolmen päivän kuluttua

c) n päivän kuluttua

d) eilen

e) kolme päivää sitten

f) n päivää sitten?

5. Kirjoita sekä ilman kymmenpotenssia että kymmenpotenssimuodossa yhden desimaalin tarkkuudella

a) Viisikymmentä kahdeksan miljoonaa seitsemänsataa viisikymmentä tuhatta

b) Tuhat kaksisataa kolmekymmentä kuusi miljardisosaa.

A.2 Neliö- ja kuutiojuuri

Pohdinta A.10 Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi.

a) Neliön muotoisen puiston pinta-ala on 36 m^2. Kuinka pitkä puiston sivu on?

b) Tabitha keräilee harrastuksena kolikoita. Hänen kolikkokansionsa neliön muotoiselle sivulle mahtuu yhteensä 25 kolikkoa. Kuinka monta neliön muotoista kolikkotaskua on kullakin rivillä, kun keskenään samankokoiset taskut täyttävät koko sivun?

c) Jarin pikkusisarusten hiekkalaatikon pinta-ala on 3 m^2. Kuinka pitkäksi arvioisit hiekkalaatikon sivun pituuden?

d) Uimahallin kilpauima-altaan tilavuus on 1000 m^3. Jos allas olisi kuution muotoinen, kuinka pitkä olisi altaan särmä?

e) Sunna osti 30 tavallista kuusisivuista noppaa. Hän haluaa rakentaa nopista mahdollisimman suuren kuution. Montako noppaa korkea kuutio tällöin on? Jääkö noppia käyttämättä?

Pohdinnassa pystyttiin päättelemään neliön sivun tai kuution särmän pituus esimerkiksi miettimällä, mikä luku on pitänyt korottaa toiseen tai kolmanteen potenssiin, jotta on saatu neliön pinta-ala tai kuution tilavuus. Samaan lopputulokseen päädytään ottamalla pinta-alan arvosta *neliöjuuri* tai kuution tilavuudesta *kuutiojuuri*.

Määritelmä A.11 Olkoon a ja b reaalilukuja. Luvun a *neliöjuuri* on se ei-negatiivinen luku b, jonka neliö on luku a. Toisin sanoen

$$\sqrt{a} = b,$$

jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Luvun neliö on aina positiivinen tai nolla. Siksi määritelmän ehdosta $b^2 = a$ seuraa, että luku a on positiivinen tai nolla. Neliöjuuri on siis määritelty vain silloin, kun $a \geq 0$. Tätä kutsutaan neliöjuuren määrittelyehdoksi. Negatiivisen luvun neliöjuurta ei ole määritelty.

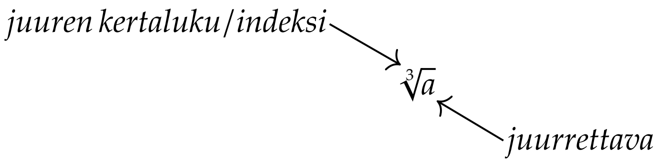
Määritelmä A.12 Olkoon a ja b reaalilukuja. Luvun a *kuutiojuuri* on se luku b, jonka kuutio on luku a. Toisin sanoen

$$\sqrt[3]{a} = b,$$

jos $b^3 = a$.

Koska luvun kuutio voi olla myös negatiivinen, esimerkiksi $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$, niin kuutiojuuri on määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Kuutiojuuren arvon merkki on sama kuin juurrettavan merkki.

Neliöjuuressa $\sqrt{a}$ ja kuutiojuuressa $\sqrt[3]{a}$ juurimerkin alla olevaa lukua a kutsutaan *juurrettavaksi*. Kuutiojuuren tapauksessa juuren *kertaluku* tai *indeksi* on 3 ja se merkitään juurimerkin vasempaan reunaan. Neliöjuuren tapauksessa kertalukua 2 ei ole yleensä tapana merkitä näkyviin.



Pohdinta A.13 Ovatko seuraavat väitteet totta aina/joskus/ei koskaan? Perustele vastauksesi. Jos väite on totta joskus, määritä ehto sille, että väite olisi totta aina.

a) Luvun neliöjuuren arvo on ei-negatiivinen.

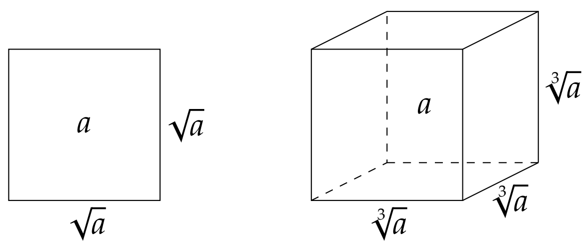
b) Luvun kuutiojuuren arvo on negatiivinen.

c) Lukujen $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ summa on $\sqrt{5}$.

d) Luvun neliöjuuren arvo on pienempi kuin juurrettavan arvo.

e) Luvun kuutiojuuren arvo on suurempi kuin luvun neliöjuuren arvo.

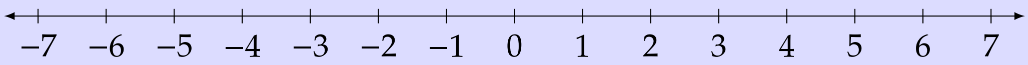
Positiivisen luvun neliö ja kuutio verrastettiin aiemmin neliön pinta-alaan ja kuution tilavuuteen. Positiivisen luvun neliö- ja kuutiojuuri voidaan vastaavasti tulkita geometrisesti. Kun neliön pinta-ala on a, niin sen sivun pituus on luvun a neliöjuuri $\sqrt{a}$. Kun kuution tilavuus on a, niin sen särmän pituus on luvun a kuutiojuuri $\sqrt[3]{a}$.



Tästä huomataan, että neliöjuuren $\sqrt{a}$ neliön $(\sqrt{a})^2$ arvo on juurrettava a, ja vastaavasti kuutiojuuren $\sqrt[3]{a}$ kuution $(\sqrt[3]{a})^3$ arvo on juurrettava a. Tämä seuraa suoraan neliö- ja kuutiojuuren määritelmistä.

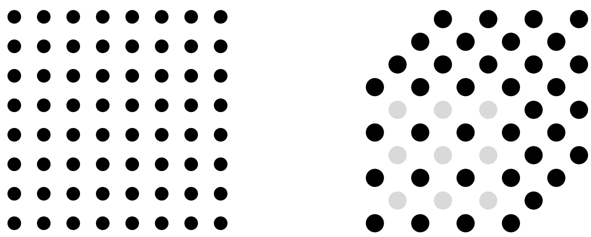
Pohdinta A.14 Arvioi seuraavien lukujen paikka lukusuoralla, jos mahdollista. Perustele vastauksesi laskemalla juurilausekkeiden arvot.

a) $\sqrt{1}$	d) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$	g) $-\sqrt{0,25}$	j) $\sqrt[3]{-43}$
b) $\sqrt{4}$	e) $\sqrt{7}$	h) $\left(-\sqrt{6}\right)^2$	k) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1000}$
c) $\sqrt{9+16}$	f) $\sqrt{-10}$	i) $\sqrt[3]{64}$	l) $\left(\sqrt[3]{-6}\right)^3$



Positiivista kokonaislukua a^2 kutsutaan *neliöluvuksi* tai *täydelliseksi neliöksi*, jos se on jonkin positiivisen kokonaisluvun a neliö. Vastaavasti positiivista kokonaislukua a^3 kutsutaan *kuutioluvuksi* tai *täydelliseksi kuutioksi*, jos se on jonkin positiivisen kokonaisluvun a kuutio. Neliöluvun osoittama määrä pisteitä voidaan asettaa neliön muotoiseksi kuvioksi, ja vastaavasti kuutioluvun osoittama määrä pisteitä voidaan asettaa kuution muotoiseksi kuvioksi.

Esimerkiksi luku 64 on sekä neliö- että kuutioluku, sillä se voidaan ilmoittaa neliönä 8^2 ja kuutiona 4^3. Täten 64 pisteestä voidaan muodostaa seuraavanlaiset kuviot, joissa yhdellä neliön rivillä on kahdeksan pistettä ja yhdellä kuution rivillä neljä pistettä.



Neliöluvun neliöjuuri ja kuutioluvun tai sen vastaluvun kuutiojuuri on aina kokonaisluku. Jos luku ei ole neliöluku, kuutioluku tai kuutioluvun vastaluku, niin sen neliö- ja kuutiojuuri ovat irrationaalilukuja. Tällöin neliö- ja kuutiojuuren tarkka arvo on ilmoitettava juurimerkin avulla.

Esimerkiksi luku 20 ei voi olla neliö- eikä kuutioluku tai kuutioluvun vastaluku, sillä sitä lähimmät neliöluvut ovat $4^2 = 16$ sekä $5^2 = 25$ ja lähimmät kuutioluvut ovat $2^3 = 8$ sekä $3^3 = 27$. Tällöin juuret $\sqrt{20} \approx 4,4721\ldots$ ja $\sqrt[3]{20} \approx 2,7144\ldots$ ovat irrationaalilukuja, joiden tarkat arvot ovat $\sqrt{20}$ ja $\sqrt[3]{20}$. Laskin saattaa sieventää neliöjuuren tarkan arvon muotoon $2\sqrt{5}$. Sieventämisessä käytettävät neliöjuuren laskusäännöt käydään läpi myöhemmin pitkän matematiikan opinnoissa.

Lisätieto A.15 Neliöjuuren arvo voidaan laskea laskimella käyttämällä sille määrättyä symbolia $\sqrt{\square}$ tai komentoa sqrt(a) (*square root*).

Kuutiojuuren arvo voidaan laskea laskimella käyttämällä yleiselle juurelle määrättyä symbolia $\sqrt[\square]{\square}$, johon voidaan sijoittaa indeksi 3, komentoa nroot(a,3) tai komentoa cbrt(a) (*cube root*). Joissakin laskimissa voi olla erikseen kuutiojuurelle määrätty symboli $\sqrt[3]{\square}$.

Huomautus A.16 Laskin saattaa antaa kuutiojuuren tarkan arvon muodossa $a^{\frac{1}{3}}$. Tämä tarkoittaa samaa kuin $\sqrt[3]{a}$. Murtopotensseihin tutustutaan tarkemmin myöhemmissä opinnoissa.

Harjoitustehtävät

6. Merkitse ja määritä tarkka arvo ilman laskinta. Perustele vastauksesi.

a) Luvun 81 neliöjuuri.

b) Luvun -8 neliöjuuri.

c) Luvun 20 neliöjuuren vastaluku.

d) Lukujen 36 ja 64 summan neliöjuuri.

e) Lukujen 36 ja 64 neliöjuurten summa.

7. Merkitse ja laske laskimella likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

a) Luvun 110 kuutiojuuri.

b) Luvun -3 kuutiojuuri.

c) Luvun -0,43 kuutiojuuren vastaluku.

d) Luvun 5432 neliöjuuri.

e) Luvun 71 neliöjuuren ja luvun 995 kuutiojuuren erotus.

8. Määritä tarkka arvo ilman laskinta.

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)^2$

b) $\left(-\sqrt[3]{48-56}\right)^3$

c) $\sqrt{121} + \sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

e) $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}$

9.

a) Määritä lukujen 200 ja 300 väliltä luonnolliset luvut, joiden neliöjuuri on luonnollinen luku.

b) Määritä lukujen -5000 ja -2000 väliltä kokonaisluvut, joiden kuutiojuuri on kokonaisluku.

10. Ovatko seuraavat luvut toistensa käänteis- vai vastalukuja? Perustele vastauksesi.

a) $\sqrt{2}$ ja $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{4}$ ja $\frac{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}{3}$

A.3 Potenssifunktio ja -yhtälö

Pohdinta A.17 Piirrä GeoGebralla samaan koordinaatistoon funktioiden x^2 ja x^3 kuvaajat sekä suora $y = a$, jossa a on reaaliluku, jonka suuruutta voidaan muuttaa esimerkiksi liukusäätimellä. Tutki, kuinka monta leikkauspistettä funktioiden x^2 ja x^3 kuvaajilla on suoran $y = a$ kanssa, kun

a) $a > 0$

b) $a = 0$

c) $a < 0$.

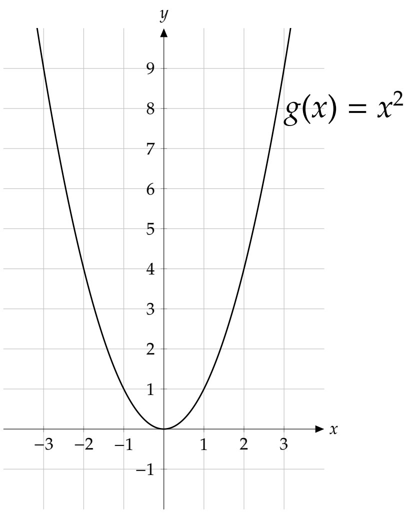
Pohdi sitten, kuinka löytämäsi tulokset liittyvät yhtälöiden $x^2 = a$ ja $x^3 = a$ ratkaisujen lukumäärään.

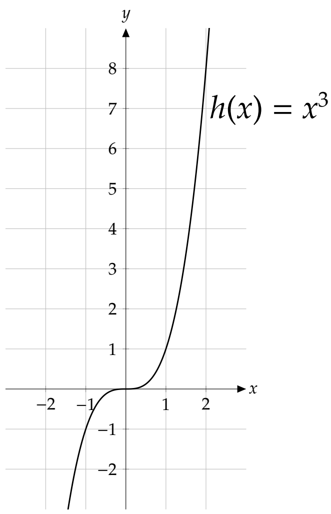
Pohdinnassa tutustuttiin *potenssifunktioihin* x^2 ja x^3 sekä niiden yhteyteen *potenssiyhtälöiden* $x^2 = a$ ja $x^3 = a$ kanssa. Tehtävässä käytetyllä leikkauspistemenetelmällä voidaan ratkaista potenssiyhtälöitä graafisesti vastaavien potenssifunktioiden kuvaajien sekä tilannetta vastaavien suorien avulla. Myöhemmin tässä kappaleessa tutustutaan tarkemmin potenssiyhtälöiden algebralliseen ratkaisemiseen.

Määritelmä A.18 Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Potenssifunktioksi* kutsutaan funktiota f, jonka määrittelevä lauseke on muotoa

$$f(x) = x^n.$$

Tässä moduulissa tutustutaan vain toisen ja kolmannen asteen potenssifunktioihin $g(x) = x^2$ ja $h(x) = x^3$. Alla on esitetty näiden funktioiden kuvaajat.





Toisen asteen potenssifunktion x^2 arvot ovat ei-negatiivisia, ja sen kuvaaja on y-akselin suhteen symmetrinen paraabeli. Kolmannen asteen potenssifunktio x^3 saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, ja sen kuvaaja on origon suhteen symmetrinen nouseva käyrä.

Pohdinta A.19 Matematiikan opettaja kasvattaa luokkahuoneessaan taikapapua. Opiskelijat mittasivat pavunvarren korkeuden kerran viikossa kuukauden ajan ja saivat seuraavat tulokset.

Viikko	Korkeus (cm)
1	1
2	4
3	9
4	16

Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi.

a) Millä funktiolla voidaan kuvata pavunvarren korkeutta?

b) Kuinka korkeaksi pavunvarsi on kasvanut

   i) 9. viikolla

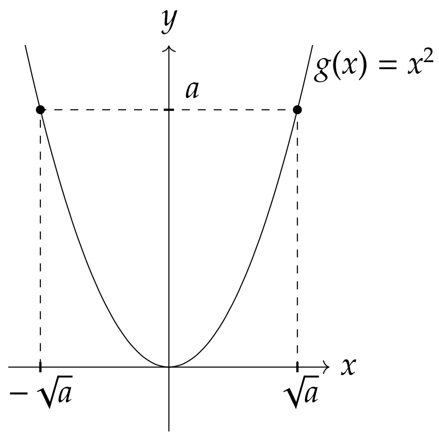
   ii) 15. viikolla?

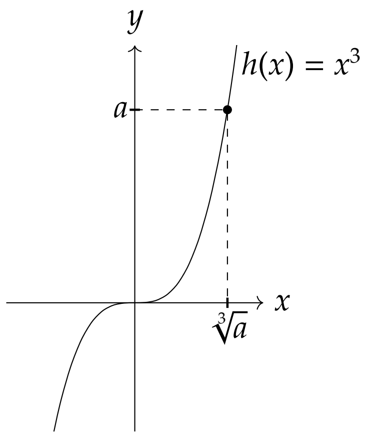
c) Kuinka monennella viikolla pavunvarsi on kasvanut

   i) 2,5 m korkeaksi

   ii) 4 m korkeaksi?

Potenssifunktioille voidaan laskea arvoja sijoittamalla muuttujan x arvo funktion lausekkeeseen, kuten muidenkin funktioiden tapauksessa. Esimerkiksi funktion nollakohdan tai tiettyä funktion arvoa vastaavien muuttujan arvojen ratkaisemiseksi algebrallisesti tarvitaan avuksi yhtälöitä. Ne kohdat, joissa potenssifunktion x^n arvo on a, ovat potenssifunktion lausekkeesta muodostetun *potenssiyhtälön* $x^n = a$ ratkaisuja.





Esimerkiksi jos halutaan ratkaista, millä muuttujan x arvoilla funktio x^2 saa arvon 16, muodostetaan yhtälö $x^2 = 16$. Jos taas halutaan ratkaista funktion x^3 nollakohdat, muodostetaan yhtälö $x^3 = 0$. Yhtälöä $x^2 = a$ kutsutaan joskus myös *neliöyhtälöksi* ja yhtälöä $x^3 = a$ *kuutioyhtälöksi*. Neliöyhtälön ratkaisemisessa käytetään neliöjuurta ja kuutioyhtälön ratkaisemisessa kuutiojuurta.

Koska luvun ja sen vastaluvun neliöt ovat yhtä suuret, niin neliöyhtälöllä voi olla kaksi ratkaisua. Esimerkiksi $2^2 = 4$ ja $(-2)^2 = 4$, joten neliöyhtälön $x^2 = 4$ toteuttavat ainakin luvut $x = 2$ ja $x = -2$. Päätellyt ratkaisut ilman muiden mahdollisten ratkaisujen poissulkemista ei kuitenkaan riitä vastaukseksi. Neliöyhtälön algebrallisessa ratkaisussa yhtälön kummaltakin puolelta otetaan neliöjuuri. Neliön neliöjuuri voidaan esittää myös muodossa $\sqrt{x^2} = |x|$, jolloin esimerkiksi $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$ ja $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$. Täten kun vaikkapa yhtälöstä $x^2 = 4$ otetaan kummaltakin puolelta neliöjuuri, saadaan $|x| = 2$. Kun muuttujan x itseisarvo on kaksi, sen arvo voi olla joko kaksi tai sen vastaluku miinus kaksi, eli $x = 2$ tai $x = -2$.

Kuten pohdinnassa A.17 huomattiin, niin neliöyhtälöllä $x^2 = a$ on kaksi ratkaisua kun a on positiivinen. Nämä ratkaisut ovat $x = \sqrt{a}$ ja $x = -\sqrt{a}$, ja ne voidaan ilmoittaa lyhyemmin muodossa $x = \pm\sqrt{a}$. Kun a on nolla, neliöyhtälöllä on yksi ratkaisu, $x = 0$. Kun a on negatiivinen, neliöyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua, sillä minkään luvun neliö ei ole negatiivinen.

Kuutioyhtälöllä $x^3 = a$ puolestaan on aina täsmälleen yksi ratkaisu, $x = \sqrt[3]{a}$. Tämä perustuu siihen, että kolmas potenssi ja kuutiojuuri ovat toistensa käänteisoperaatiot. Kolmannen potenssin arvo on merkiltään sama kuin sen kantaluku ja vastaavasti kuutiojuuren arvon merkki on sama kuin sen juurrettavan merkki. Näin ollen kuutioyhtälön ratkaisu on aina yksikäsitteinen.

Pohdinta A.20 Pietu on ratkaissut yhtälöt seuraavalla tavalla. Pohdi, mitä Pietu on ratkaisussaan tehnyt. Mitä tekisit itse eri tavalla? Muista perustelut ja selitykset.

a) $x^2 = 121$

b) $x^2 - 15 = -15$

c) $4x^2 + 36 = 0$

d) $2x^3 + 19 = 147$

Ratkaisu:

a) $x^2 = 121$
$$x = \sqrt{121}$$
$$x = 11$$

b) $x^2 - 15 = -15$
$$x^2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{0}$$
$$x = \pm 0$$

c) $4x^2 + 36 = 0$
$$4x^2 = -36$$
$$x^2 = -9$$
$$x = \sqrt{-9}$$
$$x = -3$$

d) $2x^3 + 19 = 147$
$$2x^3 = 166$$
$$x^3 = 83$$
$$x = \sqrt{83}$$
$$x = 9,11043\ldots$$

Jotkin yhtälöt voidaan palauttaa potenssiyhtälömuotoon, kuten edellisen pohdinnan b–d-kohdissa, jolloin voidaan käyttää potenssiyhtälön juuriratkaisumenetelmää.

Harjoitustehtävät

11. Olkoon $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^3$. Määritä

a) $f(7)$

b) $f(-1,5)$

c) $g(0)$

d) $g(\frac{1}{3})$

e) $g(-4)$.

12. Piirrä funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^3$ kuvaajat GeoGebralla ja määritä niiden avulla yhden desimaalin tarkkuudella

a) $f(2,4)$

b) $g(-1,5)$

c) x, kun $f(x) = 7$

d) x, kun $f(x) = -3$

e) x, kun $g(x) = 2$.

13. Ratkaise seuraavat yhtälöt. Tarkista vastauksesi sijoittamalla määrittämäsi muuttujan x arvot takaisin alkuperäiseen yhtälöön.

a) $-x^2 = -36$

b) $x^3 + 8 = 0$

c) $4x^2 + 53 = 2x^2 + 21$

d) $\frac{1}{4}x^3 - 35 = 19$

e) $6(x^2 - 4) - 7 = 23$

14. Muodosta ja ratkaise yhtälöt.

a) Kuinka moninkertaiseksi neliön sivun pituus pitäisi kasvattaa, jotta neliön pinta-ala nelinkertaistuisi?

b) Kuinka moninkertaiseksi kuution särmän pituus pitäisi kasvattaa, jotta kuution tilavuus kolminkertaistuisi?

15. Suorakulmaisen särmiön muotoisen rasian tilavuus on 340 cm^3. Sen leveys on kaksinkertainen pituuteen nähden ja pituus viisinkertainen korkeuteen nähden. Kuinka leveä, pitkä ja korkea rasia on? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

B Opettajan opas

Tähän opettajan oppaaseen on koottu oppimateriaalin pohdintatehtäviin liittyviä tavoitteita sekä vinkkejä opettajalle opiskelijoiden tukemiseksi ja tehtävien eriyttämiseksi. Lisäksi oppaassa on esitetty oppimateriaalin läpikäymiseen suunniteltu ajankäyttöehdotus. Liitteeseen A koottu oppimateriaali on osa lukion yhteisen matematiikan moduulin *Luvut ja yhtälöt* (MAY1) oppimateriaalia, ja se on suunniteltu käytäväksi läpi moduulin loppupuolella, toiseksi viimeisenä asiana ennen prosenttiin liittyviä kappaleita.

B.1 Ajankäyttöehdotus

Oppimateriaali on suunniteltu käytäväksi läpi kolmessa 75 minuutin tai viidessä 45 minuutin oppitunnissa. Alla on esitelty ajankäyttöehdotus näille kahdelle eri mittaiselle oppitunnille.

	75 min	45 min
Potenssi	1	2
Neliö- ja kuutiojuuri	1	1
Potenssifunktio ja -yhtälö	1	2

B.2 Pohdintatehtävät

Kaikki pohdintatehtävät on suunnattu pareittain tai ryhmässä tehtäviksi keskustelevan ilmapiirin aikaansaamiseksi, vaikkei tätä ole erikseen tehtävissä mainittu. Tarvittaessa pohdinnat voi kuitenkin tehdä myös yksin.

Oppaassa on esitetty kuhunkin pohdintatehtävään liittyviä tavoitteita opiskelijan näkökulmasta. Opettajalle on myös annettu tehtäväkohtaisia neuvoja opiskelijan oppimisen tukemiseksi esimerkiksi johdattelevilla kysymyksillä, sekä esimerkkejä eriyttämiseen. Lisäksi oppaaseen on koottu pohdintatehtävien vastaukset, jotka olisi hyvä käydä kunkin tehtävän päätteeksi opiskelijoiden kanssa läpi.

B.2.1 Potenssi

Pohdinta A.1

Tässä pohdintatehtävässä on tarkoituksena johdatella opiskelijoita muistelemaan potenssin määritelmää eksponentin ollessa kokonaisluku sekä palauttamaan mieleen potenssien laskusääntöjä.

Opiskelijat voivat tarvittaessa käyttää apuna laskinta, jos jotkin kohdat eivät avaudu pelkästään pohtimalla. Tehtävää voi eriyttää ylöspäin pyytämällä oppilaita johtamaan tai päättelemään potenssien laskusäännöt yleisessä tapauksessa tehtävässä tehdyn pohdinnan pohjalta.

Vastaus:

a) Oheisessa taulukossa on värikoodattu oikea ryhmäjaottelu. Taulukossa valkoisille ruuduille ei löydy yhtä suurta vastinetta. Taulukon alapuolella ryhmät on vielä koottu allekkain.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$\frac{1}{7^4}$	3^6	12^3	$3^{2 \cdot 3}$
$(4 \cdot 3)^3$	$12^3 \cdot 12^3$	2^4	1	3^{2+3}
$(3^2)^3$	1^{13}	$\left(\frac{4}{9}\right)^6$	7^{-4}	$27 \cdot 4^3$
12^9	2^2	$4^3 \cdot 3^3$	$3^2 \cdot 3^3$	$(-7)^4$
$\frac{4^6}{9^6}$	-7^4	3^{2^3}	$\frac{2^5}{2^3}$	39^0

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$\frac{1}{7^4} = 7^{-4}$

$3^6 = 3^{2 \cdot 3} = (3^2)^3$

$12^3 = (4 \cdot 3)^3 = 27 \cdot 4^3 = 4^3 \cdot 3^3$

$1 = 1^{13} = 39^0$

$3^{2+3} = 3^2 \cdot 3^3$

$\left(\frac{4}{9}\right)^6 = \frac{4^6}{9^6}$

$2^2 = \frac{2^5}{2^3}$

Ei paria: $12^3 \cdot 12^3$, 12^9, $(-7)^4$, -7^4, 3^{2^3}.

b) Esimerkiksi

$12^3 \cdot 12^3 = 12^6$

$12^9 = (12^3)^3$

$(-7)^4 = 7^4$

$-7^4 = -(7^4)$

$3^{2^3} = 3^8$

Pohdinta A.7

Tehtävän tarkoitus on saada opiskelijat ajattelemaan potenssia operaationa ja ymmärtämään sen toimintaa muutenkin kuin laskemisen kautta. Tehtävässä on otettu huomioon potensseihin liittyviä virhekäsityksiä.

Kohdissa a–c opettaja voi ohjata opiskelijoita kokeilemaan erilaisia konkreettisia kantalukuja ja eksponentteja, jotka vastaavat kunkin väitteen tilannetta. Kohdissa d–e opiskelijoita kannattaa kannustaa hyödyntämään potenssien laskusääntöjä. Kohdissa, jotka ovat joskus totta, voi eriyttää ylöspäin pyytämällä opiskelijoita keksimään ehtoja, joilla väitteet olisivat aina totta.

Vastaus:

a) Joskus

b) Joskus

c) Ei koskaan

d) Aina

e) Ei koskaan

Pohdinta A.8

Tehtävässä tutkitaan luvun muuttamista kymmenpotenssimuotoon ja takaisin. Opiskelijoiden olisi hyvä huomata valita kerroin oikealta väliltä ja ymmärtää, mitä kymmenpotenssimuotoon muuttaminen oikeastaan tarkoittaa.

Vastaus:

a) $5,6 \cdot 10^6$

b) $-3,4 \cdot 10^{-8}$

c) $0,000\,000\,520$

B.2.2 Neliö- ja kuutiojuuri

Pohdinta A.10

Tehtävän tarkoitus on johdatella opiskelijaa neliö- ja kuutiojuuriin. Opiskelijaa voi tarvittaessa ohjata miettimään, mikä luku on pitänyt korottaa toiseen tai kolmanteen potenssiin, jotta on saatu tehtävässä annettu pinta-ala tai tilavuus.

Kohdassa c opiskelijaa kannattaa kannustaa vertaamaan pinta-alaa lähimpien kokonaislukujen neliöihin. Tehtävän tasoa voi eriyttää vastauksen esitystarkkuutta muuttamalla.

Kohdassa e tehtävää voi eriyttää ylöspäin pyytämällä opiskelijaa pohtimaan, miten ylijääneitä noppia leikkaamalla voitaisiin arvioida 30 nopasta rakennetun kuution särmän pituutta.

Vastaus:

a) 6 m

b) 5

c) 1 m < 1,73 m < 2 m

d) 10 m

e) 3 noppaa korkea, 3 noppaa jää käyttämättä.

Pohdinta A.13

Pohdinnan tarkoitus on saada opiskelija pohtimaan neliö- ja kuutiojuuren eroja ja yhteyttä sekä kasvattamaan omaa lukumääräisyyden tajuaan juurien tapauksessa.

Opiskelijaa kannattaa kannustaa kokeilemaan eri lukuja juurten erilaisen käyttäytymisen huomaamiseksi. Opiskelija voi myös pohtia käänteisoperaation eli potenssin käyttäytymistä, josta voidaan päätellä juurien käyttäytyvän päinvastaisesti. Opettaja voi harkita myös tehtävän yhdistämistä funktion kuvaajien tulkintaan asian selkeyttämiseksi.

Vastaus: Olkoon juurrettava a.

a) aina

b) joskus, aina jos $a < 0$

c) ei koskaan

d) joskus, aina jos $a > 1$

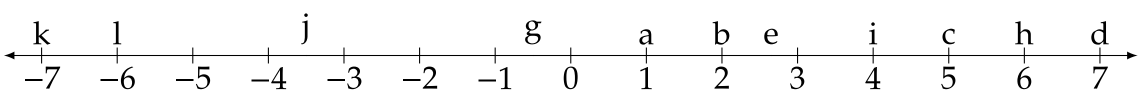
e) joskus, aina jos $0 < a < 1$ (määritelty, kun $a \geq 0$)

Pohdinta A.14

Tehtävän tarkoitus on, että opiskelija harjaannuttaa neliö- ja kuutiojuurien laskemistaitoaan ja samalla sisäistää juurten arvojen sijoittumista lukusuoralle niiden suuruusluokkaa arvioimalla. Tehtävässä on tarkoitus päätellä paikka aluksi ilman laskinta, ja perusteluvaiheessa juurilausekkeiden arvot voi laskea joko päässä tai käyttäen laskinta etenkin, jos arvo ei ole kokonaisluku.

Opiskelijoita kannattaa huomauttaa siitä, että myös irrationaaliluvuilla on tarkka paikka lukusuoralla.

Vastaus: f) $\sqrt{-10}$ ei ole määritelty



B.2.3 Potenssifunktio ja -yhtälö

Pohdinta A.17

Pohdinnassa opiskelija pääsee harjoittamaan ohjelmistotaitojaan funktion kuvaajien piirtämisen ja leikkauspisteiden löytämisen kautta. Tehtävän tarkoitus on johdatella opiskelijaa toisen ja kolmannen asteen potenssifunktioihin sekä niiden yhteyteen toisen ja kolmannen asteen potenssiyhtälöiden kanssa. Opiskelijan olisi hyvä huomata toisen ja kolmannen asteen potenssiyhtälöiden ratkaisujen lukumäärien erot sekä yhtäläisyydet ja pohtia, mistä ne johtuvat.

Tehtävässä on mahdollista eriyttää ylöspäin kannustamalla opiskelijaa piirtämään myös korkeamman asteen potenssifunktion kuvaajia ja etsimään niille yhteisiä piirteitä toisen ja kolmannen asteen potenssifunktioiden kanssa sekä keskenään.

Pohdintaosuudessa opiskelijalle voi tarvittaessa ehdottaa joidenkin konkreettisten positiivisen ja negatiivisen luvun toisen ja kolmannen potenssin laskemista, ja sitten pohtimaan luvun ja sen vastaluvun potenssien käyttäytymistä eri eksponenteilla päätelmien tekemisen tueksi.

Vastaus:

a) x^2:lla 2, x^3:lla 1

b) x^2:lla 1, x^3:lla 1

c) x^2:lla 0, x^3:lla 1

Pohdinta A.19

Tehtävän tarkoitus on kehittää opiskelijan funktioajattelua ja ongelmanratkaisukykyä funktion lausekkeen päättelemisen kautta sekä harjoittaa funktion arvon ja muuttujan arvon laskutaitoa. Pohdinta johdattelee potenssiyhtälön ratkaisemiseen.

Opiskelijoille on hyvä huomauttaa, että tässä tapauksessa tarkastellaan toisen asteen potenssifunktiota vain positiivisilla muuttujan arvoilla, jolloin funktiokin saa positiivisia arvoja. Viimeistään teoriaosuuden kautta yleiseen tapaukseen siirtyessä on hyvä korostaa, että toisen asteen potenssiyhtälöllä on positiivisilla funktion arvoilla aina kaksi ratkaisua, joista toinen voidaan erikoistapauksissa, kuten pituuksia ratkaistaessa, jättää huomiotta.

Opiskelija saattaa tarvita tukea kohdassa c.i, jossa kysyttyä korkeutta ei saavuteta tasan viikon mittausajankohtana. Tällöin opiskelijaa voi pyytää vertaamaan edellisen ja seuraavan viikon korkeuksia ja päättelemään vastauksen tätä kautta. Ylöspäin eriytettäessä opiskelijaa voi pyytää tutkimaan, kuinka b–c-kohtien vastaukset muuttuvat, jos pavunvarren korkeutta kuvattaisiinkin kolmannen asteen potenssifunktiolla.

Vastaus:

a) $f(x) = x^2$, kun x on viikko.

b) i) 81 cm
   ii) 2,25 m

c) i) 16. viikolla
   ii) 20. viikolla

Pohdinta A.20

Tehtävässä opiskelijan on tarkoitus soveltaa oppimaansa potenssiyhtälön ratkaisumenetelmää ratkaisujen tarkistamiseksi. Tehtävässä on otettu huomioon yleisiä potenssiyhtälön ja yleisen yhtälön ratkaisemisessa esiintyviä virheitä.

Vastaus:

a) $x = \pm 11$

b) $x = 0$

c) ei ratkaisua

d) $x = 4$

C Tehtävien vastaukset

1.

a) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

b) $4^5 = 1024$

c) $(-7)^{-3} = -\frac{1}{343}$

d) $-6^2 = -36$

e) $(-2)^{-6} = \frac{1}{64}$

2.

a) $8x^6$

b) $2x^{18}$

c) x^{-4}

d) $27x^{-9}$

e) $\dfrac{9}{4}x^{12}$

3.

a) 25

b) 16

c) 1

d) 1

e) $\dfrac{15}{4}$

4.

a) 16

b) 64

c) $8 \cdot 2^n$

d) 4

e) 1

f) $8 \cdot 2^{-n}$

5.

a) $58\,750\,000 \approx 5,9 \cdot 10^7$

b) $0,000\,001\,236 \approx 1,2 \cdot 10^{-6}$

6.

a) $\sqrt{81} = 9$

b) $\sqrt{-8}$ ei määritelty

c) $-\sqrt{20}$

d) $\sqrt{36+64} = 10$

e) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 14$

7.

a) $\sqrt[3]{110} = 4,79$

b) $\sqrt[3]{-3} = -1,44$

c) $-\sqrt[3]{-0,43} = 0,75$

d) $\sqrt{5432} = 73,70$

e) $\sqrt{71} - \sqrt[3]{995} = -1,56$

8.

a) $2 + \sqrt{5}$

b) 2

c) 6

d) 2

e) -2

9.

a) 225, 256, 289

b) -4913, -4096, -3375, -2744, -2197

10.

a) Käänteislukuja.

b) Vastalukuja.

c) Käänteislukuja.

11.

a) $f(7) = 49$

b) $f(-1,5) = 2,25$

c) $f(0) = 0$

d) $g(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$

e) $g(-4) = -64$

12.

a) $f(2,4) \approx 5,8$

b) $g(-1,5) \approx -3,4$

c) $x \approx \pm 2,6$

d) ei määritelty

e) $x \approx 1,3$

13.

a) $x = \pm 6$

b) $x = -2$

c) ei ratkaisuja

d) $x = 6$

e) $x = \pm 3$

14.

a) Kaksinkertaiseksi.

b) $\sqrt[3]{3}$-kertaiseksi eli noin 1,44-kertaiseksi.

15. Leveys 189 mm, pituus 95 mm, korkeus 19 mm.