Aritmeettiset ja geometriset lukujonot ja niiden summat

Pro gradu -tutkielma
Niko Kulmala
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2023

Sisällys

1 Johdanto

Luokassa moni on varmasti kuullut lausahduksen ”Missä mä tarvin tätä oikeassa elämässä?” Koulussa opituista asioista sanotaan usein, että niillä ei ole mitään käyttöä tulevaisuudessa. Varsinkin matematiikka ja sen esiintyvyys koulun ulkopuolella on opiskelijalle todella yleinen valituksen aihe. Itselle ensimmäisenä mielikuvana tästä tulee koordinaatiston oppiminen. Viimeistään lukion kursseilla monet opiskelijat alkavat pohtimaan, mihin he voivat oppimiaan asioita käyttää jatkossa vai käydäänkö niitä läpi vain sen takia koska on pakko? Totuushan on, että suurinta osaa matematiikan tunneilla opituista asioista ei tulla tarvitsemaan opiskelujen päätyttyä. Matematiikan kursseilta arkielämään siirtyvät asiat koostuvat pääsääntöisesti päättelykyvystä ja luovuudesta. Nykyään lukiossa on kaikille matematiikan opiskelijoille kurssi, joka koskettaa enemmän tulevaa arkielämää. Talousmatematiikka on muuttunut pakolliseksi vuoden 2019 LOPS:ssa niin lyhyen kuin pitkän matematiikan opiskelijoille.

Talousasiat ovat nuorille nykyisin paljon ajankohtaisempia kuin koskaan aiemmin. Heidän keskuudessaan ajatukset ja mahdollisuudet tulevaisuudelta ovat kiinnostavampia kuin aiemmin. Lähivuosina taloudellisen tilanteen turvaaminen ja aikainen eläköityminen on saanut enemmän ajatusta. Suuri kasvu huomattiin etenkin sijoittamisessa juuri korona-aikana; vuoden 2020 lopulla osakkeisiin sijoittaneiden suomalaisten määrä oli kasvanut uusiin huippulukemiin saavuttaen melkein 900 000 kotitaloutta [7]. Suurena tekijänä kasvussa onkin arvioitu olevan naisten lisääntynyt aktiivisuus sijoittamisessa sekä nuorten ilmapiirissä syntynyt muutos rahaan ja sijoittamiseen [6]. Asiantuntijoiden mukaan osasyyksi sijoitusinnolle on myös epäilty olevan sen vahvasti esillä oleminen eri media-alustoissa.

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston oppimateriaaliprojektia, jonka tarkoituksena on muodostaa materiaalia lukion matematiikan kursseille. Kyseinen materiaali on suunniteltu osaksi lukion pitkän matematiikan MAA9-kurssille sekä vastaavalle lyhyen matematiikan MAB7-kurssille. Koottu opintomateriaali koostuu aritmeettisesta ja geometrisesta lukujonosta ja summasta. Tässä oppikirjassa opiskelijat rakentavat itse uutta sisältöä erilaisten pohdintatehtävien avulla.

2 Perusteluosio

Tässä luvussa kerrotaan oppikirjan synnystä ja sen suuntaamista tavoitteista opiskelijoille. Oppimateriaali on tehty vuoden 2019 voimaan tulleen lukion opetussuunnitelman mukaan (LOPS 2019). Kirjassa pyritään antamaan opiskelijalle luovempi kuvaus uudesta opittavasta aiheesta sekä irtautua vanhasta perinteikkäämmästä kirjan sisältömallista, missä esitellään uusi aihe, jonka perään esitetään tehtäviä tehtävien perään. Näin pyritään herättämään opiskelijan mielenkiinto ja tehostamaan hänen aktiivisuuttaan ja oppimistaan. Opetussuunnitelman lisäksi kirjan teossa on erityisesti otettu huomioon artikkelit *Habits of Mind* [5] ja *Collaborative Learning in Mathematics* [14]. Näiden tarkempaa käyttöä käydään läpi myöhemmässä osiossa.

2.1 Opetussuunnitelma

Opetushallituksen laatima lukion opetussuunnitelma [10] on koko Suomen lukiomaailman ydin ja perusta. Matematiikan opetuksessa halutaan korostaa matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä, hyödynnetään mahdollisuuksia vahvistaa opiskelijan kiinnostusta, itsetuntoa ja tiedonhankintaprosesseja sekä kannustetaan opiskelijaa kokeiluihin ja sinnikkääseen työnskentelyyn [10]. Opetussuunnitelmassa halutaan valita opetuksen lähtökohdat opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, joita voidaan ratkaista matematiikan avulla. Opetuksessa tulee käyttää vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Tällä vahvistetaan muun muassa vuorovaikutusosaamista [10]. Matematiikka on yleisesti koettu oppiaineena, missä opiskelija on yksin oman onnensa nojassa. Tässä kirjassa on ideana käydä erinäisiä pohdintoja yhdessä opettajan sekä muiden opiskelijoiden ja ystävien kanssa. Tämän vuoksi tähän osioon on kehitelty myös tehtävää kirjan ulkopuolelle. Samalla ajatuksena on ollut tehostaa matemaattisten mallien hahmottamista ilman suoranaista koulumatematiikkaa. Kirjassa esitettyjen tehtävien tilanteet on tarkoitettu herättämään kysymyksiä, ihmetystä ja hilpeyttä. Kirjan toteuttaessa tehtävänsä sille suunnitellulla tavalla opiskelijat voivat kokea kirjan tarjonnat mahdollisesti jopa hauskaksi ajanvietteeksi. Tämän tavoitteen puolesta tehtävien tarjoamat teemat tähtäävät reaalimaailman tilanteisiin, välillä myös hullunkurisella tavalla.

Lukion 2019 opetusuunnitelman keskeiset tavoitteet kurssille MAA9/MAB7 on listattu alla. Nämä ovat myös keskeisessä osassa kirjan teossa:

- oppii hyödyntämään matemaattisia valmiuksiaan resurssien riittävyyteen, talouden suunnitteluun, yrittäjyyteen ja kannattavuuden laskentaan
- soveltaa lukujonojen kaavoja talouteen liittyvissä matemaattisissa ongelmissa
- oppii sovittamaan taloudellisiin tilanteisiin matemaattisia malleja ja ymmärtää niiden rajoitukset
- osaa hyödyntää ohjelmistoja laskelmien tekemisessä ja sovellusten yhteydessä [10].

Tässä kirjan osiossa keskittyminen kohdistuu erityisesti lukujonojen soveltamiseen erinäisissä taloudellisissa ongelmissa sekä matemaattisten mallien ymmärtämiseen sekä niiden sovittamiseen taloudellisissa tilanteissa. Keskeisistä opetussuunnitelman sisällöistä tässä kirjan osiossa huomio keskittyy aritmeettisiin ja geometrisiin lukujonoihin ja niiden summiin sekä taloudellisten tilanteiden sovelluksiin, missä lukujonoja ja summia hyödynnetään. MAA9 ja MAB7 ovatkin lähes ainoat lukion kurssit, joissa käydään matematiikan taloudellista puolta tarkemmin läpi ja sitä miten se arjessa esiintyy. Lyhyen matematiikan puolelta löytyy mainittua MAB7-kurssia edeltävä MAB6 *Talousmatematiikan alkeet* -kurssi. Kyseisellä kurssilla käydään talousmatematiikan peruskäsitteitä ja opitaan kuvaamaan talouselämän kehittymistä. Lisäksi kurssilla kerrataan prosenttilaskentaa. Tästä syystä kirja lähteekin aiheeseen liikkeelle perusteista eikä kurssi vaadi talousmatematiikasta pohjatietoa.

2.2 Tehtävien lähestymismuodot

Kirjassa esitetyt tehtävät voidaan jakaa kolmeen eri osa-alueeseen: mallitehtäviin, pohdintatehtäviin ja harjoitustehtäviin. Kappaleet alkavat yleisesti pohdintatehtävillä, missä käsitellään uutta aihetta mahdollisimman yksinkertaisessa ja helposti lähestyttävässä muodossa. Ideana on, että käsitellessään tehtävää opiskelijat eivät vielä tiedä mitään uudesta aiheesta. Pohdinnassa on esitetty tarkasti eteenpäin johdattelevia kysymyksiä. Näin opiskelijat päätyvät pohdinnassaan uuden aiheen ytimeen ja näin asian oppimista ja ymmärtämistä on helpotettu huomattavasti. Kevyellä suunnittelulla ja aiheen sopivalla esillepanolla saadaan uuden oppimisesta paljon tehokkaampaa.
Pohdintatehtäviä löytyy kappaleen alun lisäksi myös muutamia kirjan eri osioista. Nämä tehtävät ovat kirjan kappaleissa käytyjen aiheiden tapaisia tehtäviä sekä myös hieman soveltavampia ja haastavampia.
Pohdintatehtävien tarkoituksena on herättää opiskelijan mielenkiintoa ja kehittää syvempää ajattelua. Tämä voidaan suorittaa halutessaan yksin tai yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa. Yhdessä tekeminen onnistuu sekä ryhmissä että opettajajohtoisesti. Kappaleiden loppupuolella olevat pohdintatehtävät kokoavat yhteen kappaleiden pääasiat ja johdattelevat opiskelijan ymmärtämään aiheen kokonaiskuvan.

Pohdintatehtävien lisäksi kirjasta löytyy mallitehtäviä. Mallitehtävien tarkoituksena on esittää, miten erilaisia matemaattisia ongelmia on mahdollista lähestyä. Opiskelijoille on suurta apua siitä, kun he näkevät mekaanisia käsittelytapoja monenlaisiin tehtäviin. Toki mahdollisuutena on, että opiskelijat opettelevat vain laskutavan ulkoa. On kuitenkin tärkeää pitää mielessä, että oppiminen varsinkin lukiotasolla on hyvin paljon opiskelijan vastuulla. Mallitehtävät ovat rakenteeltaan hyvin samanlaisia kuin osa pohdintatehtävistä sekä harjoitustehtävistä. Tarkoituksena on, että opiskelija ei jää jumiin ja voi palata malleihin ja niiden avulla oppia soveltamaan oppimaansa vastaaviin ongelmiin.

Joka kappaleen lopusta löytyy aiheeseen sopivia harjoitustehtäviä. Tehtäviä löytyy niille merkityiltä ”Harjoitukset” -osioilta. Tehtävät vastaavat kappaleissa käytäviä malli- ja pohdintatehtäviä. Tehtäviä löytyy yleisesti 6-8 kappaletta. Harjoitukset on suunniteltu jätettävän kotitehtäviksi.

Oppikirjassa esiintyvät tehtävämuodot on suunniteltu artikkelin Collaborative Learning in Mathematics [14] pohjalta. Artikkelissa esitettiin viisi erilaisia aktiviteettia, joista olemme valinneet kaksi kirjan taustalle:

- omien ongelmien ja tehtävien luominen
- päättelyn ja ratkaisujen analysointi [14].

Omien ongelmien ja tehtävien luominen on tehokas tapa kehittää opiskelijoiden ymmärrystä aiheeseen liittyen. Opiskelijoiden rohkaisu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan sekä omien ratkaisujen keksimiseen ja esittämiseen onkin yksi lukion matematiikan opetussuunnitelman yleisten tavoitteiden pääkohtia [10]. Tämä on otettu huomioon kirjassa. Opiskelijoiden onkin talousmatematiikan aiheessa helppo soveltaa ja keksiä teemoja ja aiheita pohdintoihin. Samalla kun heidät laitetaan opettamaan toisilleen keksimiään ongelmia, he saavat toimia opettajina toisilleen. Tämä auttaa heitä myös paremmin huomaamaan, mitä he ymmärtävät aiheesta ja kehittää heidän kykyään ilmaista ja perustella ajatuksiaan.

Päättelyyn ja ratkaisujen analysointiin perustuvissa tehtävissä keskitytään siihen, miten eri tavoin erilaisia ongelmia voidaan ratkaista, miten niihin voidaan päätyä sekä mahdollisiin ratkaisujen ilmaisussa esiintyviin virheisiin. Aritmeettisten ja geometristen jonojen ja summien tehtävistä voidaan löytää erilaisia lähestymistapoja ratkaisuille. Kun jonoja ja summia aletaan soveltamaan myöhemmin vielä enemmän taloudelliseen maailmaan, lähestymistapoja ilmestyy vielä lisää. Onkin osoitettu erilaisten, soveltavien lähestymistapojen auttavan opiskelijoiden ymmärrystä aritmeettisten ja geometristen lukujonojen ja summien ymmärryksessä [2][9].

2.3 Matemaattinen ajattelu

Yleinen käsitys matemaattisesta ajattelusta on, että matematiikkaa osaavalla on hyvä numeropää tai että hän on taitava päässälaskija. Matematiikka on kuitenkin myös niin paljon kaikkea muuta. Tämä näkyy vahvasti nykyään ylioppilaskirjoituksissa, joissa on sähköistymisen kautta esiintynyt paljon enemmän luovuutta vaativia tehtäviä. Rohkea kokeilu, luovuus ja tutkiminen ovatkin lukion matematiikan opetussuunnitelman oleellisia tavoitteita [10]. Tämän kirjan yksi perustana toimivista artikkeleista on *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [5]. Artikkelissa tuodaan esille monipuolisesti tapoja ajatella ja lähestyä matemaattisia pulmia, joita tulisi ottaa vahvasti huomioon opetettavan sisällön kanssa. Tähän kirjaan on pyritty tuomaan kyseisestä artikkelista tähän aiheeseen parhaiten sopivia ajattelutapoja. Pääteemoina ovat:

- Kuvaileminen
- Säännönmukaisuuksien löytäminen
- Visualisointi [5].

Kuvailemisella tarkoitetaan etenkin verbaalista kykyä selittää ja perustella omaa päättelyään ratkaisulle. Opiskelijoita tulee kannustaa omien päätelmiensä rohkeaan esilletuontiin. Tämä auttaa apua kysyvien opiskelijoiden lisäksi myös auttavaa opiskelijaa, joka voi kuvata omaa ajatuksen kulkuaan. Eteenkin todistamisen kannalta looginen ja helposti seurattava päättely on erittäin tärkeää sekä koko matematiikassa että elämässä, sillä se kehittää yhteistyökykyä kysymyksien ja ideoiden esillentuonnin puolesta.

Säännönmukaisuuksien löytäminen on ensisijaisen tärkeää matematiikassa. Säännönmukaisuuksien ja yhteyksien löytäminen helpottaa järkeilyä tehtävissä ja kehittää taitoa soveltaa asioita toisiinsa. Esimerkiksi uuden asian oppiminen on hyvin helppoa, kun sen saa yhdistettyä jo aiemmin opittuun asiaan. Säännönmukaisuuksia löytyy matematiikan lisäksi myös arkielämästä ja on täten kokonaisvaltaisesti tärkeä ajattelumuoto. Esimerkkinä vaikka kodin siivouksessa säästää omaa aikaansa tulevan siivouksen kannalta, jos pyyhit pölyt ylhäältä alas, ennen kuin aloitat lattian moppaamisen. Säännönmukaisuudet tuovat järjestystä omaan arkeen. Sama toimii myös matematiikassa. Kun aritmeettiset ja geometriset jonot ovat hallinnassa, on niistä helppo siirtyä niiden summiin ja yhdistää vanhaa asiaa uuteen.

Visualisointi on kätevä keino tuoda asioita esille lähestyttävämmiksi. Moni ei helposti ymmärrä, miten monia eri asioita matematiikassa voi tuoda esille ilman numeroita. Tästä kirjassa onkin yksi malli aritmeettisen summan todistamisesta. Visuaalisuus on tärkeää tuoda osaksi oppituntia, sillä joillekin kuva tai kuvaus jostakin uudesta asiasta kertoo paljon enemmän kuin vain kaavat tai laskuesimerkit. Visuaalisuus voidaan myös nähdä eräänlaisena prosessina. Esimerkiksi aritmeettisen ja geometrisen jonon etenemінen jäseneltä toiselle. Jonon voi visualisoida päässään lukusuoralla tai sen voi hahmottaa kuvaajalla sähköisillä työkaluilla. Tämäkin tulee esille kirjan kappaleiden esimerkeissä. Aritmeettisen summan todenmukaisuus ja hahmottaminen lukusuoralla saadaan yksinkertaisesti hahmotettua Crachiolan visualisoimalla tavalla [3]. Ajatusmaailmat ovat myös hyvin kytköksissä toisiinsa. Kuvailu ja perusteleminen voidaan tehostaa hyvällä visualisoinnilla. Näin selitetty asia tulee yleisesti paremmin esitetyksi.

2.4 Kirjan ja tehtävien tyyli

Opetuksen ja ohjauksen tulee aina olla selkeää, jotta opiskelijan on helppo seurata opetusta ja hänen ajatuksensa pysyy hyvin mukana aiheessa. Selkeyttä saadaan luotua erityisesti, jos opetuksen tyyli ja runko pysyvät samoina aiheen syventyessä tai siirtyessä kokonaan uuteen aiheeseen. Tällaisesta periaatteesta kiinnipitäminen matematiikan saralla tarjoaa vahvistusta ja tukea kaikille opiskelijoille [16]. Yeshurun käsittelee artikkelissaan kaksinaisuusperiaatetta, missä määritelmien runko pidetään täysin samana, mutta avainsanat vaihdetaan käsitellessä uutta aihetta [16]. Näin opiskelijoiden on helpompi siirtyä aiheesta seuraavaan tutulla ulkoasulla ja samalla oppivat tunnistamaan avainsanat aiheisiin liittyen.
Artikkelissa käytetäänkin juuri aritmeettisia ja geometrisia jonoja ja sarjoja esimerkkeinä kaksinaisuusperiaatteen osoittamiselle. Yeshurun mukaan hänen aiemmassa artikkelissaan käydyn psykomatemaattisen tutkimuksen [17] mukaan opiskelijoille on paljon hyödyllisempää antaa sääntöjä kaavojen sijaan. Käyttämällä sääntöjä opiskelijan ei

tarvitse työstää niin paljon hänen ajatuksiaan tai lyhytkestoista muistiaan ja tällä perusteella voidaan varmistaa, että tieto jää opiskelijalle paremmin mieleen ja on myös sovellettavissa helpommin.
Ideaa on otettu kirjassa huomioon kaikkialla sen eri osissa. Määritelmät on kirjoitettu niin, että eroavaisuudet esiintyvät pääosin lausekkeen muuttujissa. Tekstin kirjoitusasu on muutoin vastaavaa, jolloin määritelmät tällä perusteella muistuvat paremmin. Uuden asian johdanto on keskenään samankaltaista lukujonoja käsittelevissä kappaleissa. Summien kappaleissa on enemmän eroavaisuutta, mutta samankaltaiseen ulkoasuun on pyritty siitä huolimatta. Kaiken tämän lisäksi myös tehtävät ovat keskenään samankaltaisia sekä mallitehtävien että pohdintojen kanssa. Esimerkkinä pohdinnat **A.6** ja **A.14** ovat samalla kysymyspohjalla, mutta toisessa jono on aritmeettinen ja toisessa geometrinen. Näin tehtävistä poistetaan eräänlaiset turhat vaikeudet muuttamalla tekstiasua. Tällöin, kun tehtävän ympäristö on tuttua, se rasittaa vähemmän opiskelijan aivoja ja hän voi keskittyä enemmän itse pulmaan. Samankaltaisia rakenteita löytyy myös keskenään eri harjoitustehtävien kappaleista. Näissä tosin on hieman enemmän poikkeavuuksia.

Tehtävänannon ja sen ydinasioiden tulkinta on hyvin tärkeää matematiikassa ja se korostuu varsinkin nykyissä ylioppilaskokeissa. Sähköistetyt ylioppilaskokeet pystyvät tarjoamaan todella monipuolisia tehtäviä, jolloin kyky tulkita soveltavia tehtäviä on hyvin olennainen. Artikkelissaan M. S. Sari et al. [12] kertovat, että monilla opiskelijoilla on edelleen ongelmia aritmeettisten lukujonojen ja summien opiskelussa. Tämä voitiin todeta jo aikaisempien tutkimusten tuloksista, missä todettiin, ettei suurin osa opiskelijoista ymmärrä aritmeettisen lukujonon ja summan käsitettä oikein. Opiskelijoilla on vaikeuksia käyttää aiheen määritelmiä ja sen kaavoja oikein [12]. Oppimisvaikeudet ja opiskelijoiden vähäinen käsitteiden ymmärtäminen johtuvat monista syistä. Pääsyinä pidetään opettajien perinteisiä opetusmuotoja, missä opettajat ovat hallitsevassa asemassa oppimisprosessia sekä opetuksen keskittyminen oppikirjaan tunnilla [12]. Tutkimuksessa keskitytään ongelmalähtöiseen oppimiseen, missä opiskelijat keräävät uutta tietoa ja käyttävät sitä ongelmanratkaisuun. Tämä oppimismuoto yhdistetään sovelluspohjaiseen opiskeluun, mikä lisää opiskelijoiden mielenkiintoa ja syventymistä oppimiseen [12].
Monipuolinen lähestymistapa on myös hyvä tapa tukea mahdollisimman montaa opiskelijaa, sillä opetustilanteesta löytyy yleisesti monenlaisia oppijoita. Matemaattisen esityksen seuraamiskyky, matematiikasta keskustelu, väitteiden perustelu sekä eri muodoissa tarjotun informaation arviointi ovatkin myös lukion matematiikan opetussuunnitelman yksi keskeisimpiä tavoitteita. Analysointi- ja lukutaitoa onkin siis hyvä kehittää yleisesti matematiikassa.

Useat tutkijat ovat osoittaneet, että opiskelijoiden matematiikan kiinnostus on edelleen vähäistä. Useiden opiskelijoiden mielestä matematiikka on tylsää ja vaikeaa, siinä on paljon abstrakteja teoreemoja, joita on vaikea ymmärtää eikä matematiikkaa nähdä kovinkaan käytännöllisenä. Toisena syynä pidetään myös tunneilla käytettävää opetus- ja oppimisprosessia, joka on hyvin mekaaninen eikä huomioi opiskelijoiden omia tarpeita. Oppiminen nähdään enemmänkin prosessina, jossa tietoa vain siirretään suoraan opiskelijoille. Opiskelijoiden olisi hyvä antaa rakentaa tietämystään pohdinnan keinoin, mikä tapahtuu toiminnan kautta uudessa tiedossa [1].
Azmidar käy artikkelissaan läpi sitä, miten opiskelijoiden mielenkiinto on tärkeää säilyttää oppitunneilla matematiikassa ja miten se voidaan toteuttaa. Artikkelissa tutkitaan

Concrete-Pictorial-Abstract -menetelmää ja sitä, miten se vaikuttaa opiskelijoiden matemaattiseen mielenkiintoon [1]. Azmidarin mukaan syitä opiskelijoiden alhaiseen mielenkiintoon ovat muun muassa, että heidän mielestään siinä on ainoastaan numeroita, kaavoja, teoriaa sekä tehtäviä, mitkä esitetään ainoastaan abstraktissa muodossa ilman mitään soveltavia esimerkkejä. Azmidarin mukaan ne opiskelijat, joilla on paljon mielenkiintoa asiaan, ovat myös enemmän motivoituneita ja omaavat positiivisemman asenteen matematiikan opiskeluun.
Concrete-Pictorial-Abstract -menetelmässä ideana on, että opiskelija saa käsitellä jotain konkreettista, arkista asiaa, ennen kuin se liitetään suoraan teoriaan [1]. Tämä menetelmä on otettu käyttöön kirjassa aritmeettisen summan todistamisessa.
Ensin opiskelijalle annetaan joku fyysinen asia, mitä hän voi käsitellä ja opettaja demonstroi ja esittää objektiin liitettäviä asioita (konkreettinen vaihe). Kirjaan otetussa tapauksessa opiskelijalle annetaan ruutupaperia. Ruutupaperille hän ensin piirtää annettujen ohjeiden mukaisesti jonkin sopivan kuvion jonka jälkeen hän leikkelee sen saksilla irti paperista. Paperin lisäksi todistuksen pystyy tekemään myös Lego-palikoilla. Valitsemansa muodon perusteella hän täyttää työtä varten annettua taulukkoa.
Tämän jälkeen opettaja antaa havainnollistavan kuvan, kuvaajan tai muun vastaavan tilanteesta ja antaa opiskelijoille aiheeseen liittyviä kysymyksiä (kuvallinen vaihe) [1]. Kirjan työssä opettaja havainnollistaa seuraavaksi opiskelijoille, miten heidän valitsemastaan muodostaan on muodostunut aritmeettisen lukujonon kuvaus ja miten tuon kyseisen muodon avulla voidaan laskea heidän itse muodostamansa sarjan summa noudattaen suoraan aritmeettisen summan määritelmää.
Kolmannessa vaiheessa kuvitetusta tilanteesta siirrytään tilanteeseen, missä sama asia on esitetty vain numeroilla ja opiskelijat pääsevät ratkomaan kysymyksiä soveltaen äskettäin oppimiaan asioita matemaattisesti (abstrakti vaihe) [1]. Kirjan tapauksessa opiskelijat pääsevätkin perinteisempään oppimismuotoon ja voivat uppoutua nyt kappaleen pohdintatehtäviin ja esimerkkeihin. Tehtäviä tehdessään he voivat todeta numeroilla saman ilmiön, minkä he itse tekivät aiemmin paperilla.
Artikkelissa todettiin, että kyseisellä menetelmällä on positiivinen vaikutus opiskelijoiden mielenkiintoon matematiikassa. Tutkittu menetelmä vähentää opiskelijoiden turhautumista sekä mahdollista matematiikkaan kohdituvaa masennusta tai ahdistusta. Azmiradin mukaan opettajan lähestymistavalla on suuri vaikutus opiskelijoiden kiinnostukseen matematiikassa [1]. Tämän vuoksi kyseinen kirjaan valittu menetelmä on erittäin tärkeä. Kyseinen artikkeli on vahvasti mukana pohdinnassa **A.19**. Kirjan ulkopuolella tapahtuvan tehtävän avulla opiskelijat voivat uppoutua uuteen aiheeseen osoittaen enemmän mielenkiintoa.

Motivaation ylläpitoa luokassa on tutkittu jo jonkin aikaa. Tutkijat haluavat selvittää, miten opiskelijat saataisiin saavuttamaan enemmän matematiikan tunneilla. Kirjassa *How The Brains Learn Mathematics* Kathie Nunley käsittelee kyseistä aihetta. Hän kertoo, että motivaation puuttuminen on yksi pääsyistä, miksi opiskelijat eivät menesty matematiikassa. Opiskelijat eivät koe olevansa tarpeeksi hyviä tai että he eivät pysty tekemään tarpeeksi töitä pärjätäkseen matematiikassa. Ennen pitkää opiskelijat kokevat itsensä avuttomiksi tilanteen kanssa ja tuntevat, että mitä tahansa he tekisivätkin, he eivät menesty matematiikassa. Näin ollen he tuntevat, ettei heidän kannata edes yrittää oppia matematiikkaa. Jotkut opiskelijat eivät myöskään Nunleyn mukaan koe aiheen oppimista tärkeäksi. Kaikkea kuitenkin yhdistää itse saavutetun motivaation

puute ja se etteivät he sen vuoksi menesty.
Nunley kertoo, että opiskelijoiden motivaation avuksi heidän tulisi nähdä yhteys heidän käytöksensä ja lopputuloksensa välillä. Tämä edellyttää sitä, että he kokisivat heillä olevan jonkinlainen kontrolli heidän oppimisympäristöönsä. Tämän kontrollin tunteen mukana tulee myös tunne vastuusta. Tämä päätelmä on suuressa osassa tätä kirjaa ja sen tavoitteita. Eritysesti näiden kappaleiden teorian painotuksen vuoksi.
Päätelmän seurauksena kehitettiin kerroksittainen oppisuunnitelma, jonka käyttöön kuuluu kolme erilaista kerrostettua opetusta, jotka yhdessä lisäävät opiskelijan motivaatiota ja kannustavat monimuotoiseen ajatteluun. Nunleyn mukaan matematiikan opettajilla, jotka pyrkivät opiskelijoiden tehokkaaseen aivotyöskentelyyn luokassa, on kolme tavoitetta.
Ensimmäiseksi he haluavat kasvattaa opiskelijoiden motivaatiota saamalla heidät emotionaalisesti mukaan oppimiseen. Tämän puolesta uusien materiaalien ensimmäiset esiintymiset ja pohjustusosuudet on tehty helposti lähestyttäviksi samalla tarjoten hyvin informaatiota, jolloin edistyksekkäät opiskelijat eivät koe haasteen puutetta. Pohjustus uuteen aiheeseen on annettu mahdollisimman monipuolisesti, jotta kaikenlaiset oppijat pääsevät aiheeseen mukaan.
Toiseksi he haluavat opiskelijoiden matematiikan taidot tasolle, jossa he voivat käyttää niitä käytännössä ja siten luovan niille merkitystä. Tätä varten uuden aiheen opetus on tehty hyvin helposti lähestyttävästi ja aiheista löytyy hyvin mallitehtäviä, joita voi seurata. Lisäksi mallitehtävät vastaavat hyvin osaa pohdintatehtävistä sekä ensimmäisiä kappaleiden harjoitustehtäviä. Näistä seuraavat pohdinnat ja harjoitukset lisäävät opiskelijoille haastetta sopivasti. Kirjasta löytyy myös paljon tehtäviä, missä matemaattiset pulmat on asetettu opiskelijoille huomattavasti lähestyttävämpään teemaan.
Kolmanneksi opettajat pyrkivät etsimään tapoja, joilla rohkaista opiskelijoita ajattelemaan korkeammalla tasolla ja yhdistää oppimaansa aikaisemmin opittuun asiaan kokonaisvaltaisesti. Näistä tärkeimpänä on opiskelijoiden saaminen mukaan oppimiseen, sillä ilman opiskelijan motivaatiota opettaja ei voi saavuttaa kahta muuta tavoitetta. Tämä on suunniteltu toteutettavaksi kirjan pohdintatehtävillä, joilla opiskelijat voivat ryhmissä tai koko luokan kesken pohtia tehtäviä yhdessä. Lisäksi toki tehtävien tekeminen yhdessä on erittäin suositeltavaa. Näin opiskelijat voivat tehostaa oppimistaan tuomalla ajatuksensa esille ja opettamalla samalla muita opiskelijoita [13].

Kerrostamisen eri vaiheita ovat:

1. Annetaan vapaus valita

   Kun opiskelijoille annetaan vaihtoehtoja, mitä tehdä, he voivat kontrolloida omaa opiskeluaan ja näin ollen heidän motivaationsa kasvaa. Opiskelijoille voi esimerkiksi antaa kirjasta eri tehtäviä vaihtoehdoksi tai erilaisia opiskelumuotoja mistä valita kuten tehtäviä tietokoneella tai erilaisia videoita asiaan liittyen.

2. Pitää opiskelijoita itse vastuussa opiskelustaan

   Ideana on, että opettaja pyrkisi pisteyttämään ja arvostelemaan opiskelijoiden suorituksia itse oppimisesta eikä suoranaisesti tehtävien tekemisestä. Arvosteleminen vain luokassa näkyvän työn ja koearvosanan perusteella on haastavaa. On vaikeaa huomata, onko opiskelija oppinut jotakin vai näyttänyt vain tekevän työtä ja oppinut asioita ulkoa. Itse oppiminen voitaisiin nähdä esimerkiksi pistokokeilla, pienillä ryhmätyöskentelyillä tai pyytämällä opiskelijoita selittämään asian suullisesti.

3. Rohkaista opiskelijoita korkeatasoiseen ajatteluun

   Uuden oppimisessa tarkoituksena on, että opiskelijat osaisivat yhdistää vanhaa asiaa uuteen löytämällä yhtäläisyyksiä. Oppisuunnitelman kerrostaminen ohjaa monimuotoisen ajattelun suuntaan jakamalla ohjeistuksen kolmeen osaan: perustehtäviin (1), soveltaviin tehtäviin (2), ja arkielämän sovelluksiin ja niiden analysointiin (3). Kaikki opiskelijat aloittavat ensimmäisestä osiosta jossa on perustehtäviä, jotka opettavat uutta asiaa konkreettisesti. Toisessa osiossa on soveltavia tehtäviä, jotka vaativat ongelmanratkaisutaitoja, soveltavuutta ja asian hallintaa. Tehtävien tarkoituksena on liittää uutta tietoa laajemman kokonaiskuvan kautta. Kun nämä kaksi osiota on saatu hoidettua, voi opiskelija siirtyä viimeiseen osioon, jossa on arkielämään soveltuvia tehtäviä. Tehtävät kehittävät kriittistä ajattelutapaa. Tehtävät myös osoittavat, miten matematiikka näyttäytyy ympärillämme [13].

Kaikkien opiskelijoiden oletetaan suorittavan kaikki kolme tasoa. Opiskelijat voitaisiin arvostella heidän suorituksensa perusteella, missä pisteitä saisi sitä enemmän, mitä pidemmälle tasoissa pääsee. Kaikki opiskelijat eivät välttämättä ole saavuttaneet tarpeeksi ymmärrystä ratkaistakseen tason 3 tehtäviä. Kuitenkin ideana olisi, että opiskelijat yrittäisivät kaikkia tasoja saadakseen laajan kokonaiskuvan aiheesta [13].
Tämän vuoksi tehtävät on pyritty tekemään kirjassa monipuolisesti monelle eri tasolle ja huomioida opiskelijoita monipuolisesti siten, että kaikille löytyy vaihtoehtoja. Kappaleiden tarjoamat tehtävät ovat monitasoisia. Harjoitustehtävät-osioista löytyvät tehtävät etenevät siten, että ensimmäiset osion tehtävät ovat suunniteltu olemaan kappaleen helpoimmat tehtävät. Taso etenee, kun harjoituksissa edetään pidemmälle. Loppupäässä on jo soveltavampia, joita kaikki eivät välttämättä saa tehdyksi. Tehtäviä ei ole erikseen merkitty kirjassa eritasoisiksi mahdollisten suorituspaineiden vuoksi, joita opiskelijoilla voi esiintyä keskustellessaan tehtävistä muiden opiskelijoiden kanssa. Opettajan on hyvä ohjata opiskelijoita itse valitsemaan, mitä tehtäviä he haluavat tehdä ja ohjata hakeutumaan muiden opiskelijoiden luokse, jotka haluavat työskennellä ryhmissä. Yksin työskentely on kuitenkin myös täysin sallittua.
Kun opiskelijoita ohjataan työskentelemään, heitä on samalla hyvä muistuttaa, että he ovat itse vastuussa omasta oppimisestaan. Opiskelijoiden oppimista voi tarkkailla muun muassa käymällä viime tunnin asioita ja pohdintoja läpi ja pyytää näihin liittyen opiskelijoita selittämään asioita itse.
Pohdinta- ja harjoitustehtävät johtavat opiskelijoita korkeatasoiseen ajatteluun. Harjoitustehtävien edetessä perustehtävistä juurikin soveltavampiin ja haastavampiin tehtäviin opiskelijat saavat aiheesta hyvän kokonaiskuvan. Vaikka opiskelija olisikin osaavampi aiheen suhteen, on hänen hyvä ensin ainakin tutustua myös perustehtäviin.

Opettajan on siis ainakin hyvä lisätä eri tason tehtäviä opiskelijoiden tehtäviksi sekä tunnilla, että mahdollisesti kotitehtäviksi. Näin opiskelijoille varmistetaan, että he saavat laajemman näkökulman aiheeseen liittyen.

Motivaation kehittäminen opiskelijan osaamisella on hyvä alku, mutta sitä voidaan tehostaa entistä enemmän saamalla opiskeluun lisää mielenkiintoa. Ihmiset keskittyvät helpommin aiheeseen, joka heitä kiinnostaa. Tämä näkyy paitsi opiskelussa, myös myöhemmin työelämässä tai vaikka arjen keskusteluissa.
Opiskelijat eivät aina näe matematiikan merkityksellisyyttä tai kuinka relevanttia se voi olla heidän tulevaisuudessaan. Tämä koskettaa kaikkia opiskelijoita taitotasosta riippumatta. Artikkelissa [4] tutkittiin suunnitellun soveltavan kurssin vaikutusta, minkä ideana oli auttaa juuri mainituissa ongelmissa. Kurssin tehtävät oli suunniteltu niin, että opiskelijoiden tehtävien teemoina olisi mahdollisimman mielenkiintoisia aiheita. Aiheet painottuivat biologiaan, lääketieteeseen ja talouteen/yhteiskuntaan. Tehtävät olivat matemaattisesti kuitenkin keskenään vastaavia ja niiden ratkaisutyylit olivat samoja. Ideana oli vain antaa mielenkiintoinen aihe [4].
Kurssi tuotti tulosta. Opiskelijat eivät ainoastaan oppineet aiheen perusteita vaan he myös onnistuivat laajentamaan heidän kokonaiskuvaansa aiheen näkyvyydestä arkielämässä [4]. Opiskelijoiden on siis hyvä saada tehtäviä, joissa opittua asiaa sovelletaan arkielämään jossakin määrin. Pelkkä konkreettinen aiheen opiskelu teorian kautta vastaavan tyyppisiin tehtäviin ei pidä mielenkiintoa niin tehokaasti yllä.
Merkityksellisyyttä ja mielenkiintoa on rakennettu tehtävillä, jotka sijoittuvat jollakin tapaa arkielämään tai aiheuttavat hilpeyttä. Tästä löytyy esimerkkeinä kirjasta muun muassa pohdinnat **A.16** ja **A.29** sekä harjoitustehtävät **12** ja **25**.

Opetuksen tulee kehittyä ajan kanssa ja siinä käytettävää materiaalia tulee sen vuoksi edistää muutoksen ohella. Opetuksen tyyli on saanut paljon kritiikkiä matemaattisen tiedon epäluonnollisesta ilmentymisestä ja käsitteellisen tiedon alkuperän puutteesta. Sisällön pysyessä samanlaisena oppiminen häiriintyy ja opiskelijat kokevat opetettavan aiheen tarpeettomana ja menettävät mielenkiintonsa. Heidän mielestään matematiikka on pitkästyttävää ja vaikeaa ymmärtää [8]. Tämän vuoksi on siis tärkeää suunnitella asianmukaista ja tehokasta matematiikan opetusta ja näyttää opiskelijoille, että matematiikka voi todellisuudessa olla hyvinkin mielenkiintoista. Tehokkaan matematiikan opetuksen suunnittelun tulisi johtaa tietämyksen ja kehityksen tuottamiseen yksityiskohtaisen opetussuunnitelman avulla, jolla varmistetaan opetuksen jatkuvuus, eheys ja toimivuus [8].
Y. Lin et al. [8] käsittelevät artikkelissaan tutkimustaan kuuden kysymyksen kognitiivisesta teoriasta geometristen sarjojen ja summien opetuksessa. Teoria on joustava tiedon metodologia, joka alkaa ongelmatietoisuudesta ja keskittyy teemoihin, jotka liittyvät toisiinsa. Teorian soveltaminen matematiikan opetuksen suunnittelussa voi reflektoida hyvin opetuksen luontaista ongelmallisuutta, johdonmukaisuutta ja eheyttä. Kuuden kysymyksen kognitiivinen teoria perustuu ilmaisuihin missä, mikä, miksi, miten, mitä jos ja kuvittele [8]. Jokaisella ilmaisulla on oma roolinsa teoriassa. ”Missä” viittaa siihen, mistä matemaattinen tieto on peräisin ja keskittyy uuden tiedon taustalähteeseen, opetuksen lähtökohtaan ja uuden tiedon kasvupisteen aktivointiin. Sanat ”mikä” ja ”miksi” viittaavat siihen, mitkä ovat uuden matemaattisen tiedon olennaiset ominaisuudet ja piirteet, matemaattisten käsitteiden löytämiseen ja kyseenalaistamiseen sekä itse kä-

sitteiden ydinten löytämiseen. Mikä on vanhan ja uuden matemaattisen tiedon suhde ja mikä on niiden eroavaisuus? Tällainen ongelma voi ohjata opiskelijoita vertailemaan uutta ja vanhaa tietoa ja edistää tiedon syvällisempää ymmärtämistä. Sana ”miten” viittaa siihen, miten kyseisen asian voi oppia ja miten sitä voi oppia käyttämään. ”Miten” johtaa opiskelijoita kohti ongelmanratkaisua antamalla heidän käyttää uutta oppimaansa tietoa. Kyseinen kysymys ei ainoastaan edistä uuden tiedon käyttöä vaan se myös koettelee oppimisen tehokkuutta. Ilmaisu ”mitä jos” johdattelee ajatukseen, jossa pohditaan mitä tapahtuu jos ongelma muuttuu jollakin tavalla. Ilmaisun tavoitteena on kehittää opiskelijoiden kykyä kyseenalaistaa ajatuksia ja kasvattaa opiskelijoiden rohkeutta kysymysten nostamiseen. Sana ”kuvittele” viittaa kysymykseen, mikä ohjaa opiskelijaa ymmärtämään kokonaisuutta. Kun kysymyksiä ja ilmaisuja tuodaan esille, opiskelijoita halutaan ohjata tarkastelemaan tiedon syntyä, esittämään omia ideoitaan ja poimintojaan annetusta tiedosta toteuttaakseen itsepohdiskelua ja rakentaakseen hyvän kognitiivisen rakenteen itselleen [8].
Tutkimus osoitti, että teorian seurauksena opiskelijat omaksuivat luontaisesti tiedon lähteen, olemuksen, yhteyden, soveltamisen, heijastamisen sekä prosessien sarjat [8]. Artikkelissa käytiin erityisesti läpi myös laskukaavojen johdattamista ja laskujen läpikäyntiä yksityiskohtaisesti. Tämän vuoksi erityisesti pohdintatehtävä **A.19** on aseteltu vastaavalla tavalla. Kuuden kysymyksen kognitiivisen teorian käyttö opetuksessa tekee oppimisesta luonnollisempaa, herättää opiskelijoiden mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan, vähentää jälkeenjäämistä oppimisessa ja saa opiskelijat huomaamaan, että matematiikka ei ole loppujen lopuksi niin haastavaa [8].
Kyseistä artikkelia on käytetty pääosin kappaleiden ensimmäisissä pohdintatehtävissä. Mentäessä täysin uuteen asiaan kaiken tiedon omaksuminen on hyvä muodostaa asiaan ja aiheeseen sopivin kysymyksin ja niiden muodoin. Monipuolisesti kysymyssanoja käytetään muun muassa pohdinnoissa **A.2** ja **A.10**. Ilmaisuja näkyy myös mallitehtävissä. Esimerkiksi mallitehtävä **A.9** tuo esille sanan ”mitä jos” muuttaen ongelmatilannetta ja herättäen poikkeavaa ajattelua. Suomen kielen vuoksi kyseiset kysymyssanat ja ilmaisut eivät ole juuri samoja, mutta viestivät kuitenkin samaa asiaa. Muotoilua löytyy myös harjoitustehtävästä **4b**.

Kokeellinen oppiminen on yksi kasvatuksellisista trendeistä tällä vuosisadalla ja se on saavuttanut usean päättäjän ja opetusalan henkilön mielenkiinnon monessa eri valtiossa ympäri maailmaa [15]. Oppiminen, joka on opiskelijakeskeistä, kokeellista, sisältää teknologiaa ja on empaattista, on nyt hyvinkin opetuksen muodin huipulla. Kokeellista oppimista pidetään erityisesti matematiikassa erittäin hyödyllisenä, sillä se auttaa pitämään yllä opiskelijoiden tietoja ja taitoja kuin myös vaikuttaa positiivisesti opiskelijoiden asenteisiin matematiikkaa kohtaan, sillä se yhdistää tiedon kaksi osaa yhteen: teorian ja käytännön toteutuksen [15].
Artikkelissaan D. H. Tong et al. [15] käsittelevät kyseistä kokeellisen oppimisen menetelmää omassa tutkimuksessaan juurikin aritmeettisten ja geometristen sarjojen opettamisessa. Tutkimus suoritettiin lukiotason luokalle, jossa oli 39 opiskelijaa. Tutkijat muodostivat kokeellisen opetuksen ohjelman samalla kun he suorittivat tarkkailuja luokkahuoneessa ja analysoivat opiskelijoiden ryhmäaktiviteettien vastauslomakkeiden tuloksia. Lisäksi opiskelijoille järjestettiin testit ennen tutkimusta ja sen jälkeen. Testit arvioitiin ja niitä vertailtiin, jotta tutkijat pystyivät seuraamaan opiskelijoiden oppimisen ja heidän tutkimuksensa lopputuloksia. Opiskelijoille jaettiin myös kyselyt asenteista

kokeellista oppimista kohtaan [15].
Tutkimus suoritettiin määrittämään kokeellisen oppimisen tehokkuutta ja toteutettavuutta aritmeettisten ja geometristen sarjojen lukio-opetuksessa. Tutkimuksessa käsiteltiin seuraavia kysymyksiä:

1. Miten opiskelijat oppivat aritmeettiset ja geometriset sarjat heidän oppikirjastaan?

2. Voivatko opiskelijat oppia tehokkaammin kokeellisella oppimisella ja voivatko he näin kehittää heidän oppimistaan?

3. Miten opiskelijoiden osallistuminen, motivaatio ja asenne matematiikan oppimista kohtaan on muuttunut, kun heitä on opastettu kokeellisessa oppimisessa? [15]

Tutkimus osoittautui kokeelliselle oppimiselle myönteiseksi. Luokkahuoneen tarkastelun perusteella opiskelijat innostuivat kokeellisesta oppimisesta, osallistuivat innokkaammin oppimisaktiviteetteihin ja keskustelivat innokkaasti ratkaisuista ryhmissä. Keskustellessaan ratkaisuista opiskelijat alkoivat myös huomata itse paremmin oman oppimisensa ja kehityksensä. Lisäksi opiskelijoiden täyttämän kyselyn perusteella opiskelijat olivat huomattavasti enemmän motivoituneita matematiikkaa kohtaan ja heidän asenteensa osoittautui hyvin positiiviseksi [15].
Artikkelissa ilmenevien tulosten takia kirjaan on haluttu ottaa tehtäviä, jotka ovat samaa tyyliä kuin tutkimuksessa. Reaalimaailman tyyliset esimerkit kiinnittävät huomiota ja piristystä opiskelijoissa. Tästä syystä kirjasta löytyy pohdintoja, kuten **A.23** ja **A.37**. Kirjaan on myös otettu vastaavan tyylisiä mallitehtäviä. Nämä on lisätty kirjan extra-osioon, missä käydään annuiteettia läpi mallitehtävissä **A.30** ja **A.31**.

Nykyään lukioissa käytetään paljon sähköisiä materiaaleja. Näiden sähköisten materiaalien takaa löytyy myös monia sovelluksia, joista yksi on tässäkin kirjassa käytetty GeoGebra. Tämän vuosisadan koulutustaso pyrkii kehittämään opiskelijoiden reaalimaailman ongelmanratkaisutaitoja laskennallisesti [11]. Tämän vuoksi on kehitetty paljon erilaisia opiskelumetodeja, joista yksi on ongelmalähtöinen oppiminen. Ongelmalähtöisen oppimisen etuna on, että se vie opiskelijaa pois rutiinin omaisesta oppimisesta. Matematiikan tapauksessa ongelmalähtöinen oppiminen siis vie pois perinteisestä laskutehtävien tekemisestä.
R. Ramadhani ja S.D. Narpila ovat tutkineet artikkelissaan [11] GeoGebran hyödyllisyyttä juurikin ongelmalähtöisessä opetuksessa. Heidän mukaansa monilla opiskelijoilla on vaikeuksia erilaisissa oppimistilanteissa, joissa tulisi ratkaista sovellettuja ongelmia. Opiskelijat eivät osaa löytää ongelmaa tai avainta sen ratkaisuun. Artikkelissa tutkitaan, miten ongelmalähtöinen oppiminen toimii GeoGebran kanssa. Tämän lisäksi tutkijat ovat halunneet lisätä oppimisen tehokkuutta ja kiinnostavuutta valitsemalla ongelmien taustalle aiheen, mikä koskettaisi opiskelijan elämää jollakin tavalla [11].
Tutkimus suoritettiin lukio-opiskelijoille. Tutkimusta varten valittiin kolme luokkaa, joille kaikille opetettiin sama asia, mutta vain eri tavalla. Ensimmäisen luokan oppimismuotona oli opiskelijan elämää koskettava ongelmalähtöinen oppiminen GeoGebran avulla. Toinen luokka käytti opiskelumuotonaan tavallista ongelmalähtöistä oppimista. Kolmas luokka opiskeli perinteisellä opettajajohtoisella tavalla. Tutkimuksen tulos saatiin vertailemalla näitä kolmea luokkaa keskenään sekä heidän oppimistaan [11].
Tutkimuksen tulosten perusteella ongelmalähtöinen oppiminen itselle tutulla aiheella

GeoGebran avulla oli tehokkaampaa kuin pelkkä ongelmalähtöinen oppiminen tai perinteinen oppimismuoto. Opiskelijat ymmärsivät ongelmia ja niihin tarvittavia ratkaisuja paremmin, kun ongelman aihe oli heille jo ennestään tuttu. Opiskelijat myös analysoivat ongelmaa enemmän ja tehokkaammin, mikä on lukio-opiskelijoille erittäin tärkeää [11].
Myös GeoGebralla oli suuri vaikutus opiskelijoiden oppimismenestykseen. Teknologian lisääminen opetukseen antoi mahdollisuuden kuvastaa ongelmaa monipuolisemmin ja tehokkaammin, mikä auttoi opiskelijoita esittelemään helpommin heidän ratkaisujaan. GeoGebra helpotti opiskelijoita ymmärtämään uutta asiaa ongelmanratkaisussa [11].
GeoGebran suuren tarjoaman hyödyn vuoksi sitä on käytetty myös tässä kirjassa tehokkaasti. Sen avulla on voitu kuvata aritmeettisia ja geometrisia lukujonoja eri tavoin. Tämä näkyy pohdinnoissa **A.4, A.5, A.12** ja **A.13**. Sen avulla on myös esitetty vastaavien jonojen summia. GeoGebraa on myös kannustettu käyttämään kirjassa sen eri osissa, vaikka tehtävänanto ei olisi siihen suoraan ohjannut.

Viitteet

[1] A. Azmidar, D. Darhim, J.A. Dahlan, *Enhancing students' interest through mathematics learning*, Journal of Physics: Conference Series, 2017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012072.

[2] C. J. Bell. *Lining up arithmetic sequences*, Mathematics Teaching in the Middle School Vol. 17, No. 1, pp. 34-39, 2011.

[3] A. J. Crachiola. *Proof without words: Partial sums of an arithmetic sequence* The College Mathematics Journal, Vol. 43, No. 4, p. 321. 2012.

[4] D. Gijsbers, L. Putter-Smits, B. Pepin: *Changing students' beliefs about the relevance of mathematics in an advanced secondary mathematics class*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2019. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1682698.

[5] E. P. Goldenberg, J. Mark, A. Cuoco. *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula.* Journal of Mathematical Behavior, Vol. 15, pp. 375–402, 1996.

[6] A. Keski-Heikkilä. Suomessa eletään kaikkien aikojen sijoitusbuumia, ja osakesijoittajia on jo lähes miljoona – näillä konkarisijoittajien neuvoilla aloitat sijoittamisen. https://www.hs.fi/talous/art-2000006633190.html, 2020. Noudettu 10.11.2022.

[7] H. Leiwo. Nuorten sijoittamisbuumi on kovempi kuin ehkä koskaan ennen – professori kiittää somea: "Säästäminen ja sijoittaminen on yhteiskunnallisesti hyväksyttävää". https://yle.fi/uutiset/3-11777923, 2021. Noudettu 10.11.2022.

[8] Y. Lin, Y. Zhou, S. Wang, T.T. Wijaya *Lesson design of geometric sequences based on the 6-question cognitive theory*, Journal On Education, Vol. 2, No. 4, pp. 313–322, 2020.

[9] R. Matsuura, P. Harless. *From arithmetic sequences to linear equations*, Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 17, No. 7, pp. 436-444, 2012.

[10] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet* Helsinki: Opetushallitus, 2019. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf.

[11] R. Ramadhani, S.D. Narpila, *Problem based learning method with GeoGebra in mathematical learning*, International Journal Of Engineering & Technology, Vol. 7, No. 3.2, pp. 774–777, 2018.

[12] M.S. Sari, Hapizah, E. Susanti, Scristia. *Development of teaching materials arithmetic sequence and series based on android for problem based learning*, Journal of Physics: Conference Series, 2020. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1480/1/012024.

[13] D. A. Sousa. *Instructional Choices in Mathematics.* How The Brains Learns Mathematics, 2nd Edition, pp. 135-143, 2015.

[14] M. Swan. *Collaborative learning in mathematics*, A Challenge to our Beliefs, pp. 162-176, 2006.

[15] D.H. Tong, B.P. Uyen, Q.T. Hai, L.K. Ngan. *Experiential learning applied to the teaching of arithmetic and geometric sequences in high schools*, Multicultural Education, Vol. 7, No. 9, 2021. https://doi.org/10.5281/zenodo.5363151.

[16] S. Yeshurun. *The duality principle in teaching arithmetic and geometric series*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 9, No. 1, pp. 65-70, 1978.

[17] S. Yeshurun. *A psychomathematically-based teaching method*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 6, No. 4, pp. 445-459, 1975.

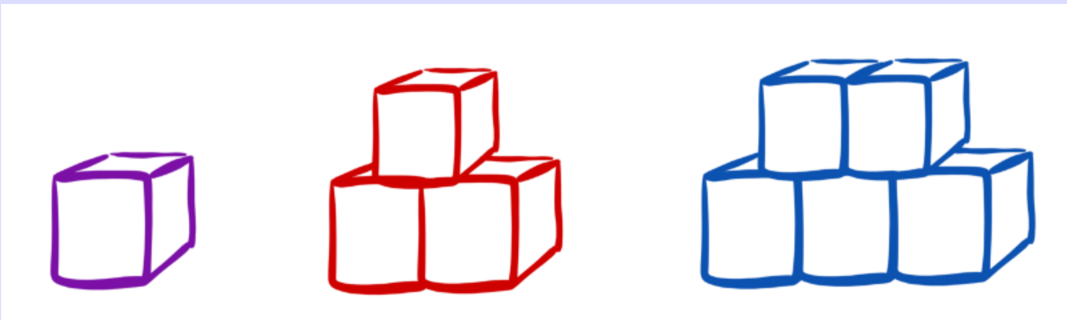
A Lukujonot ja summat

A.1 Aritmeettinen lukujono

Tietyssä järjestyksessä olevia lukuja kutsutaan *lukujonoksi*. Lukujonossa sen jäsenet merkitään sulkeisiin ja jäsenet erotetaan toisistaan pilkulla.

Esimerkki A.1 Lukujonossa $(4, 8, 12, 16)$ on neljä jäsentä.
Lukujonossa $(2, 5)$ on kaksi jäsentä ja lukujonossa $(-\frac{1}{3}, \pi, -2, 78)$ on neljä jäsentä.

Pohdinta A.2 Laatikoita pinotaan tasaiseen tahtiin



(a) Miltä seuraava pino laatikoita näyttää?

(b) Mitä eri vaiheiden välillä tapahtuu?

(c) Montako laatikkoa on 8. vaiheessa?

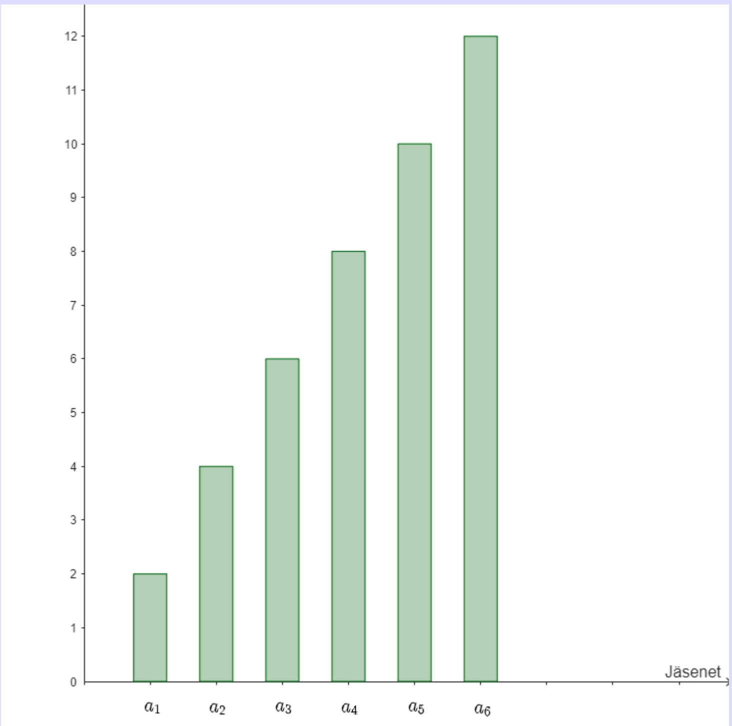
(d) Miten voidaan määrittää minkä tahansa vaiheen laatikoiden määrä?

Määritelmä A.3 Lukujonoa, jossa jäsenet saadaan lisäämällä sama lukumäärä uudestaan (*vakio*) edeltävään jäseneen, kutsutaan *aritmeettiseksi lukujonoksi*. Toisin sanoen lukujono $(a_1, a_2, \dots)$ on aritmeettinen, jos

$$d = a_{n+1} - a_n$$

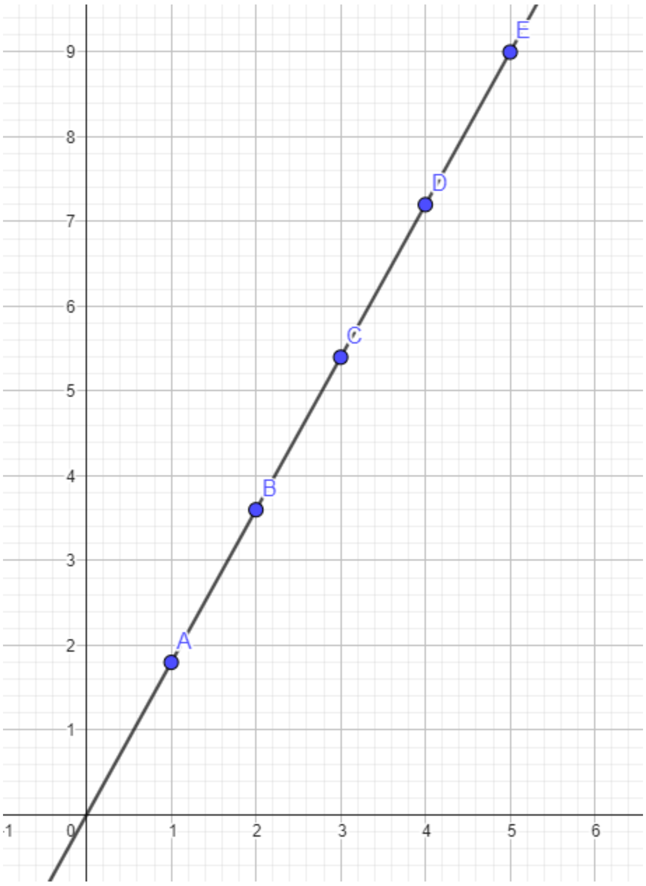
on vakio eli sama luku riippumatta indeksistä n. Lukua d kutsutaan *differenssiksi*.

Pohdinta A.4 Aritmeettisuutta pystytään mallintamaan helposti pylväsdiagrammin avulla. Kuvassa oleva pylväsdiagrammi on muodostettu GeoGebralla. Siinä esiintyy aritmeettinen lukujono, jossa on kuusi jäsentä.



1. Mitä lukuja jonon jäsenet ovat?
2. Mikä on jonon differenssi? Mistä sen saa selville?
3. Jos jono jatkuisi, mikä olisi sen seuraava jäsen?

Aritmeettinen lukujono pystytään mallintamaan myös lineaarisen kuvaajan avulla. Kuvaajasta huomataan, että x:n kasvaessa y:n arvon kasvu on vakio. Eli toisin sanoen paikalla x olevien jäsenten y välillä on paikasta riippumaton differenssi d.



Lukujonon aritmeettisuutta on hyvä tutkia muutoinkin, kun vain kuvaajan kuvasta. Jotkut tehtävät voivat olla paremmin lähestyttäviä tällaisten kuvaajien avulla. Lisäksi osalle sovelluksien avulla ratkaistavat tehtävät voivat olla helpommin lähestyttävissä ja ymmärrettävissä. Tämän vuoksi on hyvä tutustua lukujonoihin myös GeoGebran kautta.

Pohdinta A.5 Kuvaajien avulla voidaan havainnollistaa jonon etenemistä ja sen jäsenten etäisyyksiä toisistaan. Tutustu aritmeettisen lukujonon kuvaajiin ja pohdi seuraavia kysymyksiä. Tässä linkki GeoGebra-tehtävään.

(a) Miten differenssin muuttuminen vaikuttaa jonon alkioihin?

(b) Miten jäsenten differenssin voi löytää suoraan funktion f lausekkeesta?

(c) Miten minkä tahansa jäsenen arvo voidaan löytää funktion f lausekkeesta?

GeoGebran avulla voi helposti vastata lukujonoihin liittyviin kysymyksiin. Kyseistä tapaa voi siis hyvinkin käyttää, vaikka tehtävänanto ei siihen viittaisikaan. On kuitenkin hyvä osata esittää osaamistaan myös paperilla tai muuten sovellusten ulkopuolella.

Pohdinta A.6 Tutki alla mainittuja lukujonoja.

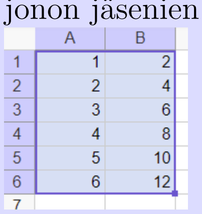
(a) Onko lukujono $(-3, 1, 5, 8, \dots)$ aritmeettinen?

(b) Onko lukujono $(1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}, \dots)$ aritmeettinen?

Pohdinta A.7 Timolla on 3 € säästöpossussa. Timon äiti lupaa antaa Timolle 5 € viikkorahaa ensi viikosta alkaen. Olettaen, että Timo ei käytä rahojaan, ilmoita taulukkolaskennalla hänen viikottaiset säästönsä 10 viikon ajalta. Päättele lopuksi, miten saisit n. viikon rahamäärän laskettua, kun tiedetään vain alkutilanteessa oleva rahamäärä ja viikkorahan suuruus.

Pylväsdiagrammi muodostetaan seuraavanlaisesti:

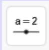
1. Avaa GeoGebra ja valitse ”Taulukkolaskenta”.
2. Muodosta taulukko, missä on kaksi saraketta. Alla olevassa kuvassa ensimmäisessä sarakkeessa ovat jonon jäsenet lueteltuna 1-6. Toisessa sarakkeessa ovat jonon jäsenien arvot.



	A	B
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10
6	6	12
7		

3. Maalaa kaikki jäsenet sekä niiden arvot ja valitse yllä olevasta valikosta -vaihtoehto ja valitse ”Yhden muuttujan analyysi”.
4. Nyt näytöllesi on ilmestynyt pylväsdiagrammi. Valitse diagrammin yllä olevasta valikosta -vaihtoehto ja valitse ”Kopio piirtopöydälle”. Tämän jälkeen voit sulkea tämän osion ja siirtyä piirtopöydälle.
5. Valitse piirtopöydän asetukset. Ensin muokkaa mittasuhteita niin, että diagrammi näyttää selkeämmältä.
6. Siirry x-akselin asetuksiin. Ota ”Näytä asteikko” pois päältä ja kytke päälle ”Vain positiivinen suunta”. Valitse myös ”Etäisyys” ja valitse 1. Muokkaamalla ”Nimi” -osiota voit saada haluamasi nimen x-akselille, kuten aikaisemmassa kuvassa näkyy ”Jäsenet”.

7. Siirry y-akselin asetuksiin. Kytke päälle ”Vain positiivinen suunta”.

8. Valitse GeoGebran yläpuolelta  -vaihtoehto ja valitse ”Lisää teksti”. Näin voit nimetä jokaisen pylvään niitä edustavalla jäsenellä. Viimeisen pylvään juurelle saattaa ilmestyä numeroarvo. Sen saa pois klikkaamalla oikeaa hiirinäppäintä ja kytkemällä ”Näytä nimi”’ pois päältä.

Lause A.8 Aritmeettisen lukujonon n:s jäsen

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, d on perättäisten jäsenten erotus ja n on järjestysluku.

Mallitehtävä A.9 Lukujono muotoa $(1, 3\frac{2}{3}, 6\frac{1}{3}, \dots)$ on aritmeettinen.

(a) Määritä jonon 78. jäsen a_{78}.

(b) Monesko jäsen 681 on?

(c) Kuuluuko luku 7913 kyseiseen jonoon?

Ratkaisu

(a) Lasketaan aluksi perättäisten jäsenten erotus ja selvitetään d:

$$d = a_2 - a_1 = 3\frac{2}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}.$$

Nyt voidaan laskea 78. jäsen käyttämällä aritmeettisen lukujonon tulosta:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Sijoitetaan jonon ensimmäinen jäsen, järjestysluku ja jäsenten erotus määritelmään:

$$a_{78} = 1 + (78-1) \cdot 2\frac{2}{3}$$

$$a_{78} = 206\frac{1}{3}.$$

(b) Sijoitetaan kysytty jäsen, jonon ensimmäinen jäsen ja jäsenten erotus määritelmään:

$$\begin{aligned}
681 &= 1 + (n-1) \cdot 2\frac{2}{3} \\
681 &= 1 + n \cdot 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \\
n \cdot 2\frac{2}{3} &= 682\frac{2}{3} \qquad \|: 2\frac{2}{3} \\
n &= 256.
\end{aligned}$$

(c) Tehtävän ratkaisemiseksi oletetaan, että kyseinen luku kuuluu kyseiseen lukujonoon, jolloin tulee selvittää sen järjestysluku.
Sijoitetaan kysytty jäsen, jonon ensimmäinen jäsen ja jäsenten erotus määritelmään:

$$\begin{aligned}
7913 &= 1 + (n-1) \cdot 2\frac{2}{3} \\
7913 &= 1 + n \cdot 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \\
n \cdot 2\frac{2}{3} &= 7914\frac{2}{3} \\
n &= 2968.
\end{aligned}$$

Näin ollen luku 7913 kuuluu kyseiseen jonoon.

A.1.1 Harjoitukset

1. Määritä aritmeettisen lukujonon viides ja n:s jäsen, kun

a) $a_1 = 0$ ja $d = 3$,

b) $a_1 = 1$ ja $d = -4$,

c) $a_1 = 8$ ja $a_{15} = 30$.

2. Keksi kolme aritmeettista lukujonoa ja laske niiden kuusi ensimmäistä jäsentä.

3. Aritmeettisessa lukujonossa on 18 jäsentä. Sen ensimmäinen jäsen on 60 ja sen jäsenten erotus on -5. Määritä jonon kymmenes ja viimeinen jäsen.

4. Lukujono muotoa $(-12, -7\frac{1}{2}, -3, \ldots)$ on aritmeettinen.

a) Määritä jonon 40. jäsen.

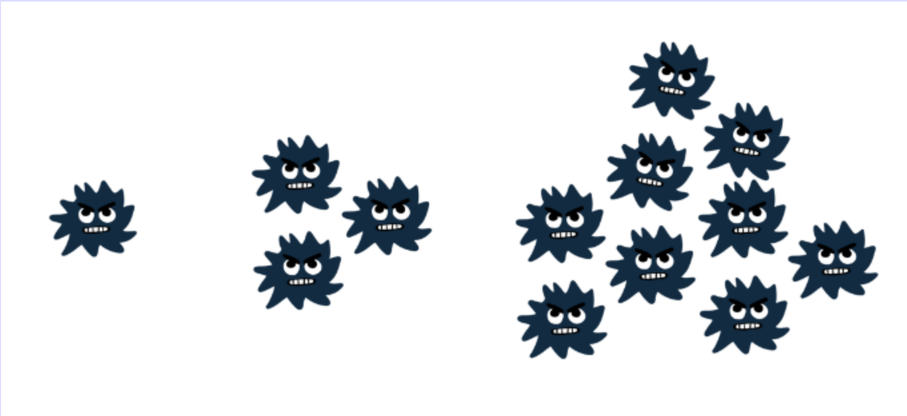
b) Kuuluuko luku 1185 jonoon? Jos kuuluu, niin kuinka mones jäsen se on?

5. Talon seinästä lähdetään rakentamaan aitaa kohti pihan rajaa, joka sijaitsee 20 metrin päässä. Aitaa varten maahan kiinnitetään tukipylväät tasaisin välimatkoin. Kuinka kaukana seinästä kolmas tukipylväs on, kun pylväitä kiinnitetään 15 kappaletta?

6. Neljällä jaolliset luonnolliset luvut välillä $20 - 424$ muodostavat aritmeettisen lukujonon. Monesko jäsen luku 132 on?

A.2 Geometrinen lukujono

Pohdinta A.10 Timo sairastuu flunssaan ja tartuttaa kolme henkilöä. Nämä kolme henkilöä sairastuttavat kolme uutta henkilöä ja niin edelleen.



(a) Miltä seuraava joukko sairastuneita näyttää?

(b) Mitä eri vaiheiden välillä tapahtuu?

(c) Paljonko sairastuneita on 5. vaiheessa?

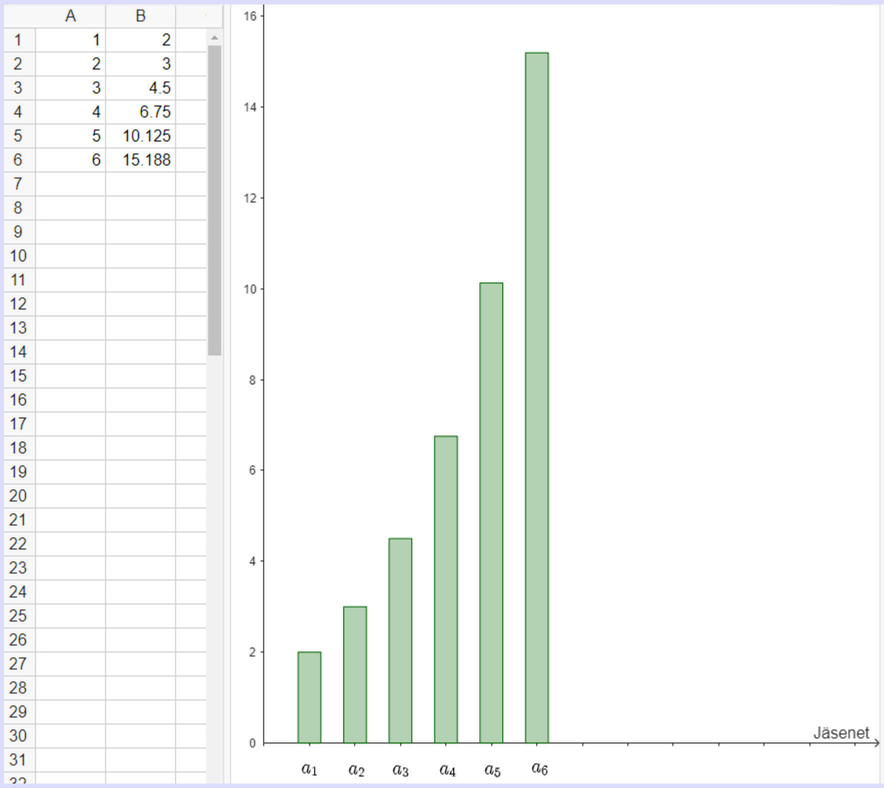
(d) Miten voidaan määrittää minkä tahansa vaiheen sairastuvien lukumäärä?

Määritelmä A.11 Lukujonoa, jossa seuraava jäsen saadaan edellisestä kertomalla se tietyllä vakiolla, kutsutaan *geometriseksi lukujonoksi*. Toisin sanoen lukujono $(a_1, a_2, \ldots)$ on geometrinen jos

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

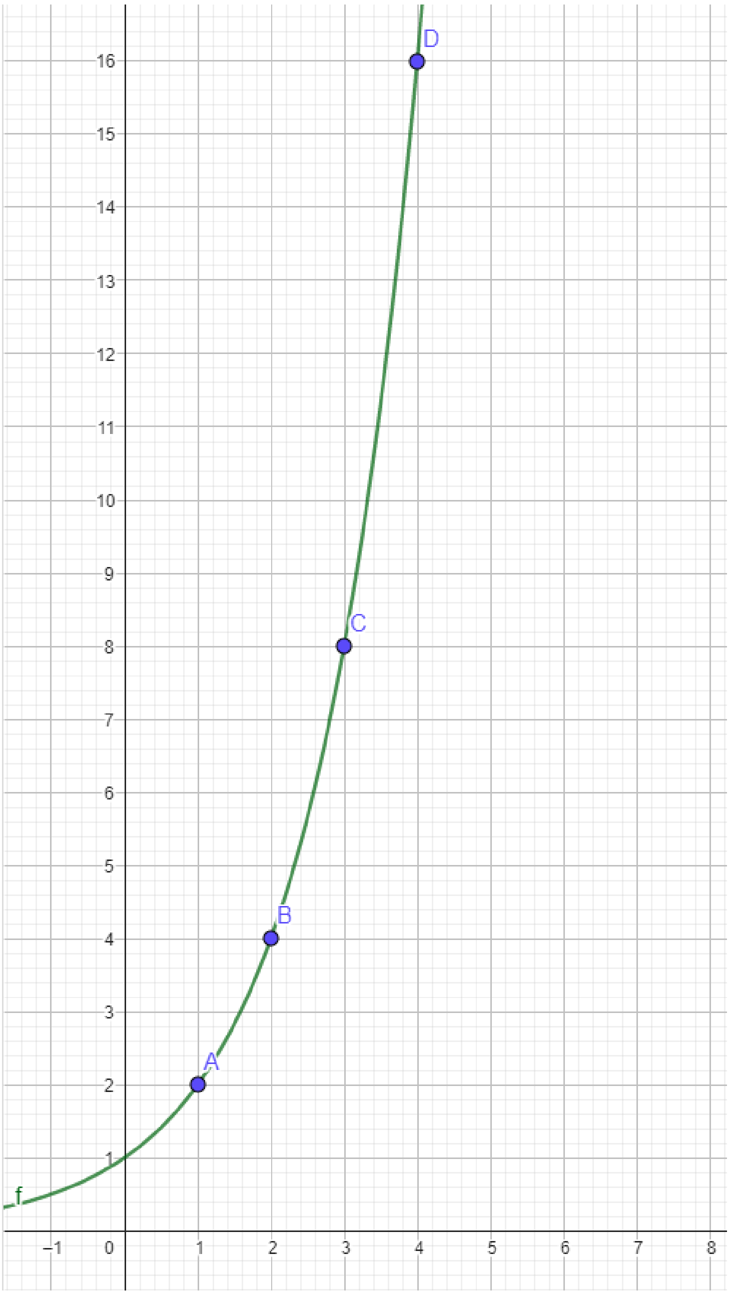
on vakio eli sama luku riippumatta indeksistä n. Lukua q kutsutaan *suhdeluvuksi*.

Pohdinta A.12 Geometrisuutta pystytään mallintamaan pylväsdiagrammin avulla. Kuvassa oleva pylväsdiagrammi on muodostettu GeoGebralla. Siinä esiintyy geometrinen lukujono, missä on viisi jäsentä.



1. Mikä on jonon suhdeluku? Mistä sen saa selville?
2. Jos jono jatkuisi, mitkä olisivat seuraavat viisi jäsentä?

Geometriset lukujonot pystytään havainnollistamaan myös eksponenttifunktion avulla. Kuvaajasta huomataan, että x:n kasvaessa myös y:n arvo kasvaa suhteessa enemmän joka välillä. Eli toisin sanoen paikalla x olevien jäsenten y välillä on suhde q.



Pohdinta A.13 Kuvaajien avulla voidaan havainnollistaa jonon etenemistä ja sen jäsenten etäisyyksiä toisistaan. Tutustu geometrisen lukujonon kuvaajiin ja pohdi seuraavia kysymyksiä. Tässä linkki GeoGebra-tehtävään.

(a) Miten suhteen muuttuminen vaikuttaa jonon jäseniin?

(b) Miten jäsenten välisen suhteen voi löytää suoraan funktion f lausekkeesta?

(c) Miten minkä tahansa jäsenen arvo voidaan löytää funktion f lausekkeesta?

Pohdinta A.14 Tutki alla mainittuja lukujonoja

(a) Onko lukujono $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{24})$ geometrinen?

(b) Onko lukujono $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -3, \ldots)$ geometrinen?

Pohdinta A.15 Yritys teki ensimmäisen vuoden aikana 10 000 € voittoa. Heidän ennusteensa mukaan heidän voittonsa tulee kasvamaan vuosittain 20%. Ilmoita taulukkolaskennan avulla heidän vuosittaiset voittonsa kuuden vuoden ajalta. Päättele lopuksi, miten n. vuoden ennuste saadaan laskettua, kun tiedetään vain ensimmäisenä vuonna tehty voitto ja ennuste.

Lause A.16 Geometrisen lukujonon n:s jäsen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, q on perättäisten jäsenten suhde ja n on jonon jäsenen järjestysluku.

Mallitehtävä A.17 Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja 37. jäsen on $a_{37} = 240$. Määritä

(a) jonon perättäisten jäsenten suhde $q > 0$,

(b) jonon seitsemäs jäsen a_7.

Ratkaisu

(a) Geometrisen jonon (a_n) perättäisten jäsenten suhde on q. Tällöin jonon 37. jäsen on muotoa

$$a_{37} = q^{36} a_1.$$

Tiedetään, että $a_1 = 2$ ja $a_{37} = 240$, jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} q^{36} \cdot a_1 =& a_{37} \\ q^{36} \cdot 2 =& 240 && \| : 2 \\ q^{36} =& 120 && \| \sqrt[36]{} \\ q =& \sqrt[36]{120}. \end{aligned}$$

(b) Jonon seitsemäs jäsen on muotoa

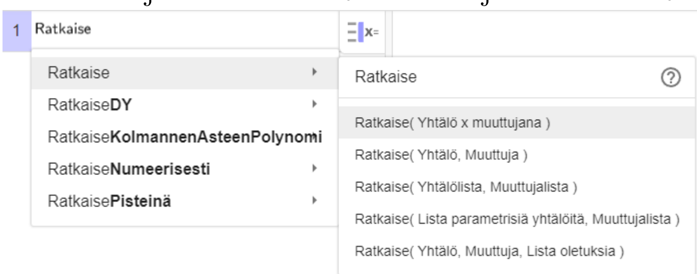
$$a_7 = q^6 a_1.$$

Lasketaan jäsenen arvo

$$\begin{aligned} a_7 =& q^6 a_1 \\ =& (\sqrt[36]{120})^6 \cdot 2 \\ =& 120^{\frac{6}{36}} \cdot 2 \\ =& 2 \cdot 120^{\frac{1}{6}} \\ =& 2\sqrt[6]{120}. \end{aligned}$$

Sama esimerkki voidaan laskea myös käyttämällä GeoGebran CAS-laskinta. Ratkaistaan esimerkin a-kohta seuraavanlaisesti:

1. Aloita kirjoittamalla ”Ratkaise” ja valitse ”Ratkaise (Yhtälö, Muuttuja)”.



2. Kirjoita sulkeiden sisään lauseen A.16 mukainen yhtälö ja merkitse tehtävässä annetut arvot yhtälöön.

3. Merkitse kysytty muuttuja yhtälön muuttujaksi sulkeiden sisään pilkun jälkeen. Muista merkitä potenssi.

4. Nyt rivin alapuolelle ilmestyy ratkaistavan yhtälön tulos.

Esimerkin b-kohta voidaan laskea samalla tavalla. Esimerkissä oleva suhdeluku saadaan CAS-laskimeen kirjoittamalla ”nJuuri(120,36)”.

Pohdinta A.18 Teron ihailemat kengät maksavat 50 €. Yhtenä päivänä hän huomaa hinnan laskeneen ja uusi hinta on 25 €. Tero uskoo, että kenkien hinta jatkaa puolittumistaan, joten hän päättää olla ostamatta kenkiä. Pitkän ajan jälkeen hän huomaa kenkien olevan poistomyymmissä hintaan 5 €. Onko hinta laskenut Teron odotusten mukaisesti? Perustele vastauksesi visuaalisesti GeoGebralla taulukkolaskennan ja pylväsdiagrammin avulla.

A.2.1 Harjoitukset

7. Määritä geometrisen lukujonon viides ja n:s jäsen, kun

(a) $a_1 = 1$ ja $q = 4$,

(b) $a_1 = 5$ ja $q = (-1,5)$,

(c) $a_3 = 27$ ja $a_8 = 6561$.

8. Keksi kolme geometrista lukujonoa ja laske niiden kuusi ensimmäistä jäsentä.

9. Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja 25. jäsen on $a_{25} = 537$. Määritä

(a) jonon perättäisten jäsenten suhde q,

(b) jonon yhdeksäs jäsen.

10. Määritä geometrisen lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä, kun

(a) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)}$,

(b) $a_{18} = 500 \cdot (1,5)^{17}$.

11. Yhdistämällä aina tasasivuisen kolmion sivujen puolivälit toisiinsa janalla saadaan jono sisäisiä kolmioita. Kuinka mones kolmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa ensimmäisen kolmion pinta-alasta?

12. Pallo pudotetaan neljän metrin korkeudelta alas antamatta sille yhtään ylimääräistä voimaa. Pallon osuessa maahan se pomppaa takaisin ylös menettäen 20% alkuperäisestä korkeudestaan. Kuinka monta pomppua pallo tekee, kunnes voidaan todeta että se on lopettanut pomppimisen?

(Huom! Määritetään tehtävän kannalta, että pallo ei pompi enää, kun sen pomppu yltää alle 5 cm korkeuteen).

13. Onko esitetty lukujono aritmeettinen tai geometrinen vai ei kumpaakaan?

(a) $\big((9), (13,5), (20,25), \dots\big)$,

(b) $(4, -4, 4, \dots)$,

(c) $\big((1), (2,5), (3,5), \dots\big)$,

(d) $a_n = 7n - 5$,

(e) $a_n = \frac{3}{n^2}$,

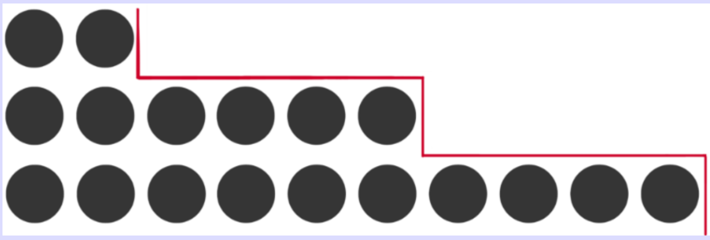
(f) $a_n = 1$.

A.3 Aritmeettinen summa

Tilanteissa, joissa todetaan muodostuneen lukujono, tarvitaan joskus myös lukujonon jäsenten summaa. Tapauksissa, missä jono on pieni ja jäseniä ei ole paljon, on mahdollista laskea summa helposti yksi jäsen kerrallaan. Kuitenkin, jos havaittu lukujono onkin suurempi, on käytettävä tehokkaampaa tapaa summan määrittämiseen. Tässä luvussa lähdetään liikkeelle tutustumalla *aritmeettisen summan* laskemiseen.

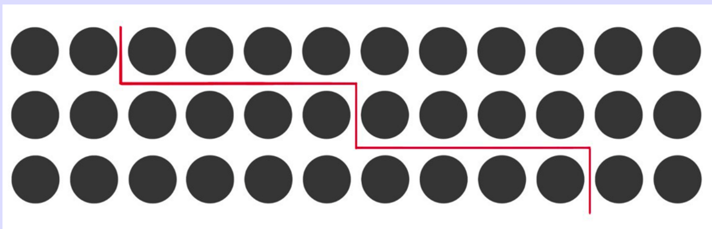
Pohdinta A.19 Tutustu aritmeettisen lukujonon jäsenten summan laskemiseen. Aritmeettista summaa voidaan tutkia myös pelkällä paperilla. Kyseinen laskutapa voidaan näin havainnollistaa myös konkreettisesti.

Valitaan jokin positiivisista kokonaisluvuista muodostuva aritmeettinen lukujono, jossa on 3-6 jäsentä esim. $(2, 6, 10)$. Kun lukujono on valittu, otetaan esille ruutupaperia ja piirretään valittu lukujono paperille. Aloitetaan piirtäminen jäsen kerrallaan niin, että täytetään niin monta ruutua samalle riville kuin jäsenen suuruus on. Piirretään seuraava jäsen samalla tavalla seuraavalle riville.



Miten valitsemasi lukujonon aritmeettisuus näkyy piirroksessa?

Piirretään nyt piirroksen ympärille ääriviivat ja sen jälkeen tehdään toinen samanlainen piirros myötäillen aikaisempaa piirrosta. Lopputuloksena pitäisi syntyä suorakulmio. Alla mallinnus lopputuloksesta auttamaan piirtämisessä.



Tutki aikaan saatua piirrosta ja pohdi alla olevia kysymyksiä:

1. Mikä on piirtämäsi suorakulmion leveys?
2. Mikä on piirtämäsi suorakulmion korkeus?

3. Mitä suorakulmion leveys vastaa muodostetussa lukujonossa?
4. Mitä suorakulmion korkeus vastaa muodostetussa lukujonossa?
5. Miten piirretyn lukujonon summa liittyy suorakulmion pinta-alaan?

Kun olet pohtinut listattuja kysymyksiä, voit alkaa täydentämään alla olevaa taulukkoa:

Tehtävätaulukko		
Summa	$3 + 7 + 11 + 15$	$2 + 6 + 10$
Muodostetun suorakulmion leveys		
Muodostetun suorakulmion korkeus		
Suorakulmion pinta-ala		
Lukujonon summa suorakulmion pinta-alan perusteella		
Lukujonon summa sen jäsenien perusteella		

Taulukon alimmasta sarakkeesta voidaan huomata, että tutkittu lopputulos muistuttaa täsmälleen aritmeettista summakaavaa.

Aritmeettiseen summaan liittyy myös tarina yhdestä matematiikan historian tunnetuimmista henkilöistä, C. F. Gaussista. Tarina kertoo hänen kouluvuosien ajoistaan, kun hänen tuolloinen opettajansa antoi luokan oppilaille tehtäväksi laskea yhteen kaikki luvut väliltä 1-100. Muut oppilaat pähkäilivät annetun tehtävän parissa, mutta Gauss ilmoitti lähes välittömästi saaneensa oikean vastauksen eli 5050. Opettaja oli hämillään ja kysyi, miten Gauss oli ratkaissut kyseisen tehtävän niin nopeasti. Gauss kertoi, ettei hän ollut laskenut lukuja suoraan yhteen, vaan hän keksi tavan, millä lukujen summa voidaan laskea hyvin nopeasti. Tämä kyseinen tapa on se, mikä käytetään aritmeettisen summan ratkaisemiseen.

Aritmeettisen lukujonon ensimmäisten n jäsenten summaa kutsutaan *aritmeettiseksi summaksi.* Havainnollistetaan asia laskemalla sama lasku, minkä Gauss laski.

Pohdinta A.20 Mikä on aritmeettisen lukujonon $(1, 2, 3, \ldots, 100)$ jäsenten summa?

(Vihje: Laskemalla jäseniä yhteen tietyllä tavalla voit saada monta samaa lukua yhteenlaskettavaksi. Pohdi myös, mistä lukujonon piirteistä laskun arvot on saatu.)

Lause A.21 Aritmeettinen summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä, a_1 on ensimmäinen jäsen ja a_n on viimeinen jäsen.

Todistus

Aloitetaan kirjoittamalla kaikki lukujonon jäsenet ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla. Alle kirjoitetaan sama lukujono lueteltuna lukujonon viimeisen jäsenen ja differenssin avulla:

$$\begin{array}{rlllll} S_n = & a_1 & + (a_1 + d) & + \cdots & + \big(a_1 + (n-2)d\big) & + \big(a_1 + (n-1)d\big) \\ + \; S_n = & a_n & + (a_n - d) & + \cdots & + \big(a_n - (n-2)d\big) & + \big(a_n - (n-1)d\big) \\ 2S_n = & (a_1 + a_n) & + (a_1 + a_n) & + \cdots & + (a_1 + a_n) & + (a_1 + a_n) \end{array}$$

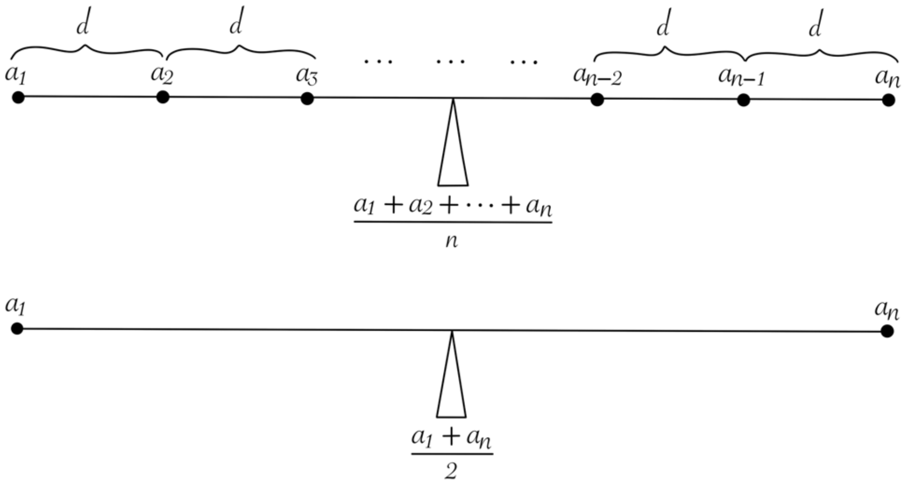
Laskemalla allekkain saadaan lukujonon jäsenten lukumäärän verran ensimmäisen ja viimeisen jäsenen summia. Jakamalla vielä lopputulos puolittain kahdella päädytään yleispätevään lopputulokseen:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \qquad \|: 2$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Aritmeettisen summakaavan paikkansa pitävyys voidaan myös esittää kuvan avulla. Kuvassa lähdetään oletuksesta, että aritmeettisen lukujonon voi laskea lauseen A.21 summakaavalla eli

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$



Oletuksessa esitetty yhtälö jaetaan puolittain jäsenten lukumäärällä n, jolloin yhtälön vasemmalle puolelle muodostuu lasku lukujen keskiarvosta. Huomataan, että keskiarvo vastaa lukua $\frac{a_1+a_n}{2}$. Summakaavassa lasketaan siis lukujen keskiarvo n kertaa.

Mallitehtävä A.22 Aritmeettinen jono on muotoa $(5, 29, 53, \dots)$. Määritetään jonon osajonoksi jono $(a_6, \dots, a_{11})$. Määritä osajonon summa.

Ratkaisu

Ratkaistaan ensin jäsenet a_6 ja a_{11}, joita varten tulee ensin ratkaista differenssi

$$d = a_{n+1} - a_n = 29 - 5 = 24.$$

Nyt jäsenet a_6 ja a_{11} ovat

$$a_6 = a_1 + (n-1)d = 5 + 5 \cdot 24 = 125,$$

$$a_{11} = a_1 + (n-1)d = 5 + 10 \cdot 24 = 245.$$

Nyt käytetään aritmeettisen summan lausetta ja ratkaistaan summa

$$S_6 = 6 \cdot \frac{125 + 245}{2} = 1110.$$

Pohdinta A.23 Kuntosalin jäsenyyden kuukausihinta on 40 €. Tero aloittaa jäsenyyden itselleen tammikuun alussa ja hän saa joka kuukausi yhden uuden kaverinsa liittymään kuntosalin jäseneksi. Paljonko kuntosali on saanut rahaa Terolta ja hänen ystäviltään joulukuussa?

A.3.1 Summamerkintä

Lukujonon perättäisten jäsenten summaa merkitään usein summamerkinnän Σ avulla. Merkintä on otettu kreikkalaisista aakkosista ja se on aakkosten iso sigma.
Summamerkintään voidaan yksinkertaisesti merkitä, mistä jonossa olevasta jäsenestä summa alkaa ja mihin jäseneen se loppuu. Alku merkitään summamerkinnän alle ja viimeinen jäsen summamerkinnän päälle.
Merkintä

$$\sum_{n=3}^{9} a_k$$

tarkoittaa summaa $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$.

Merkintä

$$\sum_{n=2}^{5} \frac{1}{n}$$

tarkoittaa summaa $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Aritmeettisen lukujonon tapauksessa myös aritmeettisen jonon summakaava voidaan esittää summamerkinnän avulla muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Pohdinta A.24 Laske summa taulukkolaskennan avulla

(a)

$$\sum_{n=1}^{80} (3n+4),$$

(b)

$$\sum_{n=8}^{50} \frac{2n}{10}.$$

Aritmeettisia summia voi laskea GeoGebran taulukkolaskennan avulla seuraavanlaisesti:

1. Avaa GeoGebra ja valitse ”Taulukkolaskenta”.

2. Muodosta taulukko, missä on kaksi saraketta. Ensimmäisessä sarakkeessa ovat jonon indeksit lueteltuna. Toisessa sarakkeessa ovat jonon jäsenten arvot.

3. Jonon jäsenet voi kirjoittaa kätevästi ensin laskemalla parin ensimmäisen jäsenen arvon. Huomaa näiden jälkeen myös tarkistaa jonon differenssi laskemistasi arvoista. Tämän jälkeen kirjaa seuraavaan ruutuun ”=edellinen ruutu + differenssi ”. Sitten klikkaa samaa ruutua oikeasta alakulmasta ja raahaa sitä jäsenten verran alaspäin, niin saat kaikki loput jäsenten arvot.

4. Tämän jälkeen maalaa kaikki tarvitsemasi jäsenten arvot. Voit tarkistaa tarvitsemasi jäsenet tehtävässä olevan summamerkinnän ylä- ja alapuolelta tai muussa tapauksessa tehtävänannosta. Maalauksen jälkeen valitse yläpuolelta Σ -vaihtoehto ja valitse summa. Näin jäsenten arvojen summa ilmestyy arvojen alapuolelle. Tarvittaessa laajenna saraketta, jos vastaus on huomattavan suuri.

A.3.2 Harjoitukset

14. Laske summa

(a)

$$\sum_{n=1}^{50}(4n+2),$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{50}(-2n+80),$$

(c)

$$\sum_{n=11}^{50}(7n-30).$$

15. Laske kaikkien kolminumeroisten kokonaislukujen summa.

16. Laske aritmeettisen jonon $(12, 25, 38, \ldots)$ ensimmäisen 18 jäsenen summa.

17. Kauppaan on saapunut juuri ananaspurkkilähetys, jossa purkkeja on 200 kappaletta ja halutaan kaikki kaupan puolelle ostettavaksi yhteen kasaan. Purkit pinotaan niin, että ylimmässä kerroksessa on yksi purkki ja alemmassa kerroksessa on aina kaksi purkkia enemmän kuin ylemmässä. Montako purkkia on alimmassa kerroksessa? Montako purkkia jää yli?

18. Aritmeettisen lukujonon 15 ensimmäisen jäsenen summa on 200 ja jonon 15. jäsen on 4. Määritä jonon ensimmäinen jäsen sekä jonon ensimmäisen neljän jäsenen summa.

19. Merkitse summa $1-3+5-7+\cdots+97-99+101$ muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ja laske summan arvo.

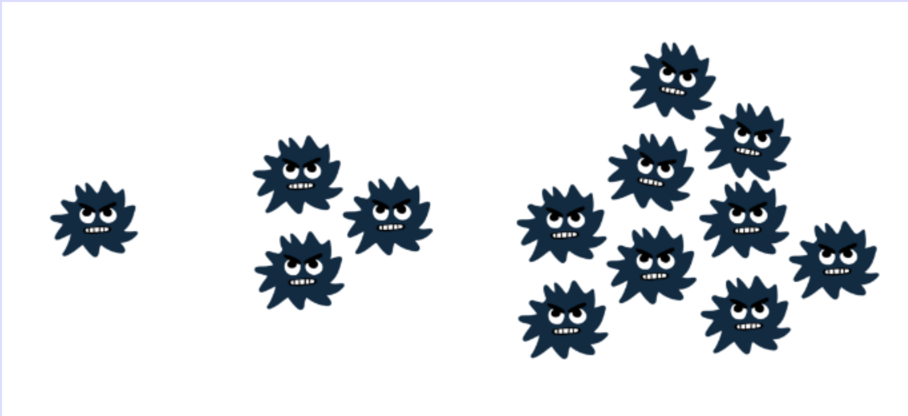
20. Laske summa

$$\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n}+\frac{3}{2n}+\cdots+\frac{n}{2n}.$$

21. Aritmeettisen sarjan ensimmäinen jäsen on -15 ja 15 ensimmäisen jäsenen summa on 0. Laske 15 seuraavan jäsenen summa.

A.4 Geometrinen summa

Pohdinta A.25 Timo sairastuu flunssaan ja tartuttaa kolme henkilöä. Nämä kolme henkilöä sairastuttavat kolme uutta henkilöä ja niin edelleen. Käyttäen taulukkolaskentaa aloita tutkimaan, miten sairaus jatkaa leviämistään.



(a) Listaa taulukkoon kaikki uudet sairastuneet eri vaiheissa. Kuinka monta uutta sairastunutta on 20. vaiheessa? Kirjoittamalla sopivan laskun soluun ja sen nurkasta vetämällä saat selville tarvittavat vaiheet.

(b) Montako sairastunutta on yhteensä 20. vaiheessa? Jäsenet lasketaan yhteen taulukkolaskennassa samalla tavalla kuin aritmeettisessa summassa.

(c) Vertailun vuoksi laske myös sairastuneiden määrä 5. vaiheessa ja 10. vaiheessa.

Geometrisen summan laskeminen voidaan suorittaa samankaltaisella lähtökohdalla kuin aritmeettisen summan laskeminen. Lasketaan edellisen pohdinnan tapauksessa sairastuneiden kokonaismäärä, kun flunssa leviää kymmenennen kerran.

Aloitetaan kirjoittamalla suoraan 10. vaiheen sairastuneiden kokonaismäärä

$$S_{10} = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^8 + 3^9.$$

Kerrotaan nyt koko summa kolmella ja kirjataan se erilliselle riville

$$3S_{10} = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^8 + 3^9 + 3^{10}.$$

Nyt verrataan näitä kahta summaa keskenään. Ainoat luvut, joita ei löydy molemmista summista, ovat 1 ja 3^{10}. Kaikki muut luvut esiintyvät molemmissa summissa. Lasketaan näiden summien erotus:

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 1 && + 3 && + 3^2 && + \cdots && + 3^8 && + 3^9 \\
-3S_{10} &= -3 && - 3^2 && - 3^3 && - \cdots && - 3^9 && - 3^{10} \\
S_{10} - 3S_{10} &= 1 && + 0 && + 0 && + \cdots && + 0 && - 3^{10}.
\end{aligned}$$

Otetaan S_{10} yhteiseksi tekijäksi ja lasketaan 10. vaiheen jälkeinen kokonaissumma yhtälönratkaisun avulla:

$$\begin{aligned}
(1-3)S_{10} &= 1 - 3^{10} \quad \|: (1-3) \\
S_{10} &= \frac{1-3^{10}}{1-3} \\
S_{10} &= 29524.
\end{aligned}$$

Kyseinen laskutapa voidaan muokata myös yleiseen muotoon samalla tavalla kuin aritmeettisen summan kaava. Kirjoitetaan ensimmäiselle summalle n. vaiheen jäsenten arvot ja kirjoitetaan toinen summa ensimmäisen summan ja sen suhteen tulona. Tämän jälkeen lasketaan niiden erotus:

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 && + a_1q && + a_1q^2 && + \cdots && + a_1q^{n-2} && + a_1q^{n-1} \\
-qS_n &= -a_1q && - a_1q^2 && - a_1q^3 && - \cdots && - a_1q^{n-1} && - a_1q^n \\
S_n - qS_n &= a_1 && + 0 && + 0 && + \cdots && + 0 && - a_1q^n
\end{aligned}$$

Otetaan S_n yhteiseksi tekijäksi ja lasketaan n. vaiheen jälkeinen kokonaissumma yhtälönratkaisun avulla:

$$\begin{aligned}
(1-q)S_n &= a_1 - a_1q^n \quad \|: (1-q) \\
S_n &= \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \\
S_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Lause A.26 Geometrinen summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

missä n on yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä, a_1 on ensimmäinen jäsen ja q on suhdeluku.

Pohdinta A.27 Timo sijoittaa vuoden välein 200 € johonkin yritykseen, jonka osakkeita hän ei vielä omista. Hänen sijoituskohteinaan olevien yritysten arvo kasvaa keskimäärin 1,7% vuosittain. Kuinka paljon Timon uusien sijoituskohteiden osakkeiden arvo on nykypäivänä, kun hän aloitti tämän tavan tasan 40 vuotta sitten?

Myös geometrisessa summassa voidaan käyttää aiemmin esitettyä summamerkintää.

Pohdinta A.28 Laske geometrinen summa taulukkolaskennan avulla

(a)
$$\sum_{n=1}^{5} 4^{n-1},$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{10} 2 \cdot 3^{-n}.$$

Myös geometrisia summia voidaan laskea GeoGebran taulukkolaskennan avulla. Summia lasketaan seuraavanlaisesti:

1. Avaa GeoGebran taulukkolaskenta ja muodosta taulukon pohja, kuten aritmeettisen summan laskussa.

2. Jonon jäsenet voi kirjoittaa kätevästi ensin laskemalla parin ensimmäisen jäsenen arvon. Tämän jälkeen kirjaa seuraavaan ruutuun ”=edellinen ruutu * suhde ”. Sitten klikkaa samaa ruutua oikeasta alakulmasta ja raahaa sitä jäsenten verran alaspäin, niin saat kaikki loput jäsenten arvot.

3. Tämän jälkeen maalaa kaikki tarvitsemasi jäsenten arvot. Maalauksen jälkeen valitse yläpuolelta Σ -vaihtoehto ja valitse summa. Näin jäsenten arvojen summa ilmestyy arvojen alapuolelle. Tarvittaessa laajenna saraketta, jos vastaus on huomattavan suuri.

Pohdinta A.29 Timo naulaa aitaansa 20 lankkua. Tero tarjoutuu tekemään työn Timon puolesta maksua vastaan. Tero ehdottaa, että hän saisi palkakseen ensimmäisestä kiinnitetystä lankusta yhden sentin, seuraavasta kaksi senttiä ja sitä seuraavasta aina kaksinkertaisen palkan edelliseen lankkuun verrattuna.
Timo ehdottaa vastatarjouksena Terolle 100 € palkkiota. Kumpi palkkauksista olisi kannattavampi Terolle, oletuksena, että hän tekee työn loppuun asti? Tutki asiaa taulukkolaskennan avulla.

A.4.1 Bonus

Aritmeettiset ja geometriset summat tulevat todella vahvasti näkyviin, kun aiheessa mennään eteenpäin. Varsinkin laina-aiheisissa sovelluksissa summien ymmärtäminen on hyödyksi. *Lainat* ovat käsiteltynä erikseen omana osa-alueenaan ja siksi niitä ei ole käsiteltynä edeltävissä luvuissa. **Annuiteetti** on kuitenkin aihe, jota ei tule selitettynä vastaan myöhemmin, joten se selitetään nyt soveltavin esimerkein.

Mallitehtävä A.30 Timo ottaa autolainan, jonka suuruus 20 000 €. Laina-aika on kahdeksan vuotta ja lainaa lyhennetään kerran vuodessa tasaerälainana. Lainan korko on 4,5%. Kuinka suuri maksuerä eli annuiteetti on?

Ratkaisu

Tasaerälaina on laina, missä jokainen maksuerä M on yhtä suuri.
Koko lainasumma, eli 20 000 €, on lainassa vuoden, jolloin tälle pääomalle lasketaan 4,5% korko.
Korkokerroin on $q = 1,045$, eli lainaa on juuri ennen ensimmäistä maksuerää 1,045 · 20 000 €. Tämän jälkeen maksetaan maksuerä M €.

Ensimmäisen lyhennyksen jälkeen lainaa on jäljellä (1,045 · 20 000 - M) €. Tämä määrä kasvaa taas vuoden aikana 4,5%.

Lainan määrä:

1. vuosi:

$$20\,000 \cdot 1,045 - M$$

2. vuosi:

$$(20\,000 \cdot 1,045 - M) \cdot 1,045 - M$$
$$= 20\,000 \cdot 1,045^2 - 1,045M - M$$

3. vuosi:

$$(20\,000 \cdot 1,045^2 - 1,045M - M) \cdot 1,045 - M$$
$$20\,000 \cdot 1,045^3 - 1,045^2M - 1,045M - M$$

$\vdots$

8. vuosi:

$$20\,000 \cdot 1,045^8 - 1,045^7M - 1,045^6M - \cdots - 1,045M - M$$

Laina on maksettava takaisin kahdeksassa vuodessa eli lainan määrä kahdeksan vuoden maksujen jälkeen on 0 €. Tällä perusteella saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 20000 \cdot 1,045^8 - 1,045^7M - \cdots - 1,045M - M &= 0 \\ -1,045^7M - 1,045^6M - \cdots - 1,045M - M &= -20000 \cdot 1,045^8 \\ 1,045^7M + 1,045^6M + \cdots + 1,045M + M &= 20000 \cdot 1,045^8 \\ (1,045^7 + 1,045^6 + \cdots + 1,045 + 1)M &= 20000 \cdot 1,045^8. \end{aligned}$$

Sulkujen sisällöstä muodostuu geometrinen summa $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.
Nyt $a_1 = 1, q = 1,045$ ja $n = 8$. Saadaan

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{1-1,045^8}{1-1,045}M &= 20000 \cdot 1,045^8 \\ M &= 20000 \cdot 1,045^8 \cdot \frac{1-1,045}{1-1,045^8} \\ M &= 3032,193066\ldots \\ M &\approx 3032,19. \end{aligned}$$

Annuiteetti on siis 3032,19 €.

Mallitehtävä A.31 Tero tarvitsee lainaa 7 500 €. Hänellä on varaa maksaa takaisin otettavaa lainaa 900 € vuodessa.
Tero aikoo ottaa 10 vuoden annuiteettilainan 4% korolla. Kykeneekö hän maksamaan lainan?

Ratkaisu

Nyt siis $M = 900, q = 1,04$ ja $n = 10$.
Näillä saadaan muodostettua aikaisemman esimerkin mukainen yhtälö, jossa on käytetty geometrista summaa. Nyt

$$\begin{aligned} 900 &= x \cdot 1,04^{10} \cdot \frac{1-1,04}{1-1,04^{10}} \\ x &= \frac{900 \cdot (1-1,04^{10})}{1,04^{10} \cdot (1-1,04)} \\ x &= 7299,806201\ldots < 7500. \end{aligned}$$

Tero ei kykene siis maksamaan lainaa.

A.4.2 Harjoitukset

22. Laske summa

(a) $4 + 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^5$,

(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \cdots + \frac{1}{5^6}$.

23. Laske summa

(a)
$$\sum_{n=0}^{10} 2^n,$$

(b)
$$\sum_{n=10}^{15} 3^n.$$

24. Laske geometrisen lukujonon $(6, 4, \frac{8}{3}, \dots)$ ensimmäisen 8 jäsenen summa.

25. Timo jakaa postauksen Instagramissa ja merkitsee siihen viisi ihmistä pyytäen heitä tekemään samoin ja merkitsemään viisi muuta ihmistä. Jos oletetaan, että uudet postaukset tehdään tunnin välein ja että kaikki käyttävät Instagramia, niin kuinka kauan kestäisi tavoittaa kaikki maapallon 8 miljardia ihmistä?

26. Merkitse summa $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{10}}$ muodossa

$$\sum_{i=0}^{n} a_i$$

ja laske sen summa.

27. Laske

(a)
$$\sum_{n=0}^{10} 2^{2n},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{3^{3n}}.$$

28. Sierpinskin kolmiossa on tasasivuinen kolmio, missä sivujen keskipisteet on yhdistetty toisiinsa muodostaen uusia kolmioita. Uusien kolmioiden sivujen keskipisteet yhdistetään samoin muodostaen uusia kolmion sisäisiä kolmiota.

(a) Montako kolmiota on alkuperäisen kolmion sisällä vaiheessa 10?

(b) Olkoon kolmion pinta-ala 1. Paljonko alkuperäisen kolmion pinta-alasta on jäljellä vaiheessa 10?

B Opettajan opas

Tässä osiossa käydään läpi kirjan lukujen tekijän suositus ajankäytölle oppitunteja varten sekä käydään tarkemmin läpi luvuissa esitettyjä pohdintatehtäviä.

B.1 Ajankäyttö

Alla on näkyvissä lukujen suunnittelijan suositus oppituntien pituudeksi:

- Aritmeettinen lukujono: 1,5x45min tai 1x75min
- Geometrinen lukujono: 1,5x45min tai 1x75min
- Aritmeettinen summa: 2x45min tai 1x75min
- Geometrinen summa: 2x45min tai 1x75min

B.2 Pohdinta

Pohdinta A.2

Pohdinta A.2 on ensiaskel aritmeettisen lukujonon havaitsemiseen. Kohdassa (a) tarkastellaan pinon kasvua. Tässä samalla selkeytyy, mitä (b)-kohdassa haettiin.
Kohdassa (c) päätellään kahdeksannen pinon laatikoiden lukumäärä. Tämän pystyy päättelemään monella tavalla, mutta kaikki tavat pohjautuvat aikaisempiin vastauksiin.
Kohdassa (d) johdatellaan aritmeettisen lukujonon määritelmään, johon ratkaisua on näppärä soveltaa aiemmasta kohdasta.

Pohdinta A.4

Pohdinnassa A.4 tutustutaan ensi kertaa pylväsdiagrammeihin aritmeettisen lukujonon puolesta. Ensimmäisessä kohdassa tulee huomata, että jonon jäsenten arvo on tulkittavissa y-akselilta.
Kohdassa 2 differenssin voi päätellä vertailemalla pylväiden korkeuksia. Toisena keinona voi myös vertailla jäsenten arvoja keskenään.
Sekä pylväsdiagrammin säännöllisyyden että differenssin avulla kohdassa 3 pystytään helposti päättelemään vastaus.

Pohdinta A.5

Pohdinnassa A.5 tutustutaan GeoGebran käyttöön erityisesti lukujonojen, mutta myös aritmeettisten lukujonojen puolesta. Kohdassa (a) tulee huomata pisteen liikkumisen olevan vakio aina tietyssä funktiossa.
Kohdassa (b) on ideana näyttää aritmeettisen jonon yhtäläisyys lineaarisen kuvaajan yhtälöön. Jäsenten differenssin löytämiseksi on syytä tarkkailla kulmakerrointa.
Kohdassa (c) on sama idea kuin aikaisemmassa kohdassa, mutta nyt ideana on löytää jäsenen arvo. Pistettä ja sen koordinaatteja tarkastelemalla yhtäläisyyden tulisi löytää helposti.

Pohdinta A.6

Pohdintatehtävässä A.6 tarkoituksena on tunnistaa ja muodostaa aritmeettisen jonon rakenne. Ensimmäisessä osiossa tiedetään lukujonon jäsenet, joten on vain syytä tutkia, onko niiden differenssi vakio. Lukujonoa edetessä huomataan, että vastaan tulee yksi arvo joka ei tuota samaa differenssiä kuin muut jonon jäsenet. Toinen osio etenee samalla tavalla, mutta kaikki arvot muodostavat saman differenssin ja jono todetaan aritmeettiseksi.

Pohdinta A.7

Pohdinnassa A.7 tarkoituksena on johdatella opiskelijaa kohti lausetta A.8 ja osoittaa, mitä aritmeettisesta jonosta saadaan selville pelkillä alkutiedoilla. Tehtävässä tulee tunnistaa ensimmäinen jäsen sekä ilmoitettu differenssi ja näillä tiedoilla päätellä loput jonon jäsenet taulukkolaskennan avulla.

Pohdinta A.10

Pohdinta A.10 on ensiaskel geometrisen lukujonon havaitsemiseen ja samankaltainen luonteeltaan verrattuna pohdintaan A.2. Kohdassa (a) tulee huomata, että sairastuneiden määrä kolminkertaistuu vaihe vaiheelta. Tässä samalla selkeytyy, mitä (b)-kohdassa haettiin.
Kohdassa (c) päätellään viidennen joukon bakteerien lukumäärä. Tämän pystyy päättelemään monella tavalla, mutta kaikki tavat pohjautuvat aikaisempiin vastauksiin.
Kohdassa (d) johdatellaan geometrisen lukujonon määritelmään, johon ratkaisua on näppärä soveltaa aiemmasta kohdasta.

Pohdinta A.12

Pohdinnassa A.12 tutustutaan ensi kertaa pylväsdiagrammeihin geometrisen lukujonon puolesta. Kohdassa 1 suhdeluvun voi päätellä vertailemalla pylväiden korkeuksia. Toisena keinona voi myös vertailla jäsenten arvoja keskenään.
Suhdeluvun selvittämisen jälkeen kohdassa 2 pystytään selvittämään seuraavien pylväiden korkeudet.

Pohdinta A.13

Pohdinnassa A.13 tutustutaan GeoGebran funktioiden käyttöön geometristen lukujonojen puolesta. Kohdassa (a) tulee huomata pisteen kulkeman matkan kasvavan aina lukujonossa eteenpäin mentäessä tietyssä funktiossa.
Kohdassa (b) on ideana näyttää geometrisen jonon yhtäläisyys eksponentiaalisen kuvaajan yhtälöön. Jäsenten suhteen löytämiseksi on syytä tarkkailla vakiokerrointa.
Kohdassa (c) on sama idea kuin aikaisemmassa kohdassa, mutta nyt ideana on löytää jäsenen arvo. Pistettä ja sen koordinaatteja tarkastelemalla yhtäläisyyden tulisi löytyä helposti.

Pohdinta A.14

Pohdinnassa A.14 tulee ensin tunnistaa ja muodostaa geometrisen jonon rakenne. Ensimmäisessä osiossa tiedetään lukujonon jäsenet, joten on vain syytä tutkia, onko niiden välinen suhde vakio. Jonoa edetessä huomataan, että yksi jäsen ei vastaa samaa suhdelukua kuin muut jäsenet. Toinen osio etenee samalla tavalla, mutta kaikki arvot muodostavat saman suhdeluvun ja jono todetaan geometriseksi.

Pohdinta A.15

Pohdinnassa A.15 tarkoituksena on johdatella opiskelijaa kohti lausetta A.16 ja osoittaa, mitä aritmeettisesta jonosta saadaan selville pelkillä alkutiedoilla. Tehtävässä tulee tunnistaa ensimmäinen jäsen sekä ilmoitettu suhde ja näillä tiedoilla päätellä loput jonon jäsenet taulukkolaskennan avulla.

Pohdinta A.18

Pohdinnassa A.18 tarkoituksena on poimia tehtävänannosta, että kyseessä on geometrinen lukujono. Opiskelija kirjaa taulukkoon ensimmäiset jonon jäsenet, jonka jälkeen hän muodostaa tarpeeksi pitkän jonon ratkaisun löytämiseksi.
Taulukosta ratkaisun löytymisen jälkeen opiskelija kuvaa saamansa arvot pylväsdiagrammina.

Pohdinta A.19

Pohdinnassa A.19 on ideana esitellä matematiikkaa perinteisen oppimateriaalin ulkopuolelta. Tehtävässä hahmotetaan aritmeettista lukujonoa ja siitä tapaa laskea sen summa. Käytännössä tehtävässä halutaan opiskelijan johtavan aritmeettisen summan kaavan käsillä käsiteltävällä tavalla. Pohdinnassa olevat kysymykset ovat ohjaamassa ja tukemassa tehtävään kuuluvan taulukon täydentämistä.
Kohdissa 1 ja 2 vastaukset selviävät suoraan tutkimalla piirroksia.
Kohdissa 3 ja 4 tulee osata yhdistää otetut leveydet ja korkeudet aritmeettisen lukujonon summakaavasta löytyviin muuttujiin eli jäsenten lukumääriin ja ensimmäisen ja viimeisen jäsenen summaan.
Kohdassa 5 tulee huomata piirroksen sarjan summa on puolet piirretyn suorakulmion pinta-alasta.

Pohdinta A.20

Pohdintatehtävässä A.20 on tarkoituksena saada opiskelija suorittamaan aritmeettisen summan kaavan johtaminen ilman, että hän tietää johtaneensa sen. Haetaan siis samaa asiaa kuin aikaisemmassa pohdinnassa, mutta vain matemaattisemmin. Aikaisemman pohdinnan avulla tehtävän käynti käy helpommmin, mutta tehtävän voi suorittaa myös ilman sitä.
Tehtävään on annettu vihje, jolla halutaan johdatella aritmeettisen summan laskukaavan mukaiseen laskutapaan. Vihjeen avulla opiskelija voi toki summata jäseniä yhteen monella eri tavalla, mutta vihjeen mukaisesti halutaan monta samaa lukua. Pyrkiminen summaamaan muun muassa lukuun 100 voi olla hyvinkin yleistä, mutta tällöin luku 50 jäisi erilleen.
Yhteenlaskun suoritettuaan ja sitä tiivistettyään opiskelija päätyy muotoon $50 \cdot 101$. Tästä saadaan oikea tulos, mutta opiskelijan halutaan hahmottavan summakaava kokonaisuudessaan. Tämän vuoksi vihjeessä on myös toinen osa, missä pohditaan laskun lukujen verrattavuutta tehtävänantoon. Ideana on, että opiskelija hahmottaisi lukuihin ensimmäisen ja viimeisen jäsenen sekä jäsenten määrän.

Pohdinta A.23

Pohdinnassa A.23 halutaan hahmottaa raha-aiheisia ja sanallisia tehtäviä aritmeettisien summien tehtäviin. Tehtävästä tulee hahmottaa, että siinä muodostuu aritmeettinen lukujono ja tehtävänannosta pystytään lukemaan lukujonon ensimmäinen jäsen, jäsenten määrä sekä laskemalla myös viimeinen jäsen. Tehtävän ratkaisutyyli seuraa suoraan lausetta

A.21.

Pohdinta A.24

Pohdinnassa A.24 harjoitetaan taulukkolaskennan käyttöä summien suhteen. Tehtävässä tulee sekä (a)- että (b)-kohdassa taulukkolaskennan tapaan ensin laskea ensimmäiset jäsenet, jonka jälkeen taulukkomenetelmillä voidaan selvittää loput jäsenet. Lopuksi lasketaan pyydetty summa.

Pohdinta A.25

Pohdinnassa A.25 käytetään *Geometrinen jono* -osiosta tuttua aloituspohdintaa, mutta nyt asiaa tutkitaan taudin edetessä pidemmälle.
Kohdassa (a) tulee taulukon avulla listata ensimmäiset jäsenet ja määrittää jonon 20. jäsen.
Tästä päästäänkin (b)-kohtaan, missä jäljelle jää laskettavaksi taulukoidun jonon summa.
Lopuksi kohdassa (c) halutaan vertailla ja hahmottaa opiskelijalle kuinka suuri ero summissa on geometrisessa lukujonossa. Summat voi laskea helposti sotkematta aikaisempaa jonoa kopioimalla taulukosta laskettavat jäsenten arvot erilliselle taulukolle ja laskemalla siinä kysytty summa.

Pohdinta A.27

Pohdintatehtävässä A.27 tuodeen esille geometrista summatehtävää raha-aiheisessa sanallisessa tehtävässä. Tehtävässä tulee huomata, että siinä muodostuu geometrinen summa. Siinä annetaan, ensimmäinen jäsen, yhteenlaskettavien jäsenten määrä sekä suhdeluku. Tehtävänratkaisu noudattaa suoraan lausetta A.26.

Pohdinta A.28

Pohdinta A.28 on tyyliltään vastaava kuin A.24. Pohdinnassa harjoitetaan taulukkolaskennan käyttöä summien suhteen. Tehtävässä tulee sekä (a)- että (b)-kohdassa taulukkolaskennan tapaan ensin laskea ensimmäiset jäsenet, jonka jälkeen taulukkomenetelmillä voidaan selvittää loput jäsenet. Lopuksi lasketaan pyydetty summa.

Pohdinta A.29

Tehtävässä tulee huomata, että Teron ehdotuksessa palkka aina kaksinkertaistuisi seuraavaa lautaa kohden. Kyseessä on siis geometrinen lukujono. Geometrisesta lukujonosta tiedetään jäsenten määrä, suhde ja ensimmäinen jäsen. Kirjataan ensimmäiset jäsenten arvot taulukkoon, muodostetaan taulukko 20 jäseneen asti ja lasketaaan summa. Saatua tulosta verrataan Teron tarjoukseen 100 €.

C Harjoitusten vastaukset

C.1 Aritmeettinen jono

1. (a) $a_5 = 12$ ja $a_n = 3n - 3$.
   (b) $a_5 = -15$ ja $a_n = -4n + 5$.
   (c) $a_5 = 14\frac{2}{3}$ ja $a_n = \frac{11}{7}n + \frac{45}{7}$.

3. $a_{10} = 15$ ja $a_{18} = -15$.

4. (a) 163,5.
   (b) Kuuluu, $n = 267$.

5. 4 metriä.

6. $n = 29$.

C.2 Geometrinen jono

7. (a) $a_5 = 256$ ja $a_n = 4^{n-1}$.
   (b) $a_5 = 25\frac{5}{16}$ ja $a_n = 5 \cdot (-1,5)^{n-1}$.
   (c) $a_5 = 243$ ja $a_n = 3^n$.

9. (a) $q = \sqrt[20]{179}$.
   (b) $a_9 = 3\sqrt[3]{179}$.

10. (a) $a_1 = 10, a_2 = 2, a_3 = \frac{2}{5}$.
    (b) $a_1 = 500, a_2 = 750, a_3 = 1125$.

11. $n > 9,9657...$ eli tällöin $n \geq 10$.

12. $n > 19,6377...$ eli tällöin $n \geq 20$.

13. (a) Geometrinen.
    (b) Geometrinen.
    (c) Ei kumpikaan.
    (d) Aritmeettinen.
    (e) Ei kumpikaan.
    (f) Aritmeettinen ja geometrinen.

C.3 Aritmeettinen summa

14. (a) $S_{50} = 5200$.
    (b) $S_{51} = 1530$.
    (c) $S_{40} = 7340$.

15. 494550.

16. 2205.

17. $a_{14} = 27$, purkkeja jää yli 4 kpl.

18. $a_1 = 22\frac{2}{3}$ ja $S_4 = 82\frac{2}{3}$.

19. 51.

20. $S_n = \frac{n+1}{4}$.

21. $642\frac{6}{7}$.

C.4 Geometrinen summa

22. (a) $S_7 = \frac{2723}{512}$.
    (b) $S_7 = \frac{13021}{15625}$.

23. (a) $S_{11} = 12207031$.
    (b) $S_6 = 423644275200 \approx 4,24 \cdot 10^{11}$.

24. $S_8 = \frac{12610}{729}$.

25. $n > 15,02947...$ eli tällöin $n \geq 16$.

26. $S_{11} = \frac{88573}{59049}$.

27. (a) $S_{11} = 1398101$.
    (b) $S_5 = \frac{7381}{59049}$.

28. (a) $S_{10} = 29524$.
    (b) $A = \frac{19683}{262144}$.