Ensimmäisen asteen yhtälö sekä suoraan ja kääntäen verrannollisuus lukiossa

Pro gradu -tutkielma

Lotta Niemelä
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2023

Sisällys

1 Johdanto 3

2 Oppimateriaalin tavoitteet 4

2.1 Oppikirjan tekijöiden valitsemat tavoitteet 4

2.1.1 Ajattelutavat 4

2.1.2 Erilaiset tehtävätyypit 5

2.2 Lukion opetussuunnitelman tavoitteet 7

2.2.1 Laaja-alaisen osaamisen osa-alueet 7

2.2.2 Matematiikan opetuksen yleiset tavoitteet 7

2.2.3 May 1 Luvut ja yhtälöt -moduulin tavoitteet 8

3 Oppimateriaalin perustelut 9

3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö 9

3.2 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus 11

A Yhtälö 14

A.1 Tehtävät 19

B Suoraan verrannollisuus 20

B.1 Tehtävät 24

C Kääntäen verrannollisuus 25

C.1 Tehtävät 30

D Opettajan opas 31

D.1 Ensimmäisen asteen yhtälö 31

D.2 Suoraan verrannollisuus 32

D.3 Kääntäen verrannollisuus 33

E Tehtävien vastaukset 35

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on toinen osakokonaisuus viidestä tutkielmasta, jotka muodostavat yhdessä kokonaisen oppikirjan. Oppikirjan aiheena on lukion ensimmäinen matematiikan moduuli *MAY 1 Luvut ja yhtälöt*. Oppimateriaali perustuu voimassa olevaan Lukion opetussuunnitelmaan. Lisäksi kaikki oppikirjan tekijät hyödyntävät Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula [2] ja Collaborative Learning in Mathematics [11] artikkeleita sekä tieteellisiä artikkeleita.

Oppikirjan teoriaosuuden ja tehtävien tavoitteena on kehittää opiskelijoiden matemaattisia ajattelutapoja erilaisten tehtävätyyppien avulla. Oppikirjan tavoitteena on erityisesti kehittää opiskelijoiden taitoa käyttää sekä kirjallisesti että suullisesti matemaattista kieltä tehtävien perusteluissa, kirjaamisessa ja esittämisessä, taitoa käyttää apuna havainnollistavia taulukoita ja kuvaajia sekä oppia käyttämään tehokkaita ja vaihtelevia ratkaisutapoja. Teoriaosuus ja tehtävät on laadittu niin, että ne pyrkivät vahvistamaan ja kehittämään opiskelijoiden teknisten taitojen lisäksi erilaisten matemaattisten esitysmuotojen tulkintataitoja sekä matemaattista perustelu- ja analysointitaitoa.

Oppikirjan laatimista ovat ohjanneet tieteelliset artikkelit, joiden pohjalta materiaali on pyritty muokkaamaan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun, joustavia ratkaisumallien, ongelmanratkaisun sekä matemaattisen perustelun ja pohdinnan kehittymistä ohjaavaksi kokonaisuudeksi. Tehtävät on pyritty laatimaan arkielämän ilmiöistä, mikä lisää ymmärrystä matematiikan tärkeydestä sekä innostaa ja motivoi opiskelua.

Tämä tutkielma sisältää moduulin aiheista ensimmäisen asteen yhtälön, suoraan verrannollisuuden ja kääntäen verrannollisuuden. Osioiden perusteellinen harjoittelu ja oppiminen ovat tärkeitä, jotta matemaattiset taidot voivat kehittyä korkeammalle tasolle. Yhtälönratkaisutaidon voidaan ajatella olevan matematiikan perustaito, jota tarvitaan useilla matematiikan osa-alueilla ja sen osaaminen muodostaa vankan pohjan korkeamman matematiikan opiskelulle. Verrannollisuuden ja asioiden suhteiden ymmärtäminen kehittää myös ongelmanratkaisutaitoa, jota vaaditaan myöhemmissä matematiikan opinnoissa.

Tutkielma koostuu viidestä eri luvusta, joista ensimmäinen on oppimateriaalin tavoitteet. Luvussa on käsitelty oppikirjan tekijöiden valitsemia tavoitteita ja yleisiä tavoitteita. Toisessa osassa oppimateriaalissa tehtyjä valintoja perustellaan tieteellisten artikkelien pohjalta. Kolmas luku muodostuu oppikirjasta teoriaosioineen ja tehtävineen. Neljäs luku on opettajan opas, jossa annetaan avustavia kysymyksiä oppikirjassa esiintyviin pohdintatehtäviin, niiden vastaukset ja tuntitehtäviin liittyviä huomioita. Viidennessä luvussa on oppikirjassa esiintyvien kotitehtävien vastaukset.

2 Oppimateriaalin tavoitteet

Oppikirjan materiaalin suunnittelussa ovat vaikuttaneet erityisesti artikkelit Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula [2] ja Collaborative Learning in Mathematics [11]. Näiden lisäksi oppikirjan materiaalia on ohjannut Lukion opetussuunnitelman perusteet (2019) [9].

2.1 Oppikirjan tekijöiden valitsemat tavoitteet

Olemme kirjan tekijöiden kanssa valinneet kolme matemaattista ajattelutapaa, joita erityisesti haluamme tämän oppikirjan avulla vahvistaa. Nämä ajattelutavat ja niiden hyödyntäminen oppikirjassa esitellään seuraavaksi. Näiden lisäksi olemme valinneet kolme tehtävätyyppiä, jotka vahvistavat matematiikan opettamista ja oppimista. Myös nämä valitut tehtävätyypit ja niiden sovellukset oppikirjassa on perusteltu tässä luvussa.

2.1.1 Ajattelutavat

Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula artikkelissa on esitelty matemaattisia ajattelutapoja. Artikkelin mukaan tiettyjä matemaattisia tuloksia huomattavasti tärkeämpää on tulosten luoneiden henkilöiden ajattelutavat (habits of mind). Tavoitteena on auttaa lukiolaisia oppimaan ja omaksumaan keinoja, joilla matemaatikot ajattelevat ongelmia. Cuoco, Goldenberg ja Mark toteavat, että on kaikkein tärkeintä ymmärtää milloin käyttää mitäkin ajattelutapaa. [2] Valitsimme yhdessä oppikirjan tekijöiden kanssa näistä ajattelutavoista kolme, joita pyrimme tämän kirjan avulla kehittämään opiskelijoilla. Oppimateriaalin tarkoituksena on, että opiskelijat kehittyvät kuvailemaan, visualisoimaan ja kokeilemaan matemaattisia tehtäviä ratkoessaan.

Kuvailijat (Describers)

Ajattelutavan perusajatuksena on, että opiskelija osaa käyttää matemaattista kieltä. Tämän ajattelutavan mukaan opiskelijan tulisi pystyä kuvailemaan täsmällisesti prosessin vaiheita, sillä se on tärkeä osa asian ymmärtämistä. Opiskelijan tulisi myös pystyä vakuuttamaan luokkalaisensa tehtäviensä ratkaisuista ja keksimään uusia matemaattisia merkintätapoja. Tärkeä osa kuvailemisen ajattelutapaa on kirjata ylös ajatuksia ja tuloksia sekä viimeistellä ne esitettävään muotoon. Myös erilaiset työskentelytavat, joissa opiskelijat jakavat ideoitaan sekä kysyvät ja kommentoivat toistensa ideoita kehittävät kyseistä ajattelutapaa. [2]

Ensimmäisen asteen yhtälö -luvussa tätä ajattelutapaa tukee muun muassa Pohdinnat A.2, A.4 ja A.7. Pohdinta A.2 vahvistaa tulosten kirjaamista ja viimeistelemistä esitettävään muotoon. Pohdinnassa A.4 opiskelijan tulee käydä ratkaisu läpi vaihe vaiheelta ja kuvailla, mitä tehtävän ratkaisija on tehnyt väärin. Pohdinnassa A.7 opiskelija joutuu keksimään uusia matemaattisia merkintätapoja ja suullisesti kuvailemaan prosessin vaiheita. Myös Tehtävät 1 ja 2 vahvistavat kyseisen ajattelutavan kehittymistä. Suoraan verrannollisuuden Pohdinnassa B.4 opiskelija harjaannuttaa uuden vaihtoehtoisen merkintätavan kirjaamistaitoa ja Pohdinta B.6 kehittää prosessin vaiheiden täsmällistä kuvailua. Kääntäen verrannollisuudessa Pohdinta C.3 edistää opiskelijan kykyä kirjata tuloksia matemaattisesti esitettävään muotoon.

Visualisoijat (Visualizers)

Matematiikka sisältää monenlaista visualisointia, kuten taulukoita ja kuvaajia. Niitä voidaan käyttää apuna esimerkiksi silloin, kun jokin asia on liian pieni tai iso tai liian monimuotoinen nähtäväksi. Visualisoinnin tarkoituksena on auttaa opiskelijaa ymmärtämään tehtävänantoa ja kiinnittämään huomio tehtävän ratkaisun kannalta oleellisiin asioihin. [2]

Tehtävien visualisointi auttaa suoraan ja kääntäen verrannollisten tehtävien ratkaisussa. Tilanteesta kannattaa usein laatia taulukko, kuten Mallitehtävässä B.3, Pohdinnassa C.2 ja Mallitehtävässä C.4 on tehty. Pohdinnassa B.2 harjoitellaan taulukon tietojen tulkitsemista. Pohdinnassa B.7 vahvistuu opiskelijan kyky havannoida taulukon ja kuvaajan riippuvuuksia. Havainnolliset taulukot auttavat hahmottamaan tehtävän antoa ja helpottavat verrantoyhtälön saamista oikeaan muotoon. Opiskelijoita tulee kannustaa havainnnollistavien taulukoiden laatimiseen suoraan ja kääntäen verrannollisuuden tehtäväosioissa erityisesti silloin, jos tehtävänannon ymmärtämisessä on hankaluuksia.

Kokeilija (Experimenter)

Monilta opiskelijoilta puuttuu kyky ratkaista matemaattisia pulmia vaihtelevin tavoin. Esimerkiksi jo ratkaisujen merkitseminen eri tavoin tai muuttujien vaihtaminen voi olla haastavaa. Kohdatessaan matemaattisen ongelman oppilaan pitäisi heti alkaa kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja, jotka ovat aiemmin osoittautuneet hyödyllisiksi. Samalla olisi hyvä oppia terveellä tavalla suhtautumaan skeptisesti kokeilujensa tuloksiin. [2]

Oppikirjan materiaalissa kokeilevaa ajattelutapaa esitellään Mallitehtävässä A.5 ja A.6. Opiskelijoiden kokeilevaa ajattelutapaa pyritään kehittämään Pohdinnan A.7 avulla. Pohdinnassa ensimmäisen asteen yhtälöitä ratkaistaan joustavalla ja tehokkaammalla tavalla. Täten opiskelijalle luodaan rohkeutta kokeilla erilaisia ratkaisustrategioita. Tehtävässä 2 opiskelijoiden kokeilevaa ratkaisutapaa pyritään vahvistamaan. Myös Pohdinta B.4 ja Huomautus B.5 vahvistavat kyseisen ajattelutavan kehittymistä. Suoraan ja kääntäen verrannollisuuden Määritelmissä B.8 ja C.6 sekä Mallitehtävissä B.9 ja C.7 on esitelty myös verrannollisuuskertoimet. Tätä erilaista ratkaisutapaa opiskelijat harjaannuttavat Tehtävissä 7 ja 12. Joustavasta ratkaisutavasta on kerrottu lisää ensimmäisen asteen yhtälön perusteluosassa.

2.1.2 Erilaiset tehtävätyypit

Swanin artikkelissa Collaborative Learning in Mathematics on esitetty tehtävätyyppejä, joiden avulla saataisiin tehostettua matemaattisten käsitteiden ja strategioiden opettamista ja oppimista. Tavoitteena on auttaa oppilaita omaksumaan aktiivisempia lähestymistapoja oppimistilanteissa. Näitä ovat esimerkiksi keskusteleminen, ideoiden selittäminen ja muiden oppilaiden keksimien ongelmien ratkaiseminen. [11] Olemme valinneet yhdessä kirjan tekijöiden kanssa kolme artikkelissa esiintyvistä tehtävätyypeistä, joita oppikirjassa käytetään.

Erilaisten esitysmuotojen tulkinta (interpreting multiple representations)

Vaikka tekniset taidot, kuten lausekkeen muokkaaminen, ovat tärkeitä, on myös tärkeää keskittyä esitysmuotojen tulkintaan. Matematiikassa on monenlaisia esitysmuotoja, kuten sanat, diagrammit, algebralliset symbolit, kuvaajat ym. Niiden avulla oppilaiden on helpompi muodostaa yhteyksiä asioiden välillä ja ymmärtää alla piilevien käsitteiden välisiä sidoksia. Tässä tehtävätyypissä tunnetuin tapa on kortit, joissa yhdistetään objekteja, jos ne ovat matemaattisesti yhtäpitäviä. Tässä kategoriassa tunnetuin harjoittelumuoto on korttiparit tai haastetta antavat korttiryhmät. Kortit ovat tehokas tapa oppia tulkitsemaan erilaisia matemaattiisia esitysmuotoja ja yhdistelemään niitä toisiinsa. [11]

Oppikirjan materiaaleista löytyy eri esitysmuotoja, kuten sanallisia tehtäviä, algebrallisia symboleita ja taulukoita. Suoraan ja kääntäen verrannollisuudessa taulukoiden luominen auttaa muodostamaan asioiden välisiä yhteyksiä. Pohdinnat B.7 ja C.5 sisältävät myös kuvaajia suoraan ja kääntäen verrannollisista suureista. Aihe käsitellään vasta myöhemmin oppikirjassa, mutta näissä tehtävissä opiskelijat saavat pintakosketuksen suoraan ja kääntäen verrannollisten suureiden kuvaajiin. Pohdinta C.5 on edellä esitelty haastetta antava korttiryhmä -tehtävä. Siinä pyritään vahvistamaan erilaisten matemaattisten esitysmuotojen tulkitsemis- ja yhdistelytaitoja.

Matemaattisten väitteiden arviointi (evaluating mathematical statements)

Matematiikassa tulee arvoida, pitääkö väite paikkaansa aina, joskus vai ei koskaan. Tässä tehtävätyypissä opiskelijoille annetaan paljon matemaattisia väittämiä tai yleistyksiä, joiden paikkaansapitävyys oppilaiden tulee perustella. Usein perustelut koostuvat esimerkeistä tai vastaesimerkeistä, jotka tukevat tai kumoavat väitteen. Opiskelijat voivat myös joutua muokkaamaan väitteitä niin, että ne pitävät aina paikkaansa. Tällaiset tehtävät auttavat opiskelijoita kehittämään kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa asioita. Tehtävien laadinnassa voidaan kiinnittää huomiota tehtäviin niin, että opiskelijat joutuisivat kohtaamaan yleisimpiä kompastuskiviä. [11]

Väitteiden arviointi tulee oppikirjassa esille muun muassa Pohdinnassa A.4. Sen avulla pyritään kehittämään opiskelijoiden kykyä lukea ratkaisun oikeellisuutta. Pohdinnassa A.8 opiskelijan tulee muokata ratkaisua niin, että se on yhtäpitävä. Yleisiä kompastuskiviä pyritään tuomaan esiin esimerkiksi suoraan verrannollisuuden teoriaosassa, jossa tuodaan esille verrantoyhtälön eri esitysmuodot. Huomautus B.5 ja Pohdinta B.6 tuovat esiin yleisiä kompastuskiviä. Kääntäen verrannollisuuden teoriaosuudessa, sivulta 25 alkaen, on myös tuotu ilmi verrantoyhtälön muokkausta, joka on etenkin heikommille opiskelijoille hyödyllinen.

Perustelujen ja ratkaisujen korjaaminen (correcting mistakes in reasoning)

Tässä tehtävätyypissä keskitytään erilaisten perustelujen arvioimiseen ja vertailuun sen sijaan, että keskityttäisiin vastauksen saamiseen. Valitsimme tästä kategorista tarkemmaksi tavoitteeksi virheellisten tehtävien korjaamisen. Jonkun toisen tekemien virheiden korjaaminen vaatii opiskelijalta koko ratkaisun tarkastelua sekä virheiden tunnistamista ja niiden korjaamista. Tämän tehtävätyypin hyvä puoli on se, että opiskelijat voivat myös kirjoittaa neuvoja henkilölle, joka on tehnyt virheen. Tällöin opiskelijat joutuvat kunnolla kriittisesti tarkastelemaan ratkaisua, sillä he ovat neuvonantajan roolissa. [11]

Erityisesti Pohdinnan A.4 avulla pyritään tämän tehtävätyypin mukaisiin tavoitteisiin. Myös Tehtävässä 1 tulee pohtia ratkaisun oikeellisuutta sekä korjata virheitä ja antaa ratkaisun tekijälle neuvoja, miten kyseiset virheet voidaan tulevaisuudessa välttää. Lisäksi Pohdinnoissa A.8 ja B.6 analysoidaan jonkun muun tekemiä virheitä.

2.2 Lukion opetussuunnitelman tavoitteet

Matematiikan opetuksen tehtävä on kirjattu Lukion opetussuunnitelman perusteisiin (2019) seuraavasti:"Matematiikan opetuksen tehtävänä on perehdyttää opiskelija matematiikan peruskäsitteisiin, perusideoihin ja rakenteisiin sekä ohjata käyttämään puhuttua, kirjoitettua ja muutoin ilmaistua matematiikkaa"[9]. Lukion opetussuunnitelman perusteista (2019) nostan esille tämän tutkielman kannalta tärkeimmät laaja-alaisen osaamisen alueista ja matematiikan opetuksen yleisistä tavoitteista. Tärkeimmiksi laaja-alaisen osaamisen osa-alueiksi nousevat monitieteinen ja luova osaaminen, vuorovaikutusosaaminen sekä eettisyys ja ympäristöosaaminen. Kyseiset osa-alueet on otettu huomioon myös tehtäväsisältöjen valinnoissa. Opetuksen yleisistä tavoitteista olen poiminut ne, jotka erityisesti korostuvat ensimmäisen asteen yhtälön ja verrannollisuuksien opetuksessa. Lisäksi olen poiminut *MAY 1 Luvut ja yhtälöt* -moduulin tavoitteista tutkielman kannalta oleellisimmat.

2.2.1 Laaja-alaisen osaamisen osa-alueet

Laaja-alaiseen osaamiseen kuuluu opiskelijan taidon tukeminen siirryttäessä matemaattisesta esitysmuodosta toiseen [9]. Tämä korostuu sekä yhtälöissä että verrannollisuudessa, joissa sanalliset tehtävät tulee esittää symbolisessa muodossa. Matematiikan opetuksessa lähtökohtana tulisi olla opiskelijoita kiinnostaviin aiheisiin liittyvät ongelmat ja niiden ratkaiseminen matemaattisesti [9]. Sanallisia tehtäviä laatiessa olen kiinnittänyt sisällöissä huomiota myös ajankohtaisiin ympäristöasioihin, kuten Tehtävässä 10 nähdään. Tehtävät on pyritty laatimaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista ja niihin on hyödynnetty monia eri elämän osa-alueita. Oppimateriaali sisältää tehtäviä, joissa kannustetaan kokeiluun ja sinnikkyyteen. Tällainen on erityisesti Tehtävä 2. Laaja-alaiseen osaamiseen on kirjattu myös erikseen se, että opetuksessa tulee käyttää vaihtelevia työtapoja, kuten yksin- ja parityöskentelyä [9]. Vaihtelevat työtavat näkyvät oppikirjassa useissa pohdintatehtävissä, joissa opiskelijan pitää selittää toiselle opiskelijalle vaihe vaiheelta ratkaisunsa ja perustella valintojaan.

2.2.2 Matematiikan opetuksen yleiset tavoitteet

Oppikirja on pyritty laatimaan niin, että erityisesti seuraavat matematiikan opetuksen yleiset Lukio opetussuunnitelmaan (2019) kirjatut tavoitteet on mahdollista saavuttaa. Tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu tutkimaan väitteiden oikeellisuutta, laatimaan perusteluja ja arvioimaan niiden pätevyyttä. Lisäksi tavoitteena on, että opiskelija oppii myös hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita, kykenee keskustelemaan matematiikasta, perustelemaan väitteitä ja arvioimaan eri muodoissa tarjottua informaatiota. Lisäksi opiskelija rohkaistuu ongelmien ratkaisujen keksimiseen ja selkeään esittämiseen. [9]

Oppikirjassa esiintyy väitteiden oikeellisuuden tulkintaa kehittäviä tehtäviä. Tällaisia ovat erityisesti Pohdinnat A.1, A.4, A.8 ja B.6. Oppikirjan tehtäväosioiden tehtävät on laadittu niin, että ne vahvistavat selkeän esitysmuodon oppimista. Etenkin ensimmäisen asteen yhtälön teoriaosassa rohkaistaan opiskelijoita erilaisten ratkaisumuotojen keksimiseen näyttämällä perinteisestä yhtälönratkaisusta poikkeavia strategioita Mallitehtävän A.5 ja A.6 avulla ja ratkaisemaan tehtäviä eri tavoin Pohdinnassa A.7 ja Tehtävässä 2. Valitut tavoitteet ovat linjassa Habits of Mind-artikkelista valittujen ajattelumallien ja Collaborative Learning in Mathematics-artikkelista valittujen tehtävätyyppien tavoitteiden kanssa.

2.2.3 May 1 Luvut ja yhtälöt -moduulin tavoitteet

Lukion opetussuunnitelmassa on edellisten lisäksi listattu MAY 1 Luvut ja yhtälöt -moduulin tavoitteet. Tämän tutkielman kannalta moduulin olennaiset tavoitteet on nostettu seuraavaksi esiin: opiskelija ymmärtää yhtälön ratkaisemisen periaatteet, osaa käyttää verrannollisuutta ongelmanratkaisussa ja syventää murtolukujen laskutoimitusten osaamistaan [9]. Ensimmäisen asteen yhtälö-luvussa tullaan käymään läpi yhtälönratkaisun perusperiaatteet, jotta heikoimmatkin oppilaat ymmärtäisivät yhtälön ratkaisun perusteet. Murtolukujen laskutoimituksen osaaminen syventyy yhtälönratkaisussa Mallitehtävän A.6 tavalla. Kaikki oppikirjan tehtävät on laadittu todellisista arkielämän tilanteista, joiden ratkaisemisessa harjaannutetaan yhtälönratkaisutaitoja ja verrannollisuuden käyttöä.

3 Oppimateriaalin perustelut

Tässä luvussa perustellaan oppikirjassa tehtyjä valintoja muiden tieteellisten artikkeleiden avulla. Kyseiset tieteelliset artikkelit tukevat valittujen Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula [2] ja Collaborative Learning in Mathematics [11] -artikkeleiden tavoitteita ja ovat osaltaan ohjanneet oppikirjan laadintaa.

3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Huntley ym. (2007) toteavat artikkelissaan, että algebrassa onnistuminen koetaan välttämättömänä tulevaisuuden korkeakouluissa. Monet opiskelijat oppivat muokkaamaan yhtälöitä toistojen kautta, mutta eivät usein ymmärrä muokkausten pohjalla olevaa rakennetta. Tämä näkyy yhtälön yksinkertaistamisen aikana tapahtuvissa strategisissa virheissä. [3] Oppikirjassa käydään ensimmäisen asteen yhtälö perusteellisesti läpi, jotta tämän kaltaisia kompastuskiviä voitaisiin välttää opiskelijoilla tulevaisuudessa. Kirjassa käydään läpi sitä, mikä ylipäätään on yhtälö ja palautetaan mieleen yhtälön muokkaamiseen liittyviä ominaisuuksia ja yhtälön ratkaisun määritelmä (Määritelmä A.3).

Opiskelijat ovat huolissaan muuttujan häviämisestä yhtälöä muokattaessa, mikä johtaa virheellisiin muokkauksiin. Huntley ym. kehottavat kiinnittämään tarkemmin huomiota opiskelijoiden valitsemiin ratkaisutapoihin, jotta he oppisivat ratkaisemaan yhtälöitä monipuolisemmin. Opettajia kehotetaan harkitsemaan tarkkaan opiskelijoille esitettyjen kysymysten luonnetta, jotta kysymys ei anna opiskelijalle suoraa vastausta tehtävään, vaan enemmänkin ohjaa oikeaan suuntaan. [3] Oppikirjan Mallitehtävät A.9 ja A.10 muistuttavat opiskelijoita identtisesti tosi/epätosi yhtälöistä, joissa muuttujat häviävät. Pohdintatehtävissä A.7, A.8 ja B.2 on taas tärkeää, että opettaja johdattelee jumissa olevia opiskelijoita opettajan oppaassa esitettyjen kysymysten avulla.

Suomessa opetetaan ratkaisemaan yhtälöitä tyypillisesti seuraavalla tavalla: avataan sulkeet, yhdistetään samanmuotoiset termit, siirretään tuntemattomat vasemmalle ja muut termit oikealle puolelle yhtälöä sekä jaetaan tuntemattoman kertoimella [4]. Joustavuus matemaattisessa ongelmanratkaisussa määritellään siten, että opiskelijalla on tiedossa monia ratkaisustrategioita ja hän kykenee keksimään uudenlaisia tapoja ratkaista ongelma. Ulkoa opitut menetelmät unohtuvatkin helposti ja ovat alttiita virheille. Joustavan opiskelijan ratkaisut ovat myös tehokkaampia kuin joustamattaman opiskelijan. Opiskelijan joustavuutta voidaan arvioida sillä, käyttääkö hän ongelmissa aina vain yhtä ratkaisutapaa vai monia erilaisia ratkaisukeinoja. [10]

Joustavalla ratkaisulla tarkoitetaan tässä ratkaisua, joka on teknisesti vaikeampi ja jossa ei ole yhtä montaa välivaihetta kuin perinteisellä tavalla opetetussa yhtälönratkaisustrategiassa. Toisin sanoen kekseliäs ratkaisu on perinteisesti opetettua tapaa tehokkaampi tapa ratkaista ongelma. Hästön ym. (2019) artikkelissa [4] esille tuoma esimerkki kekseliäämmästä ratkaisutavasta on yhdistää samannimiset termit ennen kuin sulut kerrotaan auki:

$$4(x+6)+3(x+6)=21$$

$$7(x+6) = 21.$$

Myös Starin ja Seifertin (2006) ovat esitelleet artikkelissaan [10] joustavia tapoja ratkaista yhtälöitä. Yhdessä tavassa tehtävän ratkaisija jakaa yhtälön molemmat puolet muuttujalausekkeen kertoimella sulkujen aukikertomisen sijaan seuraavasti:

$$4(x+1) = 8$$
$$x+1 = 2.$$

Lisäksi Lee ym. (2022) esittelevät artikkelissaan [6] Starin ja Seifertin (2006) kaltaisen tavan ratkaista yhtälöitä. Lee ym. (2022) tuovat myös ilmi sen, miten tärkeää opiskelijoiden olisi huomata tärkeitä malleja ongelmarakenteissa. Etenkin heikompien opiskelijoiden kohdalla mallien huomaaminen saattaisi auttaa heitä ymmärtämään ratkaisuja perusteellisemmin. Siltikään osa opiskelijoista ei ole halukas käyttämään joustavuutta spontaanisti ratkaisuissa, vaikka he omaisivatkin joustavuuden taidon [4]. Opettajalla on tässä tietenkin tärkeä rooli, mutta olen pyrkinyt oppikirjan avulla tuomaan esille erilaisia ongelmanratkaisumenetelmiä, joiden avulla opiskelijat voivat kehittyä tehokkaampien ongelmanratkaisumenetelmien käytössä.

Oppikirjassa kiinnitetään huomiota joustavien ratkaisujen oppimiseen, jotta opiskelijat rohkaistuisivat käyttämään perinteisestä ratkaisustrategiasta poikkeavia kekseliäämpiä tapoja. Hästö ym. (2019) toteavatkin, että korkeampi joustavuus on yhdistetty korkeampiin arvosanoihin kaikissa aineissa. Kirjassa esitellään erilaisia ratkaisutapoja Mallitehtävässä A.5 ja A.6 sekä etenkin Pohdinnan A.7 avulla herätellään opiskelijoiden ajatuksia joustavaan ratkaisuun. Lisäksi Tehtävässä 2 opiskelijat saavat jatkaa monien erilaisten ratkaisumenetelmien pohtimista.

Chanin ym. (2022) artikkelissa puhutaan siitä, miten tärkeää rakenteen ymmärtäminen on tehokkaammassa ongelmanratkaisussa. Artikkelissa puhutaan pintarakenteesta, jolla viitataan symboleihin ja termien sijaintiin sekä systeemin rakenteesta, jolla puolestaan viitataan lausekkeen taustalla oleviin matemaattisiin ominaisuuksiin. Artikkelissa annettu esimerkki pintarakenteesta $3+5-3$ tarkoittaa sitä, että numeroa 3 seuraa $+5$ ja sitä -3. Systeemin rakenne taas tarkoittaa sitä, että tunnistetaan lukujen 3 ja -3 välinen suhde ja osataan soveltaa kommutatiivista ominaisuutta lausekkeen yksinkertaistamiseksi muotoon 5. [12] Koen, että tätä asiaa on hyvä havainnollistaa oppikirjassa Mallitehtävän A.5 avulla. Artikkelissa [12] tulee myös esille muuttujia sisältävät lausekkeet ja se, miten niiden avulla on helppo huomata systeemin rakenne yhdistämällä vastakohdat $(x+y-x)$. Opiskelijoiden ohjaaminen systeemin rakenteisiin harjoittelun avulla voi vahvistaa joustavuutta ongelmanratkaisussa [12]. Joustavaa ongelmanratkaisutaitoa opiskeljiat saavat harjoitella Pohdinnassa A.7 ja Tehtävässä 2.

Opiskelijan ajatteluprosessia voi olla vaikeaa seurata. Siksi onkin hyvä ottaa oppimisprosessiin mukaan suullinen kielentäminen. Tämä myös kehittää keskeisten matemaattisten käsitteiden käyttöä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) puhuvat artikkelissaan [5] siitä, miten tärkeää keskustelu matematiikassa on. "Valmistautuessaan kertomaan muulle ryhmälle ratkaisunsa matematiikan tehtävään opiskelija joutuu ensin jäsentämään ajatteluaan itselleen ja sen jälkeen muotoilemaan sanottavansa muille kuulijoille ymmärrettäviä merkityksiä kantaviksi lauseiksi. Täten kielentäminen jäsentää opiskelijan omaa ajattelua ja tukee matemaattisten käsitteiden syvällisempää ymmärtämistä."[5]

Ensimmäisen asteen yhtälön teoriassa asioiden suullinen kielentäminen koko luokan keskustelussa on tärkeää, kun tuodaan esille tehokkaampia normaalirutiineista poikkeavia yhtälönratkaisustrategioita. Myös opiskelijoiden pienryhmissä tai pareittain käydyt keskustelut kehittävät syvällisempää ymmärrystä siitä, miksi tietyn operaation voi suorittaa yhtälölle. [5] On myös tärkeää, että opiskelijat tottuvat siihen, että he selittävät ratkaisunsa vaihe vaiheelta opettajalle tai toiselle opiskelijalle. Tällöin heidän pitää liittää matemaattisessa muodossa esitetyt muuttujat ja lausekkeet annettuun tehtävään ja muodostaa niiden välille looginen yhteys ja muokata tämä kaikki luonnolliseksi kieleksi [5]. Oppikirjan Pohdinta A.7 tukee tätä taitoa. Oppikirjan Pohdinnassa A.4 opiskelijoiden tulee keskustella parin kanssa päätelmistään sekä perustella omaa ajatustaan toiselle. Suullista kielentämistä, perustelua ja pohtimista harjoitellaan myös ensimmäisen asteen Pohdinnoissa A.1, A.7 ja A.8 sekä Tehtävässä 1. Oppikirjasta löytyy matemaattisia kielentämistaitoja harjaannuttava pohdinta. Siinä opiskelijan tulee luoda sanallisesta tehtävästä symbolikielellä lauseke (Pohdinta A.2). "Sanallisen tehtävän formulointi paljastaa, miten oppilas ymmärtää kertolaskun käsitteen ja toisaalta minkälaiseen kontekstiin hän kokee sen luontevasti liittyvän"[5].

3.2 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Monet koulussa opiskeltavat matematiikan aiheet vaativat verrannon ymmärtämistä. Näitä ovat muun muassa todennäköisyys, prosentti, suhde, trigonometria ja tasogeometria. Matemaattisesti pätevän verrantoyhtälön muodostaminen saattaa aiheuttaa opiskelijoille hankaluuksia. Lisäksi heillä voi olla vaikeuksia tunnistaa asioiden välisiä yhteyksiä. Usein opiskelijat, jotka kokevat vaikeuksia verrannollisuudessa, tulevat kokemaan vaikeuksia matematiikan muillakin osa-alueilla. [7] Oppikirjassa suoraan ja kääntäen verrannollisuudet esitetään erillisinä kokonaisuuksina. Olen kuitenkin pyrkinyt teorian ja tehtävien avulla luomaan niiden välille yhteyksiä ja samalla ottamalla esiin niiden eroavaisuuksia hahmottamisen helpottamiseksi. Tämän takia oppikirjassa onkin kerrattu suoraan verrannollisuuden perusteet hyvin, jotta saadaan luotua vahva pohja kaikille tuleville matematiikan opinnoille. Teoriassa ja tehtäväosuudessa pyritään tuomaan esille asioiden välisiä yhteyksiä sekä yleisiä epäselvyyksiä. Suoraan verrannollisuudessa on tärkeää tuoda esiin se, että verrantoyhtälö voidaan esittää kahdessa eri muodossa. Oppikirjassa nämä on esitetty Suoraan verrannollisuus -luvun alussa ja Huomautuksessa B.5. Tämä antaa opiskelijalle vapauden valita kumpi ratkaisumenetelmä sopii hänelle paremmin. Näiden lisäksi Esimerkillä B.1 ja C.1 pyritään selkeyttämään suoraan ja kääntäen verrannollisuutta.

Matematiikkaa käytetään laajasti tieteissä, kuten fysiikassa, kemiassa ja biologiassa sekä näiden sovelluksissa, kuten lääketieteessä, maataloudessa ja elintarviketeollisuudessa. Tämän lisäksi matematiikkaa hyödynnetään muun muassa kaikilla tekniikan aloilla, kaupankäynnissä, leivonnassa, liikenteessä ja armeijassa. [8] Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2019) sekä Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) artikkelissa todetaan, että opeteltavien aiheiden ja niihin liittyvien käsitteiden merkityksen oppimisen on tärkeä olla yhteydessä arkielämään ja opiskelijoille tuttuihin ilmiöihin. Tämän takia olen laatinut oppikirjaan erilaisia arkielämään liittyviä verrantotehtäviä ja -esimerkkejä. Opiskelijoille on tärkeää saada tehdä tehtäviä, jotka liittyvät jollain tavalla heidän elämäänsä, sillä se lisää kiinnostusta aiheen opiskeluun.

Ongelmanratkaisu on yksi oleellisista taidoista, joka auttaa yksilöitä selviämään tosielämän tilanteista [8]. Myös Albayrak ym. (2017) puhuvat ongelmanratkaisutaidon tärkeydestä arkielämän tilanteissa. On fakta, että opiskelijat käyttävät matematiikkaa päivittäisessä elämässä tietoisesti tai sitä erikseen tiedostamatta. Koulun tehtävänä onkin opettaa matematiikkaa siten, että opiskelijat oppivat hyödyntämään sitä arkipäiväisissä ongelmanratkaisua vaativissa tilanteissa. Tutkimuksissa on huomattu, että aiheet, jotka opetetaan linkitettyen arkielämään luovat halukkaamman oppimisympäristön, myötävaikuttavat positiivisesti opiskelijoiden asenteisiin ja auttavat opiskelijoita menestymään paremmin. [1] Oppikirjassa ongelmanratkaisutaitoja pyritään kehittämään erityisesti verrannollisuusluvuissa. Sekä pohdintatehtävät että sanalliset tehtävät kehittävät opiskelijoiden arkielämässä tarvitsemia ongelmanratkaisutaitoja. Erityisesti pohdintatehtävillä pyritään herättelemään opiskelijoita aiheeseen ja luomaan syvempiä yhteyksiä verrantoihin.

Jos opiskelija ei ole kiinnostunut matematiikasta, on sitä usein vaikea ymmärtää. Opiskelijat saattavatkin ajatella matematiikan irrallisina osasina kokonaisuuden sijaan. Tällaiset opiskelijat eivät kykene käyttämään matematiikkaa tehokkaana työkaluna jokapäiväisessä elämässään. [8] Siksi on erittäin tärkeää, että oppikirjassa tuodaan ilmi myös asioiden välisiä yhteyksiä, kuten esimerkiksi sitä, miten verrannollisuuskerroin liittyy verrantoon. Verrannollisuuskerroin käydään myöhemmin oppikirjassa läpi, mutta se esitellään suoraan verrannollisuuden osalta Määritelmässä B.8 ja Mallitehtävässä B.9 sekä kääntäen verrannollisuuden osalta Määritelmässä C.6 ja Mallitehtävässä C.7. Verrannollisuuskertoimen käyttöä myös harjoitellaan Tehtävissä 7 ja 12.

Opetuksessa tulee myös ottaa huomioon lukion lopussa olevat ylioppilaskokeet ja niissä vaadittavat taidot. Ylioppilaskokeiden tehtävissä useimmiten vaaditaankin vastausten lisäksi täydellistä perustelua, jotta korkeampia pisteitä voidaan saavuttaa [4]. Opiskelijan matemaattisten kykyjen vaatimuksena on taito perustella. Tämä johtuu siitä, että perustelulla on tärkeä rooli opeteltavien matemaattisten käsitteiden ja materiaalien ymmärtämisessä. [7] Pohdinnassa B.6 opiskelijan tulee perustella, miksi yhtälöt ovat väärin/oikein. Tämä tehtävä vahvistaa siis perustelutaitoja ja lisää ymmärrystä verrantoyhtälöistä. Pohdinnassa C.5 opiskelijoiden tulee keskustella parin kanssa kuvaajien eroista. Myös tässä tehtävässä perustelutaidot vahvistuvat, sillä opiskelijat joutuvat perustelemaan toiselle omaa näkemystään.

Viitteet

[1] Albayrak, Yazici & Şimşek (2017), Relating the Learned Knowledge and Acquired Skills to Real Life: Function Sample, *Higher Education Studies*, 7(3), 148-160.

[2] Cuoco, Goldenberg & Mark, (1996), Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula, *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

[3] Huntley, Marcus, Kahan, Miller & Lincoln, (2007), *Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations'*, Journal of Mathematical Behavior, 26(2), 115-139

[4] Hästö, Palkki, Tuomela & Star, (2019), Relationship between mathematical flexibility and success in national examinations, *European Journal of Science and Mathematics Education*, 7(1), 1-13.

[5] Joutsenlahti & Tossavainen, (2018), Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa, *Matematiikan opetus ja oppiminen*, 410-431

[6] Lee, Hornburg, Chan & Ottmar, (2022), Perceptual and Number Effects on Students' Initial Solution Strategies in an Interactive Online Mathematics Game, *Journal of Numerical Cognition*, 8(1) ;https://doi.org/10.5964/jnc.8323

[7] Misnasanti, Utami & Suwanto, (2017), Problem based learning to improve proportional reasoning of students in mathematics learning, *AIP Conference Proceedings*, 1868, 050002; https://doi.org/10.1063/1.4995129

[8] Mumcu, (2018), Examining Mathematics Department Students' Views on the Use of Mathematics in Daily Life, *International Online Journal of Education and Teaching*, 5(1), 61-80.

[9] Opetushallitus. (7.11.2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. $https : //www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2 019.pdf$

[10] Star & Seifert, (2006), The development of flexibility in equation solving, *Contemporary Educational Psychology*, 31(3), 280-300.

[11] Swan, (2006), Collaborative Learning in Mathematics, *Shell Centre for Mathematics Education, School of Education, University of Nottingham, England*

[12] Chan, Ottmar, Smith & Closser, (2022), Variables versus numbers: Effects of symbols and algebraic knowledge on students' problem-solving strategies, *ScienceDirect*, 71(), https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2022.102114

A Yhtälö

Pohdinta A.1 Onko kyseessä yhtälö? Perustele!

a) $2(x - 3) = 0$

b) $1 - x$

c) $4 + 5t = -(t + 2)$

Kun kaksi lauseketta merkitään yhtäsuureksi, saadaan *yhtälö*. Esimerkiksi

$$3 + 3 = 5 + 1.$$

Tässä luvussa käsitellään yhtälöä, jossa on vain yksi muuttuja ja vakioita. Tämän luvun yhtälöissä *korkein esiintyvä potenssi on yksi*

$$3x^1 + 6 = 2.$$

Pohdinta A.2 Muodosta ja ratkaise yhtälö.

a) Joonas on saanut ensimmäisestä matematiikan kokeesta arvosanan 6. Mikä arvosana hänen tulee saada seuraavasta kokeesta, jotta kokeiden keskiarvo on 8?

b) Kalle säästää rahaa uuteen puhelimeen. Häneltä puuttuu 24 euroa. Kalle saa joka viikko huoneensa siivoamisesta kaksi euroa ja koiran lenkittämisestä euron. Kuinka monta viikkoa Kallella kestää kerätä puuttuvat rahat?

Yhtälön ratkaiseminen

Yhtälö ratkaistaan muokkaamalla yhtälöä. Sen molemmille puolille voidaan lisätä tai niistä voidaan vähentää sama luku.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 1 + x && \| + 5 \\ 2x &= 6 + x && \| - x \\ 2x - x &= 6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Yhtälön molemmat puolet voidaan myös jakaa tai kertoa samalla luvulla ($\neq 0$).

$$
\begin{aligned}
\frac{3x}{9} &= 6 \qquad \| \cdot 9 \\
3x &= 54 \qquad \| : 3 \\
x &= 18
\end{aligned}
$$

Lisäksi yhtälö säilyy yhtäpitävänä alkuperäisen yhtälön kanssa, vaikka yhtälön puolet vaihdetaan toisin päin.

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= -x + 3 \\
5x &= 5 \\
x &= 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
-x + 3 &= 4x - 2 \\
-5x &= -5 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Määritelmä A.3 *Yhtälön ratkaiseminen* tarkoittaa kaikkien ratkaisujen etsimistä. *Yhtälön ratkaisuja* ovat ne muuttujan arvot, joilla yhtälön lausekkeet saavat saman arvon. Näitä arvoja voidaan kutsua myös *yhtälön juuriksi*.

Pohdinta A.4 Liisa ratkaisi kokeessa olleen yhtälötehtävän $\frac{5x+2}{8} + 6 = \frac{x}{4} - 7$ alla olevalla tavalla.

$$
\begin{aligned}
\frac{5x+2}{8} + 6 &= \frac{x}{4} - 7 \\
5x + 2 + 48 &= 2x - 56 \\
3x &= 6 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Onko Liisan ratkaisu oikein? Jos ei, mitä Liisa on tehnyt mielestäsi väärin? Keskustelkaa päätelmistänne vierustoverinne kanssa.

Mallitehtävä A.5 Alla on esitetty yksi tehokas tapa ratkaista yhtälöitä. Asiaa on helppo havainnollistaa muuttujien avulla.

$$
\begin{aligned}
y + x - y &= 7 \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

Tässä muuttujat y ja $-y$ kumoavat toisensa. Sama pätee luvuilla.

$$\begin{aligned} -2+4+2 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Luvut -2 ja 2 kumoavat toisensa. Aina ei siis ole pakollista laskea vasemmalta oikealle, mikäli muita sallittuja keinoja pystyy hyödyntämään. Tässä on käytetty hyödyksi yhteenlaskun kommutatiivisuutta.

Mallitehtävä A.6 Ratkaise yhtälö

a) $\frac{2x}{9} - 4 = -\frac{2}{3}$.

b) $4(x+1) = 32$

Ratkaisu.

a)

1. Ratkaisutapa:
Lavennetaan ensin murtoluvut samannimisiksi.

$$\frac{2x}{9} - 4 = -{}^{3)}\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{9} - 4 &= -\frac{6}{9} && \| \cdot 9 \\ 2x - 36 &= -6 && \| + 36 \\ 2x &= -6 + 36 \\ 2x &= 30 && \| : 2 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

2. Ratkaisutapa:
Kerrotaan suoraan murtolukuja nimittäjien yhteisellä tekijällä.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{9} - 4 &= -\frac{2}{3} && \| \cdot 9 \\ 2x - 36 &= -6 && \| + 36 \\ 2x &= -6 + 36 \\ 2x &= 30 && \| : 2 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

b)

1. Ratkaisutapa

$$\begin{aligned} 4(x+1) &= 32 \\ 4x + 4 &= 32 && \| - 4 \\ 4x &= 28 && \| : 4 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

2. Ratkaisutapa

$$\begin{aligned} 4(x+1) &= 32 && \| : 4 \\ x + 1 &= 8 && \| - 1 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Sekä a) että b)-kohdassa 2. ratkaisutapa oli tehokkaampi tapa ratkaista yhtälö, sillä ratkaisussa ei tarvita yhtä montaa välivaihetta.

Pohdinta A.7 Pohdi, miten voisit ratkaista alla olevat yhtälöt mahdollisimman tehokkaasti. Perustele ratkaisusi suullisesti vaihe vaiheelta vierustoverillesi.

a) $3(x+2) = 10 - 2(x+2)$

b) $\frac{4x+4}{4} + \frac{9x+9}{9} = 8$

Pohdinta A.8 Miksi tehtävää ei voi ratkaista alla olevalla tavalla? Ratkaise tehtävä oikein. Keskustelkaa lopuksi parinne kanssa päätelmistänne.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= x + 1 \\ 3(x+1) &= x + 1 \qquad \| : (x+1) \\ \frac{3(x+1)}{x+1} &= \frac{x+1}{x+1} \\ 3 &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska $3 \neq 1$ eli on yhtälö identtisesti epätosi.

Yhtälöllä ei ole aina yksikäsitteistä ratkaisua. Tällöin yhtälöä muokkaamalla muuttujat eliminoituvat pois. Jäljelle jäävä yhtälö on aina joko tosi tai epätosi.

Jos yhtälö on aina tosi, se toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla ja ratkaisuja on äärettömästi. Tällöin sanotaan yhtälön olevan *identtisesti tosi*.

Mallitehtävä A.9 Ratkaistaan yhtälö $4(x-3) + 9 = 4x - 3$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 4(x-3) + 9 &= 4x - 3 \\ 4x - 12 + 9 &= 4x - 3 \\ 4x - 3 &= 4x - 3 \qquad \| - 4x \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

Tosi

Vastaus: Yhtälö on tosi kaikilla muuttujan x arvoilla, eli ratkaisuja on äärettömästi. Kyseessä on identtisesti tosi yhtälö.

On myös mahdollista, että yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua. Tällöin yhtälö ei toteudu millään muuttujan arvolla ja sen sanotaan olevan *identtisesti epätosi*.

Mallitehtävä A.10 Ratkaistaan yhtälö $6x + 5 = 6(x - 5)$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 6x + 30 &= 6(x - 5) \\ 6x + 30 &= 6x - 30 \qquad \| - 6x \\ 30 &= -30 \end{aligned}$$

Epätosi

Vastaus: Yhtälö on epätosi kaikilla muuttujan x arvoilla, eli yhtälöllä ei ole ratkaisua. Yhtälö on siis identtisesti epätosi.

A.1 Tehtävät

1. Milla ja Pekka ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{x}{7}+1=\frac{3x}{14}$ eri tavoilla. Onko molemmat ratkaisutavat oikein? Jos ei, tee vaadittavat korjaukset ja anna ratkaisun tekijälle neuvoja, miten välttää samanlainen virhe jatkossa.

   Millan ratkaisu.

   $$\begin{aligned} \frac{x}{7}+1 &= \frac{3x}{14} \\ 2x+14 &= 3x \\ -x &= -14 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

   Pekan ratkaisu.

   $$\begin{aligned} \frac{x}{7}+1 &= \frac{3x}{14} \\ \frac{2x}{14}+1 &= \frac{3x}{14} \\ 2x+14 &= 3x \\ -x &= 14 \\ x &= -14 \end{aligned}$$

2. Keksi yhtälöille mahdollisimman monta erilaista ratkaisutapaa.

   a) $3(1-x)+2(1-x)=-15$

   b) $\frac{3v-3}{2}+\frac{v-1}{4}=7$

   c) $4(t-2)-5(t-2)=2(t-2)+3$

3. Millä vakion a arvoilla luku 4 on yhtälön $\frac{ay}{8}+\frac{y}{4}=\frac{a}{4}$ juuri?

4. Eeron, Matin ja Samun opiskelija-asunnon vesilasku 115 euroa jaetaan samassa suhteessa kuin veden käyttöajat. Veden kulutukseen kuuluneet minuutit olivat Eerolla 300, Matilla 240 ja Samulla 380. Kuinka paljon kukin maksaa?

5. Vuonna 2019 rakennettu 4,2 MW tuulivoimala tuottaa 19 000 MWh sähköä vuodessa.

   a) Kuinka moneen sähkölämmitteiseen omakotitaloon kyseinen sähkömäärä riittää, jos kyseisen asumistyypin keskimääräinen vuosikulutus on 22 000 kWh?

   b) Entä kuinka monta tuulivoimalaa tarvitaan, että niiden tuotolla saadaan katettua koko Suomen sähkölämmiteisten omakotitalojen energiankulutus? Tilastokeskuksen mukaan Suomessa on 500 000 sähkölämmiteistä omakotitaloa.

B Suoraan verrannollisuus

Verrantoa hyödynnetään matematiikan lisäksi erityisesti fysiikassa kuvaamaan suureiden välisiä yhteyksiä.

Verrannoksi kutsutaan yhtälöä, jossa yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on suhde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Verranto voidaan aina muuttaa tuloksi. Kun verrantoyhtälöä kerrotaan puolittain nimittäjillä, päästään suoraan tulomuotoon $a \cdot d = b \cdot c$.

Suoraan verrannollisuudessa kahden eri suureen, x ja y, arvot joko kasvavat tai pienenevät aina samassa suhteessa. Suureen x arvojen x_1 ja x_2 muuttuessa suureen y arvot y_1 ja y_2 muuttuvat samassa suhteessa. Suoraan verrannollisten suureiden verrantoyhtälö voidaan esittää muodossa $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Esimerkki B.1 Tomaattien kilomäärä ja niiden hinta ovat suoraan verrannollisia. Jos kilomäärä kolminkertaistuu, myös hinta kolminkertaistuu. Jos taas tomaattien kilomäärä puolittuu, myös hinta puolittuu.

Pohdinta B.2 Kahta eri koiranruokaa A ja B myydään kolmessa eri säkkikoossa. Ovatko ruokien A ja B hinnat (€) suoraan verrannollisia ruoan määrään (kg)?

Ruoka A

Määrä (kg)	Hinta (€)
12	69,60
5	29,00
2	11,60

Ruoka B

Määrä (kg)	Hinta (€)
12	59,60
5	27,50
2	11,60

Mallitehtävä B.3 Kaupassa 100 grammaa irtokarkkeja maksaa 1,29 €. Kuinka paljon maksaa 500 grammaa irtokarkkeja?

Ratkaisu.

Tehdään taulukko tilanteen hahmottamiseksi.

Massa (g)	Hinta (€)
100	1,29
500	x

Kun karkkien määrä lisääntyy, niin hinta nousee samassa suhteessa. Hinta ja paino ovat siis suoraan verrannollisia suureita. Muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\begin{aligned}\frac{100}{500} &= \frac{1,29}{x} \\ 100x &= 500 \cdot 1,29 && \| : 100 \\ x &= 5 \cdot 1,29 \\ x &= 6,45\end{aligned}$$

Vastaus: 500 grammaa irtokarkkeja maksaa 6,45 €.

Pohdinta B.4 Missä toisessa muodossa verrantoyhtälö oltaisiin voitu esittää Mallitehtävässä B.3? Kirjoita uusi verrantoyhtälö ylös.

Huomautus B.5 Suoraan verrannollisille suureille verrantoyhtälö voidaan esittää myös muodossa $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

Tämä saadaan muokkaamalla yhtälöä $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} &= \frac{y_1}{y_2} && \| \cdot x_2 \\ x_1 &= \frac{y_1 \cdot x_2}{y_2} && \| : y_1 \\ \frac{x_1}{y_1} &= \frac{x_2}{y_2}\end{aligned}$$

Pohdinta B.6 Iina ja Tiina ovat kaupassa. Iina ostaa perunoita 1,25 kilogrammalla ja maksaa niistä 2,11 €. Tiina ostaa samoja perunoita 3,50 eurolla. Tupu, Hupu ja Lupu ovat muodostaneet tehtävänannon perusteella verrantoyhtälöt alla olevilla tavoilla. Selitä parillesi, miksi yhtälöt ovat tai eivät ole oikein.

Tupun ratkaisu:

$$\frac{2,11}{1,25} = \frac{3,50}{x}$$

Hupun ratkaisu:

$$\frac{2,11}{x} = \frac{3,50}{1,25}$$

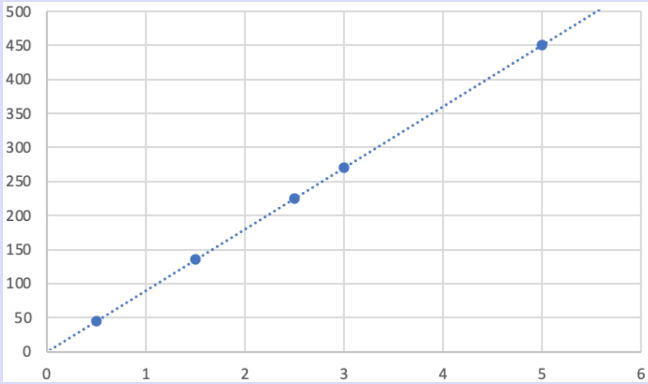
Lupun ratkaisu:

$$\frac{2,11}{3,50} = \frac{1,25}{x}$$

Pohdinta B.7 Taulukot ja kuvaajat havainnollistavat autojen A ja B kulkemaa matkaa ajan suhteen. Mitä tulkintoja voit tehdä niiden avulla autojen liikkeestä? Verratkaa lopuksi päätelmiänne vierustoverinne kanssa.

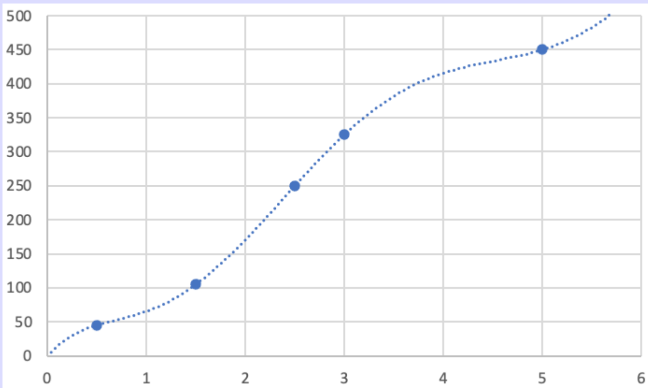
Auto A

Aika (h)	Matka (km)
0,5	45
1,5	135
2,5	225
3	270
5	450



Auto B

Aika (h)	Matka (km)
0,5	45
1,5	105
2,5	250
3	325
5	450



Mallitehtävässä B.2 nähtiin, että ruuan A määrä x ja sen hinta y muuttuivat samassa suhteessa, eli niiden suhde pysyy vakiona $\frac{y}{x} = k$, missä k on vakio.

Nyt siis hinnan y riippuvuus määrästä x voidaan ilmaista yhtälöllä $y = k \cdot x$.

Määritelmä B.8 Suureet x ja y ovat *suoraan verrannolliset*, jos niiden välinen riippuvuus voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y = k \cdot x,$$

missä vakio k on *verrannollisuuskerroin* ja $k \neq 0$.

Mallitehtävä B.9 Lasketaan nyt Mallitehtävän B.2 verrannollisuuskerroin.

2 kg koiranruokaa A maksaa 11,60 €. Sijoitetaan arvot $x = 2kg$ ja $y = 11,60€$

yhtälöön.

$$\begin{aligned} 11,60\,€ &= k \cdot 2\,kg \\ k &= \frac{11,60\,€}{2\,kg} \\ k &= 5,80\,€/kg \end{aligned}$$

Verrannollisuuskerroin on koiranruuan A kilohinta $5,80\,€/kg$.

Verrannollisuuskertoimen avulla on helppo laskea, kuinka paljon esimerkiksi 50 kg koiranruokaa maksaa:

$$\begin{aligned} y &= 5,80\,€/kg \cdot 50\,kg \\ y &= 290\,€ \end{aligned}$$

Verrannollisuuskertoimesta kerrotaan lisää myöhemmin oppikirjassa.

B.1 Tehtävät

6. Miikan tulee lukea historian kokeeseen 255 sivuinen kirja viidessä päivässä. Hän lukee kirjaa 2 tuntia päivässä. Maanantaina Miika eteni 49 sivua. Saako Miika luettua kirjan määräajassa, jos etenee samalla vauhdilla kuin maanantaina?

7. Eräässä taloyhtiössä asunnon yhtiövastike on suoraan verrannollinen asunnon pinta-alaan. 54,5 m^2 asunnon yhtiövastike on 291,60 €.

   a) Muodosta yhtälö, jolla ilmaistaan yhtiövastikkeen y riippuvuus asunnon pinta-alasta x.

   b) Kuinka suuri yhtiövastike on asunnossa, jonka pinta-ala on 100 m^2?

   c) Kuinka suuri asunto on kyseessä, jos yhtiövastike on 107,05 €?

8. Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Auton jarrutusmatka jäisellä tiellä on 21 metriä, kun nopeus on 40 km/h. Kuinka kaukana kyseisessä kelissä edellisestä autosta on turvallista ajaa, jos haluaa välttyä yhtäkkisestä peräänajolta ajettaessa 100 km/h nopeudella?

9. Oskarin tulee leipoa pullaa 30 vieraalle. Hän kuitenkin unohti ostaa kaupasta lisää jauhoja. Oskarilta löytyy kotoa 16 dl jauhoja. Ohjeen mukaan 24 pullaan tarvitaan 15 dl jauhoja. Kuinka monta desilitraa jauhoja Oskarilta puuttuu?

10. Puu sitoo elinaikanaan noin 900 kg hiilidioksidia. Tilastojen mukaan Suomen vuoden 2021 ensirekisteröidyn henkilöauton hiilidioksidipäästö on keskimäärin 85 g/km (traficom.fi).

    a) Kuinka monta kilometriä kyseisellä henkilöautolla voi ajaa, jotta yksi puu pystyy vielä nollaamaan auton aiheuttamat hiilidioksidipäästöt? Anna vastaus kilometrin tarkkuudella.

    b) Kuinka monta kilometriä pystyisi vastaavasti ajamaan Suomen keskivertoautolla (ikä 11,7 vuotta), jonka hiilidioksidipäästöt ovat keskimäärin 178 g/km (aut.fi)? Anna vastaus kilometrin tarkkuudella.

C Kääntäen verrannollisuus

Suoraan verrannollisuudessa suureiden arvot muuttuivat samassa suhteessa samaan suuntaan. Kääntäen verrannollisuudessa suureiden arvot muuttuvat käänteisessä suhteessa, toisen kasvaessa toinen pienenee. Lisäksi suureiden suhteet ovat toistensa käänteislukuja.

Esimerkki C.1 Matkan keskinopeus ja matkaan käytetty aika ovat kääntäen verrannollisia suureita. Jos keskinopeus kasvaa kaksinkertaiseksi, aika laskee puoleen. Jos taas nopeus laskee neljäsosaan, aika kasvaa nelinkertaiseksi.

Pohdinta C.2 Opiskelijoiden tulee siivota koulun käytävät. Kolmella opiskelijalla kuluu työhön kuusi tuntia. Kuinka kauan yhdeksällä opiskelijalla kuluu käytävien siivoamiseen, jos työtahti pysyy samana?

Opiskelijoita	Aika (h)
3	6
9	x

Pohdinta C.3 Suureen y arvoa 2 vastaa suureen x arvo 8. Muodosta yhtälö, joka ilmaisee suureen y riippuvuuden suureesta x, kun suureet ovat

a) kääntäen verrannolliset

b) suoraan verrannolliset.

Verratkaa saamianne yhtälöitä parinne kanssa. Jos saamanne yhtälöt eroavat toisistaan, pohtikaa yhdessä mikä on oikea yhtälö ja miksi.

Kääntäen verrannollisten suureiden x ja y tulo on vakio. Tätä voidaan tutkia taulukon avulla.

x_1	y_1
x_2	y_2

Taulukon molemmilta riveiltä saadaan muodostettua lausekkeet, joista muodostuu yhtälö

$$x_1y_1 = x_2y_2.$$

Tästä voidaan ratkaista haluttu muuttuja jakamalla. Esimerkiksi

$$x_1 = \frac{x_2y_2}{y_1}.$$

Jaettaessa yhtälön molemmat puolet muuttujalla x_2, saadaan muodostettua verrantoyhtälö

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

Kääntäen verrannollisuudessa siis suureen y arvot y_1 ja y_2 on käännetty, kun taas suoraan verrannollisuudessa suureiden x ja y arvot ovat samoinpäin.

Mallitehtävä C.4 Kerrostalon rakentamiseen kului 50 työntekijältä 14 kuukautta. Kuinka monta työntekijää enemmän olisi tarvittu, jotta kerrostalo oltaisiin saatu valmiiksi 10 kuukaudessa?

Ratkaisu.

Tehdään taulukko hahmottamisen helpottamiseksi.

Työntekijöiden määrä	Työn kesto (kk)
50	14
x	10

Työn kesto ja työntekijöiden määrä ovat kääntäen verrannolliset, eli

$$\begin{aligned} \frac{50}{x} &= \frac{10}{14} \\ 10x &= 700 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

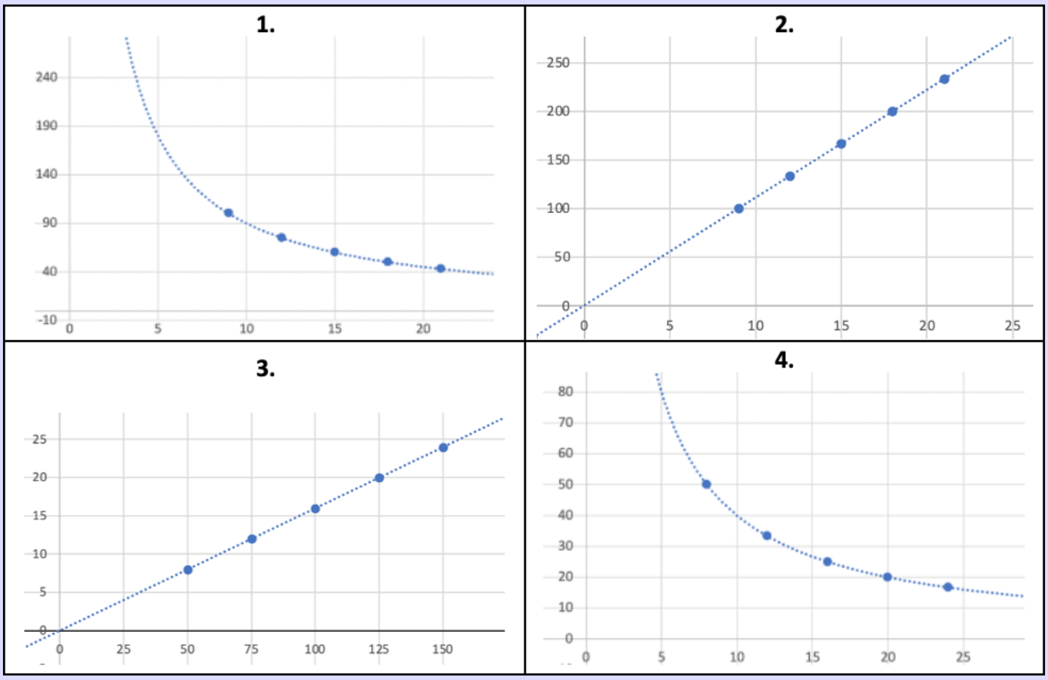
Työntekijöitä olisi tarvittu 70, jotta työ olisi saatu tehtyä 10 kuukaudessa. Koska työntekijöitä oli jo valmiiksi 50, niin työntekijöitä olisi tarvittu lisää $70 - 50 = 20$.

Vastaus. Työntekijöitä olisi tarvittu 20 enemmän.

Pohdinta C.5 Ensimmäisessä taulukossa on esitetty neljä eri tehtävänantoa ja kahdeksan erilaista verrantoyhtälöä. Yhdistä oikeat tehtävänannot oikeisiin verrantoihin. Huomaa, että yhteen tehtävänantoon saattaa sopia useampi verranto.

Kuorma-auto kuluttaa dieseliä 8 litraa 50 kilometrin matkalla. Kuinka pitkän matkan voi ajaa 12 litralla dieseliä?	$\frac{50}{12} = \frac{8}{x}$	$\frac{100}{x} = \frac{12}{9}$
$\frac{8}{12} = \frac{50}{x}$	8 pumppua tyhjää altaan 50 minuutissa. Kuinka kauan tyhjenemiseen kuluu 12 saman tehoisella pumpulla?	$\frac{100}{9} = \frac{12}{x}$
$\frac{8}{50} = \frac{12}{x}$	$\frac{8}{12} = \frac{x}{50}$	Tehtaan 100 työntekijää rakentaa elementtitalon 9 päivässä. Korona-aikana talo valmistui 12 päivässä. Kuinka monta työntekijää talon rakentamiseen korona-aikana osallistui? Oletetaan, että työtahti pysyi samana.
$\frac{9}{100} = \frac{12}{x}$	Laivalla kestää 9 tuntia kulkea 100 kilometrin matka. Kuinka kauas laiva ehtii 12 tunnissa, kun laivan nopeus pysyy samana?	$\frac{100}{x} = \frac{9}{12}$

Pohdi myös, mikä alla olevista kuvaajista sopii mihinkin verrantoon. Keskustelkaa tämän jälkeen parinne kanssa, mitä eroja löydätte kuvaajista ja mistä erot johtuvat.



Myös kääntäen verrannollisten suureiden riippuvuutta voidaan kuvata yhtälön avulla. Mallitehtävässä C.5 nähtiin, että työhön käytetty aika x ja työntekijöiden määrä y muuttuvat käänteisessä suhteessa. Niiden tulo pysyy siis vakiona eli $x \cdot y = k$, missä k on vakio.

Nyt siis ajan x riippuvuus työntekijöiden määrästä y voidaan ilmaista yhtälöllä $y = \dfrac{k}{x}$.

Määritelmä C.6 Suureet x ja y ovat *kääntäen verrannolliset*, jos niiden välinen riippuvuus voidaan ilmaista yhtälöllä

$$y = \frac{k}{x},$$

missä k on *verrannollisuuskerroin* ja $k \neq 0$.

Mallitehtävä C.7 Lasketaan nyt Mallitehtävän C.5 verrannollisuuskerroin.

50 työntekijällä kestää 14 kuukautta rakentaa kerrostalo. Sijoitetaan arvot $x = 14\,\text{kk}$ ja $y = 50\,\text{hlö}$ yhtälöön.

$$50\,\text{hlö} = \frac{k}{14\,\text{kk}}$$
$$k = 700\,\text{hlö} \cdot \text{kk}$$

Eli verrannollisuuskerroin on 700 henkilötyökuukautta.

Verrannollisuuskertoimella voidaan myös kääntäen verrannollisuudessa laskea haluttuja arvoja. Alla on laskettu, kuinka kauan 200 työntekijällä menisi kerrostalon rakentamiseen.

$$\begin{aligned} 200\,\text{hlö} &= \frac{700\,\text{hlö} \cdot \text{kk}}{x} \\ x &= \frac{700\,\text{hlö} \cdot \text{kk}}{200\,\text{hlö}} \\ x &= 3,5\,\text{kk} \end{aligned}$$

Verrannollisuuskertoimesta kerrotaan lisää myöhemmin oppikirjassa.

C.1 Tehtävät

11. Bussi vuokrattiin 25 henkilölle. Matkalle pääsi osallistumaankin vain 19 henkilöä, joille vuokrauskulut jaetiin. Matka tuli henkilöä kohden 6 € kalliimmaksi. Kuinka paljon jokainen joutui maksamaan?

12. Kaksi kokkia täyttivät 121 sämpylää 1,5 tunnissa.

    a) Kuinka kauan sämpylöiden täyttämiseen olisi mennyt kolmelta kokilta?

    b) Mikä on sämpylöiden täyttöön kuluva aika t (tunteina), jos työssä olisi n kokkia?

13. Matti haluaa tehdä pihalleen laatoilla päällystetyn käytävän. Hän aikoo kierrättää ja käyttää siihen vanhoja terassin pohjana olleita $50\ cm \cdot 50\ cm$ betonilaattoja. Terassin laatoitetun alueen koko on ollut $4,5\ m \cdot 5,5\ m$. Pihan polku on 16 metriä pitkä. Kuinka leveän käytävän Matti saa laatoilla tehtyä?

14. Olohuoneessa on kaksi kristallikattovalaisinta. Yhdessä kristallivalaisimessa on kymmenen halogeenilamppua. Yhden lampun teho on 20 W. Vuodessa valaisimet palavat 730 tuntia ja niiden kuluttama sähkö maksaa 65 €. Kuinka monta tuntia valaisimia voitaisiin polttaa samalla hinnalla, jos halogeenilamput vaihdettaisiin led-lamppuihin, joiden teho on 4W/lamppu?

15. Kun autolla ajetaan nopeusrajoituksen mukaisesti, perille päästään 30 minuutissa. Jos autolla ajetaan 15 km/h:n ylinopeutta, ollaan perillä 6 minuuttia aiemmin. Mikä on tien nopeusrajoitus?

D Opettajan opas

Oppimateriaali on aikataulutettu siten, että siihen käytettäisiin kolme 75 minuutin oppituntia. Tällöin jokaiselle aihealueelle olisi käytettävissä yksi 75 minuutin oppitunti.

D.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Pohdinta A.1

- Tehtävällä herätellään opiskelijoita aiheeseen ja palautellaan mieleen yläkoulussa opittua.
- Vastaus:
    - a) Kyllä, kaksi lauseketta on merkitty yhtäsuureksi.
    - b) Ei, vain yksi lauseke.
    - c) Kyllä, kaksi lauseketta on merkitty yhtäsuureksi.

Pohdinta A.2

- Tehtävällä pyritään harjoittamaan opiskelijoiden yhtälönmuodostamistaitoa.
- Vastaus:
    - a) Arvosana 10,
    - b) 8 viikkoa.

Pohdinta A.4

- Tehtävällä harjoitetaan ratkaisun analysoimista.
- Vastaus: Liisa on tehnyt ratkaisussaan kaksi eri merkkivirhettä. Toinen virhe tullut vakioiden siirrossa ja toinen on laskuvirhe.

Pohdinta A.7

- Pyritään kehittämään joustavia tapoja ratkaista yhtälöitä.
- Johdattelevat kysymykset:
    a) Voitko yhdistää samannimiset termit ennen muita välivaiheita?
    b) Voitko ottaa yhteisen tekijän ennen kertoimeksi?
- Vastaus:

- a)

$$\begin{aligned} 3(x+2) &= 10-2(x+2) \\ 5(x+2) &= 10 \\ x+2 &= 2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

- b)

$$\begin{aligned} \frac{4x+4}{4}+\frac{9x+9}{9} &= 8 \\ \frac{4(x+1)}{4}+\frac{9(x+1)}{9} &= 8 \\ (x+1)+(x+1) &= 8 \\ 2(x+1) &= 8 \\ x+1 &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Pohdinta A.8

- Kehitetään virheiden tunnistamista ja niiden korjaamista.
- Opiskelijoita voi johdatella esimerkiksi kysymyksillä:
  1. Voiko jakajana olla nolla?
  2. Voitko olla varma, että lausekkeen $x + 1$ arvoksi ei tule nolla?
- Vastaus: Lausekkeella $x + 1$ ei voida jakaa, sillä ei voida olla varmoja, että $x \neq -1$.

D.2 Suoraan verrannollisuus

Pohdinta B.2

- Tehtävällä herätellään opiskelijoita suoraan verrannollisten suureiden tutkimiseen.
- Opiskelijoita voidaan johdatella tehtävässä seuraavasti:
  1. Laske hintojen suhteet määriin ja katso tuleeko näistä samat luvut.
  2. Miten voit päätellä tämän avulla, onko ruoan hinta suoraan verrannollinen ruoan määrään?
- Vastaus: Ruoan A hinta on suoraan verrannollinen määrään, mutta Ruoan B hinta ei ole suoraan verrannollinen ruoan määrään.

Pohdinta B.4

- Tarkoituksena on tukea erilaisten esitysmuotojen tulkintaa.
- Vastaus: $\frac{100}{1{,}29} = \frac{500}{x}$

Pohdinta B.6

- Tukee samaa kuin edellinen, mutta siinä tulee lisäksi matemaattisen esityksen arviointi.
- Opiskelijoita voi neuvoa ensin ratkaisemaan kaikki verrannot, ja tämän jälkeen pohtia, mikä verranto on väärin ja miksi.
- Vastaus: Hupun ratkaisu on virheellinen, sillä siinä verrataan hintoja ja määriä ristiin.

Pohdinta B.7

- Tehtävällä harjoitellaan suoraan verrannollisten suureiden kuvaajien tulkintaa.
- Vastaus: Auto A kulkee tasaista nopeutta ja auton B nopeus on epätasaista.

D.3 Kääntäen verrannollisuus

Pohdinta C.2

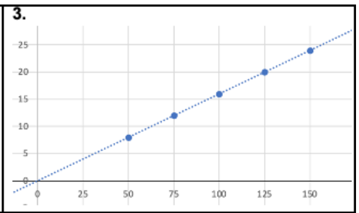
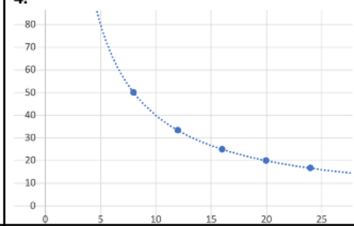
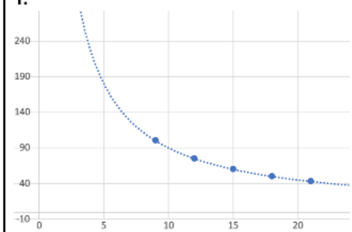
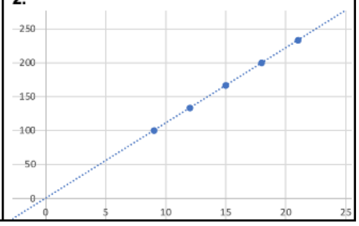
- Vastaus: 2 tuntia.

Pohdinta C.3

- Tehtävällä pyritään auttamaan opiskelijaa löytämään eroavaisuus suoraan ja kääntäen verrannollisuuden välillä.
- Vastaus:
  - a) $\frac{y}{2} = \frac{8}{x}$
  - b) $\frac{y}{2} = \frac{x}{8}$ tai $\frac{y}{x} = \frac{2}{8}$

Pohdinta C.5

- Tehtävässä on suoraan ja kääntäen verrannollisia yhtälöitä, joten pohdinta auttaa opiskelijoita oppimaan, mitä eroja näissä on.
- Suoraan verrannollisiin yhtälöihin löytyy kaksi eri esitysmuotoa, joka puolestaan kehittää opiskelijoiden syvempää ymmärrystä verrannoista.
- Riveittäin oikeat vastaukset.

Kuorma-auto kuluttaa dieseliä 8 litraa 50 kilometrin matkalla. Kuinka pitkän matkan voi ajaa 12 litralla dieseliä?	$\frac{8}{12} = \frac{50}{x}$	$\frac{8}{50} = \frac{12}{x}$	**3.** 
8 pumppua tyhjää altaan 50 minuutissa. Kuinka kauan tyhjenemiseen kuluu 12 saman tehoisella pumpulla?	$\frac{8}{12} = \frac{x}{50}$	-	**4.** 
Tehtaan 100 työntekijää rakentaa elementtitalon 9 päivässä. Korona-aikana talo valmistui 12 päivässä. Kuinka monta työntekijää talon rakentamiseen korona-aikana osallistui? Oletetaan, että työtahti pysyi samana.	$\frac{100}{x} = \frac{12}{9}$	-	**1.** 
Laivalla kestää 9 tuntia kulkea 100 kilometrin matka. Kuinka kauas laiva ehtii 12 tunnissa, kun laivan nopeus pysyy samana?	$\frac{100}{x} = \frac{9}{12}$	$\frac{9}{100} = \frac{12}{x}$	**2.** 

- Ylijääviä ovat $\frac{100}{9} = \frac{12}{x}$ ja $\frac{50}{12} = \frac{8}{x}$.

E Tehtävien vastaukset

1. Pekka ei ole muuttanut etumerkkiä, $-x = -14$.
   Millan ratkaisu on oikein.

2. a) x=4
   b) v=5
   c) t=1

3. $a = -4$

4. Eero: 37,50 €, Matti: 30,00 € ja Samu: 47,50 €

5. a) Riittää 863 omakotitaloon.
   b) Tarvitaan 579 tuulivoimalaa.

6. Ei saa.

7. a) $y = 5,35x$
   b) $535,05$ €
   c) 20 m^2

8. 132 metrin päässä.

9. Oskarilta puuttuu 2,75 desilitraa jauhoja.
   (Jokaista vierasta kohden varataan yksi pulla.)

10. a) 10 588 kilometriä
    b) 5 056 kilometriä.

11. Jokainen joutuu maksamaan 37,50 €.

12. a) Aikaa olisi mennyt 1 tunti.
    b) $t = \frac{3}{n}$

13. Matti saa tehtyä 1,5 metrin levyisen käytävän.

14. 3 650 tuntia.

15. Tien nopeusrajoitus on 60 km/h.