Symbolisten laskinten käyttö lukion matematiikan opetuksessa

Pro Gradu -tutkielma

Jouni Kangas

29.5.2014

Oulun Yliopisto

Luonnontieteellinen tiedekunta

Matematiikka

Sisällysluettelo

Johdanto

Suomalaisessa koulutusmallissa lukio-opiskelu päättyy ylioppilaskokeen suorittamiseen. Tällä kokeella testataan yleissivistävän koululaitoksen päätteeksi opiskelijan osaamista eri aihealueilla. Matematiikan testauksessa tapahtui merkittävän vaikutuksen aiheuttava muutos vuoden 2012 kevään ylioppilaskokeista lähtien. Ylioppilastutkintolautakunta korjasi paljon kysymyksiä herättäneen laskinohjeensa uuteen malliin, joka sallii ”kaikki funktio-, graafiset ja symboliset laskimet.” (Ylioppilastutkintolautakunta, 2011) Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoksen puheenjohtaja Juha Kinnunen kertoo Dimensio-lehdessä, että laskinohjeen uudistuksen tarkoituksena oli selvittää laskinohjeeseen liittyviä epäselvyyksiä ja tarjota mahdollisuus luonnontieteistä kiinnostuneelle opiskelijalle käyttää ajanmukaisia työvälineitä. Symbolisen laskimen salliminen ylioppilaskokeessa tarkoittaa luonnollisesti sitä, että sen käyttö myös opetuksessa yleistyy.

Tässä tutkielmassa tutkitaan symbolista laskinta lukiomatematiikan opetuskäytössä. Aihe on ajankohtaisuutensa vuoksi valmistuvalle opettajalle, jonka opetusharjoittelut suoritettiin vielä aiemman, tiukin ehdoin graafisen laskimen sallineen laskinohjeen aikana, ja jolla siten ei ole merkittävää kokemusta symbolisen laskimen opetuskäytöstä, erittäin mielenkiintoinen. Erityisen kiinnostuksen kohteina tutkielmassa nousevat esiin laskimen kehittyneet toiminnot, laskimen ja opettajan roolien mahdolliset muutokset, sekä laskimen käyttö matematiikan opetusvälineenä. Tutkielmaa ohjanneena tutkimuskysymyksenä on pyritty selvittämään, miten symbolista laskinta hyödyntävässä opetusympäristössä tulisi matematiikkaa opettaa. Vastaus tutkimuskysymykseen pyritään saamaan esiin kolmen symbolisen laskennan opetuskäytön tutkimuksessa suositun teoreettisen viitekehyksen tutkimisella.

Ranskalainen symbolisen laskennan opetuskäytön tutkiminen pohjautuu kahdelle toisiaan täydentävälle teoreettiselle viitekehykselle: instrumentaalisen ja antropologiseen lähestymistapaan. Näitä teknologiapainotteisia teoreettisia viitekehyksiä täydennetään tässä tutkielmassa opetuskeskeisellä australialaisella tutkimuksella, jossa teoreettisena viitekehyksenä toimii pedagogisen kartan taksonomia. Näiden teoreettisten viitekehysten pohjalta tutkielmassa pohditaan symbolisen laskennan integroinnin vaikutuksia opetustilanteeseen.

Tutkielma on rakennettu seuraavasti: Seuraavassa luvussa esitellään lyhyesti symbolisen laskimen ominaisuuksista tärkeimmät, keskittyen etenkin suomalaisen lukio-opetuksen kannalta oleellisiin eroihin graafisen ja symbolisen laskimen välillä. Kolmannessa luvussa esitellään teoreettiset viitekehykset, joiden pohjalta tutkielmassa opetusta tutkitaan. Tämän jälkeen pohditaan opettajan ja symbolisen laskimen rooleja matemaattisessa oppimisympäristössä, sekä niiden mahdollisia muutoksia. Oppimisympäristön roolijaosta edetään varsinaiseen opetuskäyttöön, ja pohditaan symbolisen laskimen integroinnin tuottamia haasteita, opettajan pedagogisten valintojen vaikutusta opetuksen tuloksiin ja opetuksen tavoitteita ja opetussuunnitelmaa. Lopuksi vedetään yhteen tutkielmassa esitetty aineisto, ja muodostetaan johtopäätökset, joilla tutkimuskysymykseen pyritään vastaamaan.

Kirjallisuustutkimukseni lähdetietoa etsiessä olen hankkinut omaan käyttööni aiheeseen liittyviä teoksia, joita ei yliopiston kirjastoissa ollut saatavilla. Olen luonnollisesti hyödyntänyt Oulun yliopiston kirjaston saatavilla olevia teoksia, sekä lukuoikeuksia useisiin julkaisuihin Springer Link –tietokannassa, joista esimerkkeinä mainittakoon Education Studies in Mathematics, ZDM – The International Journal on Mathematics Education ja International Journal of Computers for Mathematical Learning, jota tosin nykyisin julkaistaan nimellä Technology, Knowledge and Learning. Nämä ja muutamia muita aiheeseen liittyviä julkaisuja tutkin otsikkotasolla niin laajasti, kuin lukuoikeuteni sallivat. Jokaisen kiinnostavan tai ohuesti aiheeseen liittyvän otsikon omaavan artikkelin olen lukenut vähintään tiivistelmän osalta, pystyäkseni määrittämään onko kyseinen artikkeli tutkielmani aiheeseen osuva. Tätä alkuperäistä etsintää olen täydentänyt kyseisten, aiheeseen liittyvien artikkeleiden viiteluetteloista, artikkelin sisältämien viittausten ja viitteiden otsikoiden perusteella kiinnostavia artikkeleita tai teoksia etsien. Olen hyödyntänyt artikkeleiden etsinnässä Googlen tarjoamia hakupalvelimia, etenkin Google Scholar –palvelinta, joka etsii tieteellisiä artikkeleita käyttäjän antamilla hakusanoilla, viittausten perusteella, sekä alkuperäisen kohteen kanssa samankaltaisia artikkeleita. Näin löydetyn aineiston olen lukenut läpi ja karsinut tutkimuskysymykseni kannalta epäoleelliset joukosta pois.

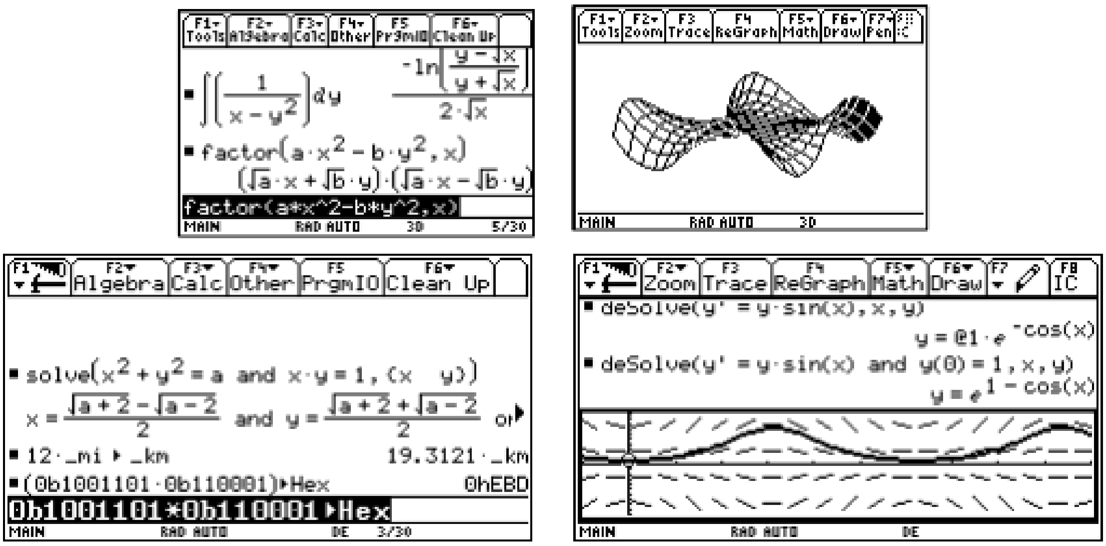
Laskinten kehitys

Laskinten kehitys viime vuosikymmeninä on ollut merkittävää. Yliopisto-opinnoissa käytettävän funktiolaskimen pohjalle lisättiin aluksi graafinen ohjelma, joka piirtää annetun funktion kuvaajan, mikäli sellainen on kaksiulotteisessa karteesisessa koordinaatistossa esitettävissä. Uusin kehitys on lisännyt graafiseen laskimeen symbolisen laskennan ohjelman, jonka avulla laskin pystyy käsittelemään muuttujia sisältäviä lausekkeita ilman muuttujille annettuja arvoja, siis symbolisesti. Tästä seuraa nimitys symbolinen laskin. Ylioppilastutkintolautakunta vastasi tähän kehitykseen avaamalla niinkutsutun laskinohjeen rajoituksia. Uudistettu laskinohje sallii yhden tai useamman, funktio-, graafisen tai symbolisen laskimen käytön, sillä ehdolla, että laskimen muisti tyhjennetään ennen koetta.

Millaisia uudet laskinlaitteet sitten ovat? Mihin ne pystyvät? Mikä on muuttunut?

Symboliset laskimet

Laskinvalmistaja Casio puhuu uuden laskimen kohdalla symbolisesta graafisesta laskimesta. Tämä nimitys seuraa suoraan laskimen tekniikasta. Symbolinen laskin, eli niinkutsuttu CAS-laskin (Computer Algebra System) pystyy samanlaiseen graafiseen tarkasteluun, kuin aiemmin yleisessä käytössä olleet graafiset laskimet. Lisäksi symboliset laskimet pystyvät kehittyneempään graafiseen tarkasteluun, kuten dynaamiseen geometriaan ja kolmeulotteisen grafiikan esittämiseen. Oleellisin ero perinteisen graafisen laskimen ja symbolisen laskimen välillä on se, että symbolinen laskin, nimensä mukaisesti, kykenee symboliseen laskentaan, eli kansankielellä kirjaimilla laskemiseen. Symbolinen laskin siis pystyy laskemaan tuntemattomia muuttujia sisältävillä lausekkeilla, kuten esimerkiksi sieventämään lausekkeita, ratkaisemaan yhtälöitä ja yhtälöryhmiä antaen ratkaisuksi tarkan arvon, sekä derivoimaan ja integroimaan lausekkeita. Yleensä symbolinen laskin ei esitä laskiessa laskun välivaiheita, mutta osaava käyttäjä pystyy kyllä etenemään välivaiheittainkin. Erityistä apua symbolisesta laskimesta on käsin lasketun laskun tarkistamisessa.



Kuva 1 Symbolisen laskimen toimintoja (Kutzler, 2000)

Ylläolevassa kuvassa on esitetty symbolisten Texas Instruments T-89 ja T-92 laskinten ominaisuuksia. Ensimmäisessä kuvassa on laskettu integraalilausekkeen arvo ja jaettu toinen lauseke tekijöihin demonstroiden laskimen kykyä laskea symbolisilla muuttujilla. Toisessa kuvassa, oikealla ylhäällä, on laskimella piirretty kolmeulotteinen pinta, jota voidaan lisäksi pyörittää tarkastelua varten. Alemmissa kuvissa on laskettu yhtälöparin ratkaisua, muunnettu fysiikan yksiköitä, muunnettu binäärilaskennan tulos heksadesimaalijärjestelmään, sekä tarkasteltu algebrallisesti, numeerisesti ja kuvaajan avulla trigonometrista differentiaalifunktiota. (Kutzler, 2000) Nämä toimenpiteet ovat graafisella laskimella joko vaikeita tai täysin mahdottomia.

Symbolista laskinta ei ole lähtökohtaisesti kehitetty matematiikan opetusvälineeksi. Laskimen suunnittelijat ovat selkeästi painottaneet laitteen funktionaalisia ominaisuuksia, joskus pedagogisten ominaisuuksien kustannuksella. Viime aikoina laskinvalmistajat ovat kuitenkin heränneet laskimen opetuskäytön vaatimuksiin ja tuoneet markkinoille intuitiivisemmalla käyttöliittymällä varustettuja laitteita. Hyvä esimerkki tästä on Casion uusi ClassPad fx-CP400, jossa englanninkielisten, lyhennettyjen komentojen sijaan voidaan kosketusnäytön ruudulta valita mukana tulevalla kynällä samoja matemaattisia symboleja, joita matematiikan kielessä käytetään. Lisäksi laskinvalmistajat ovat kehittäneet ohjelmistoja opetuskäyttöön. Esimerkiksi Texas Instruments on kehittänyt Symbolic Math Guide –ohjelman, joka itsessään toimii pedagogisena välineenä. Ohjelman ideana on tarjota annetun yhtälön ratkaisumenetelmälle eri ratkaisupolkuja ja näyttää tehottomien tai väärienkin valintojen oikein lasketut seuraukset. Näin symboliseen yhtälön ratkaisuun ja manipulointiin kykenevä laite opettaa kynä ja paperi –toiminnassa tarvittavia yhtälön manipulointitaitoja. (Pierce & Stacey 2010)

Tutkimuksen näkökulmia

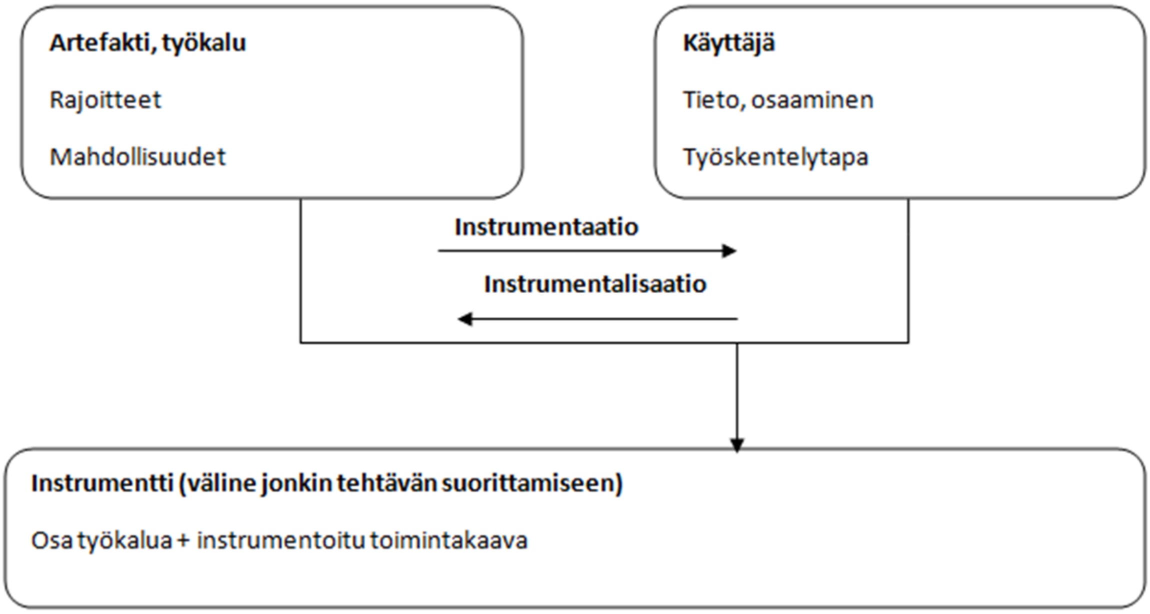
Symbolisten laskinten käyttöä on tutkittu luonnollisesti eniten niissä maissa, joissa symboliset laskimet on koulutuksessa otettu käyttöön. Lähdeaineistossa esillä ovat erityisellä tavalla Ranska ja Australia. Näissä maissa symbolisten laskinten tutkimiseen on käytetty muutamia erilaisia näkökulmia, joiden avulla symbolisen laskimen opetuskäyttöä on järkevä analysoida. Tässä esitän teoriakehyksistä suosituimmat, joita tutkimuksissa on hyödynnetty.

Instrumentaalinen lähestymistapa

Matematiikan oppimisessa ja opettamisessa käytetään useita erilaisia laitteita, esineitä, algebrallisia symboleja ja omaa kieltä. Näiden materiaalisten ja abstraktien työkalujen tutkimiseen on kehitetty *instrumentaalinen lähestymistapa*. Instrumentaalinen lähestymistapa kutsuu näitä materiaalisia tai abstrakteja työkaluja *artefakteiksi*. Instrumentaalinen lähestymistapa tutkii artefaktien toimivuutta opettamisessa ja oppimisessa, eli sitä milloin artefaktista, esineestä tai ajatuksesta sen normaalissa tilassa, tulee käyttäjälleen hyödyllinen työkalu, *instrumentti*. Lähestymistapa on kehittynyt kognitiivisen ergonomian perustalle ja sen juuret ovat Vygotskyn ajatuksissa siitä, kuinka työkalut avustavat oppimista. (Trouche, 2004)

Keskeinen aihe Vygotskyn työssä on ollut tutkia kuinka työkalut toimivat välittäjinä inhimillisen toiminnan ja ympäristön välillä. Rabardel, jota pidetään instrumentaalisen lähestymistavan kehittäjänä, jatkaa tälta pohjalta ja korostaa, ettei puhdas artefakti toimi automaattisesti välittäjänä. (Trouche, 2004) Artefakti, materiaalinen tai abstrakti, voi olla täysin merkityksetön käyttäjälle, ellei tämä ole ennen käyttänyt kyseistä artefaktia, tai ole nähnyt jonkun muun käyttävän sitä. Vasta, kun käyttäjä on kehittänyt jonkinlaisen keinon käyttää artefaktia tiettyyn tarkoitukseen, tulee siitä käyttäjälleen hyödyllinen ja arvokas instrumentti. Edistyneellä käyttäjällä on kehittyneet taidot instrumentin käyttöön tehokkaalla tavalla, eli hän tietää milloin ja minkälaisissa tilanteissa kyseisen instrumentin käyttö on hyödyllistä. (Drijvers & Gravemeijer, 2005)

Instrumentin syntyprosessi (instrumental genesis) koostuu kahdesta samanaikaisesta, hyvin läheisesti toisiinsa liittyvästä, prosessista, *instrumentaatiosta* ja *instrumentalisaatiosta*, kuvan 1 (Trouche, 2004, suomennos kirjoittajan) esittämällä tavalla kokonaisuutena käyttäjän ja artefaktin välillä. Näistä prosesseista instrumentalisaatio on kohdistettu artefaktiin ja instrumentaatio kohdistuu käyttäjään. Luonnollisesti syntyprosessin aikana instrumentin kehittymisen nopeuteen, tehokkuuteen ja lopputulokseen vaikuttavat käyttäjän konseptuaalinen tieto, sekä aiemmat työskentelytavat. Lisäksi artefaktin ominaisuuksista johtuvat rajoitteet ja mahdollisuudet vaikuttavat instrumentin kehittymiseen.



Kuva 2 Instrumentin syntyprosessi

Instrumentaatio

Instrumentaatio on prosessi, jonka artefakti kohdistaa käyttäjään. Työkalu rajoittaa käyttäjänsä toimintaa useasti ratkaisevalla tavalla. Laskimelle ei voi esittää suoraan tehtävänantoa ja odottaa laskimen tekevän kaiken työn, vaan tehtävä on ensin paloiteltava osiin, joista jotkin voidaan ratkaista laskimella ja edetä siten kohti tehtävän ratkaisua. Artefaktin ominaisuudet siis luovat selkeät rajat käyttäjän toiminnalle, ja siten jättävät jälkensä käyttäjään.

Näitä artefaktin luomia rajoitteita voidaan ajatella olevan kolmea eri tyyppiä: sisäisiä rajoitteita, komentorajoitteita ja järjestyksellisisä rajoitteita. (Trouche, 2004.) Sisäiset rajoitteet ovat artefaktin luonnollisia, rakenteesta johtuvia ominaisuuksia, jotka rajoittavat toimintaa. Esimerkiksi symbolinen laskin pystyy ratkaisemaan symbolisen yhtälön, toisin kuin graafinen laskin. Komentorajoitteet ovat laskimen sisäänrakennettujen komentojen asettamia rajoitteita. Laskimella esimerkiksi voi tehdä vain äärellisen määrän toimintoja, eikä yleispätevää ”Ratkaise tehtävä”-komentoa ole, ainakaan vielä, laskimessa olemassa. Erilaisten komentojen sarjalla voidaan toki ratkaista pitkäkin kaava yhdellä laskulla. Järjestykselliset rajoitteet syntyvät laskimeen rakennettujen komentojen järjestelystä. Jotkut komennot voivat olla selkeästi esillä suoraan laskimen näppäimissä, kun taas toiset pitää etsiä valikosta. Toiset komennot, kuten esimerkiksi raja-arvon laskeminen, voi vaatia käyttäjältä ensin funktion, ja sen jälkeen muuttujan ja lähestyttävän arvon syöttämisen. Nämä arvot voi olla mahdollista laskimesta riippuen syöttää eri järjestyksessä ja järjestys voi tuntua käyttäjälle matemaattisesti luonnolliselta, tai sitten ei. (”Funktion f(x) raja-arvo, kun muuttuja x lähestyy arvoa a...”, tai ”Kun muuttuja x lähestyy arvoa a, niin funktio f(x) lähestyy arvoa...”)

Selkeästi käyttäjän konseptuaalinen tieto ongelman ratkaisun vaatimasta matemaattisesta sisällöstä ja osaaminen artefaktin käyttäjänä, eli aiemmat ja käyttäjän jo osaamat työskentelytavat, rajoittavat tai edistävät instrumentin kehittymistä. Monet edellämainituista instrumentaation rajoitteistakin ovat suuresti riippuvaisia siitä, miten laaja konseptuaalinen tietorakenne kyseessä olevasta matemaattisesta aiheesta käyttäjällä on. Komentojen löytäminen ja käyttäminen, sekä järjestyksellisten rajoitteiden huomaaminen ovat huomattavasti helpompia, kun konseptuaalisesti ymmärtää, mitä on tekemässä.

Instrumentalisaatio

Instrumentalisaatio on käyttäjän tarkoituksellista artefaktiin kohdistettua toimintaa. Artefaktista kehittyy instrumentti käyttäjän omaksuessa tietoa artefaktin, tai artefaktin osan kyvystä toimia ongelmatilanteen ratkaisemiseksi. Instrumentalisaation voidaan kuvata etenevän vaiheittain. (Trouche, 2004.) Artefaktin löytäminen, hyödyllisyyden havaitseminen ovat luonnollisesti ensimmäiset vaiheet. Näiden jälkeen seuraa personalisoinnin ja muuntumisen vaihe, jonka aikana käyttäjä muokkaa artefaktia paremmin itselleen sopivaksi. Esimerkiksi tiettyjen toimintojen asettaminen pikanäppäinyhdistelmien taakse tai vapaisiin toimintopaikkoihin. Joskus personalisointi vie artefaktia sellaiseen suuntaan, jota artefaktin suunnittelija ei ole osannut odottaa, mutta joka on käyttäjälle parempi.

Syntyprosessin aikana käyttäjä kehittää *skeeman*, eli mielen sisäisen mallin, laitteen toiminnasta kyseisessä ongelmatilanteessa. Skeemaa kuvataan muuttumattomaksi toimintasuunnitelmaksi tietyn tyyppisissä tilanteissa. Skeemaan sisältyy tarkoitus, tavoite, ja se sisältää usein teoriatiedon pohjalle rakennettuja toimintoja. Näin ollen skeeman ajatellaan olevan sekä teknisten taitojen, että niitä tukevan konseptuaalisen tiedon muodostamia kokonaisuuksia, jotka ohjaavat artefaktin käyttöä ongelmatilanteessa. (Drijvers & Gravemeijer, 2005; Lagrange, 1999)

Instrumentaalinen orkestraatio

Instrumentin syntyprosessi ilman ohjausta on hidas ja monimutkainen prosessi, jonka tuloksena ei yleensä nähdä instrumentin tehokasta käyttöä. Näin ollen instrumentalisaatiota ja instrumentaatiota edistää ja auttaa kokeneemman käyttäjän ohjaus, jota Trouche (2004) kutsuu *instrumentaaliseksi orkestraatioksi*. Instrumentaalisella orkestraatiolla tarkoitetaan opettajan tai ohjaajan tarkoituksellista ja systemaattista oppimisympäristössä käytettävissä olevien artefaktien organisointia tehtävätilanteen edellyttämällä tavalla ohjatakseen opiskelijoiden instrumentin syntyprosessia. Instrumentaalinen orkestraatio koostuu kolmesta osasta: didaktisesta konfiguraatiosta, hyödyntämismallista (Trouche, 2004) ja didaktisesta suorittamisesta. (Drijvers & Doorman & Boon & Reed & Gravemeijer, 2010)

Didaktinen konfiguraatio viittaa oppimisympäristössä käytettävien artefaktien järjestämiseen. Opettajan roolina on järjestää oppimistilanne niin, että oppiminen on tilanteessa mahdollista. Tähän sisältyy opetuksessa käytettävien artefaktien valinta, joita hyödyntämismallin mukaisesti opettaja opetuksessaan käyttää. Hyödyntämismalli sisältää päätöksiä tehtävän esitystavasta, työskentelytavoista, artefaktien rooleista ratkaisuprosessissa ja mielikuvan siitä, millaisia skeemoja ja tekniikoita opiskelijoiden tulee ratkaisuprosessin aikana omaksua ja toteuttaa. Viimeisenä didaktinen suorittaminen vastaa todellista, suoritettua opetustilannetta, jossa opettaja tekee pedagogisia valintoja liittyen didaktiseen konfiguraatioon ja hyödyntämismalliin. *Minkä kysymyksen kysyn nyt? Miten korostaa (tai ohittaa) tietyn opiskelijan ilmaisemia ajatuksia? Miten toimitaan odottamattoman, laitteen toimintaan tai matemaattisen tehtävän esittämiseen liittyvän ongelman edessä?* Tai johonkin muuhun opetustilanteessa esiintyvään ilmiöön tilanteeseen reagointia.

Instrumentaalinen orkestraatio kehitetään siis osittain etukäteen ja osittain vasta opetustilanteessa. Didaktisen konfiguraation muodostamisella on opettajalle oppituntia rakentava vaikutus. Didaktista konfiguraatiota voi olla vaikea muuttaa kesken opetustilanteen, joten se on valmisteltava etukäteen, hyödyntämismalli voi olla huomattavastikin joustavampi ja mukautua tilanteeseen, kun taas didaktinen suorittaminen on vahvasti hetkessä elämistä ja tilanteeseen sopeutumista.

Drijvers, et. al. (2010) haluavat ymmärtää instrumentaalisen orkestraation korkealla taitotasolla toimivan sinfoniaorkesterin, jota kapellimestari johtaa, sijaan jazz-yhtyeenä, jossa noviisit ja kehittyneet soittajat soittavat yhdessä. Jazz-yhtye soittaa samaa kappaletta, jonka yhtyeen johtaja on valinnut, mutta lopullinen toteutuva soitanta on avoin kaikkien jäsenten uusille ideoille ja improvisaatiolle.

Instrumentaalinen lähestymistapa on tehokas lähestymistapa, kun tutkitaan teknologisen laitteen ja opiskelijan välistä suhdetta, sekä instrumentaalisen orkestraation käsitteen kautta opettajan toimintaa. Lähestymistavassa on kuitenkin puutteita, joita ranskalaisessa tutkimuksessa paikataan Chevallardin kehittämällä antropologisella lähestymistavalla.

Antropologinen lähestymistapa

Antropologinen lähestymistapa on hyvin läheistä sukua instrumentaaliselle lähestymistavalle. Useissa tutkimuksissa näitä lähestymistapoja käytetään yhtäaikaisesti, koska ne selkeästi täydentävät toisiaan ja yhdessä ovat kattava teoria opetuksen tutkimiseen.

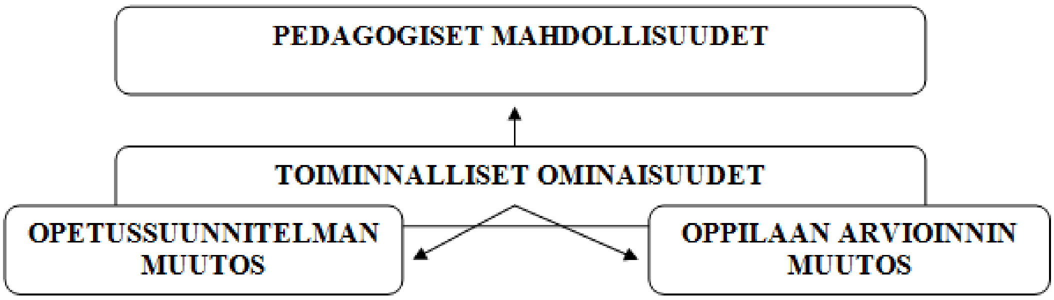
Matematiikka nähdään antropologisessa lähestymistavassa sosio-kulttuuristen lähestymistapojen tapaan inhimillisen toiminnan tuloksena. Matemaattiset tuotokset ja ajattelumallit koetaan siten riippuvaisiksi siitä, millaisissa sosiaali- ja kulttuuriympäristöissä ne kehittyvät. Tämän seurauksena matemaattisia objekteja ei pidetä absoluuttisina objekteina, vaan olioina, jotka kehittyvät tiettyjen *instituutioiden* käytännöistä. Instituutio ymmärretään tässä laajassa merkityksessä: esimerkiksi perhe on instituutio, jossa vallitsee tietty sosiaalinen ja kulttuurinen käytäntö. Didaktisia instituutioita ovat ne, joissa keskitytään tietoisesti tietyn tiedon osa-alueen hallintaan ja harjoitteluun. Missä tahansa didaktisessa instituutiossa kehittyy tiettyjä tarkkoja käytäntöjä, jotka johtavat tarkkoihin normeihin ja visioihin kyseessä olevan tiedon ja ymmärtämisen luonteesta ja tarkoituksesta. Antropologisen lähestymistavan pääpainotus on tutkia opiskelijoiden kehittämiä tekniikoita ja teorioita tietyssä instituutioympäristössä. (Hitt & Kieran 2009)

Instituution käytäntöjä tiettyyn objektiin liittyen voidaan kuvata neljällä komponentilla: tehtävätyyppi, johon objekti liittyy, tekniikat tällaisen tehtävätyypin ratkaisuun, ratkaisutekniikan käyttämisen perustelut ja teoria, joka on perustana ratkaisutekniikan käyttämisen perusteluille. Artigue (2002) on yhdistänyt näistä neljästä komponentista kaksi viimeistä yhden laajemmin ymmärrettävän teoria-käsitteen alle. Näin ollen voidaan puhua tehtävä-tekniikka-teoria-, eli TTT-kehyksestä. (engl. Task, Techique, Theory) Lisäksi Artigue korostaa, että myös tekniikka-käsitteelle on annettava tässä laajempi merkitys: Artiguen (2002) mukaan tekniikat ovat monimutkaisia kokoelmia päättelyä ja rutiinitoimintaa ja siten sisältävät myös teoreettisen komponentin. Tämä teknkiikan ja teorian jako ei siis vastaa yleisemmin käytettyä jakoa proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon.

Pedagogiset kartat

Australialaiset tutkijat ovat jo vuosien ajan tutkineet symbolisen laskennan käyttöä matematiikan opetuksessa. Ranskalaiseen tutkimukseen verrattaessa australialaiset tutkijat lähestyvät aihetta huomattavasti enemmän opetuksen näkökulmasta ja suuri osa tutkimuksista onkin keskittynyt pienen opettajajoukon vertailevaan tutkimiseen.

Pierce ja Stacey (2008, 2010) ovat kehittäneet matemaattisen analyysin sovellusten (engl. Mathematical analysis software, MAS) opetuskäytön tutkimiseen taksonomian, jota he kutsuvat pedagogiseksi kartaksi. Lähtökohtana kartalle on matemaattisen analyysin sovellusten tarjoamien toiminnalliset mahdollisuudet (Kuva 3). Keskityn tässä kuitenkin kohdistamaan tutkielman aiheen mukaisesti pedagogisen kartan käyttöä symboliseen laskentaan ja laskimeen. Nämä laskimen, tai sovelluksen, alkuperäisestä käyttötarkoituksesta ja perusominaisuuksista seuraavat toiminnalliset mahdollisuudet tarjoavat mahdollisuuksia opetussuunnitelman ja opiskelijoiden arvioinnin muuttamiseen, mutta myös pedagogisia mahdollisuuksia opetuksen kehittämiselle.

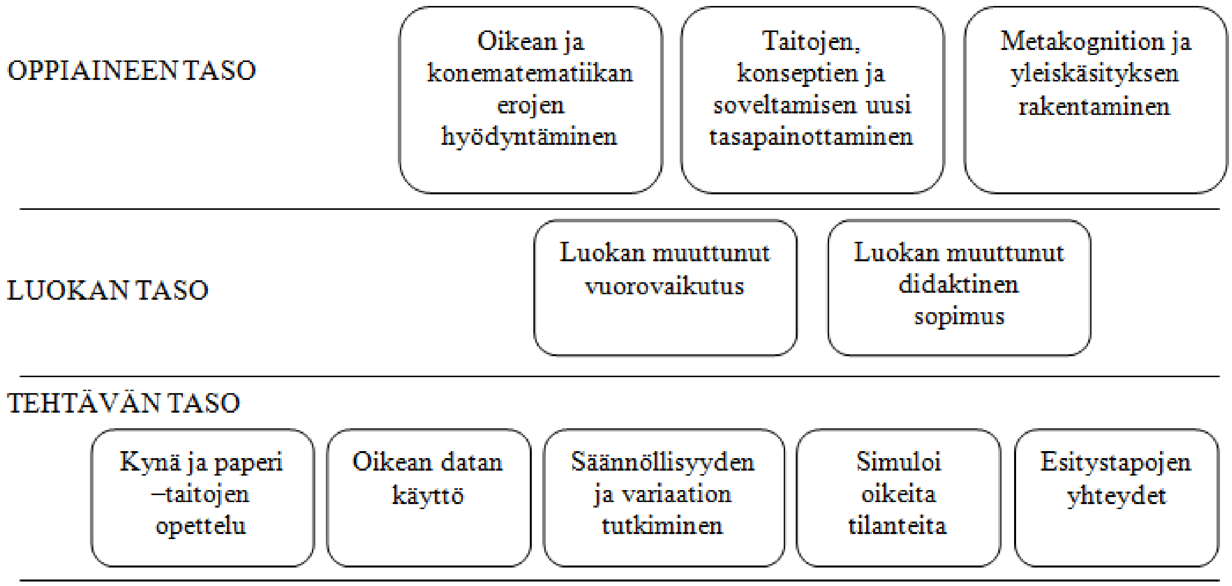


Kuva 3 Pedagogisen kartan perusta (Pierce & Stacey, 2010)

Pierce ja Stacey ovat ryhmitelleet symbolisen laskennan tarjoamat pedagogiset mahdollisuudet kolmelle eri tasolle: Tehtävän, luokan tai ryhmän ja oppiaineen tasoille. Tämä on esitetty kuvassa 4 (mukaillen Pierce & Stacey, 2010)

Ensimmäisellä tasolla on nähtävissä välittömiä hyötyjä seurauksena laitteen tai sovelluksen ominaisuuksista. Viittä eri osa-aluetta Pierce ja Stacey (2010) avaavat esimerkein. Avataan tässä niitä nyt lyhyesti, jotta kuvan käsitteet selkeytyvät.

Kynä ja paperi –taitojen opettelussa symbolinen laskin toimii palautteen antajana, laskun tarkistajana, ja siten auttaa laskutaidon kehittymistä. Laskin mahdollistaa oikean datan käytön, eli oppitunnilla voidaan käyttää aidosta tilanteesta saatua dataa, kun laskun arvojen ei tarvitse enää olla käsin laskettavissa. Näin ollen monimutkaisemmat, käsin laskettaessa virheherkätkin laskun voidaan oppimistilanteessa suorittaa. Säännöllisyyttä ja variaatiota on helpompi tutkia nopeiden oikein laskettujen laskjen ansiosta. Lisäksi symbolisella laskimella on helppo nopeasti tutkia parametrien vaikutuksia graafiseen esitykseen ja käyttää yleisiä muotoja funktioista tai yhtälöistä. Symbolisella laskimella pystyy käyttämään dynaamisia diagrammeja ja keräämään dataa analysoitavaksi. Näin ollen voidaan käyttää teknologian kehittämää tilastollista dataa simuloimaan oikeita tilanteita. Viimeisenä, symbolisella laskimella on helppo vaihdella esitystavasta toiseen ja vuorotella symbolisen, geometrisen, numeerisen ja graafisen esitystavan välillä aiheeseen sopivalla tavalla.



Kuva 4 Pedagogiset mahdollisuudet eri tasoilla (Pierce & Stacey, 2010)

Pedagogisen kartan toiselle tasolle määritellyt kaksi mahdollisuutta liittyvät luokan tai ryhmän toimintaan opetustilanteessa. Luokan vuorovaikutusmallit voivat muuttua symbolisen laskimen käytön myötä. Symbolinen laskin voi herättää ominaisuuksiensa ja rajoitteidensa vuoksi keskustelua opiskelijoiden kesken sekä kysymyksiä opettajalle esitettäväksi. Tähän opettajalla on mahdollisuus tarttua ja rohkaista ryhmätyötä ja keskustelua. Näin ollen opettaja enemmän mahdollistaa oppimistilanteen kuin ohjaa opiskelijoita talutusnuorassa.

Toinen luokan tasolle määritelty mahdollisuus liittyy didaktisen sopimuksen käsitteeseen. Didaktisella sopimuksella tarkoitetaan sitä sanatonta sopimusta, joka muodostuu luokan ja opettajan välille ja se määrittää tarkasti opiskelijan ja opettajan roolit, odotukset oppimistilanteessa toimimiselle ja luo auktoriteetin opiskelijan ja opettajan välille. Symbolinen laskin mahdollistaa muutoksia tähän sanattomaan sopimukseen. Opettaja voi sallia laskimen toimia uutena auktoriteettina joiltain osin, ja siten muuttaa opettajaan tai opiskelijoihin kohdistuvia odotuksia.

Oppiaineen tasolla opettaja voi hyödyntää laskinlaitteen rajoitteita, tuottaa tahallisia konflikteja, odottamattomia esitysmuodon muutoksia (sievennyksiä) ja graafisia esityksiä luodakseen kehittävää matemaattista keskustelua. Symbolinen laskin tarjoaa myös mahdollisuuden pohtia uudelleen matematiikan opetuksen tavoitteita, rutiininomaisten laskutoimitusten ja konseptuaalisen tiedon suhteen uudelleen arviointia ja korostaa matemaattisen ajattelun merkitystä. Yleiskäsitys voidaan antaa opiskelijoille jo johdantona matematiikan tunnille ja ottaa tavoitteeksi yhdistää symbolisten esitysten manipulaatiolla ja monipuolisilla esitystavoilla osakäsitteet toisiinsa.

Pierce ja Stacey (2010) ovat halunneet luoda taksonomian, josta on hyötyä useilla tasoilla sekä matematiikan opettajalle, opetussuunnitelman suunnittelijoille, että matematiikan opetuksen tutkijoillekin. Pedagogista karttaa voidaan käyttää opetustilanteen suunnittelussa, tai suunnittelun opettamisessa, teknologian opetuksen opettamisessa opettajille tai opetussuunnitelman suunnittelutyössä, kiinnittämään huomiota soveltuviin pedagogisiin ratkaisuihin. Lisäksi padagogista karttaa voidaan hyödyntää opettajan opetuksen tutkimisessa lyhyellä tai pitkällä aikavälillä, opetettavan ryhmän edistymisen tutkimisessa, yksittäisen oppitunnin analysoinnissa tai opettajan omassa reflektoinnissa. (Pierce & Stacey 2010)

Näin kehitetyllä pedagogisella kartalla on saatu luotua viitekehys, jonka avulla voidaan tutkia kuinka opettaja opetuksessaan hyödyntää symbolisen laskimen tarjoamia pedagogisia mahdollisuuksia. Pedagogisen kartan ei ole tarkoitus olla luettelo pedagogisista tavoitteista, jotka opettajan täytyy joka oppitunnilla saavuttaa. (Pierce & Stacey 2010) Pedagogisen kartan osa-alueiden käyttäminen opetuksessa ei ole mittari opetuksen paremmuudelle, vaan myös vähäisemmällä mahdollisuuksien hyödyntämisellä voidaan aikaansaada tehokasta opetusta.

Opettajan ja laskimen roolit

Laskinten kehitys on mahdollistanut monia uusia tapoja ratkaista matemaattisia ongelmia. Luonnollisesti uudet tavat ratkaista matemaattisia ongelmia luovat myös uusia tapoja opettaa matematiikkaa. (Kendal & Stacey, 2001) Symbolisen laskimen integroiminen opetuskäyttöön aiheuttaa muutoksia laskimen ja opettajan roolituksessa. Opettajan roolin muuttuessa myös didaktinen sopimus muuttuu.

Opettajan rooli symbolista laskinta käyttävässä oppimisympäristössä on kaikissa tutkimuksissa, joissa asiaan on kiinnitetty huomiota, todettu hyödylliseksi ja tärkeäksi. Oli opettajan tehtävänä instrumentaalinen orkestraatio, instituution ja opiskelijan välissä, tekniikoiden ja teorian kehityksen ohjaajana toiminen tai laskimen funktionaalisten ominaisuuksien tarjoamien pedagogisten mahdollisuuksien hyödyntäminen, on opettajan asema oppimisympäristössä turvattu.

Instrumentaalinen lähestymistapa asettaa opettajan ohjaamaan opiskelijoiden kehittyvää suhdetta laskimeen, opiskelijan instrumentin syntyprosessin ulkopuolelle. Useissa tutkimuksissa on huomioitu itsenäisen instrumentaation vaikeus: Ilman ohjausta instrumentin syntyprosessi on hidas ja monimutkainen tapahtuma, jonka tuloksena ei synny tehokkaita instrumentoidun toiminnan skeemoja, tehokasta instrumentin käyttöä, eikä tällöin hyödynnetä laitteen potentiaalia parhaalla mahdollisella tavalla.

Antropologisen lähestymistavan tutkimukset korostavat myös opettajan roolia. Opettajan tehtäväksi nähdään opiskelijoiden instrumentaalisen kehityksen ohjaaminen kohti tehokasta tekniikoiden ja teoriakäsitysten joukkoa. Opettajalla on siis rooli opiskelijoiden ongelmanratkaisutyön, myös haastavien, uusia ratkaisustrategioita kehittävien ongelmien parissa puurtamisen, rohkaisijana, johdattelevin kysymyksin ohjaajana ja suuremman teoriakokonaisuuden esittäjänä.

Pedagogisen kartan kohdalla opettajan roolin tärkeys ja sen kyseenalaistaminen on yksi laskimen funktionaalisten ominaisuuksien tarjoamista pedagogisista mahdollisuuksista. Tässä yhteydessä esitetty didaktinen sopimus, ja sen muutos, ovatkin mielenkiintoisia kysymyksiä pohdittaviksi.

Didaktisen sopimuksen mahdollisia muutoksia

Didaktinen sopimus voi symbolista laskinta hyödyntävässä opetuksessa muuttua merkittävästi. Jotkut opettajat eivät pidä ajatuksesta muuttaa vanhaa, perinteistä, todistetusti toimivaa didaktista sopimusta opettajajohtoisesta oppimisympäristöstä, kun taas toiset toivottavat muutoksen tervetulleeksi. Perinteinen didaktinen sopimus antaa opiskelijoiden olettaa, että opettaja opettaa heille kaiken tarvittavan tiedon oppitunnilla vastaan tulevien ongelmien tai kotitehtävien ratkaisuun. (Pierce, Stacey ja Wander 2010) Jos opiskelijat kohtaavat ongelman, jota eivät osaa ratkaista ja kokevat, ettei opettaja pidä omaa osaansa didaktisesta sopimuksesta, voivat he närkästyä opettajaan.

Jos opettaja siis haluaa opettaa opiskelijoita itsenäisempään toimintaan, ratkaisemaan ei-rutiininomaisia ongelmia, luomaan omia ratkaisustrategioita, etsimään uusia laskintekniikoita omatoimisesti ja toimimaan ryhmänä ilman jatkuvaa opettajajohtoista ohjausta, on opettajan luotava uusi, erilainen didaktinen sopimus itsensä ja opiskelijoiden välille. Tämä voi tarkoittaa myös vastuun oppimisesta siirtyvän opettajalta yhä enemmän opiskelijoille itselleen. (Pierce, Stacey ja Wander 2010)

Opettaja voi muuttaa didaktista sopimusta myös instrumentaalisen orkestraatioiden myötä. Guin ja Trouche (2002) esittelevät sherpa-oppilaan käsitteen, joka viittaa myöhemmin esiteltävään orkestraatiomalliin, jossa opiskelija työskentelee koko ryhmälle näytettävän laskimen käyttäjänä, joko itse ratkaisua kehittäen ja perustellen, tai opettajan ohjauksessa. Tämä mahdollistaa didaktiseen sopimukseen sisältyvän vastuun osittaisen siirtymisen opiskelijalle. (Guin & Trouche 2002; Pierce, Stacey & Wander 2010; Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010)

Laskimesta voi didaktisen sopimuksen muuttuessa tulla uusi matemaattinen auktoriteetti opettajan rinnalle. Laskin voi saada asiantuntijan aseman. (Peschek & Schneider 2002) Tässä mielessä laskin on kuin vähäpuheinen guru: tietää aiheesta paljon, mutta vastaa vain, kun kysymys on oikein asetettu ja esitetty. Laskin ei myöskään opasta merkittävästi kysymysten asettelussa, vaan opiskelijan on tunnettava laskimen ominaisuuksia ja matematiikan konsepteja riittävästi tietääkseen mitä laskimelta voisi kysyä. Laskin voi saada jopa antropomorfisia piirteitä, Pierce, Stacey ja Wander (2010) nostavat esiin esimerkin, jossa opiskelijan on kuultu kysyvän toiselta opiskelijalta ”Mitä mieltä sinun laskimesi on?”.

Laskimen tekninen rooli oppimisympäristössä

Symbolista laskinta käytettäessä opetuksessa yhdistyvät kaksi eri tyyppistä tekniikkaa matematiikan opettelemiseen: perinteinen kynä ja paperi –toiminta, ja instrumentoitu tekninen toiminta laskimen kanssa. Molemmat näistä toiminnan osa-alueista ovat arvokkaita matematiikan opetuksessa, käytännön ja tiedon rakentamisen kannalta. (Artigue, 2002; Hitt & Kieran, 2009) Kynä ja paperi -ympäristössä toimiminen kehittää opiskelijoiden toimintaa laskimen kanssa toimiessa, vaikka näiden osa-alueiden yhdistäminen voikin olla opiskelijalle joskus vaikeaa. (Hitt & Kieran, 2009)

Tiedon rakentajina teknisen toiminnan, laskimen käytön, rooli voi olla vaikeampi määrittää, mutta Hitt ja Kieran (2009), Artigue (2002), sekä Kieran et al. (2006) korostavat tekniikan merkitystä matemaattisen objektin rakentumisessa ja liittymisessä opiskelijan tietorakenteeseen. Laskimen käyttötekniikkaa kehittäessä opitaan myös uusia asioita objekteista, joita käyttötekniikalla käsitellään. Näin laskimen käytön tekninen opettelu kehittää teoreettista ajattelua ja teoreettinen oppiminen kehittää laskimen käytön teknistä osaamista. Symbolisen laskimen kanssa toimiessa opiskelijat voivat myös kehittää oman ratkaisumallinsa etenkin opiskelijakeskeisessä opetuksessa. Tällöin opettajan pitäisi olla jo päättänyt millaisen roolin metodien määrällinen räjähdys (engl. explosion of methods) oppitunnilla saa, suvaitaanko opiskelijoiden omia metodeja ollenkaan, vai päädytäänkö niitä jopa korostamaan ja käymään läpi niiden vahvuuksia ja heikkouksia.

Oppimisympäristössä opettaja on vastuussa eri toimintatekniikoiden välisestä tasapainosta. Tämä tasapaino on kuitenkin jokaiselle opettajalle erilaisesta opetustyylistä johtuen omanlaisensa, joka tulee löytää kokeilemalla ja reflektoimalla. Myöhemmin esitetään opettajan toimintaan vaikuttavia tekijöitä, jotka vaikuttavat tekniikoiden tasapainon luomiseen.

Laskimen käytön opettamisesta

Laskimen käytön opettelu on selkeästi tärkeässä osassa matematiikan oppimista. Se voidaan nähdä matematiikan opetuksen tavoitteeksi, vaikka sitä pidettäisiinkin toissijaisena matemaattisen osaamisen opettamisen rinnalla. (Pierce, Stacey ja Wander 2010) Laskimen käytön opettamiseenkin on varattava kurssi- ja tuntisuunnitelmasta aikaa. Opettajan on pidettävä huolta, ettei opettaminen ja oppiminen keskity pelkästään laitteen teknisiin ominaisuuksiin, vaan muistetaan myös opettaa ja opetella matematiikkaa. (Hitt & Kieran, 2009)

Opetuksessa tiettyjen laskinten ominaisuuksia haastavien sisältöjen käsittely voi tulla tarkoituksenmukaiseksi, jolloin kohdatusta konfliktitilanteesta voidaan oppia, paitsi laskimen käyttöä, myös uutta matemaattista tietoa. Erityisesti matemaattisesti ekvivalenttien muotojen tunnistaminen on laskimen käytössä oleellinen taito (Ball, Pierce & Stacey, 2003), sillä jotkin laskimet automaattisesti sieventävät syötettyä yhtälöä. Jos opiskelija ei tunnista laskimen tarjoamaa muotoa ekvivalentiksi syöttämänsä muodon kanssa, on jo tässä ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa opiskelijalle ilmennyt ylimääräinen ongelma, joka aiheuttaa lisätyötä. Opiskelijoiden olisi hyvä myös oppia laskimen käyttöä siten, että jo näppäillessään laskimen toimintoa, he arvioivat miltä vastaus näyttää, suuruusluokaltaan ja muodoltaan. Tällöin virheellinen näppäilysekvenssi tai väärin syötetty arvo on odotusten vastainen ja huomataan. (Ball, Pierce & Stacey, 2003; Kivelä, 2012)

Monet opettajat odottavat diginatiiveiksi kutsuttuun sukupolveen kuuluvien opiskelijoiden opettelevan teknologisen käytön itsenäisesti, ilman ongelmia. (Monaghan, 2004) Näiden opettajien oppitunneilla ei välttämättä kiinnitetä juurikaan huomiota laskimen käytön opetteluun, vaan opettaja voi esimerkiksi ongelmia ratkaistessa kulkea luokassa auttamassa yksittäisiä opiskelijoita heidän kohtaamissaan ongelmissa, teknologian käytössä tai ongelman ratkaisuun liittyvän matemaattisen sisällössä. Opiskelijat pitävät usein laskimen käytön opettelua tärkeämpänä, kuin opettaja, jonka pääpainotus on tietenkin matemaattisen sisällön opettamisessa. (Pierce, Stacey ja Wander 2010) Tämä on yksi didaktisen sopimuksen osa, jonka selkeyttäminen opettajan ja opiskelijoiden välillä olisi hyödyllistä.

Laskinten opetuskäyttö

Kun symbolisia laskimia alettiin matematiikan opetuksessa käyttää, olivat optimistisimpien teknologian käyttäjien odotukset korkealla. Laskimen oletettiin vähentävän laskurutiineiden harjoitteluun käytettävää aikaa ja toiveissa oli, että vapautuva aika voitaisiin käyttää konseptuaalisen ymmärtämisen parantamiseen. (Thomas, Monaghan & Pierce, 2004; Thomas, 2001) Lisäksi laskimen ominaisuuksien, nopean ja tarkan symbolisen laskennan ja useiden, helposti vaihdeltavien esitystapojen odotettiin syventävän opiskelijoiden ymmärrystä matematiikasta. Laskimen odotettiin paikkaavan riittämätöntä opetusta, kuten liian luentomaista tai liiaksi proseduraaliseen laskurutiinien kehittämiseen keskittyää opetustyyliä. (Artigue 2002)

Symbolisen laskennan opetukseen integrointia vastustavat skeptikot kyseenalaistivat symbolisen laskennan tarpeen matematiikan opetuksessa. Skeptikot kyseenalaistivat onko opettajilla enää jäljellä mitään opetettavaa, kun laskin kykynee ratkaisemaan niin suuren osan aiemmin opetetuista rutiininomaisista tehtävistä. Matematiikasta ei jää jäljelle kuin nappulatekniikoiden opettelu, jos laskinta käytetään van yksinkertaisten perustehtävien ratkaisuun. (Kivelä, 2012) Toisaalta pohdittiin oppivatko opiskelijat ikinä ”tekemään matematiikkaa”, kun laskin laskee algoritmiset laskut heidän puolestaan. Pelättiin algebrallisten taitojen vähenemistä ja katoamista. (Arnold, 2004; Kivelä, 2012) Vastustajien kommentit kuulostavat Arnoldin (2004) mukaan samalta, kuin vuosia aikaisemmin graafisen laskimen opetuskäytön alkuvaiheissa, tai vielä aikaisemmin nelioperaattori- ja funktiolaskimen kohdalla.

Kun jatkuvan tutkimuksen tuloksena on huomattu, että symbolista laskentaa hyödyntävässä oppimisympäristössä voidaan saavuttaa syvempää konseptuaalista ymmärrystä paremmin opiskeluun asennoituneiden opiskelijoiden kanssa, eikä algebrallisten taitojen häviämistä havaittu, alkoivat symbolisen laskennan opetuskäytön vastustajatkin taipua. Jatkuvan tutkimuksen myötä opettajat oppivat symbolisesta laskennasta, ja sen hyödyntämisestä opetuksessa yhä enemmän, ja opetusmetodit kehittyvät. Opettajat voivat tämän kokemuksen perusteella tehdä valistuneen pedagogisen valinnan laskimen käytön asemasta teknisessä oppimisympäristössä. Esimerkiksi Pierce ja Stacey (2010) nostavat esiin opettaja Lucyn, joka on kokenut ja kehittynyt symbolisen laskennan käyttäjä. Lucy ei kuitenkaan opettaessaan salli symbolisen laskennan ohjelmalle kuin sivuroolin, koska se sopii hänen tyyliinsä opettaa. Opiskelijoista tulee symbolisen laskennan käytön myötä aktiivisempia osallistujia matematiikan oppitunneilla, eikä passiivisen sivustaseuraajan rooli enää matematiikan oppimisessa toimi. (Arnold, 2004)

Opetustilanteen haasteita

Tutkimuksen myötä on käynyt ilmi, ettei symbolisen laskennan teknologia ole automaattisesti helpottava tekijä matematiikan opetukseen. Artigue (2002) nostaa esiin instrumentaation vaikeuden yhtenä suurena haasteena opetuksessa: symbolinen laskin ei olekaan helppo työkalu, jonka voi liittää entiseen opetuksen malliin ja odottaa sen toimivan osana opetusta. Opiskelijat voivat jopa huomata laskimen käytön olevan vaikeampaa, kuin he olettivat, jos heillä on ongelmia esimerkiksi ekvivalenttien matemaattisten muotojen tunnistamisessa. (Ball, Pierce & Stacey, 2003) Tähän opettaja voisi jo ennakoivasti varautua ja opetuksessaan sekä selittää ekvivalenttien muotojen muodostumista ja merkitystä, että kysellä esitysten rakenteesta ja avainominaisuuksista.

Instrumentin syntyprosessi on hyvin yksilöllinen ja käyttäjäkohtainen. Opetellessaan matematiikkaa opiskelijat kehittävät ratkaisumallinsa itsenäisesti opetustilanteen aikana. Nämä ratkaisumallit, tai instrumentaalisen lähestymistavan skeemat, ovat jokaiselle opiskelijalle yksilöllisiä, ja niiden välillä voi olla suuriakin eroavaisuuksia. (Artigue 2002) Opettajan tavoitteena tulisi tietenkin olla yhtenäinen ratkaisumallin idea, se matemaattisesti tehokkain, joka johtaa oikeaan ratkaisuun. Tällöin opettajan on puututtava instrumentin syntyprosessiin intrumentaalisen orkestraation keinoin.

Trouche (2004) kehitti instrumentaalisen orkestraation käsitteen kuvatakseen miten opettaja voi ohjata ja edistää instrumentin syntyprosessia, niin yksilön kuin koko opetettavan ryhmän tasoilla. Drijvers et al. (2010) löysivät tutkimuksessaan teknologisia laitteita käyttävästä opetustilanteesta kuusi erilaista orkestraation muotoa. Nämä muodot he määrittelevät termein Tekninen demonstraatio, Näytön selittäminen, Näytön ja taulun yhdistäminen, Keskustelua näytöstä, Huomaa ja näytä, ja Sherpa-työskentely (myös Guin & Trouche 2002, Trouche 2005)

Tekninen demonstraatio tarkoittaa opettajan esittämää demonstraatiota laitteen toiminnasta ja tekniikoista laitteen käyttämiseen. Tässä didaktinen konfiguraatio vaatii laitteen lisäksi laitteen näytön heijastamisen esimerkiksi projektorilla valkokankaalle, koko opetettavan ryhmän nähtäville. Tätä orkestraatiota opettaja voi hyödyntää uuden laskimen käyttötekniikan, tilanne- tai tehtävätyypin esittelyyn. Materiaalina opettaja voi hyödyntää myös opiskelijan aiempaa työtä näyttääkseen mitä tehdä seuraavaksi.

Näytön selittäminen tarkoittaa koko luokalle kohdistettua selitystä siitä, mitä laskimen näytöllä, joka on opiskelijoiden nähtävillä, tapahtuu. Näytön selittäminen ei ole teknisen demonstraation tapaan puhtaan tekninen orkestraatio, vaan sisältää matemaattista sisältöä laskimen näytöllä esitetystä toiminnasta. Jälleen opettaja voi hyödyntää opiskelijoiden jo tehtyä työskentelyä ja avata keskustelua tehtyjen toimenpitepiden matemaattisesta merkityksestä.

Näytön ja taulun yhdistämisellä tarkoitetaan opettajan keinoa korostaa yhteyttä laskimessa tehtävien laskutoimenpiteiden ja taululle kirjattavan kynä ja paperi –ympäristön toimenpiteiden välillä. Tässäkin opiskelijoiden omasta työstä, esimerkiksi opiskelijoiden itselleen asettamasta ongelmasta, tehtävästä, voi olla hyödyllistä aloittaa, osoittaen miten tilanteessa kannattaa toimia. Tämä orkestraation malli on riippuvainen käytetystä laitteesta. Tämä on myös hyvin tärkeä osa opetusta, koska kynä ja paperi –toiminnan liittäminen laskimella suoritettaviin laskutoimenpiteisiin on osoitettu olevan opiskelijoille haasteellista. (Kieran & Drijvers 2006)

Keskutelua näytöstä tarkoittaa koko luokan keskustelua siitä, mitä laskinlaitteen näytöllä tapahtuu. Tavoitteena keskustelulla on yhtenäistää opiskelijoiden instrumentaalisia skeemoja.

Huomaa ja näytä –orkestraatiossa opiskelijan mielenkiintoiseksi ja oppimista hyödyntäväksi havaittu työskentely tuodaan esille oppitunnilla ja käytetään sitä tarkoituksenmukaisena keskustelun avaajana. Hyödyntämismallina voidaan pyytää opiskelijaa selittämään omaa työskentelyään ja kysellä muiden opiskelijoiden reaktioita ja palautetta näytetylle työskentelylle.

Sherpa-työskentely on orkestraatio, jossa valitaan sherpa-opiskelija työskentelemään kaikkien nähtävillä olevalle laskinlaitteelle. Opiskelija voi joko työskennellä omatoimisesti, tai opettajan ohjauksessa. Didaktinen konfiguraatio järjestetään niin, että sherpa-opiskelija on vastuussa laskinlaitteen käytöstä ja kaikki muut näkevät laskimen näytön esimerkiksi valkokankaalle heijastettuna. Hyödyntämismallein voidaan pyytää sherpa-opiskelijaa esittämään ja selittämään työskentelyään vaiheittain, ohjata sherpa-opiskelijan työskentelyä opettajan taholta, tai yhteistyönä koko luokan kanssa ehdotella ratkaisumalleja ja keskustellen rakentaa toimiva ratkaisustrategia.

Orkestraatiot jakautuvat selkeästi kahteen luokkaan: opettaja- ja opiskelijakeskeisiin. (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, Gravemeijer, 2010) Teknisessä demonstraatiossa, näytön selittämisessä ja näytön ja taulun yhdistämisessä opettaja dominoi keskustelua ja vuorovaikutusta. Opiskelijoiden osallistuminen on rajattua ja opettaja ohjaa toimintaa tarkasti. Näytöstä keskustelu, huomaa ja näytä, ja sherpatyöskentely ovat selkeämmin opiskelijakeskeisiä orkestraatioita. Opiskelijoilla on näitä orkestraatioita hyödyntäessä suurempi mahdollisuus reagoida ja saada omat ideansa esille. Vaikka opettaja ohjaakin orkestraatiota, on opiskelijoiden rooli suurempi kuin opettajakeskeisissä orkestraatioissa. Tärkeää on huomata, että orkestraatiot ovat osa orkestraatioiden sarjaa, jossa niillä kaikilla on oma roolinsa.

Orkestraatioita analysoidessa on selvää, että näytöstä keskusteleminen ja näytön selittäminen ovat opettajille tuttujen opetustapojen läheisiä sukulaisia. Aiemminkin taululle kirjoitetun esimerkin selittäminen ja siitä keskustelu opiskelijoiden kanssa on ollut saman kaltaista. Enemmän teknologisen laitteen käyttöön keskittyvät tekninen demonstraatio, sherpa-työskentely ja näytön ja taulun yhdistäminen. Huomaa ja näytä –orkestraatio seuraa mahdollisuudesta seurata opiskelijoiden työskentelyä, joka varsinkin verkoympäristöissä opettaessa voi olla helppoakin, riippuen käytetystä sovelluksesta. Opiskelijoiden toiminnan seuraamiseen voi kehittää keinoja myös normaalissa laskinympäristössä.

Orkestraatiot ovat siis erilaisia ja monimuotoisia, joiden soveltamiseen opettamisessa vaikuttaa niin teknologiset, kuin aikarajoitteetkin. Lisäksi Drijvers, et al. (2010) huomioi, ettei tuntisuunnitelmaan merkityt orkestraatiot aina olleet samoja, kuin ne, jotka oppitunteja seuratessa nähtiin. Hyvinkin, jopa ammattitutkijoiden ohjauksessa, rakennettu tuntisuunnitelma voi siis pedagogisten valintojen seurauksena muuttua oppitunnin aikana.

Pedagogisten valintojen vaikutuksia

Laskimen rooli matematiikan opetustilanteessa on suuresti riippuvainen opettajan ennakkoluuloista ja asenteesta teknologiaa kohtaan, opettajan käsityksestä matematiikan tiedeluonteesta ja matematiikan tärkeydestä opetettavana aineena, sekä koulutusinstituution asettamista vaatimuksista ja tavoitteista. Edellämainitut seikat ohjaavat laskimen käyttöä ja opettajan tekemiä pedagogisia valintoja laskimen opetuskäytössä. (Pierce & Ball, 2009; Kendal, Stacey & Pierce, 2005; Kendal & Stacey, 2001; Noss & Hoyles, 1996). Nämä opettajan tekemät valinnat, tiettyjen työkalujen, toiminta- tai esitystapojen tai ratkaisustrategioiden suosimiseksi vaikuttavat siihen, mitä ja miten opiskelijat oppivat. Nämä vaikutukset näkyvät esimerkiksi australialaisissa tutkimuksissa (Kendal & Stacey 2001, 2002; Kendal, Stacey & Pierce 2005) seurattujen opetusryhmien lopputesteissä, joissa samaa kurssisuunnitelmaa toteuttavien eri opettajien opetustyylien erot johtavat opiskelijoiden osaamisalueiden eroihin.

Kendal ja Stacey (2001) keskittyivät analyysin derivaattakurssia opettavien kolmen opettajan tekemiin pedagogisiin valintoihin kolmen oppituntiin vaikuttavan teeman osalta. Nämä teemat ovat opetuksen lähestymistapa, derivaatan eri esitysmuotojen painottaminen ja teknologian käyttö. Kendal ja Stacey halusivat tutkia miten opettajan tapa suosia edellämainittuja teemoja vaikuttavat opiskelijoiden oppimiseen. Kahden opettajan samantasoiset oppimistulokset tutkimuksen lopputestissä ovat, opettajien erilaisista opetustyyleistä johtuen, mielenkiintoinen ilmiö.

Opettajista kaksi pitivät samanaikaisesti samaa kurssia eri ryhmille ja siten suunnittelivat opetusta yhdessä. Tutkimuksen aikana huomattiin, että yhdessä luodusta suunnitelmasta huolimatta oppituntien aikana opettajan tekemät pedagogiset valinnat opetettavien asioiden tärkeydestä, tavasta opettaa ja opetettavan asian osien tärkeyden painotuksista, sekä symbolisen laskennan roolista opetuksessa muuttivat oppituntien sisältöä ja opiskelijoiden oppimistuloksia. Opettajien tekemät pedgogiset valinnat ovat seurausta siitä, miten opettajat ovat itse matemaattisen käsitteen, ja sen tärkeyden suuremmassa kuvassa ymmärtäneet. (Kendal & Stacey, 2001, myös Kendal & Stacey 2002 ja Pierce & Stacey, 2010)

Kendal ja Stacey käyttävät Kuhnin ja Ballin (1986) määrittelyä tutkimuksessaan opettajien opetustyylien luokitteluun. Tämä määritelmä on vielä 20 vuotta sen esittämisen jälkeen hyvä tapa pohtia matematiikan opettamista ja sen tavoitteita kokonaisuutena. Mallin sisältämät neljä opetustyyliä ovat:

- Oppijakeskeinen: Matematiikan opetustyyli, joka keskittyy oppijan henkilökohtaiseen matemaattisen tiedon rakentamiseen.
- Sisältökeskeinen, painottaen kosneptuaalista ymmärtämistä: Matematiikan opetustyyli, jota ohjaa sisältö, mutta painotus on konseptuaalisessa ymmärtämisessä.
- Sisältökeskeinen, painottaen proseduraalista toimintaa: Matematiikan opetustyyli joka painottaa opiskelijan suoriutumista tehtävistä ja proseduurien ja sääntöjen tuntemusta.

- Luokkakeskeinen: Matematiikan opetusta, jonka perusta on tiedossa tehokkaan luokkaympäristön toiminnasta.

Nämä neljä opetustyyliä ovat osittain päällekkäisiä, mutta karkeana jakona, myöhemmin myös suomalaista lukio-opetusta analysoidessa, teoria toimii.

Opettajista toinen, opettaja A, piti tärkeänä konseptuaalista ymmärtämistä ja opiskelijoiden kykyä rakentaa tarkoitus derivaatalle. Opettajan tyyli opettaa on selkeästi sisältökeskeinen, joka painottaa konseptuaalista ymmärtämistä. Tämän opettajan opiskelijat tulkitsivat derivaattoja kokeella testatessa vertailuryhmää paremmin. Opettaja B puolestaan suosi laskurutiinien proseduraalista suorittamista, eli hänen tyylinsä opettaa on myös sisältökeskeinen, mutta painotus on proseduraalisessa suorittamisessa. Opetustyylin seurauksena hänen opiskelijansa käyttivät symbolista laskentaa rutiinitason ongelmien ratkaisemiseen toista ryhmää tehokkaammin. Lopputestauksen pistemäärien keskiarvot olivat kuitenkin hyvin lähellä toisiaan, 8,3 ja 8,5. Tässä on huomion arvoista, että tutkijoiden kehittämä koe ryhmien testaamiseen sisälsi sekä rutiininomaista proseduraalista suorittamista, että konseptuaalista ymmärrystä vaativia tehtäviä. Erot kokeessa ryhmien välillä olivat siinä, mitä opiskelijat tiesivät ja osasivat: opettaja A:n ryhmä oli huomattavasti enemmän konseptuaalisesti suuntautunut kuin opettaja B:n ryhmä. (Kendal & Stacey, 2001) Vastaavia tuloksia on saatu useassa muussakin tutkimuksessa. (Pierce & Ball, 2009; Kendal, Stacey & Pierce, 2005; Kendal & Stacey, 2001) Opettajan vahvuusalueista tulee siis myös opiskelijoiden vahvuusalueita.

Opetuksen tavoitteista ja opetussuunnitelmasta

Suomalaisen lukion opetussuunnitelmassa matematiikan tehtäväksi määritetään ”opiskelijan tutustuttaminen matemaattisen ajattelun malleihin, sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.” Opetussuunnitelmassa ohjataan järjestämään opetustilanteen niin, että se rohkaisee opiskelijaa tekemään havaintojensa puolesta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä, sekä perustelemaan niitä. Erityisesti opetussuunnitelmassa korostetaan matemaattisten käsitteiden merkitysten ymmärtämistä ja laajempien kokonaisuuksien hahmottamista.

Erityisesti pitkän oppimäärän, jota symbolisten laskinten ominaisuudet suurimmaksi osaksi koskevat, opetuksen tavoitteiksi opetushallitus asettaa seuraavaa:

”opiskelija

• tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa

• rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin

• ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä

• oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena

• kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan

• harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.

• harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita

• osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.” (Opetushallitus, 2003)

Tavoitteiden taustalla vaikuttavina tärkeinä teemoina nousee esiin konseptuaalisen tietorakenteen tärkeys, matematiikan tiedeluonteen tuntemus, matemaattisen kielen opettelu ja ongelmanratkaisutaidot. Näistä kaikki neljä ovat teemoja, joiden omaksumista symbolisen laskennan on ennustettu ja osoitettu kehittävän matematiikan opetuksessa.

Laskinten käytön kehittyessä voi tulla tarpeelliseksi muuttaa opetussuunnitelmaa, ainakin sisältöjen ja painotusten osalta. Artiguen (2002) ja Kivelän (2012) mukaan teknologisen laitteen on jossain määrin oltava mukana opetettavan matemaattisen sisällön ja opetustilanteen normien määrittämisessä. Tulevaisuudessa yhtälöiden sieventäminen tai tekijöihin jako voi olla vain historiallisesti kiinnostava matemaattinen toimenpide, jota ei vaivauduta enää opettelemaan kynä ja paperi –ympäristössä. (Arnold, 2004) Ajatus voi olla outo niille, jotka ovat opetelleet nämä toimenpiteet kynän ja paperin kanssa, kun laskin ei vielä niitä pystynyt suorittamaan. Tällöin matematiikan opetussuunnitelman sisällöt joutuvat muutospaineen alle.

Yhteenveto

Tähän mennessä on selvää, ettei symbolinen laskin ole yksinkertaisesti vain korvike aiemmin käytetylle graafiselle laskimelle, vaan se vaatii sekä opettajalta, että opiskelijoilta uudenlaista opettelua ja keskittymistä. Ranskalaiset tutkimukset ovat keskittyneet tutkimuksissa käytetyillä teoriakehyksillään samaan asiaan kahdelta eri suunnalta. Instrumentaalinen lähestymistapa on keskittynyt teknologiapainotteisesti laskimen rooliin opetuksessa, opiskelijan ja laskimen välisen suhteen kehittymiseen ja laskimen käytön opetteluun. Lähestymistavan kehyksessä opettajan rooli on instrumentaalinen orkestraatio, opiskelijan ja laskimen tutustumisen ohjaus. On selvää, ettei opettaja voi instrumentin syntyä ohjata, ellei hän ole instrumentin käytön suhteen edistyneemmällä tasolla. Näin ollen opettajan on ensin itse tutustuttava symboliseen laskimeen huolellisesti, jotta voi sitten tukea opiskelijan instrumentaalisen syntyprosessin aikana syntyvien instrumentoitujen toimintaskeemojen sekä antropolgisen lähestymistavan mukaisten tehtävätyyppiä vastaavien tekniikoiden ja teorian kehitystä oikeaan suuntaan.

Osa kuudesta aiemmin esitetystä instrumentaalisesta orkestraatiosta on opettajille tuttuja opetustyylejä, vain teknologinen väline, laskin, vaihtuu. Osa sen sijaan on hyviä ohjeita opetuksen kehittämiseen ja monipuolistamiseen, opiskelijakeskeisempään suuntaan. Instrumentaalisia orkestraatioita opettajat tulevat australialaisen tutkimuksen tulosten perusteella käyttämään omaan opetustyyliinsä ja tiedekäsitykseensä, sekä instituutionaalisiin vaatimuksiin mielestään sopivalla tavalla. Tutkimusten mukaan näillä erilaisiksi muodostuvilla opetustavoilla on kuitenkin mahdollista saavuttaa samantasoisia oppimistuloksia.

Symbolisen laskimen tehokas opetuskäyttö on mahdollista vasta, kun opettaja tuntee laskimen funktionaaliset toiminnot, niistä seuraavat pedagogiset mahdollisuudet ja on sovittanut laskimen omaan opetustyyliinsä ja didaktiseen konfiguraatioonsa. Kun tämä prosessi on opettajalla suoritettuna, on opettajan tehtävä pedagogisia valintoja siitä, mitä haluaa opetuksessaan painottaa, sillä tällä painotuksella on merkittävä vaikutus siihen mitä, ja miten opiskelijat oppivat. (Kendal & Stacey, 2005) On helppo nähdä, että tässä tutkielmassa esitetyt teoriat olisivat hyödyllisiä oman opetuksen reflektoinnissa. Teoriakehykset tarjoavat, paitsi käsitteellisen ympäristön opettaessa koetuille tilanteille, myös mahdollisiin ongelmatilanteisiin ratkaisuja. Instrumentaalisen orkestraation mainitut kuusi mallia sisältävät joitain mielenkiintoisia kokeiltavia opetusmalleja, parhaana esimerkkinä sherpa-opiskelijan työskentely.

Tutkielman alussa esitetty tutkimuskysymys on laajempi ja monitahoisempi kuin miltä se aluksi kuulostaa. Tutkielmassa on kuitenkin esitetty teoriakehyksiä ja tutkimuksia, joiden avulla kysymykseen voi yrittää vastata. Nykyisessä suomalaisessa lukiossa opetus, ainakin opiskelijan ja vielä opettajaopiskelijankin näkökulmasta on sisältöpainotteista, jossa keskittyminen on proseduraalisessa suorittamisessa, koska nykymallin mukaisen ylioppilaskokeen voi helposti nähdä testaavan enemmän proseduraalista suorittamista, kuin konseptuaalista osaamista. Ylioppilaskoe ohjaa näin opetusta, vaikkei koetta varten tulisikaan opettaa. Opettajan tulisi muuttaa proseduraalisten taitojen ja konseptuaalisen tiedon tasapainotusta konseptuaalisen tiedon suuntaan, luottaen, että konseptuaalisen tiedon pohjalta oppilaan ongelmanratkaisutaidot, joita opetustilanteissa on harjoitettu, riittävät proseduraalistenkin ongelmien ratkaisemiseen. Tutkielmassa on esitetty australialaisen tutkimuksen tulokset, joiden mukaan myös erilaisilla opetustyyleillä ja metodeilla voidaan saavuttaa samantasoisia oppimistuloksia. Tämä on tärkeä huomio suomalaisen koulujärjestelmän kannalta, jossa opettajalla on pedagoginen vapaus järjestää opetuksensa haluamallaan tavalla. Näin ollen jokainen opettaja voi opettaa itselleen sopivalla tyylillä. Ennen kaikkea matematiikan opetuksessa opettajan on tunnettava oppiaineen ja didaktiseen konfiguraatioonsa kuuluvien instrumenttien lisäksi itsensä: vain reflektoimalla kaikkien näiden osasten sopivuutta yhteen, on opettajan ammatillinen kehitys mahdollista.

Kokonaisuutena suomalaisessa lukiossa opettajan tulee lukiolain mukaan opettaa opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti. Tässä opetuksessa laskimen käytön edistyneestä osaamisesta on huomattavaa hyötyä, sen tarjotessa mahdollisuuden niin opiskelijoiden ja laskimen tutustumisprosessin ohjaamiseen, kuin laskimen käyttöön tarvittavien instrumentaalisten tekniikoiden ja skeemojen rakentumisen tukemiseen. Kun opettaja tuntee opetuksessaan käytetyn välineen hyvin, pystyy hän tekemään järkeviä, perusteltuja pedagogisia ratkaisuja, ja reflektoimaan niiden vaikutuksia opiskelijoiden oppimistuloksiin. Tällöin opettaja on valmis siirtymään laskimen funktionaalisten ominaisuuksien hyödyntämisestä laskimen pedagogisen potentiaalin hyödyntämiseen, ja silloin laskimesta on mahdollista saada irti huomattavasti enemmän, kuin pelkkänä opiskelijoiden apuvälineenä. Laskimesta, laskuvälineestä, täytyy siis tulla opetusväline, pedagoginen työkalu, joka omalta osaltaan edistää opiskelijoiden oppimista.

Lähteet

Arnold, S. (2004). Classroom Computer Algebra: Some Issues and Approaches. *Australian Mathematics Teacher*, 60(2), 17-21.

Artique, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 7 (3), 245-274.

Ball, L., Pierce, R., & Stacey, K. (2003). Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Drijvers, P. & Doorman, M. & Boon, P. & Reed, H. & Gravemeijer, K. (2010) The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 75 (2), 213-234.

Drijvers, P. & Gravemeijer K. (2005). Computer Algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. Teoksessa Guin D. & Ruthven K. & Trouche L. (Ed.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* (s. 163-198) Springer US.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task–technique–theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(2), 121-152.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second international handbook of mathematics education*, (s. 323-349). Springer Netherlands.

Kendal, M., Stacey, K., & Pierce, R. (2005). The influence of a computer algebra environment on teachers' practice. Teoksessa Guin D. & Ruthven K. & Trouche L. (Ed.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (s. 83-112). Springer US.

Kendal, M., & Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 196-203.

Kendal, M., Stacey, K., (2001). The Impact of Teacher Privileging on Learning Differentiation with Technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6 (2), 143-165.

Kieran, C. (2008). Conceptualizing the learning of algebraic technique: Role of tasks and technology. *11th International congress on mathematical education, selected lectures.* Monterrey, Mexico: ICME-11 Editorial Committee.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 205-263.

Kivelä, S. (2012). Symbolinen laskenta ja koulumatematiikan tulevaisuus. *Dimensio*, 4, 52-55.

Kuhn, T. and Ball, D.: 1986, Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and dispositions, East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Kutzler, B. (2000). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7 (1), 5-23.

Lagrange, J. B. (2007). Didactic time, epistemic gain and consistent tool: taking care of teachers' needs for classroom use of CAS. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(2).

Lagrange, J. B. (1999) Learning pre-calculus with complex calculators: Mediation and instrumental genesis. Teoksessa Zaslavsky, O. (Ed.) *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (23rd, Haifa, Israel, July 25-30, 1999).* Volume 3, 193-200.

Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 327-357.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers. Springer.

Opetushallinto, 2003. Lukion opetussuunnitelman perusteet, Saatavilla opetushallinnon verkkosivuilta: (Ladattu 30.4.2014) http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Peschek, W. & Schneider, E. (2002). CAS in general mathematics education. *ZDM* 34 (5) 189

Pierce, R., Stacey, K., & Wander, R. (2010). Examining the didactic contract when handheld technology is permitted in the mathematics classroom. *ZDM*, *42*(7), 683-695.

Pierce, R. & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(1), 1-20.

Pierce, R. & Stacey, K. (2008) Using pedagogical maps to show the opportunities afforded by CAS for improving the teaching of mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal,* 22 (1), 6-12.

Sárvári, C., (2005) CAS integration into learning environment. *ZDM*, 37 (5) 418-423

Stacey, K. (2003). Using computer algebra systems in secondary school mathematics: Issues of curriculum, assessment and teaching. *Proceedings of the 8th Asian technology conference in mathematics*, 40-54.

Thomas, M. O., Monaghan, J. & Pierce, R. (2004). Computer algebra systems and algebra: Curriculum, assessment, teaching, and learning. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study*, 153-186. Springer Netherlands.

Thomas, M. O., & Hong, Y. Y. (2004). Integrating CAS calculators into mathematics learning: partnership issues. *Proceedings of the 28th Conference of the International* 4, 297-304.

Thomas, M. O. (2001). Building a conceptual algebra curriculum: The role of technological tools. *International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) The Future of the Teaching and Learning of Algebra Proceedings* (582-589).

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. Teoksessa Guin D. & Ruthven K. & Trouche L. (Ed.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (s. 197-230). Springer US.

Trouche, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.

Ylioppilastutkintolautakunta, (2011). Matematiikan kokeen määräykset. Saatavilla http://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maarayksetmatematiikka.pdf