SIIRTYMÄ ARITMETIIKASTA ALGEBRAAN – KIRJAINMUUTTUJAN KÄYTTÖÖNOTTOON LIITTYVIÄ OPPIMISVAIKEUKSIA

Henna Heikkinen

Oulun yliopisto

Matemaattisten tieteiden laitos

Pro gradu- tutkielma

Tammikuu 2014

Sisällysluettelo

Johdanto

Siirtymässä aritmetiikasta algebraan on havaittu monia vaikeuksia, ja niihin liittyvää tutkimusta on tehty paljon. Tässä Pro gradu - tutkielmassa perehdytään yleisimpiin ongelmiin ja oppimisvaikeuksiin, joita siirtymään on todettu liittyvän. Lisäksi käsitellään mahdollisia syitä näihin ongelmiin sekä etsitään didaktista näkökulmaa siihen, miten näiltä ongelmilta voitaisiin välttyä. Tutkielman tarkoituksena ei ole tarkastella yksittäisiä tutkimuksia tai tutkimusmenetelmiä, vaan hakea vertailevaa näkökulmaa aiheeseen liittyvien artikkeleiden välillä.

Eräät oppilaiden yleisimmistä virheistä ja oppimisvaikeuksista nousevat esiin suuressa osassa käyttämistäni tutkimuksista. Tämä sulkee pois mahdollisuuden, että vaikeudet johtuisivat kokonaan tietystä opetussuunnitelmasta tai -menetelmästä. Yksi olennaisimmista kysymyksistä tämän tutkielman kannalta onkin se, kuuluvatko oppimisvaikeudet väistämättömästi siirtymävaiheeseen vai olisiko niiltä mahdollista välttyä matematiikan pedagogiikkaa kehittämällä.

1. Aritmetiikka ja algebra

1.1. Mitä aritmetiikka ja algebra ovat?

Aritmetiikka on suoraviivaisia laskutoimituksia ja operointia tunnetuilla luvuilla, ja siinä ongelmanratkaisu johtaa yleensä aina yksikäsitteiseen numeeriseen ratkaisuun (Van Amerom, 2003; Malisani & Spagnolo, 2009). Tässä tutkielmassa aritmetiikasta puhuttaessa tarkoitetaan käytännössä alakoulun matematiikkaa, joka ei sisällä vielä lainkaan kirjainmuuttujan käsitettä, vaan ainoastaan numeerisia tehtäviä ja numeroilla operointia.

Verrattuna koulussa opetettavaan aritmetiikkaan, algebrassa operoidaan oppilaille uudella, abstraktilla tasolla (Herscovics & Linchevski, 1994). Algebran oppiminen vaatii kykyä päätellä muuttujien ominaisuuksia ja kykyä erottaa yksittäiset tilanteet yleisistä tapauksista. Algebran lukuisista sovelluksista johtuen sille ei ole olemassa yksikäsitteistä määrittelyä. Mitä algebra on ja mitä kaikkea se pitää sisällään, riippuu vahvasti yhteydestä jossa sitä käytetään. Van Amerom (2003) erottelee artikkelissaan neljä eri näkökulmaa algebraan: algebra aritmetiikan yleistyksenä, algebra ongelmanratkaisun välineenä, algebra matemaattisten yhteyksien tutkimuksena ja algebra matemaattisten rakenteiden tutkimuksena. Vaikka tässä tutkielmassa emme tarkastelekaan algebraa kaikista näistä näkökulmista, on silti tärkeää huomata, että algebran käsitteleminen pelkästään aritmetiikan yleistyksenä on vähättelyä (Malisani & Spagnolo, 2009). Tämän tutkielman tarkoitus on keskittyä nimenomaan algebran oppimisen alkuvaiheeseen liittyviin vaikeuksiin, joten algebrasta puhuttaessa tässä tutkielmassa keskitytään lähinnä yläkoulun opetussuunnitelmaan sisältyviin näkökulmiin eli aritmetiikan yleistykseen sekä yhtälön- ja ongelmanratkaisuun algebran keinoin.

Filloy ja Rojano (1984, 1989) ovat rajanneet aritmetiikan ja algebran toisistaan ensimmäisen asteen yhtälöillä, joissa tuntematon esiintyy yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla, sillä suurin osa oppilaista ei kyennyt ratkaisemaan tällaista yhtälöä ilman algebran opetusta (Linchevski & Livneh, 1999). Linchevski ja Hescovics (1996) havaitsivat, että oppilaat kykenevät ratkaisemaan ensimmäisen asteen yhtälöitä, joissa muuttujaa esiintyy vain yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella, käyttämällä käänteisoperaatioita vastakkaisessa järjestyksessä. Useissa tutkimuksissa käy ilmi, että oppilaat kykenevät algebralliseen ajatteluun ilman kirjaimia ennen kuin heille on opetettu algebran symboliikkaa (Linchevski, 1995; Van Amerom, 2003; Hewitt, 2012). Algebran sanotaankin olevan tapa ajatella, ei pelkästään kirjainten ja symbolien käyttöä (Malisani & Spagnolo, 2009).

Zazkis & Liljedahl (2002) pohtivat artikkelinsa johtopäätöksissä sitä, miten algebrallisen ajattelun läsnäolo voidaan havaita ja mitkä seikat osoittavat sen esiintymisen. He esittävät, että oppilas voi kyetä algebralliseen ajatteluun, vaikka ei kykenisikään ilmaisemaan sitä algebrallisin symbolein. Toisaalta myöskään algebrallisten symbolien käyttö itsessään ei ole merkki algebrallisesta ajattelusta (Zazkis & Liljedahl, 2002). Warren (2003) määrittelee algebrallisen ajattelun prosessiksi, johon kuuluu ongelman numeeristen yhteyksien ja rajoituksien huomioiminen, ongelman ”kääntäminen” puhutulle kielelle ainakin ajatuksen tasolla sekä loppujen lopuksi opetuksen myötä taito esittää ongelma algebran symbolien avulla. Oppilaat voivat tämän mukaan kuitenkin siis käyttää algebrallista ajattelua myös puhtaasti aritmeettisissa ongelmissa. Selvyyden vuoksi tässä tutkielmassa tehtävistä puhuttaessa aritmetiikan ja algebran raja vedetään kirjainmuuttujan käyttöönottoon. Aritmetiikkaan sisältyvät siis ainoastaan puhtaasti numeeriset tehtävät ja kirjainmuuttujia sisältävät lausekkeet, yhtälöt ja termit luetaan kuuluvaksi algebran piiriin.

1.2. Siirtymä aritmetiikasta algebraan

Aritmetiikan ja algebran välisen siirtymän haasteellisuus on havaittu jo vuosikymmeniä sitten, ja algebran aloittamiseen liittyviä vaikeuksia on tutkittu 1980-luvun alkupuolelta lähtien (Malisani & Spagnolo, 2009). Koska tutkimusta on tehty paljon, on saatuja tuloksia myös hyödynnetty matematiikan opetuksessa. Toisaalta tuoreita tutkimuksia aiheesta ilmestyy jatkuvasti, joten ongelma on selvästi edelleen olemassa. Tässä tutkielmassa perehdytään siirtymässä aritmetiikasta algebraan havaittuihin yleisimpiin vaikeuksiin ja esteisiin, joita oppilaat kohtaavat algebran opetuksen alussa. Oleellista näiden ongelmien tunnistamisessa on luonnollisesti tutkimus siitä, mistä vaikeudet mahdollisesti johtuvat ja miten ne kyettäisiin huomioimaan matematiikan opetuksessa. Aiheesta tehdyt tutkimukset paljastavat oppimisvaikeuksien yleisyyden. Tämä herättävää kysymyksen siitä, kuuluvatko oppimisvaikeudet väistämättömästi algebran opetuksen aloitukseen esimerkiksi oppilaiden kognitiivisen kehityksen vuoksi vai olisivatko ne vältettävissä matematiikan pedagogiikkaa ja opetusmenetelmiä kehittämällä?

Aritmetiikan ja algebran lausekkeiden ja muiden ilmaisujen rakenteellinen yhtäläisyys on selvää, ja perinteisesti tätä yhteyttä käytetäänkin lähtökohtana algebran opetuksen aloituksessa. Kuitenkin johtuen algebran moniulotteisesta määrittelystä, myöskään sen opetukseen ei ole yhtä yleisesti hyväksyttyä tapaa (Van Amerom, 2003). Samankaltaisten rakenteiden käyttö ensin tutussa aritmetiikan ympäristössä ja sen jälkeen algebran yhteydessä voi auttaa oppilaita siirtymässä, mutta tämäkään tapa ei ole ongelmaton. Tällöin oppilaiden onnistuminen algebrassa riippuu paljolti heidän aiemmasta kokemuksestaan aritmetiikan parissa (Warren, 2003). Jotta aritmetiikan ja algebran rakenteellista yhtäläisyyttä voitaisiin hyödyntää siirtymässä, tulisi oppilaiden käsitys aritmetiikan rakenteista olla hyvin laaja ja joustava. Lisäksi siirtymä algebraan tapahtuu suhteellisen lyhyen ajan sisällä verrattuna aikaan, joka on käytetty aritmetiikan opiskeluun (Warren, 2003), joten aritmetiikan yhteydessä opittujen mahdollisten väärinkäsitysten ei voida olettaa katoavan algebraan siirryttäessä.

Joidenkin tutkijoiden (Booth, 1988; Kieran 1988, 1992) mukaan oppilaiden ongelmat algebran rakenteiden kanssa pohjautuvat ongelmiin, jotka ovat syntyneet jo aritmetiikan oppimisen yhteydessä. Rakenteiden yhtäläisyyden ja yhtäläisyyttä hyödyntävän opetusmenetelmän vuoksi vaikeudet periytyvät aritmetiikasta algebraan. Linchevski ja Livneh (1999) tutkivat tätä väitettä testaamalla, löytyykö algebraan liittyviä yleisimpiä väärinkäsityksiä puhtaasti numeeristen tehtävien yhteydessä oppilailta, jotka eivät ole vielä aloittaneet algebran opiskelua. Artikkelissaan he toteavat, että algebran yhteydessä havaittuja yleisimpiä virheitä ja hankaluuksia esiintyi myös numeerisissa tehtävissä, mikä ainakin osittain todistaa ongelmien periytyvän aritmetiikasta. Toisaalta joidenkin tutkijoiden (Matz, 1980; Lins, 1990) mielestä vaikeudet algebran parissa eivät välttämättä periydy aritmetiikan osaamisesta, vaan ongelma voi olla siirtymävaiheessa.

Banerjee ja Subramaniam (2011) esittelevät artikkelissaan tutkimuksensa opetusmenetelmästä, joka korostaa aritmetiikan ja algebran rakenteellista yhtäläisyyttä. Opetusmenetelmän tarkoitus on tukea oppilaita siirtymävaiheessa ja algebran aloituksessa. He mainitsevat algebran aloitukseen liittyvistä vaikeuksista muun muassa oppilaiden kyvyttömyyden ymmärtää kirjaimia ja symboleita sekä symbolisten lausekkeiden ja yhtälöiden manipulointia. He esittävät näiden ongelmien johtuvan pitkälti lausekkeiden manipuloinnin heikosta ymmärryksestä aritmetiikan yhteydessä. Heidän opetusmenetelmänsä tavoitteena on tehdä nämä symboliset muunnokset merkityksellisiksi oppilaille sekä aritmetiikan että algebran yhteydessä, ja syventää näin oppilaiden ymmärrystä manipulaatioiden ulkoa opettelun sijaan. He korostavat aritmetiikan ja algebran välille luodun yhteyden merkitystä sen sijaan, että osa-alueita käsiteltäisiin toisistaan erillisinä.

Myös Kaput (1999) puoltaa voimakkaasti algebralliseen ajatteluun johdattelemisen ottamista osaksi koko matematiikan opetussuunnitelmaa, aina alakoulusta lähtien. Hän korostaa ymmärtämisen tärkeyttä algebran oppimisessa ja esittää artikkelissaan, ettei perinteinen algebran opetus johda ymmärrykseen. Hän osoittaa artikkelissaan usein esimerkein, miten jo alakouluikäisiä oppilaita voidaan johdatella algebralliseen ajatteluun antaen heille ongelmia, jotka on yleisesti ajateltu olevan liian vaikeita heidän ymmärrettäväkseen. Hän huomauttaa, että näissä esimerkeissä ei esiinny algebraa siinä muodossa kuin se yleisesti käsitetään eli algebran symboleita ja niiden manipulointia. Hänen mukaansa algebra on paljon muutakin ja sen pitäisi näkyä myös koulualgebrassa. Kaput (1999) puhuu artikkelissaan nykyisen algebran opetuksen ongelmista voimakkaaseen sävyyn, mutta viittaa muiden tutkijoiden näkemyksiin aiheesta hyvin vähän. Hänen oma näkemyksensä näyttäytyy artikkelissa totuudenomaisena ja teksti on melko arvottavaa, joten kyseisen lähteen luotettavuus on mahdollisesti syytä kyseenalaistaa.

2. Yleisimmin havaitut vaikeudet siirtymässä aritmetiikasta algebraan

2.1. Kirjainmuuttuja

Siirryttäessä aritmetiikasta algebran opetukseen suurin näkyvä muutos oppilaille on kirjainmuuttujan käyttöönotto (mm. Booth, 1988). Muuttujan käsite ja sen ymmärtäminen onkin yksi yleisimmistä vaikeuksista siirtymässä, koska sillä on eri merkityksiä eri tilanteissa. Muuttujan käsitettä voidaan käyttää tilanteesta riippuen muun muassa numeron yleistyksenä, tuntemattomana tai muuttujana funktionaalisessa yhteydessä. Ensimmäisellä tarkoitetaan määrittelemätöntä lukua, jota käytetään yleistyksissä ja yleisten metodien ilmaisuissa, kuten kaavoissa. Toinen merkitys viittaa tiettyyn, toistaiseksi tuntemattomaan lukuun, joka voidaan mahdollisesti ratkaista. Kolmas merkitys on oma suomennokseni Malisanin ja Spagnolon (2009) termistä *variable in a functional relation*, jonka he määrittelevät siten, että kirjain voi kuvata täsmentämättömien lukujen arvojoukkoa, vaikka sitä määrittelevät ehdot eivät olisikaan eksplisiittisesti määritelty. (Malisani & Spagnolo, 2009)

Oppilaille tuottaa vaikeuksia se, että samaa symbolia voidaan käyttää kaikissa näissä merkityksissä ja toisaalta samassa merkityksessä voidaan käyttää useita eri symboleja (Malisani & Spagnolo, 2009). Bardini, Radford ja Sabena (2005) näyttivät tutkimuksessaan, että suurin osa oppilaista tulkitsee muuttujan toistaiseksi määrittelemättömäksi luvuksi, joka voidaan ratkaista. Heidän mukaansa näyttää siltä, että tuntemattoman, ratkaistavissa olevan luvun käsite on oppilaille helpompi ymmärtää, kuin yleistetty numero tai muuttuja, joka voi saada useita eri arvoja. Tämä voidaan yhdistää aritmetiikan opetukseen, jossa oppilaat usein ovat tottuneet löytämään tehtäviin yksikäsitteisen ratkaisun (mm. Booth, 1988). Sen lisäksi, että oppilailla on taipumus käsittää kirjainmuuttuja tiettynä tuntemattomana lukuna, heillä esiintyy usein myös väärinkäsitys, että kahdella eri kirjainmuuttujalla ei voi olla samaa numeerista arvoa (Booth, 1988).

Malisani ja Spagnolo (2009) havaitsivat tutkimuksessaan, että oppilaiden tulkinta kirjainmuuttujasta riippui jossain määrin myös tehtäväkontekstista. Hekin totesivat oppilaiden käyttävän useimmiten tuntemattoman käsitettä etsien yksikäsitteistä ratkaisua, mutta esimerkiksi analyyttisen geometrian yhteydessä oppilaat kykenivät visualisoinnin avulla mieltämään kirjainmuuttujan muuttujaksi, joka voi saada useita ratkaisuja. Myös Booth (1988) mainitsee esimerkin $x = y$, joka ei useiden hänen tutkimukseensa osallistuneiden 15-vuotiaiden mukaan voinut pitää paikkaansa algebran yhteydessä, sillä kahdella eri muuttujalla ei voi olla samaa numeerista arvoa. Analyyttisen geometrian yhteydessä oppilaat kuitenkin hyväksyivät sen suoran yhtälönä selityksellä ”this is graphs, not algebra!” (Booth, 1988, s. 304). Tämä erään oppilaan selitys kertoo paljon myös hänen käsityksestään matematiikasta laajana kokonaisuutena. Malisani & Spagnolo (2009) väittävät, että myöskään monilla matematiikan opettajilla ei ole selkeää käsitystä tuntemattoman ja muuttujan käsitteiden erosta. Malisani & Spagnolo (2009) selittävät tätä sillä, että koska molemmat käsitteet edustavat tuntemattomia lukuja ja niitä voidaan manipuloida samalla tavalla symbolisella tasolla, pystyvät opettajat käsittelemään muuttujia tekemättä käsitteellistä eroa näiden kahden merkityksen välille.

Booth (1988) esittää artikkelissaan kirjainmuuttujaan liittyvillä vaikeuksilla olevan yhteys myös aritmetiikkaan, jossa kirjaimia esiintyy lähinnä vain yksiköitä merkittäessä. Tällöin kirjaimella ei ole numeerista arvoa, ja siirryttäessä algebran kirjainmuuttujiin oppilaat voivat yhdistää niihin aritmetiikassa saamansa käsityksen kirjainten käytöstä päätyen väärinkäsityksiin. Myös jotkin ymmärtämistä helpottaviksi suunnitellut opetusmenetelmät voivat vahvistaa tällaisia taipumuksia: ”Hedelmäsalaatti”- menetelmä (mm. Tirosh, Even & Robinson, 1998), jonka tarkoituksena on auttaa oppilaita ymmärtämään eri kirjainmuuttujia sisältävien termien yhdistelyä koskevia sääntöjä, voi aiheuttaa väärinkäsityksiä. Tässä opetusmenetelmässä ajatellaan esimerkiksi muuttujan a merkitsevän appelsiinien lukumäärää ja muuttujan b banaanien lukumäärää. Tällöin lauseketta $3a + 2b$ ei voida sieventää esimerkiksi muotoon $5ab$ (tästä oppilaiden taipumuksesta myöhemmin kappaleessa 2.5.), koska appelsiinit ja banaanit ovat eri asioita, eikä niiden lukumääriä voida näin ollen yhdistää. Vaikka opetusmenetelmässä selitettäisiin muuttujakirjainten merkitsevän nimenomaan hedelmien lukumäärää, on havaittu, että useat oppilaat ymmärtävät niiden merkitsevän itse hedelmiä. Tällöin oppilaat tulkitsevat lausekkeen $3a + 2b$ ”kolme appelsiinia plus kaksi banaania”. Kirjainmuuttujat siis menettävät numeerisen merkityksensä ja symboloivat oppilaille jotain esinettä tai asiaa. Tällaisten väärinkäsitysten mahdollisen edistämisen lisäksi kyseinen opetusmenetelmä on kyseenalainen myös siihen tarkoitukseen johon se on luotu, sillä on havaittu, että oppilaat käyttävät sitä myös edellä mainitun termin $5ab$ selittämiseksi: ”kolme appelsiinia ja kaksi banaania ovat yhteensä 5 appelsiinia ja banaania”. (Booth, 1988)

2.2. Matematiikan symbolinen kieli

Kirjainmuuttujan lisäksi myös muu symbolinen kieli tuottaa oppilaille haasteita siirryttäessä algebraan (Malisani & Spagnolo, 2009; Hewitt, 2012). Van Amerom (2003) sai tutkimuksessaan selville, että 6- ja 7-luokkalaiset kykenivät ratkaisemaan yhtälöitä eli ajattelemaan algebrallisesti ainakin jollain tasolla, mutta tehtävien muodollinen symbolisointi osoittautui ongelmaksi. Hewitt (2012) korostaa artikkelissaan, että opetettaessa algebran symboliikkaa oppilaille annetaan valmiina jonkun toisen keksimiä symboleja, joita käytetään johdonmukaisuuden ja käytännöllisyyden vuoksi. Niiden käytössä on kyse jonkun valinnasta, ei siitä, että ne olisivat absoluuttisesti oikeita tai vääriä merkintöjä. Hän painottaa, että muodollisten algebrallisten merkintöjen oppiminen vaatii ennemmin niiden hyväksymistä ja omaksumista kuin yritystä ymmärtää, miksi juuri kyseisiä merkintöjä käytetään. Hänen mukaansa tietyt merkintätavat täytyy vain opettaa, ei olettaa oppilaiden keksivän tai kykenevän päättelemään niitä.

Toisaalta Malisani ja Spagnolo (2009) havaitsivat oppilaiden symbolisen kielen rakentumisen olevan hyvin hidasta, jonka vuoksi luonnollisen kielen vaiheittainen poisjättö ja algebran symboleihin siirtyminen nimien ja lyhenteiden kautta tukee tätä prosessia parhaiten. Myös Van Amerom (2003) käsittelee artikkelissaan opetusmenetelmää, jossa algebran merkintöihin siirtyminen tapahtuu oppilaiden omien epämuodollisten merkintöjen ja strategioiden kautta. Hän havaitsi, että kun oppilaita ohjataan kehittämään itse merkintöjä, joilla esimerkiksi sanallinen tehtävä voidaan esittää yksinkertaisemmin, he usein kehittelevät niitä tehokkaammiksi muun muassa sanojen lyhenteitä ja ensimmäisiä kirjaimia käyttämällä. Oppilaat siis jättävät puhutun kielen vaiheittain pois ja siirtyvät käyttämään omia epämuodollisia merkintöjään, joiden merkityksen he ovat itse keksineet. Näin ollen he ymmärtävät myös merkintöjen tarkoituksen. Van Amerom (2003) näkee tämän yhtenä keinona helpottaa siirtymää algebran muodollisten symbolien käyttöön, sillä näin voidaan auttaa oppilaita näkemään kirjainmuuttujan ja muiden symbolien tarve matematiikassa. Hän kuitenkin nostaa lopuksi esille sen, että siirtyminen oppilaiden intuitiivisista merkinnöistä algebran muodolliseen symboliikkaan voi osoittautua ongelmalliseksi.

Lisäksi Hewitt (2012) mainitsee matematiikan kielen oppimisen kannalta tärkeän seikan: ei riitä, että oppilas tunnistaa yksittäiset symbolit. Symbolin kykenee tulkitsemaan vasta, kun ymmärtää, miten sen merkitys riippuu muista symboleista sen ympärillä. Esimerkkinä hän mainitsee symbolin ”2” ja sen erilaiset merkitykset esimerkiksi luvuissa 24, 4^2 ja $^2/_4$ (Hewitt, 2012, s. 141).

Van Amerom (2003) esittää artikkelissaan, että oppilaiden algebrallinen päättely (engl. *algebraic reasoning*) ja kyky symbolisoida eivät välttämättä kehity samanaikaisesti. Hän esittelee oppilaiden sanallisten tehtävien ratkaisuja, joista tämä käy ilmi. Ensimmäisessä hänen esittelemässään ratkaisussa oppilas on kyennyt kirjoittamaan tehtävänannon matemaattiseen muotoon yhtälöksi oikeaoppisesti, mutta hänen tekemänsä merkinnät osoittavat, ettei hän osaa käyttää yhtälöä ongelman ratkaisuun. Oppilas on selittänyt päätelmänsä kirjallisesti ja suorittanut laskutoimitukset ainoastaan tehtävän numeerisia osia käyttäen, ilman yhtälössä esiintyneitä kirjainmuuttujia. Van Amerom esittää, että oppilas siis kykenee käyttämään muodollista formalisointia yhtälön kirjoittamiseksi, mutta algebrallinen yhtälönratkaisu ei onnistu, vaan hän ratkaisee sen aritmeettisin keinoin. Toisen oppilaan ratkaisusta käy ilmi, että vaikka hän ei kykene esittämään tehtävänantoa tai algebrallisia manipulaatioita muodollisesti, hän käyttää algebrallisia strategioita, kuten toisen tuntemattoman eliminointia sujuvasti omin merkinnöin. Päätelmänä muun muassa näistä Van Amerom esittää, että algebrallinen symbolisointi ja päättelykyky eivät ole toisistaan riippuvaisia. Tässä hänen voidaan ymmärtää tarkoittavan algebrallisella päättelyllä kykyä perustella tehdyt päätelmät algebran symbolisten manipulaatioiden avulla. Molempien oppilaiden tapauksessa on selvää, että he kykenevät ajattelemaan algebrallisesti.

2.2.1. Luonnollisen kielen yhteys matematiikkaan

Yhtenä yleisimmistä ongelmista tutkimuksissa nousee esiin myös algebran kielen ja luonnollisen, puhutun kielen yhteys. Algebran ongelman kääntäminen puhutulle kielelle ja toisaalta sanallisen tehtävän ongelman ilmaiseminen algebran symbolein tuottavat hankaluuksia oppilaille (Malisani & Spagnolo, 2009; Warren, 2003; Van Amerom, 2003). Linchevski (1995) nostaa esille sanallisten tehtävien ratkaisutapojen monipuolisuuden. Hän näyttää esimerkin avulla, kuinka sanallinen tehtävä voidaan ratkaista sekä aritmeettisesti että algebran menetelmien avulla. Kyseisessä tehtävässä nämä kaksi eri ratkaisutapaa ovat myös suurin piirtein yhtä pitkiä ja työläitä. Vaikka algebrallinen ratkaisu vaatiikin menetelmien osaamisen, on se toisaalta ratkaisijalle ajatuksellisesti helpompi tapa. Aritmeettinen ratkaisu vaatii ratkaisijaltaan ainakin jollain tasolla syvempää ymmärrystä ja algebrallista ajattelua. Linchevski (1995) esittää sanallisten tehtävien esittelyn jo aritmetiikan yhteydessä vähentävän mahdollisesti oppilaiden ongelmia niiden kanssa algebran viitekehyksessä. Tuntuu luonnolliselta, että oppilaiden tottumus sanallisiin tehtäviin helpottaa niiden ymmärtämistä myös algebran yhteydessä. Kysymykseksi jää kuitenkin se, voiko tällä tavalla välttää vaikeuksia sanallisen ja algebrallisen esitysmuodon välisen yhteyden luomisessa.

Herscovics ja Linchevski (1994) esittävät puhutun kielen käytön matematiikassa olevan edellytys symbolisen kielen käyttöön. Heidän mukaansa oppilaiden tulee kyetä esittämään matemaattinen väite luonnollisella kielellä, ennen kuin kykenee ilmaisemaan sen matemaattisesti. Yleisesti kyky esittää matemaattinen ongelma puhutulla kielellä ymmärretään merkkinä ongelman ymmärtämisestä. Warren kuitenkin (2003) kyseenalaistaa väitteen, että onnistunut puhekielen käyttö olisi välttämätön edellytys ymmärtämiselle ja algebralliselle ajattelulle. Hän havaitsi, että oppilas voi kyetä esittämään matemaattisia yleistyksiä symbolien avulla, vaikka niiden esittäminen puhekielellä olisi tuottanutkin ongelmia. Useissa tutkimuksissa kuitenkin käytetään kirjallisen ilmaisun lisäksi haastattelua ja ratkaisujen sanallista selittämistä yhtenä havainnointikeinona, sillä sanavalinnat ja luonnollisella kielellä esitetyt selitykset voivat kertoa oppilaan ajattelutavasta ja ymmärryksestä enemmän kuin kirjallinen ratkaisu (mm. Zazkis & Liljedahl, 2002).

2.3. Matemaattiset rakenteet

Warren (2003) tutkii artikkelissaan aritmetiikan yhteydessä opittujen matemaattisten rakenteiden merkitystä siirtymässä algebraan. Hän esittää, että tieto matemaattisista rakenteista on oleellista siirtymävaiheessa. Tällä tarkoitetaan tietoa matemaattisista objekteista sekä näiden objektien ja niiden ominaisuuksien välisistä yhteyksistä (Morris, 1999). Matemaattisten rakenteiden voidaan ajatella koskevan muun muassa termien välisiä suhteita (esimerkiksi yhtäsuuruus, pienemmyys tai suuremmuus), operaatioiden ryhmäominaisuuksia (onko operaatio assosiatiivinen ja/tai kommutatiivinen tai onko sillä käänteisoperaatiota) sekä operaatioiden välisiä suhteita (Warren, 2003). Perinteisessä siirtymässä algebraan oletetaan, että nämä käsitteet ovat oppilaille ennestään tuttuja aritmetiikan osalta. Kieran (1988) määrittelee rakenteellisen tiedon kyvyksi tunnistaa lausekkeen kaikki ekvivalentit muodot. Useat tutkijat (mm. Booth, 1988; Kieran, 1988, 1992) katsovat algebran opiskelun aloituksen yhteydessä koettujen vaikeuksien johtuvan oppilaiden kyvyttömyydestä tunnistaa algebran lausekkeiden ekvivalentteja muotoja.

Boothin (1984, 1988) jo aiemmin mainittu esitys vaikeuksien periytymisestä aritmetiikasta algebraan johtuu hänen mukaansa osittain oppilaiden puutteellisesta ymmärryksestä liittyen erilaisiin aritmeettisiin rakenteisiin.

Linchevski ja Livneh (1999) käsittelevät artikkelissaan siirtymävaihetta juuri rakenteellisen hahmottamisen näkökulmasta. He viittaavat aiempiin tutkimuksiin (Herscovics & Linchevski, 1995; Linchevski & Herscovics, 1996), joissa havaittiin, että vaikeuksia hahmottaa lausekkeiden matemaattista rakennetta ilmeni jo oppilailla, jotka eivät olleet vielä saaneet opetusta algebrasta. Oppilaille annettiin yhtälönratkaisutehtäviä ja suurin osa oppilaista alkoi oma-aloitteisesti manipuloida yhtälöiden numeerisia osia, koskematta muuttujaan. Suurimmalla osalla oppilaista, jotka eivät osanneet ratkaista yhtälöä $4+n-2+5=11+3+5$, virhe tapahtui kuitenkin juuri yhtälön numeerisessa osassa. Useat oppilaat päätyivät esimerkiksi yhtälöön $4+n-7=19$. He siis ”irrottivat” luvun 2 sitä edeltävästä operaatiosta. Kyseistä ongelmaa havaittiin myös muissa tehtävissä, joten sen voidaan katsoa olevan ainakin jossain määrin systemaattinen virhe. Linchevski ja Livneh (1999) puhuvat siitä nimellä *detachment of a term from the indicated operation*. Banerjee ja Subramaniam (2012) puhuvat samasta asiasta artikkelissaan yksinkertaistetusti nimellä *detachment error*. Tässä tutkielmassa käytetään omaa suomennostani Linchevskin ja Livnehin kuvaavammasta nimityksestä: termin irrottaminen siihen viittaavasta operaatiosta.

Toinen Linchevskin ja Livnehin (1999) havaitsema rakenteiden puutteelliseen hahmottamiseen liittyvä virhe tulee esille yhtälössä $115-n+9=61$. Osa oppilaista ratkaisi tämän yhdistämällä numeerisia termejä niin, että saivat yhtälön $106-n=61$ tai $106+n=61$, hypäten muuttujan yli ja liittäen luvun 115 perässä olevan operaation lukuun 9 muuttujan sijasta. Oppilaat eivät olleet saaneet opetusta algebrasta, mikä herättää kysymyksiä siitä johtuivatko nämä virheet uudesta asiasta – kirjainmuuttujasta – vai onko niillä jotain tekemistä aritmetiikan yhteydessä syntyneiden väärinkäsitysten kanssa. Voidaan olettaa, että koska oppilaat olivat kokemattomia yhtälönratkaisussa, olivat heidän käyttämänsä menetelmät yhtälöiden parissa ainakin osittain sattumanvaraisia. Kuitenkin tietyt virhetyypit havaittiin niin yleisiksi jo lausekkeiden numeeristen osien ryhmittelyssä, ettei niitä voi täysin sivuuttaa viitaten sattumanvaraisuuteen. (Linchevski & Livneh, 1999)

Tutkiakseen rakenteellisen hahmottamisen mahdollista periytymistä aritmetiikasta Linchevski ja Livneh (1999) muuttivat koejärjestelyä aiemmasta niin, että käyttivät tehtävinä ainoastaan numeerisia yhtälöitä. Tässäkään tutkimuksessa siihen osallistuneet oppilaat eivät olleet saaneet lainkaan opetusta algebrasta. Kaikki oppilaat olivat saaneet opetusta liittyen operaatioiden järjestykseen, mutta negatiivisia lukuja ei ollut käsitelty. Riippumatta siitä, että tehtävät olivat puhtaasti aritmeettisia, edellä mainittujen ongelmien havaittiin olevan erittäin yleisiä. Termin irrottaminen siihen viittaavasta operaatiosta sekä operaation liittäminen sitä edeltävään lukuun havaittiin olevan hyvin yleisiä taipumuksia. Näiden lisäksi oppilaat tekivät hyvin paljon virheitä liittyen operaatioiden järjestykseen. Tutkimukseen osallistuneista 53 oppilaasta 47 tekivät ainakin yhdessä tehtävässä virheitä liittyen termin irrottamiseen siihen viittaavasta operaatiosta, ja muuttujan yli hyppääminen liittäen operaatio sitä edeltävään lukuun esiintyi 29 oppilaalla. Tutkimus siis vahvistaa kyseisten ongelmien esiintymisen jo puhtaasti numeerisissa tehtävissä ja antaa suuntaa niiden yleisyydelle. Merkittävää heidän tutkimuksessaan on myös se, että osa tutkittavista oppilaista oli Israelista ja osa Kanadasta. Tämä viittaa siihen, etteivät tietyt ongelmat ole ainakaan täysin seurausta tietystä opetussuunnitelmasta tai -menetelmästä.

2.4. Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen

Yhtäsuuruusmerkin ja yhtä suurien lausekkeiden ymmärtäminen algebrassa nousee useissa siirtymävaihetta käsittelevissä artikkeleissa yhdeksi yleisimmistä ongelmista (Linchevski & Livneh, 1999; Hewitt, 2012; Warren, 2003). Useimmin esille nouseva väärinkäsitys on oppilaiden käsitys yhtäsuuruusmerkistä käskynä ilmoittaa laskutoimituksen vastaus sen sijaan, että se ymmärrettäisiin lausekkeiden yhtäläisyyden merkkinä. Falkner, Levi ja Carpenter (1999) havaitsivat yhtäsuuruuteen liittyviä väärinkäsityksiä jo 1. luokan oppilailla. He esittävät syynä näihin väärinkäsityksiin olevan oppilaiden tottuneisuuden tehtäviin, joissa yhtäsuuruusmerkkiä seuraa yksi luku. Yhtäsuuruusmerkin yleisimmin esiintyvä käyttö aritmetiikan yhteydessä on juuri tilanteessa, jossa sillä ilmaistaan laskutehtävän numeerinen, yleensä yksikäsitteinen vastaus.

Myös Sfard ja Linchevski (1994) esittävät artikkelissaan useiden algebran yhtälöiden ratkaisuun liittyvien vaikeuksien selittyvän oppilaiden yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämättömyydellä, joka on seurausta aritmetiikan opetuksesta. Heidän mukaansa oppilailla on aritmetiikan pohjalta vahva käsitys siitä, että yhtälössä vasemmalla puolella on aina prosessi ja oikealla puolella numeerinen ”vastaus”. Silloin kun näin ei ole, eivät oppilaat enää kykene ymmärtämään tai ratkaisemaan yhtälöä. Yhtäsuuruusmerkki nähdään siis ainoastaan käskynä suorittaa operaatiot. Sfard ja Linchevski (1994) huomauttavat, että etenkin nykyään laskimen käyttö voi vahvistaa tätä käsitystä yhtäsuuruusmerkistä, sillä siinä sitä käytetään juuri tässä merkityksessä: ilmoittamaan laskutoimituksen lopputulos.

Banerjee ja Subramaniam (2012) osoittavat artikkelissaan oppilaiden kykenemättömyyden tunnistaa yhtäsuuruutta aritmeettisten lausekkeiden välillä ilman laskutoimitusten suorittamista, esimerkiksi yhtälössä $27 + 12 = 25 + 14$. He havaitsivat suuria puutteita oppilaiden ymmärryksessä yhtäsuuruudesta. He pitävät keskustelua yhtäsuuruusmerkistä ja sen merkityksestä sekä lausekkeiden yhtäsuuruudesta ja ekvivalenssista yhtenä ymmärrystä syventävänä tapana, mutta mikään näistä ei kuulunut heidän tutkimiensa oppilaiden opetussuunnitelmaan. Myös he korostavat keskittymisen siirtämistä laskutoimituksista lausekkeiden rakenteiden ymmärtämiseen ja uskovat sen johtavan myös yhtäsuuruuden syvempään ymmärrykseen.

Banerjee ja Subramaniam (2012) havaitsivat, etteivät oppilaat ymmärtäneet yhtä suurille algebran lausekkeille tehtyjen samojen (sallittujen) muunnosten säilyttävän lausekkeiden yhtäsuuruuden millä tahansa muuttujan arvolla. Tämä kertoo lausekkeiden ekvivalenssin heikosta ymmärryksestä. He havaitsivat, että oppilaat kykenivät tekemään symbolisia muunnoksia algebran lausekkeille sekä ymmärtämään kahden lausekkeen yhtäsuuruuden sijoittaessaan muuttujan tilalle lukuarvon. Oppilaat eivät kuitenkaan kyenneet yhdistämään näitä asioita keskenään saavuttaakseen syvemmän ymmärryksen lausekkeiden ekvivalenssista. (Banerjee & Subramaniam, 2012)

Myös Linchevskin (1995) artikkelissa, jossa käsitellään algebrallisiin rakenteisiin ja käsitteisiin tutustuttamista aritmetiikan yhteydessä, huomioidaan yhtäsuuruusmerkin puutteellinen ymmärrys. Hänkin mainitsee oppilaiden aritmetiikan yhteydessä syntyvän käsityksen yhtäsuuruusmerkistä olevan lähinnä laskennalliseen prosessiin liittyvä käsky. Lisäksi hän esittää yhtäsuuruusmerkin yksipuolisen käytön aritmetiikassa vahvistavan oppilaiden puutteellista käsitystä yhtälöistä vasemmalta oikealle luettavina tehtävinä. Hänen mukaansa oppilaiden käsitys yhtälöistä on se, että itse ”laskutehtävä” on yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella ja ”vastaus” oikealla puolella. Artikkelissaan hän käsittelee muun muassa tämänkaltaisiin aritmetiikasta algebraan periytyviin väärinkäsityksiin puuttumista jo aritmetiikan yhteydessä ja puhuu *esialgebrasta*. Yhtäsuuruusmerkin ja lausekkeiden yhtäsuuruuden yhteydessä hän antaa oppilaille esiteltävistä tehtävistä esimerkkeinä yhtälöt $2+3=3+2, 2+3=2+3$ ja $2+3=5$, jotka hänen mukaansa tuovat oppilaille esille yhtäsuuruusmerkin eri merkitykset. Muun muassa tällainen yhtäsuuruusmerkin monipuolinen esittely ja käyttö aritmetiikan yhteydessä voi hänen mukaansa helpottaa algebrassa vaadittavaa laajempaa ymmärrystä yhtäsuuruudesta ja lausekkeiden ekvivalenssista. Booth (1988) esittää lisäksi, että yhtäsuuruusmerkin ymmärrykseen liittyviä ongelmia on havaittu myös peruskouluikäisiä vanhemmilla oppilailla, joka kertoo siitä, miten vaikeaa aritmetiikan yhteydessä omaksutuista väärinkäsityksistä on päästä eroon.

2.5. Vaikeus käsitellä algebran lausekkeita objekteina

2.5.1. Oppilaiden taipumus suorittaa operaatiot algebran lausekkeissa

Algebran voidaan ajatella olevan luonteeltaan duaalinen, sillä algebran lausekkeet täytyy ymmärtää sekä prosesseina, että objekteina. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi lausekkeen $a+b$ ymmärtämistä sekä yhteenlaskuna, että yhtenä objektina jota voidaan operoida ja jota ei voida saattaa yksinkertaisempaan muotoon ilman enempää tietoa. Oppilailla on havaittu ongelmia, joiden voidaan päätellä johtuvan tämän ymmärryksen puutteesta. (Tirosh et al., 1998; Linchevski & Herscovics, 1996)

Jo Collis (1974) havaitsi samankaltaisen kognitiivisen ongelman: vaikeuden hyväksyä algebran lausekkeiden ”keskeneräisyys” (oma suomennos, engl. *acceptance of the lack of closure)*. Tällä termillä hän tarkoitti oppilaiden taipumusta ja halua suorittaa algebran lausekkeissa esiintyvät operaatiot sekä vaikeuksia hyväksyä se, ettei niin aina voida tehdä. Myös muut tutkijat (Tirosh et al., 1998; Hewitt, 2012) puhuvat samasta asiasta ja selittävät sitä nimenomaan oppilaiden kyvyttömyydellä nähdä operaatioita sisältäviä lausekkeita matemaattisina objekteina sellaisenaan. Tirosh et al. (1998) esittävät oppilaiden näkevän tällaiset avoimet lausekkeet keskeneräisinä, jonka takia ne halutaan saattaa loppuun. Tämän voidaan ajatella olevan yksi niistä asioista, jotka periytyvät aritmetiikasta, jossa oppilaat ovat tottuneet tulkitsemaan esimerkiksi $+$ - merkin ainoastaan käskyksi summata. Aritmetiikan yhteydessä oppilaat ovat myös tottuneet suorittamaan kaikki lausekkeissa esiintyvät operaatiot loppuun ja päätymään lopuksi yhteen numeerisen vastaukseen. (Hewitt, 2012) Myös muut tutkijat (mm. Booth, 1988) mainitsee aritmetiikan vastauskeskeisen luonteen vaikuttavan oppilaiden käsityksiin algebran yhteydessä. Algebrassa pääasia ei ole itse vastaus vaan pikemminkin prosessi, jolla mahdolliseen vastaukseen päädytään.

Oppilaiden taipumus yhdistää tai saattaa loppuun algebran lausekkeita, joissa se ei ole mahdollista, johtaa luonnollisesti virheisiin. Kun termit halutaan yhdistää, mutta sallittuja keinoja siihen ei ole, ovat menetelmät usein sattumanvaraisia. Tirosh et al. (1998) antavat esimerkin $5x + 8$, jonka oppilaat näkevät käskynä summata termit ja päätyvät joko vastaukseen $13x$ tai 13. Artikkelissa myös huomautetaan, että termin $13x$ oppilaat kuitenkin tässä tuntuvat näkevän ”lopputuloksena”, jota ei enää tarvitse yksinkertaistaa, vaikka kyseessä onkin kertolasku. (Tirosh et al., 1998) Myös Hewitt (2012) esittää samankaltaisella esimerkillä oppilaiden taipumusta koettaa päästä lausekkeessa olevasta operaatiosta eroon, ennen kuin kykenevät käsittelemään sitä matemaattisena objektina.

Oppilaiden on myös havaittu muuntavan algebran yhtälöitä ja lausekkeita aritmeettisiksi käyttäen sattumanvaraisia, itse kehitettyjä menetelmiä, jotta voisivat päätyä kaipaamaansa numeeriseen vastaukseen (Booth, 1988). Esimerkkinä Booth (1988) antaa tehtävän, jossa oppilaan tulee ilmoittaa $n -$sivuisen monikulmion piirin pituus, kun jokaisen sivun pituus on 2. Oppilas ymmärtää vastauksen olevan $n \cdot 2$, muttei hyväksy sitä vastaukseksi ja päättelee aakkosten avulla muuttujan arvon olevan $n = 14$, jolloin hän kykenee laskemaan tehtävälle numeerisen vastauksen. Myös Booth (1988) on havainnut, että vaikka oppilas kykenisikin hyväksymään kirjainmuuttujan esiintymisen vastauksessa, on taipumus saattaa vastaus yksitermiseen muotoon hyvin yleinen. Tällöin menetelmät voivat olla sattumanvaraisia ja virheellisiä. Hän kyseenalaistaa sen, onko tässä kyse kognitiivisesta vaikeudesta vai onko taipumus peräisin aritmetiikan yhteydessä saaduista käsityksistä ja toimintamalleista? (Booth, 1988)

Tirosh et al. (1998) tutkivat artikkelissaan opettajien tietoisuutta tästä oppilaiden taipumuksesta suorittaa operaatiot algebran lausekkeissa. He toteavat kyseisen ongelman esiintyvän matematiikan didaktiikan kirjallisuudessa, mutta opettajien tietoisuutta ja opetusmenetelmiä ongelman poistamiseksi ei ole juurikaan tutkittu. He tutkivat neljää Israelilaista seitsemännen luokan opettajaa, joista kaksi oli noviiseja ja toiset kaksi olleet alalla vähintään 15 vuotta. He havaitsivat, että nuoret opettajat eivät olleet tietoisia tästä taipumuksesta, mutta vanhemmille opettajille se oli tuttu vuosien kokemuksen myötä. Tämä vaikuttaa luonnolliselta tulokselta, joskin osoittaa sen, että kyseistä ongelmaa ei ole välttämättä huomioitu nuorten opettajien opettajankoulutuksessa. Huomion arvoista on kuitenkin se, että myöskään vanhemmat, ongelmasta tietoiset opettajat eivät osanneet selittää mistä tämä voi johtua. Tirosh et al. (1998) korostavat, että ongelman tiedostamisen lisäksi opettajien tulisi olla tietoisia sen syistä. Lisäksi olennaista opettajille olisi tieto erilaisista opetusmenetelmistä kyseiseen ongelmaan liittyen, niiden hyvistä ja huonoista puolista sekä lyhyellä että pitkällä tähtäimellä. Tällä he viittaavat siihen, että huomion pitäisi olla virheiden ”tilapäisen” poistamisen sijaan oppilaiden rakenteellisen ymmärryksen kehittämisessä, jotta ongelmilta voitaisiin välttyä tulevaisuudessa.

2.5.2. Algebran duaalinen luonne

Edellä mainittu taipumus suorittaa operaatiot algebran lausekkeissa mainitaan Sfardin ja Linchevskin (1994) artikkelissa yhtenä merkkinä oppilaiden kyvyttömyydestä nähdä algebran lausekkeet itsenäisinä objekteina. Heidän artikkelinsa käsittelee algebran duaalista luonnetta eli algebran operationaalista ja rakenteellista näkökulmaa. Operationaalisella näkökulmalla tarkoitetaan algebran lausekkeiden näkemistä sarjana laskutoimituksia, jotka tulee suorittaa. Samasta asiasta puhuttaessa käytetään myös termiä *lausekkeen näkeminen prosessina*. Rakenteellisella hahmottamisella taas viitataan kykyyn nähdä algebran lausekkeet itsenäisinä objekteina, joita voidaan operoida. Artikkelissa käytetäänkin tästä termiä *lausekkeen näkeminen objektina*. Sfard ja Linchevski (1994) liittävät näiden eri näkökulmien omaksumisen vahvasti kykyyn oppia ja etenkin ymmärtää algebraa. He esittävät, että nämä näkökulmat ovat läsnä algebran lisäksi myös kaikessa muussa matematiikassa ja että ne eivät ole toisensa poissulkevat, vaan ennemmin toisiaan täydentävät. Vaikka he puhuvat artikkelissaan oppilaista, jotka ovat vielä operationaalisella ajattelutasolla, he korostavat, ettei rajanveto operationaalisen ja rakenteellisen näkökulman välillä ole selvä. Nämä kaksi näkökulmaa ovat ainakin jossain määrin sisäkkäisiä ja lähinnä kyse on siitä, kumpi näkökulma on missäkin vaiheessa oppilaalla vallitseva.

Sfard ja Linchevski (1994) tuovat artikkelissaan esiin algebran monimuotoisen luonteen esittelemällä eri tapoja nähdä algebran lauseke. Algebran lauseke voidaan nähdä esimerkiksi laskennallisena prosessina, tiettynä lukuna, funktiona tai vain ketjuna symboleita. Näkökulma riippuu sekä katsojan ennakkotiedoista että tilanteesta jossa lauseke esiintyy. Oppilaiden erilaiset tavat nähdä algebran lausekkeet voivat kuitenkin jäädä tiedostamatta opettajalta, sillä esimerkiksi oppilaan tekemää algebran yhtälön ratkaisua tarkastelemalla ei välttämättä käy ilmi, miten hän on yhtälön nähnyt. Muodollista ratkaisumenetelmää noudattamalla ratkaisu voi näyttää täysin samalta kuin vaikkapa matemaatikon ratkaisu, riippumatta oppilaan omasta ymmärryksestä tilanteeseen liittyen. Sfardin ja Linchevskin (1994) mukaan oleellista algebrassa ja matematiikassa ylipäätään on kyky tiedostaa nämä eri näkökulmat ja käyttää niitä joustavasti tilanteen vaatimuksien mukaan.

Sfard ja Linchevski (1994) perustelevat tutkimustulostensa avulla, että operationaalinen ajattelu edeltää rakenteellista ajattelua luontaisesti ja spontaanisti. He liittävät tämän myös algebran historialliseen kehitykseen, jossa operationaalinen ajattelu on edeltänyt rakenteellista. Rakenteellinen ajattelu kehittyy silloin, kun aluksi jollain tasolla ainoastaan prosessina käsitelty matemaattinen ilmaus voidaan nähdä objektina ylemmällä tasolla. Tällöin sitä voidaan myös operoida ja se tulee osaksi tämän ylemmän tason prosessia. Sfard ja Linchevski (1994) korostavat, että siirtymä operationaalisesta ajattelusta algebran duaalisen luonteen ymmärrykseen on ongelmallista monille oppilaille. Heidän mielestään tämä selittää suurelta osin vaikeuksia, joita sekä siirtymässä aritmetiikasta algebraan että yleisesti algebran oppimisessa on havaittu. Aritmetiikan parissa prosessi ja objekti voidaan melko yksiselitteisesti erottaa toisistaan, sillä prosessit kyetään pääsääntöisesti viemään loppuun ja saamaan näin ollen (numeerinen) tulos, jota osataan käsitellä objektina. Algebrassa näin ei kuitenkaan ole, ja juuri tähän liittyy aiemmin mainittu vaikeus hyväksyä algebran lausekkeiden keskeneräisyys: oppilaat eivät kykene näkemään lausekkeita operoitavina objekteina ennen kuin niissä itsessään olevat operaatiot on suoritettu.

Sfard ja Linchevski (1994) päättelevät tutkimustuloksistaan, että operationaalinen näkökulma algebraan näyttäisi periytyvän aritmetiikasta, jossa oppilaat ovat tottuneet suorittamaan lausekkeissa esiintyvät operaatiot päätyen yhteen numeeriseen vastaukseen. Kuten aiemmin mainittu (ks. kappale 1.1.), tutkijat ovat havainneet, että oppilaat kykenevät ratkaisemaan spontaanisti ensimmäisen asteen yhtälöitä, joissa muuttuja esiintyy ainoastaan vasemmalla puolella. Kun muuttujaa esiintyy yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin, ratkaiseminen ei enää onnistukaan. Sfard ja Linchevski (1994) selittävät tämän sillä, että muuttujan esiintyessä vain toisella puolella yhtälön voi ratkaista täysin operationaalisesti, suorittamalla operaatiot ”vastakkaisessa järjestyksessä”. Kun muuttujaa sisältäviä termejä on yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin, tarvitaan yhtälön ratkaisuun rakenteellista näkökulmaa.

Sfardin ja Linchevskin (1994) tutkimustulokset osoittavat, että yksi syy oppilaiden kykenemättömyyteen ratkaista tällainen yhtälö on vaikeus ymmärtää yhtäsuuruusmerkki lausekkeiden ekvivalenssina. Tämä on seurausta siitä millaisen käsityksen he ovat saaneet yhtäsuuruusmerkistä aritmetiikan viitekehyksessä. Huomattavaa on se, että he havaitsivat saman oppilaan kykenevän ratkaisemaan yhtälön $7x + 157 = 248$, mutta yhtälön $112 = 12x + 47$ ratkaisu ei onnistunut, koska oppilas oli niin tottunut näkemään operaatiot yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella ja ”vastauksen” sen oikealla puolella, ettei ymmärtänyt jälkimmäistä yhtälöä. Sfard ja Linchevski (1994) esittävät, että tämänkaltaiset väärinkäsitykset periytyvät aritmetiikasta, jossa yhtäsuuruusmerkkiä käytetään lähinnä käskynä suorittaa operaatiot, eikä lausekkeiden yhtäsuuruuden käsitteen ymmärrykseen kiinnitetä huomiota.

Artikkelissa korostetaan rakenteellisen ajattelun saavuttamisen olevan oppilaille haastavaa. Heidän mukaansa algebran objektien ymmärtäminen samaan aikaan sekä operaationa, että prosessin lopputuloksena on intuition vastaista. Vaikka rakenteellinen näkökulma on ”korkeammalla” ajatuksen tasolla kuin operationaalinen, sen saavutettuaan oppilas kykenee ratkaisemaan algebran yhtälöitä helpommin kuin operationaalisen ajattelun kautta. Esimerkiksi ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa muuttuja esiintyy ainoastaan yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella, ovat oppilaille ratkaistavissa käänteisten prosessien kautta, joka vaatii suhteellisen kehittynyttä algebrallista ajattelua. Kun oppilas näkee yhtälön rakenteellisesti ja hallitsee algebran symboliset manipulaatiot, hän kykenee ratkaisemaan yhtälön vähemmällä ajatustyöllä. Artikkelissa myös korostetaan, että algebran lausekkeiden ja yhtälöiden manipulaatioiden ymmärtäminen vaatii nimenomaan rakenteellisen näkökulman. Heidän mukaansa algebran ja ylipäätään matematiikan osaaminen on vahvasti kytköksissä kykyyn käyttää sekä operationaalista että rakenteellista näkökulmaa joustavasti ja vaihdellen tilanteen mukaan. (Sfard & Linchevski, 1994)

Opetuksessa algebran duaalisen luonteen ymmärtäminen ja sen oppilaille tuottamien vaikeuksien tunnistaminen on tärkeää, sillä kun opettaja itse kykenee näkemään lausekkeet objekteina, tulee siitä helposti hänelle itsestäänselvyys. Esimerkkinä artikkelissa annetaan puhtaasti aritmeettiset termit $3/4$ ja -2, jotka rakenteellisesta näkökulmasta katsova hahmottaa automaattisesti itsenäisinä termeinä, jota voidaan operoida. Molempien termien kohdalla on kuitenkin kyse samaan aikaan myös operaatiosta, ja tällöin operationaalisesta näkökulmasta katsovalle oppilaalle esimerkiksi murtoluvun käsittäminen yhtenä objektina on intuitiivisesti hankalaa. Tässäkin tapauksessa, puhtaasti aritmeettisessa yhteydessä, oppilas voi kokea tarpeen suorittaa operaatio saadakseen ”lopputuloksen”, jota hän osaa operoida. (Sfard & Linchevski; 1994)

Gray ja Tall (1994) puhuvat myös algebran duaalisesta luonteesta ja ovat kehittäneet termit *procept* ja *proceptual thinking* sanojen *process* ja *concept* yhdistelmänä kuvaamaan kykyä nähdä matematiikan merkintöjen monimerkityksisyys. Sanalla *concept* eli käsite voidaan ymmärtää heidän viittaavan samaan asiaan, mistä edellä puhutaan objektina. He käsittelevät asiaa artikkelissaan lähinnä aritmetiikan osalta, mutta esittävät kyvyn nähdä matemaattiset objektit sekä prosesseina että käsitteinä oleelliseksi edellytykseksi ymmärtää matematiikkaa yleisesti. He antavat esimerkkejä useilta eri matematiikan osa-alueilta, mutta yksinkertaisimmillaan aritmetiikan osalta *proceptual thinking* tarkoittaa kykyä nähdä symboli $5 + 4$ sekä yhteenlaskun prosessina että summan $5 + 4 = 9$ käsitteenä. He mainitsevat oppilaiden, joilta tämä kyky puuttuu, kokevan vaikeuksia myös algebran yhteydessä. Tällaiset oppilaat näkevät muuttujaa sisältävät algebran lausekkeet ainoastaan prosesseina, joita ei voida suorittaa loppuun eivätkä itsenäisinä matemaattisina objekteina, joita voidaan operoida sellaisenaan. He määrittelevät termin *proceptual thinking* ”kyvyksi manipuloida symbolia joustavasti prosessina tai käsitteenä, ja vaihdella saman objektin symboliikkaa” (oma suomennos, Gray ja Tall, 1994, s. 7). Jälkimmäisellä he tarkoittavat esimerkiksi objektin 6 eri symbolisten esitysmuotojen (kuten $3+3, 4+2, 2 \cdot 3, 8-2$ ja niin edelleen) ymmärtämistä ja joustavaa käyttöä tilanteen vaatimuksien mukaan.

2.6. Operaatioiden järjestys

Operaatioiden järjestyksen osaamista ja siihen liittyviä virheitä käsitellään monissa tutkielmani aihepiiriä käsittelevissä artikkeleissa (mm. Banerjee & Subramaniam, 2012; Linchevski & Livneh, 1999; Hewitt, 2012). Osassa näistä artikkeleista tätä ongelmaa tutkitaan algebran tehtävien avulla, mutta esimerkiksi Linchevski ja Livneh (1999) käyttivät jo aiemmin mainitussa tutkimuksessaan (ks. kappale 2.3.) ainoastaan numeerisia tehtäviä ja havaitsivat operaatioiden järjestyksen hallinnan olevan vaikeaa jo aritmetiikan parissa työskennellessä. Tutkimukseen osallistuneista 53 oppilaasta ainoastaan 14 ei tehnyt lainkaan virheitä liittyen operaatioiden järjestykseen. Myös tämän ongelman yhteydessä voidaan siis huomata vaikeuksien siirtyminen aritmetiikasta algebraan. Huomio olisi siis syytä kiinnittää näiden ideoiden - kuten operaation järjestykseen liittyvien sääntöjen - sisäistämiseen jo aritmetiikan opetuksen yhteydessä. Tällöin niitä kyettäisiin käyttämään algebran yhteydessä yleisinä sääntöinä (Banerjee & Subramaniam, 2012).

Linchevski ja Livneh (1999) havaitsivat tutkimuksessaan, että suurin osa oppilaista noudattaa vasemmalta oikealle -laskujärjestystä tehtävissä, joissa on yhteen- ja kertolaskua ja joissa kertolasku pitäisi suorittaa ensin. Kiinnostavaa oli heidän huomionsa siitä, että jos tehtävässä esiintyi sekä yhteen- että vähennyslaskua, suoritti melko suuri osa oppilaista yhteenlaskun ensin. Vastaavasti kerto- ja jakolaskujen tapauksessa, jossa kertolasku suoritettiin ennen jakolaskua, vaikka tehtävässä olisi tullut edetä vasemmalta oikealle. He antavat yhdeksi mahdolliseksi selitykseksi tälle muistisäännöt, joita englanninkielisessä matematiikan opetuksessa usein käytetään. Muistisäännöissä laskujärjestys esitetään seuraavasti: sulkeet, eksponentit, kertolasku, jakolasku, yhteenlasku ja vähennyslasku (Linchevski ja Livneh, 1999; Hewitt, 2012). Erään oppilaan selitys väärälle laskujärjestykselle kertoo myös yhdenlaisesta väärinkäsityksestä operaatioiden järjestykseen liittyen: ”Yhteen- ja vähennyslasku ovat samalla tasolla, joten päätämme kumman teemme ensin sen perusteella, miten on helpointa” (oma suomennos, Linchevski ja Livneh, 1999, s. 179).

Linchevskin ja Livnehin (1999) tutkimuksen tulokset vaikuttavat olevan jossain määrin ristiriitaisia, sillä toisaalta oppilaiden havaittiin noudattavan vasemmalta oikealle -järjestystä ja toisaalta muistisääntö asetettiin vasemmalta oikealle -säännön edelle. Tutkijat toteavatkin virheiden esiintymisen olevan osittain systemaattista, sillä samoja virheitä esiintyi useilla oppilailla, mutta toisaalta epäsystemaattista, sillä samat oppilaat eivät toistaneet välttämättä samoja virheitä samankaltaisissa tehtävissä. He selittävät virheiden olevan jossain määrin liitoksissa tehtävässä esiintyviin numeroyhdistelmiin, joka voidaan yhdistää edellä mainitun oppilaan lausuntoon selvitä tehtävästä mahdollisimman helpoin laskutoimituksin. Esimerkkinä tästä eräs heidän tutkimuksensa tehtävä $50-10+10+10=$, jossa termin irrottaminen siihen viittaavasta operaatiosta esiintyi 51 prosentilla oppilaista ja sen voidaan katsoa johtuvan operaatioiden järjestyksen heikosta osaamisesta. Johtuen tietystä numeroyhdistelmästä, oppilaat näkevät lausekkeen muodossa $50 - (3 \cdot 10)$ ja saavat näin ollen vastaukseksi 20. (Linchevski ja Livneh, 1999)

Operaatioiden järjestykseen liittyvien vaikeuksien yhteydessä Hewitt (2012) vertaa matematiikan kielen lukutaitoa normaaliin kirjoitettuun kieleen. Matematiikan yhteydessä ei ole olemassa selkeää, yksikäsitteistä vasemmalta oikealle -sääntöä, kuten kirjoitetussa kielessä. Tämä aiheuttaa oppilaille vaikeuksia. Lisäksi matemaattiset lausekkeet luetaan ääneen puhutulla kielellä vasemmalta oikealle, vaikka laskujärjestys ei olisikaan siihen suuntaan. Kyetäkseen tulkitsemaan matemaattisia lausekkeita oikein oppilaiden on tunnettava ja muistettava useita eri sääntöjä tai sovittuja toimintatapoja, jotka voivat toisaalta olla myös tilannesidonnaisia. Hän antaa hyvän esimerkin tällaisesta tilannesidonnaisuudesta liittyen termien merkitsemiseen peräkkäin ilman operaatiomerkintää välissä: $5\,{}^{3}/_{4}$, joka tarkoittaa yhteenlaskua $5 + {}^{3}/_{4}$ ja toisaalta $5x$, jossa kyseessä on kertolasku $5 \cdot x$ (Hewitt, 2012, s.141).

2.7. Operaatioiden ymmärtäminen

Slavit (1999) määrittelee artikkelissaan termin operaatioiden ymmärtäminen (engl. *operation sense)*. Hän tutkii sen merkitystä siirtymässä aritmetiikasta algebraan, keskittyen erityisesti yhteenlaskuoperaatioon ja sen ymmärtämiseen. Hän esittää operaatioiden ymmärryksen saavuttamisen tukevan algebrallisen ajattelun kehitystä. Hänen määritelmänsä operaatioiden ymmärryksestä on hyvin laaja kymmenkohtainen luettelo näkökulmista, joita tähän käsitteeseen liittyy, mutta jota ei tässä tutkielmassa ole tarpeellista käsitellä niin laajasti. Tiivistetysti operaatioiden ymmärrys sisältää operaatioiden ominaisuuksien tuntemisen, tiedon operaation suhteista muihin operaatioihin, kyvyn käyttää operaatiota eri konteksteissa ja kyvyn operoida tuntematonta eli operaation yleistyksen ymmärtämisen. Slavit (1999) tutkii artikkelissaan lasten kykyä ajatella algebrallisesti esimerkiksi ongelmanratkaisun yhteydessä. Hän käyttää siinä apunaan operaatioiden ymmärryksen käsitettä. Tutkimustulokset osoittavat (Demby, 1997), että jopa lukioikäisillä oppilailla on vaikeuksia käyttää operaatioiden ominaisuuksia, kuten kommutatiivisuutta, algebran lausekkeita manipuloitaessa. Slavitin (1999) mukaan tämä kielii puutteista operaatioiden ymmärryksessä, joka kehittyy pääosin aritmetiikan opiskelun yhteydessä. Puutteellinen operaatioiden ymmärrys voi siis olla syynä myös oppimisvaikeuksiin algebran parissa.

Warren (2003) esittää tutkimustuloksiinsa vedoten, että suurin osa oppilaista ei alakoulun jälkeen ymmärrä yhteen- ja jakolaskua yleisinä prosesseina. Hän teki kirjallisen testin 672 oppilaalle, jotka olivat iältään 11–14 vuotiaita. Kukaan oppilaista ei ollut saanut muodollista opetusta algebrassa. Eräänä tehtävänä hänen testissään oli täydentää summa $23 = 2 + 5 + \_\_\_ + 4 + 6$, jonka 67 % oppilaista osasi ratkaista oikein. Lisätehtävänä oli muodostaa lisää summia, joiden tulokseksi saadaan luku 23. Suurin osa oppilaista keksi tällaisia summia ainoastaan 0-4 kappaletta. Huomattavaa oli se, että enimmäkseen oppilaiden antamat esimerkit olivat kokonaislukuesimerkkejä, vaikka heillä oli kokemusta myös desimaaliluvuista. Lisäksi tehtävässä kysyttiin, montako tällaista summaa on mahdollista keksiä. Ainoastaan 5 % oppilaista osasi vastata niitä olevan loputon määrä. Nämä tulokset kertovat selvästi, ettei oppilailla ole syvää ymmärrystä operaatioista. Nähtyään kokonaislukutehtävän oppilaat eivät osanneet yhdistää operaatiota oma-aloitteisesti muihin numerojärjestelmiin, eivätkä he ymmärtäneet operaation yleisyyttä. Warrenin (2003) mukaan tämänkaltaiset puutteet operaatioiden ymmärryksessä voivat enteillä vaikeuksia ymmärtää muuttujan käsitettä numeron yleistyksenä.

2.8. Tunne algebran tarkoituksettomuudesta

Useissa artikkeleissa (Linchevski & Herscovics, 1996; Kaput, 1999; Sfard & Linchevski, 1994) esitetään algebraan liittyvien vaikeuksien johtuvan ainakin osittain siitä, että yhtälöiden, lausekkeiden ja symbolien operointi vaikuttaa oppilaille tarkoituksettomalta. Perinteisesti algebran opetuksessa edetään esittelemällä ensin muuttujan käsite, sitten algebran lausekkeet ja vasta lopuksi yhtälöt, joissa muuttuja esiintyy (Kieran, 1992). Muiden muassa Linchevski ja Hercovics (1996) kyseenalaistavat tätä tapaa, jossa muuttuja esitellään oppilaille ennen kuin heillä on minkäänlaista käyttötarkoitusta tai merkitystä heille.

Tutkimuksessaan Linchevski ja Hercovics (1996) käsittelevät esimerkiksi termien ryhmittelyn, osiin hajottamisen ja kumoutumisen opettamista yhtälöiden yhteydessä. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat eivät olleet saaneet aiempaa opetusta algebrassa. Linchevski ja Hercovics (1996) esittävät, että yhtälöitä käyttämällä muuttuja esitellään oppilaille yhteydessä, jossa sen sekä sitä sisältävien termien ja yhtälöiden operoinnilla on jokin merkitys. Muuttujan esittely yhtälöiden yhteydessä antaa myös oppilaille mahdollisuuden aloittaa muuttujan käsittely alemmalla tasolla, niin sanottuna paikan pitäjänä tuntemattomalle luvulle. Algebran lausekkeiden käsitteleminen sellaisenaan ja ennen kaikkea näiden manipulaatioiden ymmärtäminen vaatii melko kehittyneen käsityksen kirjainmuuttujasta. Myös vanhemmilla, muodollisen ratkaisuprosessin hallitsevilla oppilailla on havaittu vaikeuksia ymmärtää sen merkitystä. (Linchevski & Herscovics, 1996)

Linchevski ja Livneh (1999) esittävät, että myös tehtävätyypeillä on osuutta siihen, miten merkitykselliseksi oppilaat algebran kokevat. Opetuksessa tulisi välttää keinotekoisia tehtäviä ja toimintoja, jotka johtavat ainoastaan kykyyn manipuloida matemaattisia objekteja ilman merkitystä tälle toiminnalle. Star ja Seifert (2005) vertailevat artikkelissaan standardialgoritmia noudattavaa algebran yhtälönratkaisua joustavaan yhtälönratkaisuun. He toteavat opittujen standardimenetelmien mukaan etenemisen olevan usein oppilaille merkityksetöntä sääntöjen noudattamista. Vaikka oppilas onnistuisi tällä menetelmällä ratkaisemaan yhtälön oikein, voi ymmärrys algebrallisten manipulaatioiden tarkoituksesta ja niiden perusteluista jäädä puuttumaan kokonaan. He toteavat myös, että tällaiset ulkoa opetellut menetelmät unohtuvat helposti, sillä oppilas ei ole ymmärtänyt syitä ja perusteita niiden käytölle.

Kaput (1999) esittää artikkelissaan perinteisen algebran opetuksen ruokkivan oppilaiden tunnetta sen merkityksettömyydestä ja jopa tarpeettomuudesta. Hänen mukaansa perinteinen algebran opetus koostuu algebran lausekkeiden yksinkertaistamisesta, yhtälönratkaisusta ja symbolien manipulointiin liittyvien sääntöjen opettelusta (Kaput, 1999). Hän arvostelee tätä opetusmenetelmää siitä, ettei se sisällä sovelluksia, jotka vaatisivat tiedon yhdistelemistä sekä matematiikan, että oppilaiden omien kokemuksien eri osa-alueilta. Yhteys oppilaiden arkielämään koetetaan luoda sovelluksilla ja soveltavilla tehtävillä, jotka ovat kuitenkin keinotekoisia. Nämä tehtävät ovat juuri matematiikkaa varten luotuja, eikä niillä käytännössä ole oppilaille merkitystä. Kaput (1999) esittää, että oppilaat kokevat algebran oppimisen sääntöjen ulkoa opetteluna ja muistamisena eivätkä asioiden ymmärtämisenä. Tämä ei johda ainoastaan virheisiin tehtävissä, vaan ennen kaikkea oppilaiden tunteeseen algebran opettelun merkityksettömyydestä ja tarkoituksettomuudesta. He eivät koe algebralle olevan mitään käyttöä elämässään matematiikan ulkopuolella. Kaput (1999) väittää tämän johtavan algebran kokemiseen epämiellyttävänä ja sitä kautta jopa estävän monien oppilaiden mahdollisuuden kiinnostua matematiikasta.

Sfard ja Linchevski (1994) käsittelevät myös artikkelissaan oppilaiden kokemusta matemaattisten manipulaatioiden merkityksettömyydestä nimenomaan algebran yhteydessä. He esittävät, että esimerkiksi yhtälöiden ratkaisussa oppilaat noudattavat enimmäkseen opittuja mekaanisia menetelmiä ymmärtämättä mitä yhtälö itsessään tai sen ratkaisu oikeastaan merkitsevät. Oppilaat tottuvat käsittelemään tietyn tyyppisiä yhtälöitä, mahdollisesti hyvin sujuvastikin, mutta esimerkiksi kirjainmuuttujien tarkoitusta tai merkitystä ei välttämättä ymmärretä laisinkaan. Kirjaimet muuttuvat oppilaille itsessään ratkaistaviksi asioiksi, joilla ei ole muuta merkitystä. Artikkelissa oppilaan käsitystä tällaisessa tilanteessa kuvataan sanoin ”he or she mistakes a signifier for the signified” (Sfard & Linchevski, 1994, s. 117). Näin ajatellessaan oppilaat näkevät muuttujille suoritetut prosessit täysin sattumanvaraisina ja merkityksettöminä, vaikka ratkaisu olisikin muodollisesti oikea. (Sfard & Linchevski, 1994)

Sfard ja Linchevski (1994) esittelevät artikkelissaan keskusteluja oppilaiden kanssa. Oppilaille annettiin ratkaistavaksi tehtäviä, joihin he eivät olleet oppineet muodollista ratkaisuprosessia. Eräänä esimerkkinä toimii toisen asteen epäyhtälö, joka annetaan ratkaistavaksi oppilaalle, jolle sekä toisen asteen yhtälöt että ensimmäisen asteen epäyhtälöt olivat tuttuja. Kuitenkaan nämä yhdistettynä eivät olleet oppilaalle tuttu asia. Oppilas kertoi keskustelussa etsivänsä tehtävän ratkaisuksi tiettyä lukua, joka toteuttaisi epäyhtälön. Tämä kertoo Sfardin ja Linchevskin (1994) mukaan siitä, että oppilaan käsitys muuttujasta on rajoittunut ainoastaan tuntemattoman käsitteeseen. Oppilas ei siis näe mahdollisuutta, että muuttuja voisi saada useampia arvoja. Myös muut artikkelissa esitellyt tapaukset vahvistavat väitettä, että oppilaat eivät ymmärrä muuttujaa funktionaalisessa yhteydessä useita mahdollisia arvoja saavana muuttujana. Oppilaat käsittävät muuttujan ainoastaan tiettyä toistaiseksi tuntematonta lukua symboloivana kirjaimena. Kun kyseisessä tehtävässä oppilas ei tiennyt standardiratkaisua, alkoi hän soveltaa tuntemiaan menetelmiä sattumanvaraisesti toivoen niiden toimivan myös tässä tapauksessa, ymmärtämättä mitä oikeastaan oli tekemässä. Artikkelissa esitetään, että tämä on eräs oppilaiden tapa toimia; manipuloida symboleita sattumanvaraisesti ajattelematta laisinkaan symbolien merkitystä. Toinen Sfardin ja Linchevskin (1994) havaitsema toimintamalli perustui oppilaiden taipumukseen nähdä muuttujat tuntemattomina lukuina. Muuttujille pyrittiin löytämään yksikäsitteiset ratkaisut tehtävätyypistä ja tilanteesta riippumatta, sillä oppilaat ovat tottuneet tehtävän ratkaisun olevan juuri sitä muotoa. Kun ratkaisuksi saadaan jotain muuta, esimerkiksi lineaarisen yhtälöparin tapauksessa $0 = 0$, ei tulosta osata tulkita oikein. (Sfard & Linchevski, 1994)

Sfard ja Linchevski (1994) nostavat kuitenkin esiin myös merkityksettömien symbolisten manipulointien hyödyllisyyden. Tällainen kyky käsitellä symboleita mekaanisesti on välttämätön työkalu matemaatikolle, sillä se helpottaa ajattelutyötä huomattavasti. Se mahdollistaa paljon sellaista abstraktin tiedon käsittelyä, joka ei muuten olisi mahdollista. Vaikka matemaatikot eivät symbolisia muunnoksia tehdessään joka vaiheessa ajattelekaan niiden syvempää merkitystä, vaan käsittelevät muuttujia ja muita symboleita sellaisinaan, eroaa se selvästi oppilaiden tavasta tehdä niin. Olennaista on se, että tarvittaessa matemaatikko kykenee antamaan perustelut tehdyille muunnoksille ja näkee symbolit sekä niiden manipuloinnin todella vain työkaluna, ei itse tarkoituksena. Artikkelissa korostetaankin opettajan tehtävää motivoida oppilaita etsimään algebran ja ylipäätään matematiikan merkityksiä hyvien oppimistulosten saavuttamiseksi. Sfard ja Linchevski (1994) käyttävät tässä yhteydessä termiä ”struggle for meaning” (Sfard & Linchevski, 1994, s. 121), joka korostaa sitä, että oppilaiden todella täytyy ponnistella saavuttaakseen merkityksellisyyden ja sitä kautta ymmärryksen.

3. Kognitiiviset esteet algebran oppimiselle

Aiheeseen liittyvien tutkimusten paljouden ansiosta myös vaihtoehtoisia selityksiä siirtymän vaikeudelle on esitetty paljon. Herscovics ja Linchevski (1994, 1996) puhuvat kognitiivisesta kuilusta ja Filloy ja Rojano (1989) didaktisesta kuilusta, tarkoittaen kuilua aritmetiikan ja algebran välillä. Herscovics ja Linchevski (1994) havaitsivat tutkimuksissaan oppilaiden kyvyttömyyden operoida (esimerkiksi ryhmitellä) tuntematonta, tai sitä sisältävää yhtälöä oma-aloitteisesti. Jos yhtälö oli mahdollista ratkaista pelkin numeerisin laskutoimituksin eli muuttuja esiintyi vain yhtäsuuruusmerkin toisella puolen, oppilaat kykenivät siihen. Haastavammissa tapauksissa oppilaat eivät kyenneet operoimaan muuttujakirjainta sisältäviä termejä. Herscovics ja Linchevski (1994) esittävät oppilaiden vaikeudet edetä tällaisissa tehtävissä johtuvan kognitiivisista esteistä heidän ajattelussaan. He käsittelevät aritmetiikan ja algebran väliseen siirtymään liittyviä vaikeuksia kognitiivisina esteinä ja tutkimuksessaan (Linchevski & Herscovics, 1996) he etsivät pedagogisia näkökulmia ja opetusmenetelmiä näiden esteiden ylittämiseen. Nämä menetelmät poikkeavat perinteisestä opetusnäkökulmasta suurimmaksi osaksi siinä, missä järjestyksessä ja yhteydessä asiat esitetään. Tällä pyritään välttämään muun muassa oppilaiden tuntemuksia lausekkeiden operoinnin tarkoituksettomuudesta.

Linchevski ja Herscovics (1996) testasivat tutkimuksessaan nykyisestä, vallitsevasta opetusmenetelmästä poikkeavia pedagogisia keinoja auttaakseen oppilaita ylittämään tämän kognitiivisen kuilun. He esittelivät omassa opetusmenetelmässään muun muassa muuttujaa sisältävien termien ryhmittelyn yhtälöiden yhteydessä. Erityisesti termien ryhmittelyä käsitellessä Linchevski ja Herscovics (1996) ovat vahvasti sitä mieltä, että nykyinen opetusmenetelmä ei luo oppilaille minkäänlaista käsitystä termien ryhmittelyn tarkoituksesta, kun se esitellään ennen varsinaisia yhtälöitä. He puoltavat termien ryhmittelyn opettamista yhtälöiden yhteydessä, jossa sillä on oppilaille jokin tarkoitus – yhtälön ratkaiseminen.

Linchevski ja Herscovics (1996) esimerkiksi esittelivät oppilaille ensin yhtälön $n + n = 178$, jonka oppilaat osasivat intuitiivisesti ratkaista ryhmittelemällä muuttujatermit mielessään. Tämän jälkeen oppilailta kysyttiin yhtälön $2n = 178$ ratkaisua. He tekivät tutkimuksen kuudelle heidän aiempaan tutkimukseensa (Herscovics & Linchevski, 1994) osallistuneista oppilaista, joista jokainen vastasi jälkimmäisen yhtälön ratkaisun olevan sama kuin ensimmäisen. Monimutkaisempiin yhtälöihin jatkamalla he loivat näin oppilaille käsityksen muuttujakirjaimen yhteenlaskun ja sen monikertojen välisestä yhteydestä merkityksellisten prosessien kautta. Näin oppilaat kykenevät näkemään muuttujaa sisältävät termit laskennallisina prosesseina, jolloin ne ovat helpompia ymmärtää. Tällöin myös oppilaiden käsitys algebran operationaalis-rakenteellisesta luonteesta kehittyy (ks. kappale 2.5.2.). (Linchevski & Herscovics, 1996) Vaikka oppimisvaikeuksien yhteys oppilaiden kognitiiviseen kehitykseen on erittäin mielenkiintoinen ja oleellinen, keskitytään tässä tutkielmassa kuitenkin enimmäkseen vaikeuksien tutkimiseen matematiikan didaktiikan näkökulmasta.

4. Algebrallisen ajattelun sidonnaisuus oppilaan ikään

Algebran aloitukseen liittyvien vaikeuksien tutkimisen lisäksi ovat eräät tutkijat alkaneet myös kyseenalaistamaan algebran nykyisiä opetusmenetelmiä ja tutkimaan niiden yhteyttä näihin vaikeuksiin. Edelleen yleisin käytäntö on aloittaa algebran opetus vasta yläkoulussa esittelemällä ensin muuttujan käsite, sitten algebran lausekkeet ja niiden manipulointi sekä lopuksi yhtälöt ja niiden ratkaiseminen (Kieran, 1992). Carraher, Schliemann ja Brizuela (2001) kyseenalaistavat artikkelissaan algebran opetuksen aloituksen lykkäämisen niin myöhäiseksi ja osoittavat tutkimuksellaan jo 8- ja 9- vuotiaiden kykenevän käyttämään kirjainmuuttujaa tuntemattoman merkitsemiseksi ja operoimaan sitä. Vallitseva käsitys alan tutkijoiden keskuudessa vaikuttaa olevan nuorten oppilaiden kykenemättömyys algebralliseen päättelyyn tai kirjainmuuttujan käsitteen ymmärtämiseen esimerkiksi kognitiivisen kehityksen takia (mm. Linchevski & Hercovics, 1996). Nuorten oppilaiden ajatellaan olevan kykenemättömiä algebran vaatimaan abstraktiin ajatteluun ja siksi se erotetaan alakoulun aritmetiikasta kokonaan (Carraher et al., 2001). Carraher et al. (2001) tunnustavat artikkelissaan kuilun aritmetiikan ja algebran välillä, mutta esittävät oleellisen kysymyksen siitä, voiko tämä kuilu olla seurausta nykyisestä matematiikan pedagogiikasta.

Carraher et al. (2001) osoittavat tutkimuksessaan, että kun heidän tutkimukseensa osallistuneille oppilaille oli esitelty mahdollisuus merkitä tuntematonta lukua kirjainmuuttujalla, he oppivat käyttämään sitä oma-aloitteisesti. Tietyin apuvälinein, kuten N-lukujanan avulla he oppivat myös operoimaan muuttujaa. Mikä tärkeintä, oppilaat ymmärsivät luvun N voivan kuvata mitä tahansa lukua. Näihin tutkimustuloksiinsa vedoten Carraher et al. (2001) väittävät, että algebran opetuksen aloitukselle vasta oppilaiden ollessa murrosikäisiä ei ole mitään syytä. Ennemmin algebran opetuksen pitäisi olla jo varhaisessa vaiheessa alkava monen vuoden prosessi, jossa algebrallinen ajattelu pääsee kehittymään. Aritmetiikan ja algebran erottaminen toisistaan opetuksessa voi kasvattaa kuilua niiden välillä entisestään. Artikkelissa kuitenkin todetaan, että useista samaa asiaa edistävistä tutkimuksista huolimatta tulee kulumaan aikaa, ennen kuin tämä hyväksytään yleiseksi käytännöksi matematiikan pedagogiikassa. Näin ollen mahdollisia algebran opetuksen varhaisen aloittamisen tuomia vaikutuksia oppilaisiin nähdään vasta kun useat matematiikan opettajat ovat systemaattisesti alkaneet toimimaan asian puolesta. (Carraher et al., 2001)

Myös Hewitt (2012) nostaa artikkelissaan esille ristiriidan algebran aloitukseen liitettyjen lukuisten oppimisvaikeuksien ja nuorilla oppilailla havaittujen algebrallisten taitojen välillä. Tutkimuksessaan hän opetti 9-10 vuotiaille oppilaille algebran muodollisia merkintöjä ja lineaaristen yhtälöiden ratkaisua sitä varten kehitetyn tietokoneohjelman avulla. Oppilaille ei ollut opetettu lainkaan algebran merkintöjä, ja tietokoneohjelma esitti esimerkiksi kirjainmuuttujan merkinnän tehtävän ratkaisun yhteydessä ilman, että sen merkitystä erikseen selitettiin oppilaille. Merkittävää oli, että oppilaat tuntuivat hyväksyvän ja omaksuvan merkinnät ilman erityistä reaktiota tai kyseenalaistamista. Yleisimpiä algebran aloitukseen liittyviä vaikeuksia ei joko havaittu oppilailla laisinkaan, tai niistä päästiin nopeasti yli ohjelman antaman neutraalin palautteen avulla. Oppilaiden saama neutraali palaute mahdollisti sen, että he havaitsivat ja kykenivät korjaamaan omat virheensä itse. Nämä tutkimustulokset kyseenalaistavat usein havaittujen vaikeuksien väistämättömän kuulumisen algebran oppimiseen ja herättävät kysymyksen siitä, olisivatko ongelmat vältettävissä matematiikan pedagogiikan kehittämisen avulla. (Hewitt, 2012)

Muun muassa Carraherin (2001) tutkimuksen jälkeen tutkimus nuorten oppilaiden algebrallisen ajattelun kyvyistä on lisääntynyt, ja tutkimustulokset tukevat väitettä siitä, että algebran peruskäsitteitä voitaisiin sisällyttää jo alakoulun matematiikan opetukseen (Radford, 2010). Radford ei itse käsittele artikkelissaan nuorten oppilaiden kykyä käyttää kirjainmuuttujaa, vaan ennemmin heidän algebrallisen ajattelun muotojaan. Hänen tekemänsä tutkimuksen tulosten perusteella 2. luokan oppilaat kykenevät yleistämään numeerisia esimerkkejä sekä visuaalisesti että sanallisesti selittäen. Koska oppilaille ei ole opetettu kirjainmuuttujan käsitettä, he viittaavat tuntemattomaan lukuun sanallisesti termillä *the number* (Radford, 2010, s. 77). Tämä viittaa heidän ymmärtävän kyseessä olevan tietty, tuntematon luku. Oppilaat siis kykenivät saavuttamaan uuden yleistyksen tason, jonka voidaan katsoa vaativan algebrallista ajattelua.

Radfordin (2010) tutkimuksessa tyydyttiin oppilaiden tekemään sanalliseen yleistykseen, eikä sitä pyrittykään ilmaisemaan matemaattisesti kirjoittamalla, sillä mielenkiinto oli ainoastaan heidän ajattelunsa tutkimuksessa. Tämä kuitenkin herättää ajatuksen siitä, miten kirjainmuuttuja olisi käytännöllistä esitellä oppilaille. Tässä tilanteessa esiteltynä muuttujalla tai jollain muulla esimerkiksi oppilaan itse keksimällä symbolilla olisi selvä tarkoitus symboloida tuntematonta lukua. Kokisivatko oppilaat muuttujan ja algebran ylipäätään merkityksellisempänä, jos ne esiteltäisiin yhteydessä johon ne ovat alun perin matematiikan historian kehityksessä luotu?

5. Mahdollisia keinoja välttää yleisimmät vaikeudet

5.1. Historiallinen näkökulma opetusmenetelmänä

Algebran aloituksen opetusmenetelmiä pohdittaessa eräät tutkijat (Van Amerom, 2003; Sfard & Linchevski, 1994) nostavat esille algebran historiallisen kehityksen ja sen mahdollisen hyödyntämisen opetuksessa. Van Amerom (2003) toteaa sanallisten tehtävien olevan historiallisesti selkein yhteys aritmetiikan ja algebran välillä. Hän nostaa esille tärkeän huomion siitä, että niiden kaltaisia matemaattisia ongelmia on kyetty ratkaisemaan jo ennen algebran kehittämistä. On tärkeää muistaa, että algebra on kehitetty muun muassa näiden ongelmien ratkaisua helpottavaksi työkaluksi. Myös Sfard ja Linchevski (1994) huomauttavat, että nykyinen käsitys algebrasta ainoastaan muodollisten symbolien manipulointina on itse asiassa vain pieni ja melko uusi osa algebraa sen historiallisen kehityksen näkökulmasta.

Van Amerom (2003) tutkii artikkelissaan oppilaiden itse kehittämiä epämuodollisia ongelmanratkaisumenetelmiä, heidän intuitiivisesti käyttämiään merkintöjä ja lyhenteitä sekä yhtälönratkaisumenetelmiä. Hän havaitsi tutkimuksessaan 5-, 6- ja 7- luokkalaisten kykenevän ratkaisemaan yhtälöitä ilman muodollisia algebrallisia yhtälönratkaisumenetelmiä, omilla merkinnöillään, jotka tukivat algebrallista ajattelua. Kuten aiemmin mainittu, algebran symboliset taidot ja algebrallinen ajattelu ovat siis kaksi eri asiaa ja voivat kehittyä eri tahtiin. Oleellista olisi saada symbolinen algebra oppilaiden käyttöön alkuperäisessä merkityksessään, apuvälineeksi algebralliselle ajattelulle (Van Amerom, 2003).

Jo aiemmin mainittu Linchevskin ja Herscovicsin (1996) ajatus nykyisen opetusmenetelmän kyseenalaistamisesta jatkaa samalla linjalla kuin historiallinen näkökulma opetusmenetelmän lähtökohtana. He esittävät idean yhtälöiden esittelystä ennen kirjainmuuttujaa, ja esimerkiksi termien ryhmittelyn ja hajottamisen opettamisesta lausekkeiden sijasta yhtälöiden viitekehyksessä. He mainitsevat tämän olevan oppilaille mahdollisesti luonnollisempi tapa. Tällä he viittaavat näiden menetelmien historialliseen kehitykseen ja siihen mitä varten ne ovat alun perin kehitetty. Näin muuttujan, sitä sisältävien lausekkeiden ja yhtälöiden operoinnin oppiminen tapahtuisi viitekehyksessä johon ne ovat luotu, ja olisi näin ollen myös mielekkäämpää ja tarkoituksenmukaisempaa oppilaille. (Linchevski & Herscovics, 1996)

Sfard ja Linchevski (1994) esittävät artikkelissaan algebran historiallisen kehityksen vaiheita aritmetiikan yleistyksestä abstraktiin algebraan muun muassa taulukon avulla (Sfard & Linchevski, 1994, s. 203). Yksi heidän tutkimuksensa perusoletuksista on käsitys siitä, että oppilaan algebrallisten näkökulmien kehitys seuraa ainakin suurpiirteisesti algebran historiallista kehitystä. Heidän mukaansa historiassa esiintyneitä vaiheita ei tulisi siis jättää pois myöskään algebran opetuksessa. Taulukossa ei tarkalleen erotella esimerkiksi muuttujan, lausekkeiden ja yhtälöiden esiintymisjärjestystä tai viitekehystä opetuksessa, vaan se on suurpiirteisempi. Yhtenä pääkohtana taulukossa esitetään operationaalisen näkökulman esiintyvän ennen rakenteellista niin algebran historiallisessa kehityksessä kuin oppilaiden kognitiivisessa kehityksessäkin.

Artikkelissaan Sfard ja Linchevski (1994) toteavat nykyisen algebran opetusmenetelmän kääntävän päälaelleen algebrallisten symbolien väliset suhteet kun verrataan opetusjärjestystä algebran historialliseen kehitykseen. He kutsuvat perinteistä algebran opetusta rakenteelliseksi, viitaten siihen, että siinä lähtökohtana on muuttuja ja sitä sisältävien termien rakenteellinen käsittely. Tämän oletetaan johtavan kehittyneen rakenteellisen näkökulman omaksumiseen, mutta Sfard ja Linchevski (1994) ovat sitä mieltä, etteivät oppilaat vielä tuossa kehityksen vaiheessa kykene käsittämään algebran operationaalis-rakenteellista luonnetta. He myös esittävät, että tämä opetusmenetelmä vaatii oppilailta muuttujan käsittämistä heti sen esittelyvaiheessa funktionaalisessa yhteydessä. Kuitenkin tutkimustulokset osoittavat sen olevan oppilaille huomattavasti haastavampaa kuin muuttujan ymmärtäminen tuntemattomana. He kritisoivat siis perinteistä opetusmenetelmää ja esittävät algebran yhteydessä esiintyvien ongelmien olevan ainakin osittain sen seurausta: ”The conceptual pyramid is put on its head, so it is only natural that it has a tendency for falling.” (Sfard & Linchevski, 1994, s. 120)

Artikkelissa ja siinä esiintyvässä taulukossa siis esitetään operationaalisen ajattelun kehittyvän luonnollisesti ennen rakenteellista sekä historiallisessa kehityksessä että oppilaiden kognitiivisessa kehityksessä. Sfard ja Linchevski (1994) ovat selkeästi sitä mieltä, että järjestystä, jossa algebran käsitteet opetetaan, tulisi muuttaa parempien tulosten saamiseksi. He kannattavat algebran opetuksen aloitusta prosessien kautta merkityksettömän symbolien manipuloinnin sijaan, jotta oppilaiden luonnollista taipumusta operationaaliseen näkökulmaan voitaisiin vahvistaa. Tämä voidaan ymmärtää esimerkiksi aiemmin mainitun yhtälöiden yhteydessä opettamisen kaltaisena lähestymistapana. Artikkelissa kuitenkin todetaan perinteisen opetusmenetelmän kritiikistä huolimatta, että se ei ole ainoa syy algebran yhteydessä esiintyviin ongelmiin, eikä heidän esittämänsä opetusmenetelmä ole yksiselitteisesti oikea ja ongelmaton. (Sfard & Linchevski, 1994)

5.2. Muita vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä

5.2.1. Algebran opetus matemaattisten mallien avulla

Zazkis & Liljedahl (2002) tutkivat artikkelissaan luokanopettajaopiskelijoiden kykyä yleistää matemaattisia malleja (engl. *pattern*) ja sen yhteyttä algebralliseen ajatteluun ja symboliseen algebraan. Malleilla tässä tarkoitetaan säännönmukaisuuksia esimerkiksi numeerisissa, geometrisissa, lineaarisissa tai toistuvissa sarjoissa. Muiden muassa Orton ja Orton (1999) ovat havainneet, että kyky jatkaa sarjaa äärellisellä määrällä jäseniä eli sarjan noudattaman mallin ”näkeminen” on oppilaille helpompaa, kuin sarjan yleisen termin ilmaiseminen joko sanallisesti, kirjallisesti tai matemaattisesti. Zazkis & Liljedahl (2002) havaitsivat tutkimuksessaan, että vaikka heidän tutkimansa luokanopettajaopiskelijat kykenivät kuvailemaan heille annetun sarjan säännönmukaisuuksia ja ominaisuuksia kirjallisesti, kokivat he itse määritelmänsä riittämättömiksi ilman algebrallista ilmaisua sille. Artikkelissa kuitenkin todetaan, että matemaattisia malleja ja säännönmukaisuuksia etsiessään opiskelijat muun muassa vertailivat sarjan jäsenten samankaltaisuuksia ja eroavaisuuksia, etsivät algoritmeja sekä tutkivat sarjan jäsenten numeerisia suhteita toisiinsa. Muun muassa Kaputin (1999) määritelmän mukaan nämä toiminnot ovat osa algebrallista ajattelua. (Zazkis & liljendahl, 2002)

Artikkelissaan Zazkis & Liljedahl (2002) toteavat useiden tutkijoiden esittäneen idean käyttää mallien yleistämistä johdatteluna algebraan. Tällä tavalla oppilaat ymmärtäisivät algebran yleistävää luonnetta paremmin. Kun mallien ilmaisemiseksi heille opetettaisiin symbolista algebraa, olisi oppilaiden helpompaa luoda merkitys symboleille, kuin perinteisessä opetusmenetelmässä. English & Warren (1998) esittävät, että jos kirjainmuuttujat esiteltäisiin juuri matemaattisten mallien yleistyksien yhteydessä, ymmärtäisivät oppilaat muuttujan helpommin nimenomaan useita mahdollisia arvoja saavana muuttujana. Nykyisessä opetusmenetelmässä muuttujat esiintyvät yhtälöissä usein ainoastaan tuntemattoman roolissa, joten myös oppilaiden käsitys on rajoittunut siihen. (Zazkis & Liljedahl, 2002)

Kuten aiemmin todettu, myös muut tutkijat ovat havainneet oppilaiden kokevan helpommaksi ymmärtää kirjainmuuttuja tuntemattomana (ks. kappale 2.1.). English & Warren (1998) esittävät tämän johtuvan opetusmenetelmästä, jossa muuttuja useimmiten esiintyy juuri tässä roolissa. Tähän aiheeseen liittyen on siis havaittavissa ristiriitoja tutkijoiden näkemysten kesken. Muun muassa Sfard ja Linchevski (1994) kannattavat algebran opetuksen aloittamista esittelemällä kirjainmuuttuja tuntemattomana, sillä se on oppilaille huomattavasti helpompi käsite kuin muuttuja funktionaalisessa yhteydessä, kun taas English ja Warren (1998) syyttävät tätä opetusmenetelmää oppilaiden rajoittumisesta tuntemattoman käsitteeseen.

Kaput (1999) on ottanut yleistämisen ja sen formalisoinnin määritelmässään yhdeksi viidestä algebran osa-alueesta. Hän esittää yleistämisen jo ilman muodollista symbolointia olevan algebrallista ajattelua, johon oppilaita pitäisi jo alakoulussa johdatella. Hänen määritelmänsä mukaan yleistämiseen kuuluu muun muassa tapausten yhteneväisyyksien tunnistaminen ja päättelyn laajentaminen koskemaan muitakin kuin yksittäisiä tapauksia. Hänen mukaansa jo alakoululaiset kykenevät tähän. Ilman taitoa ilmaista yleistyksiä matemaattisin symbolein nuoret oppilaat käyttävät puhuttua kieltä. Kaput (1999) esittää artikkelissaan opetustilanteita, jotka ilmentävät oppilaiden algebrallista ajattelua: Kolmasluokkalaiset alkoivat eräässä tehtävässä tehtyjen omien havaintojensa perusteella pohtia kertolaskun kommutatiivisuutta. He havaitsivat ensin, että $12 \cdot 3 = 3 \cdot 12$, $4 \cdot 9 = 9 \cdot 4$ ja niin edelleen. Eräs oppilas esitti kysymyksen, toimiiko vaihdannaisuus kaikille luvuille ja oppilaat alkoivat pohtia asiaa. He kehittelivät lisää esimerkkejä, joilla tämä näytti toimivan, mutta eivät edelleenkään olleet varmoja toimisiko se kaikille mahdollisille luvuille. Tämä osoittaa oppilaiden kyvyn havaita tilanteiden yhteneväisyydet ja niissä mahdollisesti toistuvat matemaattiset mallit eli yleistää tilanne. Myös se, että he pohtivat säännönmukaisuuden toimivuutta yleisesti ja kaipasivat sille muutakin perustelua kuin yksittäiset esimerkit, on merkki algebrallisesta ajattelusta. Kaput (1999) siis ei varsinaisesti puhu algebran opetuksen aloituksesta - kuten kirjainmuuttujan esittelemisestä - kaavojen yleistämisen kautta. Hän osoittaa matemaattisten mallien yleistämisen olevan yksi keino harjoittaa algebrallista ajattelua jo nuorilla oppilailla ennen varsinaista algebran opetusta. (Kaput, 1999)

5.2.2. Esialgebra

Jo aiemmin kappaleessa 2.4. mainittu Linchevskin (1995) artikkeli käsittelee lyhyesti tutkimusta esialgebrasta, eli algebran käsitteiden ja rakenteiden integroimisesta matematiikan opetukseen jo aritmetiikan yhteydessä. Hän esittää, ettei algebrallinen ajattelu vaadi algebrallisia symboleita tai ole riippuvaista niistä, vaan sitä esiintyy ja sitä voidaan harjoittaa jo ennen symbolisen algebran opetusta. Artikkelissa käsitellään algebran eri osa-alueita, joihin liittyen esialgebraa voitaisiin käyttää usein esiintyvien vaikeuksien välttämiseksi. Esialgebraa voi Linchevskin (1995) mukaan käyttää valmistavana kurssina ennen varsinaista muodollisen algebran opetusta aritmetiikan yhteydessä. Hän esittää myös mahdollisuuden ottaa algebrallinen ajattelu osaksi aritmetiikkaa jo matematiikan opetuksen alkuvaiheissa, kuten Kaput (1999) esitti. Tarkoituksena molemmissa tavoissa on tukea siirtymävaihetta aritmetiikasta algebraan ja kehittää oppilaiden ymmärrystä kohti algebrassa vaadittavaa rakenteellista näkökulmaa (Linchevski, 1995). Artikkelissa käsiteltyjä algebran osa-alueita ovat matemaattisten mallien yleistäminen, matemaattiset rakenteet, yhtälöt ja sanalliset tehtävät. Näiden aihealueiden integroimiseen aritmetiikan yhteyteen annetaan artikkelissa joko konkreettisia tehtäväesimerkkejä tai yleisiä näkökulmia. Nämä menetelmät ottavat huomioon sekä algebran yhteydessä vaadittavat ajatusmallit että yleisimmin näiden asioiden yhteydessä havaitut oppimisvaikeudet. (Linchevski, 1995)

Linchevski (1995) kyseenalaistaa sekä kirjainmuuttujien käytön välttämättömyyden algebrallisessa ajattelussa että kirjainmuuttujien esittelyn perinteisessä algebran opetuksessa. Hän nostaa esiin algebran historiallisen kehityksen näkökulman ja alkeelliset käsitteet ennen kirjainmuuttujan ”keksimistä” ja käyttöönottoa. Artikkelissa esitetään olennainen kysymys liittyen nykyiseen algebran opetukseen: Onko opetuksen tarkoituksena löytää keino ohittaa historian aikana havaitut alkeelliset käsitykset väärinkäsityksinä ja antaa oppilaille valmiina kehittyneemmän algebran ongelmanratkaisumenetelmät, vai tulisiko opetuksen seurata historiallista kehitystä tukeakseen oppilaan kognitiivista kehitystä? Linchevskin (1995) väittämien mukaan algebrallista ajattelua voidaan kehittää jo paljon ennen nykyiseen algebran opetuksen aloitukseen liitettyjä ikävuosia. Tärkein kysymys lienee se, miten tätä ajattelua kyetään kehittämään parhaalla mahdollisella tavalla, jotta siirtymää muodolliseen algebraan voitaisiin helpottaa ja yleisimmät vaikeudet voitaisiin välttää.

Kuten aiemmin mainittu (ks. kappale 1.2.), useat tutkijat uskovat Linchevskin (1995) tavoin algebran yhteydessä esiintyvien ongelmien kumpuavan aritmetiikan opetuksesta ja oppimisesta sekä aritmetiikan ja algebran toisistaan erottamisesta opetuksessa. Näiden näkökulmien valossa Linchevskin (1995) esitys algebran integroimisesta aritmetiikan opetukseen tuntuu luonnolliselta tavalta kehittää oppilaiden algebrallista ajattelua jo ennen varsinaiseen algebran opetukseen siirtymistä. Muun muassa Carraher et al. (2001) ja Hewitt (2012) osoittivat tutkimuksissaan käsityksen alakouluikäisten oppilaiden kykenemättömyydestä kirjainmuuttujan käsittelyyn virheelliseksi. Tämä puoltaisi myös algebrallisen ajattelun ja ehkä jopa kirjainmuuttujan tuomista jo alakoulun matematiikan opetukseen.

Hewitt (2012) korostaa matematiikkaan liittyvien yleisten merkintätapojen ja symbolien olevan jonkun päättämiä ja yleisesti hyväksyttyjä toimintatapoja, joita oppilaiden ei tulekaan ymmärtää tai keksiä, vaan omaksua heille esitetty tieto sellaisenaan. Onko tämä ristiriidassa esimerkiksi sen näkemyksen kanssa, että kirjainmuuttuja tulisi esitellä oppilaille yhteydessä, jossa heillä on sille käyttöä ja he kykenevät luomaan sille merkityksen (mm. Linchevski & Herscovics, 1996)? Johtaako Hewittin (2012) käyttämä opetusmenetelmä pitkällä aikavälillä asioiden ulkoa opetteluun ja ymmärtämättömyyteen sekä sitä kautta myös unohtamiseen? Vai antaako se oppilaille mahdollisuuden käyttää valmiiksi kehitettyjä työkaluja hyödykseen parhaalla mahdollisella tavalla, ohittaen algebran kehityksessä läpikäydyt virheelliset käsitykset? Herää kysymys, olisiko näiden ”virheellisten” ajatusmallien läpikäyminen ja hylkääminen hyödyllistä oppilaille heidän matemaattisen ja algebrallisen ajattelun kehityksen kannalta.

6. Johtopäätökset

Tutkielmaa tehdessäni havaitsin, että siirtymään aritmetiikasta algebraan liittyvää tutkimusta on tehty paljon jo useamman vuosikymmenen ajan. Jo varhaisimmat aiheeseen liittyvät tutkimukset (mm. Collis, 1974) käsittelivät oppilailla havaittuja ongelmia, joita voidaan havaita matematiikan opetuksessa tänäkin päivänä. Tämä kertoo siitä, että aihe on edelleen ajankohtainen ja tutkimusta tarvitaan lisää. Osa tutkijoista (Herscovics & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989) esittää vaikeuksien olevan yhteydessä oppilaiden kognitiiviseen kehitykseen. Käyttämieni tutkimusten valossa esitän kuitenkin, etteivät algebrallisen ajattelun kehittyminen tai algebran oppiminen ole täysin riippuvaisia oppilaan iästä, kuten vallitseva ajatus etenkin ennen 2000-lukua tehdyissä tutkimuksissa tuntuu olevan. Oppimisvaikeuksia on selitetty nuorten oppilaiden kykenemättömyydellä algebralliseen ajatteluun tai kirjainmuuttujan ymmärtämiseen. Osittain tämän takia perinteiseen opetusmenetelmään kuuluu aritmetiikan ja algebran erottaminen toisistaan ja algebran opetuksen aloitus vasta yläkoulussa. Siirtymävaiheen helpottamiseksi ja oppimisvaikeuksien vähentämiseksi huomio tulisi mielestäni keskittää juuri opetusmenetelmiin ennen varsinaista algebran opetusta.

Sekä tässä tutkielmassa käytetyt tutkimukset että kyseiseen aiheeseen liittyvät julkaisut ylipäätään vaikuttavat olevan suurimmaksi osaksi samoilla linjoilla siitä, että vaikeuksiin voidaan puuttua ainoastaan matematiikan pedagogiikkaa kehittämällä. Yhdessäkään löytämistäni tutkimuksista ei suoranaisesti puolleta algebran nykyistä opetusmenetelmää. Tämä herättää jatkokysymyksen siitä, miten perinteinen algebran opetusmenetelmä on kehitetty ja mihin se perustuu. Miksi merkittäviä askeleita tämän opetusmenetelmän kehittämiseksi ei ole otettu, jos tutkimuksia sen mahdollisesta osallisuudesta havaittuihin oppimisvaikeuksiin on tehty jo usean vuosikymmenen ajan?

Vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä esittelevät tutkimukset antoivat lupaavia tuloksia, mutta käytännössä niiden vaikutukset oppilaisiin ja oppimisvaikeuksiin voitaisiin nähdä vain jos suuri joukko opettajia ottaisi ne käyttöönsä ja oppilaita tutkittaisiin pitkällä aikavälillä (Carraher et al., 2001). Perinteisen opetusmenetelmän muuttaminen tulisi olemaan erittäin hidas ja työläs prosessi, mutta matematiikan pedagogiikan kehittäminen on mielestäni ainoa keino lähestyä näitä ongelmia. Tutkimusta tarvitaan edelleen, ja siirtymään liittyviä oppimisvaikeuksia ja ennen kaikkea niiden syitä tulisi tuoda matematiikan opettajien tietoisuuteen. Vaihtoehtoisista opetusmenetelmistä lukeminen voi ohjata opettajia kyseenalaistamaan perinteisiä opetusmenetelmiä ja kehittämään sekä opetusmenetelmiään että itseään opettajana.

Koska itse algebran määritelmä ei ole yksiselitteinen, ei voida olettaa, että sen opetukseen löydettäisiin täysin yksiselitteinen ja yleisesti hyväksytty menetelmä. Se, ovatko siirtymään liittyvät oppimisvaikeudet väistämättömiä vai voidaanko niiltä välttyä matematiikan pedagogiikkaa kehittämällä, jää vielä tähän mennessä tehtyjen tutkimuksien valossa epäselväksi. Käsittelemieni artikkelien perusteella vaikuttaisi siltä, että vaikeudet voivat mahdollisesti ainakin osittain johtua nykyisistä opetusmenetelmistä. Vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä ja mahdollisia keinoja välttää havaittuja vaikeuksia on esitetty laajalti, ja ne ovat osittain myös ristiriidassa keskenään. Tällainen keskustelu ja jopa ristiriidat ovat kuitenkin juuri sitä, mitä matematiikan pedagogiikka vaatii kehittyäkseen.

Lähteet

Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational studies in mathematics*, 80, 351-367.

Bardini, C., Radford, L. & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *Proceedings of the 29th Conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 2* (s. 129-136).

Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook* (s.299-306). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D., Schliemann, A. D. & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, (Vol. 1)* (s. 130-140). Utrecht, The Netherlands.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive development of mathematics learning*. Paper presented for the Psychology of mathematics education workshop, Shell mathematics Unit. Centre for science education, Chelsea College, University of London, England.

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-years olds. *Educational Studies in Mathematics,* 33(1), 45–70.

English, L.D. & Warren, E.A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166–170.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. In J.M. Moser (Ed.), *Proceeding of the sixth annual meeting of PME- NA* (s.51-56). Madison, Wisconsin.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 36-59.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The journal for research in mathematics education*, 26(2), 115-141.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational studies in mathematics*, 81, 139-159.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (s. 133-155). Erlbaum, Mahwah, NJ.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (s. 91-96). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In T. D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 390-419). Macmillan, New York.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The journal of mathematical behavior*, 14, 113-120.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, 30(1), 39-65.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numeric contexts. *Educational studies in mathematics*, 40, 173-196.

Lins, R. L. (1990) A framework of understanding what algebraic thinking is. In G. Brooker, P. Gobb and T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the fourteenth international conference of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 93-101). Mexico City, Mexico.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational studies in mathematics*, 71, 19-41.

Matz, M. (1980). Building a metaphoric theory of mathematical thought*. Journal of mathematical behavior,* 3 (1), 93-166.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: Pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, 21 (1), 44-67.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s.104-120). Cassell, London.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In Pinto, M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 4* (s. 73-80). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational studies in mathematics*, 26, 191-228.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational studies in mathematics,* 37, 251-274.

Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary educational psychology*, 31, 280-300.

Tirosh, D. Even, R. & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics*, 35, 51-64.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational studies in mathematics*, 54, 63-75.

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.

Zazkis, R., Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, 49, 379-402.