# Residylaskenta ja sen sovelluksena äärettömien sarjojen summien laskeminen ja Mittag-Lefflerin laajennuslause

Pro Gradu-tutkielma

Urho Erkkilä
Matematiikan tieteiden laitos
Oulun Yliopisto

Kevät 2013

# Sisältö

# Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään kompleksilukuja ja niihin liittyvää residylaskentaa, jota pystytään soveltamaan kompleksianalyysissä. Kompleksilukujen teoria eroaa merkittävästi reaalilukujen teoriasta, mutta kompleksiluvuilla on erittäin hyödyllisiä käyttötapoja, kuten tässä tutkielmassa esiteltävä menetelmä reaaliarvoisten sarjojen summien laskemiseen. Ennen tämän tutkielman pääaiheisiin siirtymistä, täytyy kuitenkin esittää hieman esitietoa kompleksiluvuista, -funktioista, -jonoista ja -sarjoista.

Tutkielman ensimmäisessä kappaleessa esitellään kompleksiluvut ja eräitä hyvin keskeisiä kompleksilukujen ominaisuuksia. Ensimmäisenä määritellään kompleksiluvut, kompleksilukujen laskutoimitukset ja kompleksiluvun itseisarvo. Tämän jälkeen esitellään kompleksilukujen napakoordinaattiesitys, De Moivren lause ja Eulerin kaava. Eulerin kaavalla määritellään kappaleen lopussa kompleksilukujen trigonometriset funktiot.

Toinen kappale esittelee kompleksilukujonon ja kompleksifunktion sekä siihen liittyviä määritelmiä ja tuloksia. Alussa käsitellään kompleksilukujonoa ja funktiojonoa sekä niiden suppenemista. Tämän jälkeen tarkastellaan kompleksifunktion analyyttisyyttä määrittelemällä ensin derivoituvuus, integroituvuus, kiekon määritelmä ja lopuksi analyyttisyyden määritelmä, josta huomataan, että kompleksifunktion analyyttisyydessä ja reaalifunktion derivoituvuudessa on yhteys. Tämän jälkeen esitellään pari tärkeää tulosta, joita tarvitaan osoittamaan Cauchyn integraalikaava, joka on kappaleen viimeinen tulos ja keskeinen asia tässä tutkielmassa.

Kolmas kappale käsittelee potenssisarjaa, funktion Taylor-kehitelmää ja funktion Laurent-kehitelmää. Tätä ennen kappaleessa esitellään sarja ja sen suppenemiseen liittyviä tuloksia. Tämän jälkeen käydään läpi muutamia suppenemistestejä sarjoille, joilla voidaan tutkia erilaisten sarjojen suppenemista. Tämän jälkeen esitellään analyyttisen funktion potenssisarjakehitelmä, jonka avulla todistetaan funktion Taylor-kehitelmä ja lasketaan tämän avulla funktiolle $e^z$ jo reaalianalyysistäkin tuttu sarjakehitelmä. Kappaleen lopussa esitellään funktion Laurent-kehitelmä, jonka avulla päästään siirtymään tutkielman pääaiheeseen residylaskentaan.

Neljännessä kappaleessa käsitellään residylaskentaa. Ensin esitellään residylause ja näppärä kaava, jolla voidaan laskea funktion residyt ilman, että muodostettaisiin funktiosta ensin Laurent-sarja. Kappaleen lopussa lasketaan pari esimerkkiä liittyen residylauseeseen.

Viidennessä kappaleessa esitellään tuloksia, joilla voidaan laskea reaaliarvoisille sarjoille tarkkoja arvoja residylaskennan avulla. Kappaleen alussa esitellään tuloksia, joiden avulla päästään osoittamaan kaava, jolla voidaan laskea tietynlaisten sarjojen summia. Kappaleen lopussa lasketaan esimerkkejä sarjoista, joiden summa on $\pi^2$ ja $\pi^4$.

Tutkielman viimeinen kappale käsittelee Mittag-Lefflerin laajennuslausetta, joka on hyvä apuväline silloin, kun halutaan sarjakehitelmä sellaisille sarjoille, joilla on vain yksinkertaisia singulaaripisteitä. Kappaleen alussa todistetaan kyseinen tulos ja tämän jälkeen lasketaan funktioille $\csc z$ ja $\tan z$ sarjakehitelmät Mittag-Lefflerin laajennuslauseen avulla.

Tutkielmassa on pääosin käytetty teosta [1]. Äärettömien sarjojen summaamiseen liittyvissä tuloksissa on käytetty apuna teosta [2]. Lisäksi on suositeltavaa tutustua lähteeseen [3] tutustuessa tutkielmaan.

# 1 Kompleksiluvut ja niiden ominaisuudet

## 1.1 Kompleksilukujen määrittely

Tässä luvussa esitellään kompleksiluvut ja niiden ominaisuuksia, jotka ovat pohjana tutkielman myöhemmille aiheille. Luvussa on esitelty kompleksilukujen laskutoimitukset, kompleksilukujen napakoordinaattiesitys, kompleksiluvun itseisarvo, De Moivren lause, Eulerin kaava ja trigonometrisiä funktioita kompleksiluvuille.

Kompleksiluvut ovat muotoa $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $i$ on imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksiluvussa $a$ on kompleksiluvun reaaliosa ja $b$ on kompleksiluvun imaginääriosa. Kompleksiluvun $z = a + bi$ kompleksikonjugaatti on $\overline{z} = a - bi$.

## 1.2 Kompleksilukujen laskutoimitukset

Kompleksiluvuille $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ ovat voimassa seuraavat laskutoimitukset:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Nämä laskutoimitukset määrittelevät kompleksilukujen kunnan ja niistä voidaan johtaa kompleksilukujen jako- ja vähennyslasku.

Kompleksiluvun itseisarvo on

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tätä lukua sanotaan myös kompleksiluvun moduuliksi. Tarkastellaan seuraavaksi eräitä itseisarvon ominaisuuksia. Olkoot $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksilukuja. Tällöin

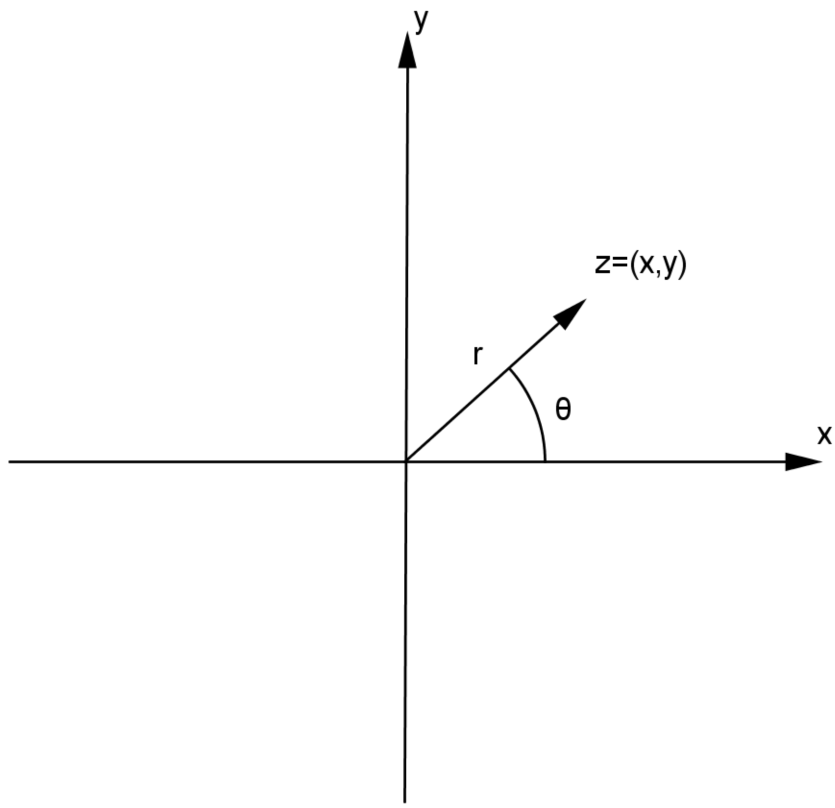
1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ja yleisesti $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2| \cdots |z_n|$.
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

Lisäksi kolmioepäyhtälö pätee myös kompleksiluvuille eli

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1}$$

## 1.3 Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys

Kompleksiluvut voidaan ajatella myös pisteinä $xy$-tasossa, jota kutsutaan kompleksitasoksi. Kompleksiluku $x+iy$ voidaan tällöin esittää pisteenä $(x, y)$, mikä on esitettynä seuraavassa kuvassa.




Tunnetusti $xy$-tason pisteet voidaan esittää napakoordinaattien avulla. Täten myös kompleksiluku $x + iy \neq 0$ voidaan nyt ilmaista vaihekulman $\theta$ ja pituuden $r$ avulla seuraavasti

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

missä $r = |z|$ ja $\theta = \arg z$ positiivisen $x$-akselin ja origosta piirretyn vektorin $z$ väliin jäävä kulma välillä $0 \leq \theta < 2\pi$. Tällöin

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Tämä on kompleksiluvun $z$ napakoordinaattiesitys, joka on yksikäsitteinen, kun $0 \leq \theta < 2\pi$. Napakoordinaattiesitystä voidaan myös soveltaa laskettaessa kompleksilukujen tuloa. Tähän käytetään De Moivren lausetta.

**Lause 1.1** (De Moivren lause). *Olkoon $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksilukuja. Tällöin*

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \left\{\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right) + i \sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right)\right\}.$$

*Erityisesti*

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

*Todistus.* [1, s.16]. □

## 1.4 Eulerin kaava

Tarkastellaan seuraavaksi Eulerin kaavaa. Oletetaan, että reaalianalyysissä määritelty funktion $e^x$ laajennus äärettömäksi sarjaksi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

pätee, kun $x = i\theta$. Tällöin saadaan Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Eulerin kaavasta voidaan johtaa seuraavat esitykset trigonometrisille funktiolle

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ ja } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \text{ ja } \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \text{ ja } \cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

missä nimittäjässä oleva $\cos z \neq 0$ eli $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ja nimittäjässä oleva $\sin z \neq 0$ eli $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Lisäksi trigonometristen funktioiden hyperboliset funktiot määritellään seuraavasti

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ ja } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \text{ ja } \text{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}, (z \neq 0)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \text{ ja } \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, (z \neq 0).$$

## 2 Kompleksifunktio ja kompleksilukujono

Tässä kappaleessa tarkastellaan kompleksilukujonoa, funktiojonoa ja muutamia tärkeitä määritelmiä ja tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin lauseiden todistuksissa. Aluksi esitellään kompleksilukuarvoinen jono, perehdytään sen suppenemiseen ja esitellään käsite osajono. Sitten siirrytään tarkastelemaan kompleksifunktiojonoa ja sen suppenemista. Tämän jälkeen määritellään funktion analyyttisyys ja siitä seuraavia lauseita. Lopuksi määritellään funktion erikoispisteistö ja Cauchyn integraalikaava.

**Määritelmä 1.** Funktiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sanotaan kompleksilukujonoksi ja sitä merkitään

$$f(n) = (a_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Arvoja $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sanotaan kompleksilukujonon termeiksi.

**Määritelmä 2.** Kompleksilukujono $(a_n)$ suppenee kohti pistettä $a$, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa vakio $N \in \mathbb{N}, N = N_\epsilon$, jolle

$$|a_n - a| < \epsilon$$

aina, kun $n \geq N$.

**Määritelmä 3.** Kompleksilukujono $(u_n)$ on kompleksilukujonon $(z_n)$ osajono, jos on olemassa luonnolliset luvut $n_1 < n_2 < \ldots$, joille $u_k = z_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

**Esimerkki 2.1.** Olkoon kompleksilukujono $a_n = \frac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Nyt kompleksilukujonon kolme ensimmäistä termiä ovat

$$i, \frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{3}, \ldots.$$

Osoitetaan, että kompleksilukujono $a_n$ suppenee kohti pistettä 0. Nyt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \epsilon$$

aina, kun $n > \frac{1}{\epsilon}$. Valitaan $N > \frac{1}{\epsilon}$, jolloin saadaan

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| < \epsilon,$$

kun $n \geq N$.

Kompleksifunktiot voivat supeta kompleksilukujonojen kaltaisesti kohti rajafunktiota. Määritellään seuraavaksi kompleksifunktiojono ja tarkastellaan sen suppenemista.

**Määritelmä 4.** Olkoon $(f_n)$ funktiojono joukossa $E \subset \mathbb{C}$ määriteltyjä kompleksifunktioita. Kaikilla $z \in E$ määritellään kuvaus $f : E \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

Tällöin sanotaan, että funktiojono $(f_n(z))$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f$.

**Määritelmä 5.** Olkoon funktiojono $(f_n)$ joukossa $E$ määriteltyjä kompleksifunktioita, jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota $f$ eli

$$f_n(z) \to f(z) \text{ pisteittäin kaikilla } z \in E.$$

Jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)| = 0,$$

niin sanotaan että funktiojono $f_n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f$ joukossa $E$.

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksifunktion analyyttisyyttä ja siitä seuraavia tuloksia. Ensin määritellään kuitenkin jo reaalianalyysistä tuttu derivaatta ja sen avulla integraali.

**Määritelmä 6.** Olkoon alue $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \emptyset$. Funktiolla $f : E \to \mathbb{C}$ on derivaatta pisteessä $x_0$, jos raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on olemassa.

**Määritelmä 7.** Olkoon funktio $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ kuvaus, jolle $z(t) = x(t)+iy(t)$, missä $x$ ja $y$ ovat jatkuvia reaalifunktioita. Tällöin kuvauksen $z$ arvojoukkoa

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) | t \in [a, b]\}$$

kutsutaan käyräksi. Käyrä $\gamma$ on säännöllinen, jos derivaattafunktiot $x'$ ja $y'$ (ja siten myös $z'$) ovat olemassa ja jatkuvia.

**Määritelmä 8.** Funktion $f$ integraalilla pitkin käyrää $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tarkoitetaan

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

**Määritelmä 9.** Merkinnällä $D_r(a)$ tarkoitetaan $a$-keskistä ja $r$-säteistä avointa kiekkoa ja merkinnällä $\overline{D_r}(a)$ suljettua $a$-keskistä $r$-säteistä kiekkoa. Siis

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\} \text{ ja}$$
$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| \leq r\}.$$

**Määritelmä 10.** Joukkoa $R = \{z \in \mathbb{C} | \ r_1 < |z-a| < r_2\}$, missä $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ ja piste $a$ on kiekkojen $D_{r_1}(a)$ ja $D_{r_2}(a)$ keskipiste, sanotaan rengasalueeksi.

**Määritelmä 11.** Funktio $f(z)$ on analyyttinen alueessa $C \subset \mathbb{C}$, jos funktion derivaatta $f'(z)$ on olemassa kaikkialla alueessa $C$. Lisäksi funktio $f(z)$ on analyyttinen pisteessä $z_0$, jos funktion derivaatta $f'(z)$ on olemassa kaikkialla kiekossa $D_r(z_0)$,jollakin $r > 0$.

Huomataan siis, että kompleksifunktion analyyttisyys on sama asia kuin reaalifunktion derivoituvuus. Funktion analyyttisyydellä on kuitenkin kompleksianalyysissä niin suuri merkitys, että se on hyvä erottaa eri nimellä reaalifunktion derivoituvuudesta.

**Lause 2.2.** *Olkoon funktio $f$ analyyttinen alueessa $C$, jonka rajaavat kaksi suljettua sisäkkäistä käyrää $\gamma$ ja $\gamma_1$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z) \ dz = \int_{\gamma_1} f(z) \ dz,$$

*Todistus.* $[1, \text{h.}20, s.107]$. □

**Lause 2.3.** *Olkoon funktio $f$ integroituva positiivisesti suunnistettua käyrää $\gamma$ pitkin, jonka pituus on L. Jos on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(z)| \leq M$ käyrällä $\gamma$, niin*

$$|\int_\gamma f(z) \ dz| \leq ML.$$

*Todistus.* Nyt

$$|\int_\gamma f(z) \ dz| \leq \int_\gamma |f(z)| \ dz.$$

Oletuksen nojalla on olemassa vakio $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$, joten saadaan

$$|\int_\gamma f(z) \ dz| \leq \int_\gamma |f(z)| \ dz \leq M \int_\gamma |dz|.$$

Nyt käyrän $\gamma$ pituus on L, joten saadaan

$$|\int_\gamma f(z) \ dz| \leq ML.$$

□

**Määritelmä 12.** Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion $f(z)$ singulaaripiste (erikoispiste), mikäli funktio $f$ on analyyttinen pisteen $z_0$ avoimessa ympäristössä olevassa pisteessä $z$, mutta funktio $f$ ei ole analyyttinen pisteessä $z_0$. Seuraavassa on määritelty erilaisia erikoispisteitä. Oletetaan, että $z_0$ on kaikissa tapauksissa funktion $f(z)$ singulaaripiste.

1. Piste $z_0$ on eristetty erikoispiste, jos on olemassa avoin kiekko $D_r(z_0)$, joka ei sisällä muita erikoispisteitä kuin pisteen $z_0$.

2. Piste $z_0$ on funktion $f$ $n$-kertainen napa ($n \in \mathbb{N}$), jos on olemassa vakio $M \neq 0$, jolle
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M.$$
Piste $z_0$ on funktion $f$ poistuva erikoispiste, jos raja-arvo
$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$
on olemassa.

3. Piste $z_0$ on oleellinen erikoispiste, jos se ei ole funktion $f$ napa tai poistuva erikoispiste.

**Lause 2.4** (Cauchyn integraalikaava)**.** *Jos funktio $f$ on analyyttinen suljetussa alueessa $C$ ja piste $a$ on alueessa $C$, niin*
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz,$$
*missä $\gamma$ on alueen $C$ reuna.*

*Todistus.* Nyt funktio $\frac{f(z)}{z-a}$ on analyyttinen alueessa $C$ lukuunottamatta singulaaripistettä $z = a$. Tällöin Lauseen 2.2 nojalla saadaan
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\, dz,$$
missä $\gamma_1$ on $r$-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on $a$. Nyt $z - a = re^{i\theta}$, missä $0 \leq \theta < 2\pi$. Sijoittamalla $z = a + re^{i\theta}$ saadaan
$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta.$$
Nyt
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta.$$

Tälloin saadaan

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \lim_{r\to 0} i \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta = i\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(a+re^{i\theta})\, d\theta$$
$$= i\int_0^{2\pi} f(a)\, d\theta = 2\pi i f(a).$$

Nyt funktio $f$ on analyyttisenä funktiona jatkuva, joten raja-arvo on olemassa. Tästä seuraa lause eli

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

$\square$

**Seuraus 2.4.1.** *Olkoon funktio $f$ analyyttinen suljetussa alueessa $C$, $\gamma$ alueen $C$ reuna ja piste $a$ on alueessa $C$. Tällöin*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

# 3 Potenssisarja

Potenssisarja on hyvin tärkeä kompleksilukuihin liittyvä sarja, koska sen käyttömahdollisuudet ja sovellukset ovat niin laajoja. Luvun alussa esitellään yleinen potenssisarja, jonka jälkeen esitellään erilaisia suppenemistestejä sarjoille. Tämän jälkeen esitellään analyyttisen funktion potenssisarjakehitelmä, Taylorin sarjakehitelmä ja Laurentin sarjakehitelmä.

**Määritelmä 13.** Olkoon $(f_n)$ funktiojono joukossa $E$ määriteltyjä kompleksiarvoisia funktioita. Muodostetaan funktioista summat

$$\begin{aligned} S_1(z) &= f_1(z) \\ S_2(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &\vdots \\ S_n(z) &= f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z). \end{aligned}$$

Tällöin $(S_n)$ on funktiojono joukossa $E$. Jos

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

on olemassa, kun $z \in E$, niin sanotaan, että sarja

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

suppenee. Lisäksi funktiota $S_n(z)$ sanotaan sarjan $S(z)$ $n$:nneksi osasummaksi.

**Määritelmä 14.** Sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ suppenee itseisesti pisteessä $z$, jos sarja $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ suppenee.

**Määritelmä 15.** Summafunktiota

$$S(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

sanotaan potenssisarjaksi pisteessä $z = a$.

**Määritelmä 16.** Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde on

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ suppenee} \right\}.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee itseisesti kaikilla arvoilla $z$ säteen $|z| = R$ määrittelemän avoimen kiekon sisällä. Tätä kiekkoa kutsutaan suppenemiskiekoksi.

## 3.1 Suppenemistestejä sarjoille

Tässä luvussa esitellään kolme suppenemiseen liittyvää testiä, jotka ovat hyödyllisiä sarjan suppenemisen tutkimiseen ja suppenemissäteen määrittämiseen.

**Lause 3.1.** *Olkoot $(a_n)$ ja $(b_n)$ kompleksilukujonoja. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ suppenee itseisesti ja $|a_n| \leq |b_n|$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee itseisesti.*

*Todistus.* Olkoon $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ ja $T_n = \sum_{k=1}^{n} |b_k|$.

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ suppenee itseisesti on raja-arvo $\lim_{n\to\infty} T_n$ olemassa. Merkitään $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Koska $|b_n| \geq 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin $T_n \leq T$. Tällöin

$$S_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leq |b_1| + |b_2| + \ldots |b_n| \leq T.$$

eli $0 \leq S_n \leq T$. Nyt $S_n$ on rajoitettu ja monotonisesti kasvava jono, joten sillä täytyy olla raja-arvo. Täten $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee itseisesti. $\square$

*Huomautus* 1. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hajaantuu ja $|b_n| \geq |a_n|$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hajaantuu, mutta sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ voi supeta tai hajaantua.

**Lause 3.2.** *Olkoon* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *kompleksilukusarja. Jos raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

*ja* $L < 1$, *niin sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee.*

*Todistus.* Valitaan vakio $N > 0$ niin suureksi, että kaikilla $n \geq N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r,$$

missä $r$ on vakio ja $L < r < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| \leq r|a_N| \\
&|a_{N+2}| \leq r|a_{N+1}| \leq r^2|a_N| \\
&|a_{N+3}| \leq r|a_{N+2}| \leq r^3|a_N| \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Summaamalla termit yhteen saadaan

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots \leq |a_N|(r + r^2 + r^3 + \ldots).$$

Nyt $\sum_{N=1}^{\infty} |a_N|$ suppenee, sillä $0 < r < 1$ ja $|a_N| \geq |a_n|$, joten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee Lauseen 3.1 nojalla. □

*Huomautus* 2. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, kun $L > 1$. Jos $L = 1$, ei voida sanoa suppeneeko sarja vai hajaantuuko se.

**Lause 3.3.** *Olkoon* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *kompleksilukusarja. Jos raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

*niin* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee jos* $L < 1$.

*Todistus.* Valitaan vakio $N > 0$ niin suureksi, että kaikilla $n \geq N$ pätee $|a_n| \leq r^n$, missä $0 < r < L$. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ suppenee geometrisenä sarjana, sillä $r < L < 1$ ja Lauseen 3.1 nojalla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. □

*Huomautus* 3. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, kun $L > 1$. Jos $L = 1$, ei voida sanoa suppeneeko sarja vai hajaantuuko se.

**Esimerkki 3.4.** Olkoon $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n}\right| = \frac{1}{2}.$$

Siis kompleksilukusarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee suhdetestin nojalla.

## 3.2 Analyyttisen funktion potenssisarjakehitelmä

Seuraavaksi esitellään analyyttisen funktion potenssisarjakehitelmä, jonka avulla mille tahansa analyyttiselle funktiolle saadaan kiekossa $D_r(z_0)$ sarjakehitelmä. Seuraava lause on myös pohjana määriteltäessä Taylorin ja Laurentin sarjakehitelmiä.

**Lause 3.5.** *Olkoon funktio $f$ analyyttinen alueessa $C$ ja piste $z_0 \in C$, joka on kiekon $D_r(z_0) \subset C$ keskipiste. Tällöin funktiolla $f$ on kiekossa $D_r(z_0)$ kehitelmä*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0),$$

*missä*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw,$$

*jossa $\gamma$ on positiiviseen suuntaan suunnistettu suljettu käyrä pitkin kiekon $D_r(z_0)$ reunaa.*

*Todistus.* Sivuutetaan. $\square$

**Esimerkki 3.6.** Tarkastellaan sarjaa $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Derivoimalla sarjaa $S(z)$ saadaan

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Nyt sarjan $S(z)$ suppenemissäde on

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

ja sarjan $S'(z)$ suppenemissäde on

$$R' = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|ka_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Siis sarjalla $S(z)$ on sama suppenemissäde kuin sen derivaatalla $S'(z)$.

**Esimerkki 3.7.** Olkoon $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{4^n+1}$. Tällöin $a_n = \frac{1}{4^n+1}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{4^n}}} = \frac{1}{4} < 1,$$

joten sarja $S(z)$ suppenee, kun $|z| < 4$. Kun $z = 4$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4^n}} = 1,$$

joten sarja $S(z)$ hajaantuu, kun $|z| \geq 4$.

## 3.3 Funktion Taylor-kehitelmä

Tässä luvussa esitellään ja todistetaan Taylorin sarja, jonka jälkeen esitetään sarjakehitelmä jo aikaisemmin esille tulleelle eksponenttifunktiolle Taylorin sarjakehitelmän avulla.

**Lause 3.8.** *Olkoon funktio $f$ analyyttinen alueessa $C$ ja sen reunakäyrällä $\gamma$. Olkoot lisäksi pisteet $a$ ja $z$ alueessa $C$. Tällöin*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots.$$

*Tätä sanotaan funktion $f$ Taylor-kehitelmäksi pisteessä $a$.*

*Todistus.* Olkoon $z$ mikä tahansa piste alueessa $C$. Olkoon $\gamma_1$ positiiviseen suuntaan suunnistettu käyrä, joka on kiekon $D_r(a)$ reuna alueessa $C$ ja sisältää pisteen $z$. Tällöin käyttämällä Cauchyn integraalikaavaa saadaan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{2}$$

Tarkastelemalla geometrisen sarjan osasummaa saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-a+a-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right)\\ &= \frac{1}{w-a}\left(1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right).\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}\\ &\quad + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z}.\end{aligned} \tag{3}$$

Kertomalla yhtälö (3) puolittain luvulla $f(w)$ ja käyttämällä yhtälöä (2) saadaan

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-a}\, dw + \frac{z-a}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\, dw + \ldots\\ &\quad + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n}\, dw + R_n,\end{aligned} \tag{4}$$

missä funktio

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{5}$$

Käyttämällä yhtälöön (4) Seurausta 2.4.1 saadaan

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + R_n.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Koska piste $w$ on käyrällä $\gamma_1$ saadaan

$$\frac{|z-a|}{|w-a|} < \epsilon < 1,$$

missä $\epsilon > 0$ on vakio. Lisäksi on olemassa vakio $M > 0$, jolle

$$|f(w)| \leq M.$$

Nyt

$$|w-z| = |(w-a)-(z-a)| \geq r - |z-a|,$$

missä $r$ on kiekon $D_r(a)$ säde. Lauseen 2.3 nojalla saadaan

$$|R_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon^n M}{r-|z-a|}2\pi r = \frac{\epsilon^n M r}{r-|z-a|}.$$

Kun tarkastellaan raja-arvoa saadaan

$$\lim_{n\to\infty}|R_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{\epsilon^n M r}{r-|z-a|} = 0.$$

□

Lause on todistettu ja saadaan siis

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

**Esimerkki 3.9.** Olkoon $f(z) = e^z$. Määritetään funktion $f$ Taylorin sarja origossa. Nyt $f^{(n)}(z) = e^z$, jokaiselle luvulle $n \geq 0$. Lauseen 3.8 nojalla saadaan

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Huomataan siis, että kompleksianalyysissä sarjakehitelmä on eksponenttifunktiolle sama kuin reaalianalyysissä. Taylorin sarjakehitelmän avulla voidaan kehittää myös sarjat trigonometrisille funktioille samankaltaisesti tarkastelemalla tilannetta origokeskeisessä kiekossa.

## 3.4 Funktion Laurent-kehitelmä

Tässä luvussa esitellään funktion Laurent-kehitelmä, joka on hyödyllinen työkalu silloin, jos halutaan sarjakehitelmä sellaiselle funktiolle, jolla on napoja.

**Määritelmä 17.** Funktio $f$ on meromorfinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$, mikäli se on analyyttinen alueessa $D$ lukuunottamatta joukkoa $S$, jonka pisteet ovat funktion $f$ napoja.

**Esimerkki 3.10.** Olkoon $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$. Määritetään funktion $f(z)$ navat. Tutkimalla funktion $f$ nimittäjän nollakohdat saadaan funktio muotoon:

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2} = \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)}$$

Nyt $f$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{-1, 2\}$. Lisäksi

$$\lim_{z \to -1} (z+1)(\frac{2z+1}{(z+1)(z-2)}) = \frac{2 \cdot (-1) + 1}{-1-2} = \frac{1}{3}$$

ja

$$\lim_{z \to 2} (z-2)(\frac{2z+1}{(z+1)(z-2)}) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

Siis $z = -1$ ja $z = 2$ ovat funktion $f$ ensimmäisen kertaluvun napoja.

**Lause 3.11** (Funktion Laurent-kehitelmä). *Olkoon funktio $f$ analyyttinen rengasalueessa $R$ ja olkoot $\gamma_1$ ja $\gamma_2$ kiekkojen $D_{r_1}(a)$ ja $D_{r_2}(a)$ positiivisesti suunnistetut (paloittain)säännölliset reunakäyrät, missä $0 < r_1 < r_2$. Tällöin kaikille pisteille $z$ rengasalueessa $R$ saadaan*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

*missä*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

*ja*

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} \, dw, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

*Todistus.* $[1, s.155]$. □

*Huomautus* 4. Voidaan osoittaa, että funktion Laurent-kehitelmä on yksikäsitteinen.

Lasketaan seuraavaksi esimerkki Laurent-sarjan muodostamisesta.

**Esimerkki 3.12.** Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$$

Laurent-kehitelmä pisteessä $z = 0$. Nyt funktion $e^{z^2}$ Taylor-sarja pisteessä $z = 0$ on muotoa

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots,$$

joten

$$\begin{aligned}\frac{e^{z^2}}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \dots \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Huomataan, että funktiolla $f$ on kolmannen kertaluvun napa pisteessä $z = 0$.

# 4 Residylause

Residylaskentaa voidaan käyttää esimerkiksi eräiden reaaliarvoisten integraalien laskemiseen, joiden laskeminen muuten saattaa olla hankalaa. Lisäksi residylaskennalla pystytään laskemaan eräiden reaaliarvoisten sarjojen summia. Tässä kappaleessa esitellään ensimmäiseksi residylause ja sen jälkeen laskukaava, jonka ansioista residyjen laskemiseen ei tarvitse aina ensin määrittää funktion Laurent-kehitelmää.

**Määritelmä 18.** Olkoon $f$ funktio, joka on analyyttinen joukossa $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Olkoon funktion $f$ Laurent-sarja

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Tällöin kerrointa $a_{-1}$ sanotaan funktion $f$ residyksi pisteessä $z = z_0$ ja sitä merkitään $(z_0)_{-1}$.

**Lause 4.1** (Residylause)**.** *Olkoon $f$ suljetun (paloittain)säännöllisen käyrän rajaamassa alueessa määritelty funktio, joka on analyyttinen edellä mainitussa alueessa lukuunottamatta singulaaripisteitä $z_1, z_2, \dots, z_n$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\big((z_1)_{-1} + \dots + (z_n)_{-1}\big),$$

*missä $(z_k)_{-1}$ on funktion $f$ residy navassa $z_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

*Todistus.* Olkoon polku $\gamma_i$ $z_i$-keskinen ympyrä ja olkoon $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset,\ i \neq j$. Tällöin [2, Lemma 3.20]

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz, \tag{6}$$

missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Toisaalta Laurentin kehitelmän mukaan

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i(z_1)_{-1}, \int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i(z_2)_{-1}, \ldots, \int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i(z_n)_{-1}. \tag{7}$$

Yhdistämällä yhtälöt (6) ja (7) saadaan

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i((z_1)_{-1} + (z_2)_{-1} + \ldots + (z_n)_{-1}).$$

□

Seuraavaksi esitellään laskukaava, jonka avulla funktion residyt voidaan laskea sen navoissa helposti.

**Lause 4.2** (Residyjen laskeminen)**.** *Jos $z = z_0$ on $n$-kertainen napa, niin*

$$(z_0)_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big( (z - z_0)^n f(z) \Big).$$

*Todistus.* Residyn määritelmästä saadaan

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

Kertomalla puolittain termillä $(z - z_0)^n$ saadaan

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \ldots$$

Oikealla on siis Taylor-sarja pisteessä $z = z_0$. Derivoimalla molemmat puolet $n - 1$ kertaa saadaan

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big( (z - z_0)^n f(z) \big) = a_{-1}(n - 1)! + C\left[(z - z_0)\right].$$

Tässä $C(z - z_0)$ on jäännöstermi, joka $\to 0$ kun $z \to z_0$ ja

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big( (z - z_0)^n f(z) \big) = a_{-1} = (z_0)_{-1}.$$

□

*Huomautus* 5. Erityisesti, jos $z = z_0$ on yksinkertainen napa, niin

$$(z_0)_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

**Esimerkki 4.3.** Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2 - z - 2}.$$

Nyt esimerkin 3.10 nojalla funktiolla $f$ on ensimmäisen kertaluvun navat pisteissä $z = -1$ ja $z = 2$. Funktion $f$ residyt näissä pisteissä ovat

$$(-1)_{-1} = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3}$$

ja

$$(2)_{-1} = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \frac{5}{3}.$$

**Esimerkki 4.4.** Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}.$$

Nyt funktiolle $f(z)$ saadaan origossa sarjakehitelmä

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \dots$$

Funktiolla $f$ on kolmannen kertaluvun napa pisteessä $z = 0$, sillä

$$\lim_{z \to 0} (z-0)^3 \frac{\cos z}{z^3} = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

Funktion $f$ residy pisteessä $z = 0$ on siis

$$\begin{aligned}(0)_{-1} &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( (z-0)^3 \frac{\cos z}{z^3} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (\cos z) \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} (-\cos z) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

# 5 Sarjojen summaaminen residyjen avulla

Eräs hyödyllinen residylauseen sovellus on reaaliarvoisten äärettömien sarjojen summaaminen residyjen avulla, joka on samalla ensimmäinen tämän tutkielman pääaiheista. Tässä kappaleessa johdatellaan aluksi erilaisten apulauseiden avulla sarjan tarkan arvon laskemiseen ja sitten esitellään kaksi laskukaavaa, joilla pystytään määrittämään tarkkoja arvoja äärettömille sarjoille residyjen avulla.

**Lemma 5.1.** *Olkoon $C_N$ sellaisen neliön reuna, jonka kärkipisteinä ovat $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Tällöin on olemassa vakio $A$, jolle $|\cot \pi z| < A$, $z \in C_N$.*

*Todistus.* Tutkitaan kolme tapausta: $y > \frac{1}{2}$, $y < -\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

1. Jos $y > \frac{1}{2}$ ja $z = x + iy$, niin

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right|.$$

Koska $z = x + iy$, voidaan edellä oleva yhtälö kirjoittaa edelleen

$$\left|\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right| = \left|\frac{e^{\pi i x - \pi y} + e^{-\pi i x + \pi y}}{e^{\pi i x - \pi y} - e^{-\pi i x + \pi y}}\right| \leq \frac{|e^{\pi i x - \pi y}| + |e^{-\pi i x + \pi y}|}{|e^{-\pi i x + \pi y}| - |e^{\pi i x - \pi y}|}.$$

Itseisarvot laskemalla saadaan

$$\frac{|e^{\pi i x - \pi y}| + |e^{-\pi i x + \pi y}|}{|e^{-\pi i x + \pi y}| - |e^{\pi i x - \pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}.$$

Kun otetaan $e^{\pi y}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

koska $y > \frac{1}{2}$. Merkitään tätä arvoa vakiolla $A_1$.

2. Jos $y < -\frac{1}{2}$, niin vastaavasti kuten tapauksessa 1 saadaan

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right| = \left|\frac{e^{\pi i x - \pi y} + e^{-\pi i x + \pi y}}{e^{\pi i x - \pi y} - e^{-\pi i x + \pi y}}\right|.$$

Koska $y < -\frac{1}{2}$, niin arvioitaessa kolmioepäyhtälöllä nimittäjän eksponentit vaihtavat merkkiä

$$\left|\frac{e^{\pi i x - \pi y} + e^{-\pi i x + \pi y}}{e^{\pi i x - \pi y} - e^{-\pi i x + \pi y}}\right| \leq \frac{|e^{\pi i x - \pi y}| + |e^{-\pi i x + \pi y}|}{|e^{\pi i x - \pi y}| - |e^{-\pi i x + \pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}.$$

Ottamalla $e^{-\pi y}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1.$$

3. Olkoon $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Olkoon $z = N + \frac{1}{2} + iy$. Tällöin

$$|\cot \pi z| = |\cot \pi (N + \frac{1}{2} + iy)| = |\cot (\frac{\pi}{2} + \pi iy)| = |\tanh \pi y|.$$

Koska $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, niin $|\tanh \pi y| \leq \tanh \frac{\pi}{2}$. Merkitään tätä arvoa vakiolla $A_2$.

Jos $z = -N - \frac{1}{2} + iy$, niin saadaan vastaavasti

$$|\cot \pi z| = |\cot \pi (-N - \frac{1}{2} + iy)| = |\cot (-\frac{\pi}{2} + \pi iy)| = |\tanh \pi y|.$$

Koska $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, niin $|\tanh \pi y| \leq \tanh \frac{\pi}{2} = A_2$.
Valitsemalla $A = \max\{A_1, A_2\}$ saadaan $|\cot \pi z| \leq A$, kun $z \in C_N$.

□

**Lause 5.2.** *Olkoon $C_N$ sellaisen neliön reuna, jonka kärkipisteet ovat $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, missä $N \in \mathbb{N}$. Olkoon funktio $f$ meromorfinen neliön sisällä ja jatkuva reunalla $C_N$, kun $N$ on riittävän suuri sekä $\lim_{z \to \infty} zf(z) = 0$. Tällöin*

$$\lim_{N \to \infty} \int_{C_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

*Todistus.* Olkoon $\varepsilon > 0$. Jokaiselle neliölle $C_N$ pätee $|z| \geq N + \frac{1}{2} > N$. Siten on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|zf(z)| < \varepsilon$ kun $\frac{1}{|z|} < \delta$. Valitaan $N > \frac{1}{\delta}$. Tällöin on olemassa sellainen $N$, että $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{N + \frac{1}{2}}$, kun $z \in C_N$. Nyt neliön $C_N$ piirin pituus $|C_N| = 8(N + \frac{1}{2})$, joten Lemman 5.1 nojalla

$$\frac{1}{N} < \delta \Rightarrow \left| \int_{C_N} f(z) \cot \pi z dz \right| \leq \frac{8(N + \frac{1}{2})A\varepsilon}{N + \frac{1}{2}} = 8A\varepsilon.$$

Raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{N \to \infty} \int_{C_N} f(z) \cot \pi z dz = 0$. □

Nyt voidaan muodostaa lause, jonka avulla äärettömien sarjojen summia voidaan laskea.

**Lause 5.3.** *Olkoon $C_N$ sellaisen neliön reuna, jonka kärkipisteet ovat $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, missä $N \in \mathbb{N}$. Olkoon funktio $f$ sellainen, että epäyhtälö funktiolle*

*$f$ pätee, kun piste $z$ kuuluu reunalle eli: $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k} \in C_N$, missä vakiot $k > 1$, $M > 1$ eivät riipu luvusta $N$. Tällöin*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -(\textit{funktion } \pi \cot \pi z f(z) \textit{ residyjen summa kaikissa } f(z) : n \textit{ navoissa}).$$

*Todistus.* Oletetaan, että funktiolla $f$ on äärellinen määrä napoja.

Nyt voidaan valita vakio $N$ niin suureksi, että polku $C_N$ sulkee sisäänsä kaikki funktion $f(z)$ navat. Funktion $f(z)$ navat ovat ensimmäistä kertalukua ja pisteessä $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Residy näissä pisteissä on

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\pi \cot \pi z f(z)) &= \lim_{z \to n} (z-n) \pi \cot \pi z f(z) \\ &= \lim_{z \to n} \pi \left( \frac{z-n}{\sin \pi z} \right) \cos \pi z f(z).\end{aligned}$$

Nyt voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, jolloin saadaan

$$\lim_{z \to n} \pi \left( \frac{z-n}{\sin \pi z} \right) \cos \pi z f(z) = \lim_{z \to n} \pi \frac{1}{\pi \cos \pi z} \cos \pi z f(z) = f(n).$$

Tässä oletetaan, että funktiolla $f$ ei ole napoja kun $z = n$, koska muuten sarja divergoi (ei suppene kohti äärellistä raja-arvoa). Residylauseen nojalla

$$\int_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz = 2\pi i \left( \sum_{n=-N}^{N} f(n) + S \right), \tag{8}$$

missä $S$ on $\pi \cot \pi z f(z)$:n residyjen summa $f(z)$:n navoissa. Lemman 5.1 sekä oletuksiemme nojalla saadaan

$$\left| \int_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz \right| \leq \frac{\pi A M}{N^k} (8N + 4).$$

Tässä neliön $C_N$ piirin pituus on $8N+4$. Antamalla $N \to \infty$ saadaan lauseen 5.2 nojalla yhtälön (8) integraali lähestymään nollaa, jolloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) + S = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -S = -\mathrm{Res}_{z_n}(\pi \cot \pi z f(z)).$$

Tapauksen, jossa on ääretön määrä napoja todistus sivuutetaan. □

Lasketaan seuraavaksi kaksi esimerkkiä, joissa lasketaan tarkat arvot sarjoille.

**Esimerkki 5.4.** Osoitetaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} = \frac{\pi}{4} \coth \pi + \frac{\pi^2}{4} \text{csch}^2 \pi - \frac{1}{2}.$$

Olkoon $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$. Nyt

$$(z^2+1)^2 = ((z-i)(z+i))^2 = (z-i)^2(z+i)^2.$$

Eli funktiolla $f(z)$ on 2 kertaluvun navat pisteissä $z = i$ ja $z = -i$. Nyt funktion $\frac{\pi \cot \pi z}{(z^2+1)^2}$ residy pisteessä $z = i$ on

$$\begin{aligned}
(i)_{-1} &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{\pi \cot \pi z}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{\pi \cot \pi z}{(z+i)^2(z-i)^2}\right) \\
&= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z \to i}\left(\frac{-\pi^2 \csc^2 \pi z (z+i)^2 - 2(z+i)\pi \cot \pi z}{(z+i)^4}\right) \\
&= \frac{-\pi^2 \csc^2 \pi i (2i)^2 - 4i\pi \cot \pi i}{16} = \frac{\pi^2 \csc^2 \pi i - i\pi \cot \pi i}{4}.
\end{aligned}$$

Koska $\csc^2 i\pi = -\text{csch}^2 \pi$ ja $-i \cot \pi i = -\coth \pi$, saadaan edelleen

$$\frac{\pi^2 \csc^2 \pi i - i\pi \cot \pi i}{4} = \frac{-\pi^2 \text{csch}^2 \pi - \pi \coth \pi}{4}.$$

Vastaavasti funktion $\frac{\pi \cot \pi z}{(z^2+1)^2}$ residy pisteessä $z = -i$ on

$$\begin{aligned}
(-i)_{-1} &= \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left((z+i)^2 \frac{\pi \cot \pi z}{(z+i)^2(z-i)^2}\right) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{(z-i)^2}\right) \\
&= \lim_{z \to -i}\left(\frac{-\pi^2 \csc^2 \pi z (z-i)^2 - 2(z-i)\pi \cot \pi z}{(z-i)^4}\right) \\
&= \frac{-\pi^2 \csc^2 \pi(-i)(-2i)^2 - 2(-2i)\pi \cot \pi(-i)}{16} \\
&= \frac{-\pi^2 \text{csch}^2 \pi - \pi \coth \pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lauseen 5.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(n^2+1)^2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} \\
&= -\left(\frac{-\pi^2 \text{csch}^2 \pi - \pi \coth \pi}{4} + \frac{-\pi^2 \text{csch}^2 \pi - \pi \coth \pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Siis

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}+1=-(\frac{-\pi^2\mathrm{csch}^2\pi-\pi\coth\pi}{2}).$$

Eli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\frac{\pi^2\mathrm{csch}^2\pi+\pi\coth\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

**Esimerkki 5.5.** Osoitetaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Olkoon funktio $f(z)=\frac{\pi\cot\pi z}{z^4}$. Nyt funktiolla $f$ on pisteessä $z=0$ neljännen kertaluvun napa. Tätä voitaisiin alkaa derivoida kolmesti ja laskemaan residy pisteessä $z=0$, mutta se on laskennallisesti työlästä. Tarkastellaan funktiota $f(z)$ sarjamaisesti

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{\pi\cot\pi z}{z^4}=\frac{\pi\cos\pi z}{z^4\sin\pi z}=\frac{\pi\big(1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\dots\big)}{z^4\big(\pi z-\frac{\pi^3z^3}{3!}+\frac{\pi^5z^5}{5!}-\dots\big)}\\&=\frac{1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\dots}{z^5\big(1-\frac{\pi^2z^2}{3!}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\dots\big)}=\frac{1}{z^5}\frac{1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\dots}{1-\frac{\pi^2z^2}{3!}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\dots}.\end{aligned}$$

Jakamalla jakokulmassa kosinin sarjakehitelmä sinin sarjakehitelmällä saadaan laskettua muutama ensimmäinen termi

$$\frac{1}{z^5}\frac{1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\dots}{1-\frac{\pi^2z^2}{3!}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\dots}=\frac{1}{z^5}\big(1+\frac{\pi^2z^2}{3}-\frac{\pi^4z^4}{45}+\dots\big).$$

Joten residy pisteessä $z=0$ on $-\frac{\pi^4}{45}$. Lauseiden 5.3 ja 4.1 nojalla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^4}\,dz=\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^4}-\frac{\pi^4}{45}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}=2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}-\frac{\pi^4}{45}.$$

Antamalla $N\to\infty$ saadaan Lauseen 5.2 nojalla integraalin arvo lähestymään nollaa ja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Myös alternoiville sarjoille saadaan sarjakehitelmä seuraavan lauseen avulla.

**Lause 5.6.** *Olkoon $C_N$ sellaisen neliön reuna, jonka kärkipisteet ovat $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, missä $N \in \mathbb{N}$. Olkoon funktio $f$ sellainen, että epäyhtälö funktiolle $f$ pätee, kun piste $z$ kuuluu reunalle eli: $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k} \in C_N$, missä vakiot $k > 1$, $M > 1$ eivät riipu luvusta $N$. Tällöin*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -(\textit{funktion } \pi \csc \pi z f(z) \textit{ residyjen summa kaikissa } f(z) : n \textit{ navoissa}).$$

*Todistus.* Oletetaan, että funktiolla $f$ on äärellinen määrä napoja.

Nyt voidaan valita vakio $N$ niin suureksi, että neliö $C_N$ sulkee sisäänsä kaikki funktion $f(z)$ navat. Funktion $f(z)$ navat ovat ensimmäistä kertalukua ja pisteessä $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, funktion $\pi\csc\pi z f(z)$ residy on

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\pi\csc\pi z f(z)) &= \lim_{z\to n} (z-n)\pi\csc\pi z f(z) \\ &= \lim_{z\to n} \left(\frac{z-n}{\sin \pi z}\right) f(z). \end{aligned}$$

Käyttämällä L'Hospitalin sääntöä saadaan edelleen

$$\lim_{z\to n} \left(\frac{z-n}{\sin \pi z}\right) f(z) = (-1)^n f(n).$$

Residylauseen nojalla

$$\int_{C_N} \pi\csc\pi z f(z) dz = 2\pi i \left( \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n f(n) + S \right), \tag{9}$$

missä $S$ on $\pi\csc\pi z f(z)$:n residyjen summa $f(z)$:n navoissa. Kuten Lauseen 5.3 todistuksessa, saadaan [2,Thm.5.13]

$$\left| \int_{C_N} \pi\csc\pi z f(z) dz \right| \leq \frac{\pi A M}{N^k}(8N+4).$$

Tässä neliön $C_N$ piirin pituus on $8N+4$. Antamalla $N \to \infty$ saadaan yhtälön (9) integraali lähestymään nollaa, jolloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) + S = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -S = -\operatorname{Res}_{z_n}(\pi \csc \pi z f(z)).$$

□

Esimerkiksi seuraavalle sarjalle saadaan laskettua tarkka arvo käyttämällä edellistä lausetta.

**Esimerkki 5.7.** Osoitetaan, että

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Olkoon

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi \csc \pi z}{z^2} = \frac{\pi}{z^2 \sin \pi z} = \frac{\pi}{z^2 \pi z \big(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} + \ldots\big)} \\ &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} + \ldots}. \end{aligned}$$

Jakamalla sarjakehitelmä jakokulmassa saadaan pari ensimmäistä termiä

$$\frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} + \ldots} = \frac{1}{z^3} \big(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \ldots\big) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{6z} + \ldots$$

Joten funktion $\frac{\pi \csc \pi z}{z^2}$ residy pisteessä $z = 0$ on $-\frac{\pi^2}{6}$. Lauseen 5.6 nojalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi \csc \pi z}{z^2} dz &= \sum_{n=-N}^{-1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Kun annetaan $N \to \infty$, niin lauseen 5.2 nojalla integraali lähestyy nollaa ja

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

# 6 Mittag-Lefflerin laajennuslause

Tässä kappaleessa esitellään Mittag-Lefflerin laajennuslause, joka on toinen tämän tutkielman pääaiheista. Mittag-Lefflerin laajennuslauseen avulla voidaan määrittää sarjakehitelmä sellaisille sarjoille, jolla on vain yksinkertaisia singulaaripisteitä. Lasketaan lopuksi sarjakehitelmä funktiolle $\csc z$.

**Lause 6.1** (Mittag-Lefflerin laajennuslause)**.**

1. *Oletetaan, että äärellisessä tasossa olevan funktion f navat* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *ovat yksinkertaisia.*

2. *Olkoon funktion f navoissa* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *olevat residyt* $b_1, b_2, b_3, \ldots$

3. *Olkoon* $\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *kiekon* $D_{r_n}(0)$ *reuna, joka ei kulje minkään navan kautta ja oletetaan, että* $|f(z)| < M$, *missä vakio* $M$ *ei riipu* $n$*:stä ja säde* $r_n \to \infty$ *kun* $n \to \infty$.

   *Tällöin*
$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

*Todistus.* Olkoon funktiolla $f(z)$ navat pisteissä $z = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ja oletetaan, että piste $z = w \in \mathbb{C}$ ei ole funktion $f(z)$ napa. Tällöin funktiolla $\frac{f(z)}{z-w}$ on navat pisteissä $z = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ja pisteessä $w$. Funktion $\frac{f(z)}{z-w}$ residyt pisteissä $z = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ovat

$$\lim_{z \to a_n} (z - a_n) \frac{f(z)}{z - w} = \frac{b_n}{a_n - w},$$

sillä funktion $f(z)$ residyt pisteissä $a_n$ ovat $b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Funktion $\frac{f(z)}{z-w}$ residy pisteessä $z = w$ on

$$\lim_{z \to w} (z - w) \frac{f(z)}{z - w} = f(w).$$

Tälloin residyteorian nojalla

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z - w} \, dz = f(w) + \sum_n \frac{b_n}{a_n - w}, \tag{10}$$

missä summa $\sum_n \frac{b_n}{a_n - w}$ on otettu kaikkien ympyrän $D_{r_n}(0)$ sisältämien napojen yli.

Oletetaan, että funktio $f(z)$ on analyyttinen pisteessä $z = 0$. Tällöin asettamalla kaavaan (10) $w = 0$ saadaan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z} \, dz = f(0) + \sum_n \frac{b_n}{a_n}. \tag{11}$$

Nyt yhtälöiden (10) ja (11) erotukseksi saadaan

$$\begin{aligned} f(w) - f(0) + \sum_n b_n \left( \frac{1}{a_n - w} - \frac{1}{a_n} \right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f(z) \left( \frac{1}{z - w} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \frac{w}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z(z - w)} \, dz. \end{aligned} \tag{12}$$

Koska piste $z$ on käyrän $\gamma_n$ reunalla pätee $|z-w| \geq |z| - |w| = r_n - |w|$. Oletuksen mukaan $|f(z)| \leq M$, joten

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z(z-w)}\, dz \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi r_n}{r_n(r_n - |w|)}.$$

Kun $n \to \infty$, niin tällöin $r_n \to \infty$, jolloin

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z(z-w)}\, dz = 0.$$

Tällöin yhtälöstä (12) saadaan

$$f(w) = f(0) + \sum_n b_n \left( \frac{1}{w-a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

ja lause on todistettu. □

**Esimerkki 6.2.** Osoitetaan, että

$$\csc z = \frac{1}{z} - 2z \left( \frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right).$$

Olkoon

$$f(z) = \csc z - \frac{1}{z} = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin z}{z \sin z}.$$

Nyt funktiolla $f$ on ensimmäisen kertaluvun navat pisteissä $z = n\pi$, missä $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ Residyiksi saadaan siis

$$\begin{aligned} \lim_{z\to n\pi} (z - n\pi) \left( \frac{z - \sin z}{z \sin z} \right) &= \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - n\pi}{\sin z} \right) \left( \frac{z - \sin z}{z} \right) \\ &= \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - n\pi}{\sin z} \right) \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - \sin z}{z} \right). \end{aligned}$$

Nyt ensimmäiseen raja-arvoon voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, jolloin saadaan

$$\lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - n\pi}{\sin z} \right) \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - \sin z}{z} \right) = \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{1}{\cos z} \right) \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - \sin z}{z} \right).$$

Jos

1. $n = 2k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, niin

$$\lim_{z\to n\pi} f(z) = \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{1}{\cos z} \right) \lim_{z\to n\pi} \left( \frac{z - \sin z}{z} \right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{n\pi - 0}{n\pi} = 1$$

2. $n = 2k+1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, niin

$$\lim_{z \to n\pi} f(z) = \lim_{z \to n\pi} \left( \frac{1}{\cos z} \right) \lim_{z \to n\pi} \left( \frac{z - \sin z}{z} \right) = \frac{1}{-1} \cdot \frac{n\pi - 0}{n\pi} = -1.$$

Pisteessä $z = 0$ saadaan funktion $f$ raja-arvoksi

$$\lim_{z \to 0} (\csc z - \frac{1}{z}) = \lim_{z \to 0} \left( \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z}.$$

Nyt voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, jolloin saadaan

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = 0.$$

Siis $f(0) = 0$. Mittag-Lefflerin laajennuslauseesta saadaan

$$\csc z - \frac{1}{z} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \left( \frac{1}{z - 2k\pi} + \frac{1}{2k\pi} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \cdot \left( \frac{1}{z - (2k+1)\pi} + \frac{1}{(2k+1)\pi} \right).$$

Nyt summat voidaan yhdistää sillä ensimmäisessä sarjassa $k = 1, 2, \ldots$ja toisessa sarjassa $k = 0, 1, 2, \ldots$ Saadaan trigonometriselle funktiolle $\csc z$ sarjakehitelmä

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right).$$

Koska $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ sarja voidaan aukaista seuraavasti

$$\begin{aligned}
\csc z &= \frac{1}{z} + \lim_{N \to \infty} \left\{ \sum_{n=-N}^{-1} (-1)^n \cdot \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cdot \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{z} - \lim_{N \to \infty} \left\{ \left( \frac{1}{z + \pi} + \frac{1}{z - \pi} \right) - \left( \frac{1}{z + 2\pi} + \frac{1}{z - 2\pi} \right) \right. \\
&\left. - \left( \frac{1}{z + 3\pi} + \frac{1}{z - 3\pi} \right) + \ldots - (-1)^N \left( \frac{1}{z + N\pi} + \frac{1}{z - N\pi} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \frac{2z}{z^2 - 4\pi^2} - \frac{2z}{z^2 - 9\pi^2} + \ldots \\
&= \frac{1}{z} - 2z \left( \frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \ldots \right)
\end{aligned}$$

**Esimerkki 6.3.** Osoitetaan, että

$$\tan z = -2z \left( \frac{1}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2} + \frac{1}{z^2 - (\frac{3\pi}{2})^2} + \frac{1}{z^2 - (\frac{5\pi}{2})^2} + \ldots \right).$$

Olkoon

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Nyt funktiolla $f$ on ensimmäisen kertaluvun navat pisteissä $z = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, missä $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(z - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)(\tan z) &= \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(z - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) \\
&= \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(\frac{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}}{\cos z}\right) \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} (\sin z).
\end{aligned}$$

Nyt ensimmäiseen raja-arvoon voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, jolloin saadaan

$$\lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(\frac{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}}{\cos z}\right) \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} (\sin z) = \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(\frac{1}{-\sin z}\right) \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} (\sin z).$$

Funktion $f$ residyksi saadaan siis

$$\lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} \left(\frac{1}{-\sin z}\right) \lim_{z \to \frac{(2n+1)\pi}{2}} (\sin z) = \frac{1}{-1} \cdot 1 = -1.$$

Siis $(\frac{(2n+1)\pi}{2})_{-1} = -1$. Pisteessä $z = 0$ saadaan funktion $f$ raja-arvoksi

$$\lim_{z \to 0} \tan z = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{0}{1} = 0.$$

Siis $f(0) = 0$. Mittag-Lefflerin laajennuslauseesta saadaan sarjakehitelmä funktiolle $\tan z$

$$\tan z = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \left(\frac{1}{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right).$$

Koska $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sarja voidaan aukaista seuraavasti

$$\tan z = \lim_{N\to\infty} \left\{ -\sum_{n=-N}^{-1} \left( \frac{1}{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right) - \sum_{n=0}^{N} \left( \frac{1}{z - \frac{(2n+1)\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right) \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} -\left\{ \left( \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{\pi}{2}} \right) + \left( \frac{1}{z - \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{3\pi}{2}} \right) + \ldots \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{z - \frac{(2N+1)\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{(2N+1)\pi}{2}} \right) \right\}$$

$$= -\left\{ \frac{2z}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2} + \frac{2z}{z^2 - (\frac{3\pi}{2})^2} + \frac{2z}{z^2 - (\frac{5\pi}{2})^2} + \ldots \right\}$$

$$= -2z \left\{ \frac{1}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2} + \frac{1}{z^2 - (\frac{3\pi}{2})^2} + \frac{1}{z^2 - (\frac{5\pi}{2})^2} + \ldots \right\}$$

Osoitetaan tämän avulla, että $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Jaetaan edellä saatu tulos puolittain luvulla $z$, jolloin saadaan

$$\frac{\tan z}{z} = \frac{-2}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2} + \frac{-2}{z^2 - (\frac{3\pi}{2})^2} + \frac{-2}{z^2 - (\frac{5\pi}{2})^2} + \ldots$$

Ottamalla puolittain raja-arvo $z \to 0$ saadaan vasemmalle puolelle

$$\lim_{z\to 0} \frac{\tan z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z \cos z}$$

Nyt voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, jolloin saadaan

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z \cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{\cos z - z \sin z} = \frac{1}{1} = 1.$$

Oikealle puolelle saadaan

$$\lim_{z\to 0} \left( \frac{-2}{z^2 - (\frac{\pi}{2})^2} + \frac{-2}{z^2 - (\frac{3\pi}{2})^2} + \frac{-2}{z^2 - (\frac{5\pi}{2})^2} + \ldots \right) = \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{9\pi^2} + \frac{8}{25\pi^2} + \ldots$$

Saadaan siis

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{9\pi^2} + \frac{8}{25\pi^2} + \ldots$$

Kertomalla yhtälö puolittain luvulla $\frac{\pi^2}{8}$ saadaan

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Nähdään siis, että Mittag-Lefflerin laajennuslauseella voidaan helposti saada sarjakehitelmät vaikeammile trigonometrisille funktioille, jos niillä on vain ensimmäisen kertaluvun napoja.

# Lähdeluettelo

[1] Murray R. Spiegel: Schaum's Outline of theory and problems of complex variables, McGraw-Hill, 1981.

[2] Anthony D. Osborne: Complex Variables and their Applications.Addison, Wesley, Longman Limited, England, 1999.

[3] Tero Knuutinen: Kompleksianalyysi I ja II, luentomonisteet, 2007