Pinnat avaruudessa

Pro gradu -tutkielma
Jukka Pihlajaniemi
matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
2013

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee kolmiulotteisen reaaliavaruuden kappaleita, joita kutsutaan pinnoiksi. Pinnan käsitteellä tarkoitetaan kaksiulotteista sileää kappaletta, jonka jokainen osa-alue voidaan kuvata joltakin tasolta jatkuvalla injektiolla. Pinta siis voidaan kuvata aina siten että funktio säilyttää kaksi muuttujan arvoa samoina ja määrää kolmannen näiden kahden perusteella. Tällaista funktiota, joka määrää pinnan, kutsutaan peitefunktioksi. Käytännössä kaikki pintoihin liittyvä operointi tapahtuu peitefunktioiden kautta. Peitefunktion toinen muuttuja kiinnitetään vakioksi, jolloin sen kuvaus tuottaa puhtaan käyrän.

Pintojen operointi perustuu ajatukseen, että kyseessä on vain yksi kolmiulotteisen euklidisen avaruuden aliavaruus, jossa differentiaalilaskenta ja muut laskutoimitukset toteutuvat samoin kuin yleisessäkin tapauksessa. Jos halutaan tutkia pelkästään pinnalla olevan tietyn funktion käyttäytymistä, luodaan yhdistetty funktio, jonka sisäfunktiona on pinnan peitefunktio ja ulkofunktiona varsinainen tutkittava funktio, jolloin määrittelyjoukkona on vain jokin yksinkertainen taso.

Funktio voidaan myös asettaa kahden erillisen pinnan välille siten että ensimmäinen pinta toimii lähtöjoukkona ja toinen maalijoukkona. Tämä tapahtuu luomalla yhdistelmäfunktio ensimmäisen pinnan peitefunktion palauttavasta käänteisfunktiosta, peitefunktioiden määrittelyjoukkoina olevien tasojen välisestä funktiosta sekä maalijoukkona olevan tason peitefunktiosta. Kolmen eri derivoituvan funktion yhdistelmäfunktio toteuttaa kaikki yleisimmät laskutoimitukset.

Samoin kuin derivoinnin yhteydessä, myös integroinnissa pinnalla määritelty funktio on palautettava peitefunktion avulla takaisin tasolle ja operoitava siellä. Integrointi suoritetaan käyrää pitkin yhden muuttujan tapauksessa niinkuin yleisessäkin tapauksessa ja usean muuttujan integrointi suoritetaan määrittelyalueena toimivan suorakaiteen reunoja pitkin suuntaan tai toiseen.

Tutkielman loppupuolella luodaan vielä silmäys pintojen topologisiin ominaisuuksiin, joista esille nousee kolme ominaisuutta, joiden avulla voidaan tarkastella pinnan yhtenäisyyttä, sen pinta-alan äärellisyyttä ja sitä, onko kyseessä yksi vaiko kaksipuolinen kappale.

Aivan lopuksi tutkaillaan vielä monistoja, jotka ovat kolmiulotteisen pinnan yleistyksiä useampiulotteiselle avaruudelle. Tässä tapauksessa kolmiulotteisten pintojen tietyt itsestäänselvät ominaisuudet ovat mahdottomia osoittaa, mikä mutkistaa tutkimista.

2 Esitiedot

Tämän luvun tarkoitus on esitellä tutkielman varsinaisen aiheen ymmärtämiseen tarvittavat matemaattiset käsitteet ja muutama peruslause. Jatkossa derivoiminen ja käyrät tulevat olemaan erittäin merkittävässä osassa, joten niille annetaan jo tässäkin vaiheessa huomattava osa. Oletetaan että lukija tuntee aiheeseen liittyvän matematiikan perusteet ja perusasioita lineaarialgebrasta.
Tässä tutkielmassa määräämätöntä muuttujaa kuvaavat yleensä merkit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$, reaaliavaruuden $\mathbb{R}^3$ kiinteää pistettä $\bar{p}$, pisteessä $\bar{p}$ olevaa tangenttivektoriavaruuden $T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^3)$ alkiota $\bar{v}$, reaaliarvoista funktiota h ($h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), usean muuttujan funktiota H ($H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), käyrää α ($\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$), peitefunktiota f tai g ja pintaa M.

2.1 Derivaatta

Määritelmä 2.1.1. Reaaliarvoisella funktiolla $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *derivaatta* $h' \in \mathbb{R}$ pisteessä p, mikäli

$$\lim_{x \to p} \frac{|h(x) - h(p) - h'(x-p)|}{|x-p|} = 0.$$

Tämä voidaan ilmaista myös muodossa $|h(x) - h(p) - h'(x-p)| = |x-p|u(x)$, jossa virhettä kuvaava termi $u(x) \to 0$ kun $x \to p$. Moniulotteiselle funktiolle $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaava merkintä on $\|H(\bar{x}) - H(\bar{p}) - H'_{\bar{p}}(\bar{x}-\bar{p})\| = \|\bar{x}-\bar{p}\|u(\bar{x})$, jossa $\|u(\bar{x})\| \to 0$, kun $\bar{x} \to \bar{p}$. Tällöin $H'_{\bar{p}}$ on muotoa $m \times n$ oleva matriisi.

Määritelmä 2.1.2. Reaaliarvoinen funktio h avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on *jatkuvasti derivoituva*, mikäli sen kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja kaikkialla jatkuvia.

Määritelmä 2.1.3. Olkoon reaaliarvoinen funktio h määriteltynä avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja $\bar{v}$ pisteessä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$ oleva vektori. Vakio

$$\bar{v}_{\bar{p}}[h] = \frac{d}{dt}(h(\bar{p} + t\bar{v}))|_{t=0}$$

on funktion h *suunnattu derivaatta* suuntaan $\bar{v}$ pisteessä $\bar{p}$.

Seuraava lemma näyttää, miten suunnattuja derivaattoja käytännössä operoidaan.

Lemma 2.1.4. Jos $\bar{v}_{\bar{p}} = (v_1, v_2, v_3)_{\bar{p}}$ on tangenttivektori avaruudessa $\mathbb{R}^3$, niin

$$\bar{v}_{\bar{p}}[h] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{p}).$$

Todistus Olkoon $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, jolloin

$$\bar{p} + t\bar{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3).$$

Hyödynnetään ketjusääntöä, kun halutaan saada derivaatta funktiosta

$$h(\bar{p} + t\bar{v}) = h(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3).$$

Koska

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_i + tv_i) = v_i,$$

niin saadaan

$$\bar{v}_{\bar{p}}[h] = \frac{d}{dt}(h(\bar{p} + t\bar{v}))|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{p}) v_i.$$

mot

2.2 Käyrät

Määritelmä 2.2.1. *Käyrä* on avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$ määritelty derivoituva funktio $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$.

Visuaalisesti käyrä on siis kolmiulotteisessa avaruudessa luikerteleva viiva. Käyrät ovat pintojen kannalta oleellisia siinä mielessä, että käyrä voi edetä pelkästään pinnassakin.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^3$ siten että $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Kaikille $t \in I$ käyrän α *nopeusvektori* muuttujan t suhteen on tangenttivektori

$$\alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t))_{\alpha(t)}$$

pisteessä $\alpha(t)$.

Koska käyrän arvo eri muuttujan arvoilla ilmaisee sijaintia kolmiulotteisessa avaruudessa, nopeusvektori nimensä mukaisesti kuvaa sijainnin hetkellistä muutosta eli nopeutta. Kun käyrä tunnetaan, voidaan konstruoida toisia käyriä, jotka kulkevat täsmälleen samaa reittiä, mutta eri nopeuksilla.

Määritelmä 2.2.3. Olkoot I ja J avoimia välejä avaruudessa $\mathbb{R}$. Olkoon $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ käyrä ja $h : J \to I$ kasvava bijektio. Yhdistelmäfunktio

$$\beta = \alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$$

on *käyrän α uudelleenparametrisointi* funktiolla h.

Seuraava lemma liittää uudelleenparametrisoinnin ja derivoinnin.

Lemma 2.2.4. Mikäli β on käyrän α uudelleenparametrisointi funktiolla h, niin

$$\beta'(s) = (dh/ds)(s)\alpha'(h(s)).$$

Todistus Jos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, niin

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s))).$$

Derivoinnin sääntöjen mukaan

$$\alpha_i(h)'(s) = \alpha_i'(h(s)) \cdot h'(s).$$

Nopeusvektorin määritelmän mukaan

$$\beta'(s) = \alpha(h)'(s)$$

$$= (\alpha_1'(h(s)) \cdot h'(s), \alpha_2'(h(s)) \cdot h'(s), \alpha_3'(h(s)) \cdot h'(s)) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s)).$$

mot

Koska nopeutta siis kuvataan vektorilla, funktiosta voidaan ottaa suunnattu derivaatta nopeusvektorin suuntaan.

Lemma 2.2.5. Olkoon $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ käyrä ja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Nyt

$$\alpha'(t)[h] = \frac{d(h(\alpha))}{dt}(t).$$

Todistus Koska

$$\alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t))_{\alpha(t)},$$

voidaan lemmasta 2.1.4. päätellä

$$\alpha'(t)[h] = \sum \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}(t).$$

Yhdistelmäfunktio $h \circ \alpha$ voidaan kirjoittaa muodossa $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, jolloin ketjusäännön perusteella saadaan sama derivaatan arvo funktiolle $h \circ \alpha$. mot

2.3 Muodot

Määritelmä 2.3.1. *1-muoto* ϕ avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on tangenttivektoreita operoiva reaaliarvoinen lineaarinen funktio eli siis

$$\phi(a\bar{v} + b\bar{w}) = a\phi(\bar{v}) + b\phi(\bar{w})$$

kaikilla vakioilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja vektoreilla $\bar{v}, \bar{w}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Seuraava määritelmä avartanee 1-muodon merkitystä.

Määritelmä 2.3.2. Jos h on derivoituva reaaliarvoinen funktio avaruudessa $\mathbb{R}^3$, niin funktion h *derivaatta* dh on 1-muoto

$$dh(\bar{v}_{\bar{p}}) = \bar{v}_{\bar{p}}[h]$$

pätien kaikilla tangenttivektoreilla $\bar{v}_{\bar{p}}$.

Seuraava esimerkki selventänee määritelmää.

Esimerkki 2.3.3. (1) Derivaatat dx_1, dx_2 ja dx_3 ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisen kannan koordinaattifunktiot. Lemmaa 2.1.4. käyttämällä saadaan

$$dx_i(\bar{v}_{\bar{p}}) = \bar{v}_{\bar{p}}[x_i] = \sum_j v_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\bar{p}) = \sum_j v_i \delta_{ij} = v_i,$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin deltafunktio (0 jos $i \neq j$, 1 jos $i = j$). Täten derivaatan dx_i arvo mielivaltaiselle tangenttivektorille $\bar{v}_{\bar{p}}$ on vektorin koordinaatti v_i, eikä siis riipu lainkaan pisteestä $\bar{p}$.
(2) Olkoon 1-muoto $\psi = h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3$. Koska dx_i on 1-muoto, määritelmän mukaisesti ψ on myös 1-muoto kaikilla funktioilla h_1, h_2 ja h_3. Funktion ψ arvo mielivaltaisella tangenttivektorilla $\bar{v}_{\bar{p}}$ on

$$\psi(\bar{v}_{\bar{p}}) = (\sum h_i dx_i)(\bar{v}_{\bar{p}}) = \sum h_i(\bar{p}) dx_i(\bar{v}) = \sum h_i(\bar{p}) v_i.$$

Lemma 2.3.3. Jos ϕ on 1-muoto avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja $U = (U_1, U_2, U_3)$ on kolmiulotteisen reaaliavaruuden kanta, niin $\phi = \sum h_i dx_i$, missä $h_i = \phi(U_i)$. Nämä funktiot h_1, h_2, h_3 ovat nimeltään funktion ϕ *koordinaattifunktiot.*

Todistus Määritelmän mukaan 1-muoto on määritelty tangenttivektoreille. Täten ϕ ja $\sum h_i dx_i$ ovat yhtäpitävät jos ja vain jos niillä on sama arvo kaikilla tangenttivektoreilla $\bar{v}_{\bar{p}} = \sum v_i U_i(\bar{p})$. Edellistä esimerkkiä apuna käyttäen nähdään että

$$(\sum h_i dx_i)(\bar{v}_{\bar{p}}) = \sum h_i(\bar{p}) dx_i(\bar{v}) = \sum h_i(\bar{p}) v_i.$$

Toisaalta taas

$$\phi(\bar{v}_{\bar{p}}) = \phi(\sum v_i U_i(\bar{p})) = \sum v_i \phi(U_i(\bar{p})) = \sum v_i h_i(\bar{p})$$

koska $h_i = \phi(U_i)$. Täten ϕ ja $\sum h_i dx_i$ ovat saman arvoisia kaikilla tangenttivektoreilla. mot

2.4 Kuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Keskitetään ajatukset vielä lopuksi kuvauksiin, jotka ovat erityisesti $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tai $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Yksinkertaisimpiin kuvauksiin nähden nämä poikkeavat hieman derivoinnin suhteen.

Määritelmä 2.4.1. Olkoon derivoituva kuvaus $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jos $\bar{v}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ tangenttivektori pisteessä $\bar{p}$, olkoon $H'_{\bar{v}}$ hetkellinen nopeus käyrälle $t \to H(\bar{p} + t\bar{v})$ avaruudessa $\mathbb{R}^m$ ajanhetkellä $t = 0$. Funktio $H' : T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n) \to T_{H(\bar{p})}(\mathbb{R}^m)$ on nimeltään funktion H *derivaatta.*

Lause 2.4.2. Olkoon $H = (h_1, h_2, ..., h_m)$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kuvaus. Mikäli $\bar{v}$ on tangenttivektori avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteessä $\bar{p}$, niin

$$H'_{\bar{p}}(\bar{v}) = (\bar{v}[h_1], ..., \bar{v}[h_m])$$

pisteessä $H(\bar{p})$. Täten $H'_{\bar{v}}$ määräytyy funktion H koordinaattifunktioiden derivaattojen $\bar{v}[h_i]$ mukaan suuntaan $\bar{v}$.

Todistus Hienoisen konkreettisuuden vuoksi todistetaan tämä tapaukselle $m = 3$. Olkoon β määritelmän mukainen käyrä, jolloin

$$\beta(t) = H(\bar{p} + t\bar{v}) = (h_1(\bar{p} + t\bar{v}), h_2(\bar{p} + t\bar{v}), h_3(\bar{p} + t\bar{v})).$$

Määritelmän nojalla $\beta'(0) = H'_{\bar{v}}$. Määritelmän 2.2.2. mukaan nopeusvektorin $\beta'(0)$ saamiseksi täytyy muodostaa derivaatat koordinaattifunktioille $h_i(\bar{p}+t\bar{v})$ pisteessä $t = 0$ käyrälle β. Mutta $(\frac{d}{dt})(h_i(\bar{p}+t\bar{v}))|_{t=0}$ on täsmälleen $\bar{v}[h_i]$. Täten

$$H'_{\bar{v}} = (\bar{v}[h_1], \bar{v}[h_2], \bar{v}[h_3])_{\beta(0)}.$$

Mutta käyrän β määritelmän nojalla

$$\beta(0) = H(\bar{p}).$$

mot

Nähtiin siis, että jokainen tangenttivektori $\bar{v}$ pisteessä $\bar{p}$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kuvautuu funktiolla H' avaruuden $\mathbb{R}^m$ tangenttivektoriksi $H'_{\bar{v}}$ pisteessä $H(\bar{p})$. Täten voidaan muodostaa funktio derivaattamatriisista jokaisessa pisteessä $\bar{p}$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$

$$H'_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n) \to T_{H(\bar{p})}(\mathbb{R}^m),$$

jota voidaan kutsua derivaattamatriisiksi pisteessä $\bar{p}$. Tämä on selvä analogia perinteiselle derivaatalle $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seuraava seurauslause valaisee lisää funktiota H'.

Seuraus 2.4.3. Olkoon funktio $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Nyt jokaisessa pisteessä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ derivaattamatriisi $H'_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n) \to T_{H(\bar{p})}(\mathbb{R}^m)$ on lineaarinen kuvaus.

Todistus Jos $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat tangenttivektoreita pisteessä $\bar{p}$, olisi siis oltava

$$H'_{a\bar{v}+b\bar{w}} = aH'_{\bar{v}} + bH'_{\bar{w}}.$$

Tämä johtuu kuitenkin suoraan edellisestä lauseesta, kun muistetaan yksinkertaisen derivaatan lineaariset ominaisuudet. mot

Koska $H'_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n) \to T_{H(\bar{p})}(\mathbb{R}^m)$ on lineaarinen muunnos, on suotavaa muodostaa sen matriisi luonnollisille kannoille $U_1(\bar{p}), ..., U_n(\bar{p})$ avaruudessa $T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$ ja $U_1(H(\bar{p})), ..., U_m(H(\bar{p}))$ avaruudessa $T_{H(\bar{p})}(\mathbb{R}^m)$. Tämä matriisi on nimeltään funktion H *Jaakobin matriisi* pisteessä $\bar{p}$.

Seuraus 2.4.4. Jos $H = (h_1, ..., h_m)$ on kuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^n$ avaruudelle $\mathbb{R}^m$, niin

$$H'_{U_j(\bar{p})} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\bar{p}) U_i(H(\bar{p})), (1 \leq j \leq n)$$

Täten funktion H Jaakobin matriisi pisteessä $\bar{p}$ on $((\partial h_i/\partial x_j)(\bar{p}))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.

Todistus Asetetaan edeltävään seurauslauseeseen $\bar{v} = U_j(\bar{p})$. Jos asetetaan yksikkövektori $U_j(\bar{p})$ muotoon h_i, saadaan $(\partial h_i/\partial x_j)(\bar{p})$. Tällöin

$$H'_{U_j(\bar{p})} = (\frac{\partial h_1}{\partial x_j}(\bar{p}), ..., \frac{\partial h_m}{\partial x_j}(\bar{p})) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\bar{p}) U_i(H(\bar{p})).$$

mot

Otetaan vielä yksi määritelmä, jota hyödynnetään vastaisuudessa.

Määritelmä 2.4.5. Kuvaus $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *säännöllinen* mikäli derivaattamatriisi $H'_{\bar{p}}$ on injektiivinen jokaisessa pisteessä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$.

Lineaarialgebraan linkitettynä on yhtäpitävää että säännölliselle kuvaukselle H derivaattamatriisi $H'_{\bar{v}_{\bar{p}}} = 0$ jos ja vain jos $\bar{v}_{\bar{p}} = \bar{0}$ ja että kyseisen funktion Jaakobin matriisin aste on n eli siis sama kuin lähtöjoukon ulottuvuuksien määrä.

2.5 Käänteiskuvauslause ja implisiittisen funktion lause

Tässä esitietojen viimeisessä kappaleessa esitellään kaksi differentiaalilaskennan suurta peruslausetta todistuksineen. Ne kuitenkin vaativat perustakseen muutaman pienemmän lauseen, joiden sisällöllinen merkitys on tämän tutkielman kannalta vähemmän merkittävä.

Lemma 2.5.1. Olkoon $H : D \to \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ avoimessa joukossa määritelty derivoituva funktio. Kun D sisältää pisteet $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sekä nämä yhdistävän käyräsegmentin S ja $\bar{x}_0 \in D$, niin

$$\|H(\bar{b}) - H(\bar{a}) - H'_{\bar{x}_0}(\bar{b} - \bar{a})\| \leq \|\bar{b} - \bar{a}\| \sup_{\bar{x} \in S}\{\|H'_{\bar{x}} - H'_{\bar{x}_0}\|\}.$$

Todistus Määritellään kuvaus $V : D \to \mathbb{R}^m$

$$V(\bar{x}) = H(\bar{x}) - H'_{\bar{x}_0} \cdot \bar{x},$$

kun $\bar{x} \in D$. Koska derivaatta $H'_{\bar{x}_0}$ on lineaarinen, niin vastaavasti $V'_{\bar{x}} = H'_{\bar{x}} - H'_{\bar{x}_0}$, kun $\bar{x} \in D$. Kun sovelletaan tähän tapaukseen väliarvolausetta, tiedetään olevan olemassa sellaisen pisteen $\bar{c} \in S$ että

$$\begin{aligned} \|H(\bar{b}) - H(\bar{a}) - H'_{\bar{x}_0}(\bar{b} - \bar{a})\| &= \|V(\bar{b}) - V(\bar{a})\| \\ &\leq \|V'_{\bar{c}}(\bar{b} - \bar{a})\| = \|(H'_{\bar{c}} - H'_{\bar{x}_0})(\bar{b} - \bar{a})\| \\ &\leq \|\bar{b} - \bar{a}\| \sup_{\bar{x} \in S}\{\|H'_{\bar{x}} - H'_{\bar{x}_0}\|\}. \end{aligned}$$

mot

Likiarvolemma Olkoon $H : D \to \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ avoimessa joukossa määritelty jatkuvasti derivoituva funktio. Kun $\bar{x}_0 \in D$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta_\varepsilon > 0$ että jos $\|\bar{x}_k - \bar{x}_0\| \leq \delta_\varepsilon, k = 1, 2$, niin $\bar{x}_k \in D$ ja

$$\|H(\bar{x}_1) - H(\bar{x}_2) - H'_{\bar{x}_0}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\| \leq \varepsilon\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Todistus Koska derivaatta $H'_{\bar{x}}$ on jatkuva kuvaus, niin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta_\varepsilon > 0$ että jos $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta_\varepsilon$, niin $\bar{x} \in D$ ja $\|H'_{\bar{x}} - H'_{\bar{x}_0}\| < \varepsilon$. Nyt $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ toteuttavat epäyhtälön $\|\bar{x}_k - \bar{x}_0\| \leq \delta_\varepsilon$, kun käyräsegmentti, jonka päätepisteinä nämä ovat, sijaitsee suljetussa pallossa, jonka keskipisteenä on $\bar{x}_0$ ja säteenä δ_ε ja täten se on avoimen joukon D sisällä. Nyt kun sovelletaan edellistä lemmaa, niin saadaan haluttu tulos. mot

Injektiivisen kuvauksen lause Olkoon $H : D \to \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ avoimessa joukossa määritelty jatkuvasti derivoituva funktio ja oletetaan että $H'_{\bar{p}}$ on injektio. Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$ että funktion H rajoittuma alueelle $B(\bar{p}, \delta) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{p}\| < \delta\}$ on injektio. Lisäksi rajoittuman $H|_{B(\bar{p},\delta)}$ käänteiskuvaus on jatkuva funktio joukolta $H(B(\bar{p}, \delta)) \subset \mathbb{R}^m$ joukolle $B(\bar{p}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$.

Todistus Koska $H'_{\bar{c}}$ on injektio ja lineaarinen kuvaus, niin sen normilla on määrittelyjoukossaan maksimi ja minimi (tai ainakin infimum ja supremum tunnetaan). Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$ että

$$r\|\bar{u}\| \leq \|H'_{\bar{c}}(\bar{u})\|$$

kaikilla $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$. Jos nyt sovelletaan likiarvolemmaa asettamalla $\varepsilon = \frac{1}{2}r$ että saataisiin sellainen $\delta > 0$ että $\|\bar{x}_k - \bar{c}\| \leq \delta, k = 1, 2, ...$ niin

$$\|H(\bar{x}_1) - H(\bar{x}_2) - H'_{\bar{c}}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}r\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Jos sovelletaan kolmioepäyhtälöä lausekkeen vasempaan puoleen saadaan

$$\|H'_{\bar{c}}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\| - \|H(\bar{x}_1) - H(\bar{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}r\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Jos tähän sovelletaan aiemmin saatua lauseketta $r\|\bar{u}\| \leq \|H'_{\bar{c}}(\bar{u})\|$ arvolla $\bar{u} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, saadaan

$$\frac{1}{2}r\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \|H(\bar{x}_1) - H(\bar{x}_2)\|$$

sillä $\bar{x}_k \in B(\bar{p}, \delta)$. Tämä todistaa, että rajoittuma $H|_{B(\bar{p},\delta)}$ on injektio. Tällä rajoittumalla on siis käänteiskuvaus, jolle annetaan merkintä V. Jos $\bar{y}_k \in H(B(\bar{p}, \delta))$, tällöin alueella $B(\bar{p}, \delta)$ on sellaiset yksiselitteiset pisteet $\bar{x}_k = V(\bar{y}_k)$ että $\bar{y}_k = H(\bar{x}_k)$. Yllä olevasta seuraa

$$\|V(\bar{y}_1) - V(\bar{y}_2)\| \leq (2/r)\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|,$$

josta seuraa että $V = (H|_{B(\bar{p},\delta)})^{-1}$ on jatkuva kuvaus joukolta $H(B(\bar{p}, \delta))$ joukolle $\mathbb{R}^n$. mot

Surjektiivisen kuvauksen lause Olkoon $H : D \to \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ avoimessa joukossa määritelty derivoituva funktio. Oletetaan että jollain $\bar{p} \in D$ lineaarinen kuvaus $H'_{\bar{p}}$ on surjektio. Tällöin on olemassa luvut $\alpha, b > 0$ siten että jos $\|\bar{y} - H(\bar{p})\| \leq \alpha/2b$, niin näitä kohti on olemassa sellainen $\bar{x} \in D$ että $\|\bar{x} - \bar{p}\| \leq \alpha$ ja $H(\bar{x}) = \bar{y}$.

Todistus Koska $H'_{\bar{p}}$ on surjektio, avaruuden $\mathbb{R}^m$ luonnollisen kannan vektoreilla

$$\bar{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \bar{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \bar{e}_m = (0, 0, ..., 1)$$

on derivaattafunktion alkukuva avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoot ne vaikkapa $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$. Olkoon nyt lineaarinen kuvaus $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ muodoltaan

$$V(\sum_{i=1}^{m} a_i \bar{e}_1) = \sum_{i=1}^{m} a_i \bar{u}_i.$$

Nyt siis yhdistelmäfunktio $H' \circ V$ on identiteettikuvaus avaruudessa $\mathbb{R}^m$ eli $H' \circ V(\bar{y}) = \bar{y}$ kaikilla $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Jos

$$b = \{\sum_{i=1}^{m} \|\bar{u}_i\|^2\}^{1/2},$$

niin kolmioepäyhtälöä ja Schwarzin epäyhtälöä soveltamalla, mikäli $\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} a_i \bar{e}_i$, saadaan

$$\begin{aligned} \|V_{\bar{y}}\| &\leq \sum_{i=1}^{m} |a_i| \|\bar{u}_i\| \\ &\leq \{\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2\}^{1/2} \{\sum_{i=1}^{m} \|\bar{u}_i\|^2\}^{1/2} \\ &= b\|\bar{y}\|. \end{aligned}$$

Likiarvolemman nojalla on olemassa sellainen $\alpha > 0$ että $\|\bar{x}_k - \bar{p}\| \leq \alpha, k = 1, 2, ...$ sekä $\bar{x}_k \in D$ ja

$$\|H(\bar{x}_1) - H(\bar{x}_2) - H'_{\bar{c}}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\| \leq \frac{1}{2b}\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Olkoon nyt $B_\alpha = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{p}\| \leq \alpha\}$ ja oletetaan että $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ toteuttaa yhtälön $\|\bar{y} - H(\bar{p})\| \leq \alpha/2b$. Nyt siis on $b > 0$. Osoitetaan nyt että on olemassa edellä vaaditun kaltainen $\bar{x} \in B_\alpha$. Olkoon $\bar{x}_0 = \bar{p}$

ja $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + V(\bar{y} - H(\bar{p}))$ sellainen että $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| \leq m\|\bar{y} - H(\bar{p})\| \leq \alpha/2$, jolloin

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| \leq \frac{\alpha}{2}$$

ja

$$\|\bar{x}_1 - \bar{p}\| \leq (1 - \frac{1}{2})\alpha.$$

Oletetaan että $\bar{p} = \bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_j$ on valittu induktiivisesti avaruudesta $\mathbb{R}^n$ tavalla

$$\|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\| \leq \frac{\alpha}{2^k}, \|\bar{x}_k - \bar{p}\| \leq (1 - \frac{1}{2^k})\alpha,$$

kun $k = 1, 2, ..., j$. Nyt määritellään $\bar{x}_{j+1} (j \geq 1)$

$$\bar{x}_{j+1} = \bar{x}_j - V(H(\bar{x}_j) - H(\bar{x}_{j-1}) - H'_{\bar{x}_j - \bar{x}-1}).$$

Aikaisemmasta seuraa, että

$$\|\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j\| \leq m\|H(\bar{x}_j) - H(\bar{x}_{j-1}) - H'_{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}}\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}\|,$$

jolloin seuraa että $\|\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j\| \leq \frac{1}{2}(\alpha/2^j) = \alpha/2^{j+1}$ ja

$$\|\bar{x}_{j+1} - \bar{p}\| \leq \|\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j\| + \|\bar{x}_j - \bar{p}\|$$

$$\leq (\alpha/2^{j+1}) + (1 - 1/2^j)\alpha$$

$$= (1 - 1/2^{j+1})\alpha.$$

Nyt voidaan muodostaa lukujono $(\bar{x}_j)$ joukossa B_α uudella indeksillä $k = j + 1$. Jos $q \geq j$ saadaan

$$\|\bar{x}_j - \bar{p}\| \leq \|\bar{x}_j - \bar{x}_{j+1}\| + \|\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_{j+2}\| + ... + \|\bar{x}_{q-1} - \bar{x}_q\|$$

$$\leq \frac{\alpha}{2^{j+1}} + \frac{\alpha}{2^{j+2}} + ... + \frac{\alpha}{2^q} \leq \frac{\alpha}{2^j}.$$

Nyt $(\bar{x}_j)$ on Cauchyn jono joukossa $\mathbb{R}^n$ ja suppenee siis tiettyyn alkioon $\bar{x}$. Koska $\|\bar{x}_j - \bar{p}\| \leq (1 - 1/2^j)\alpha$, niin vastaavasti $\|\bar{x} - \bar{p}\| \leq \alpha$ niin että $\bar{x} \in B_\alpha$.

Koska $\bar{x}_1 - \bar{x}_0 = V(\bar{y} - H(\bar{p}))$, vastaavasti

$$H'_{\bar{x}_1 - \bar{x}_0} = (H' \circ V)_{\bar{y} - H(\bar{p})} = \bar{y} - H(\bar{x}_0).$$

Lisäksi saadaan

$$
\begin{aligned}
H'_{\bar{x}_{j+1}-\bar{x}_j} &= -(H' \circ V)_{H(\bar{x}_j)-H(\bar{x}_{j-1})-H'_{\bar{x}_j-\bar{x}_{j-1}}} \\
&= -\{H(\bar{x}_j) - H(\bar{x}_{j-1}) - H'_{\bar{x}_j-\bar{x}_{j-1}}\} \\
&= H'_{\bar{x}_j-\bar{x}_{j-1}} - [H(\bar{x}_j) - H(\bar{x}_{j-1})].
\end{aligned}
$$

Induktiolla saadaan

$$
H'_{\bar{x}_{j+1}-\bar{x}_j} = \bar{y} - H(\bar{x}_j),
$$

josta seuraa että $H(\bar{x}) = \lim H(\bar{x}_j) = \bar{y}$. Täten jokainen piste $\bar{y}$, jolla toteutuu $\|\bar{y} - H(\bar{p})\| \leq \alpha/2b$, on pisteen $\bar{x} \in D$ kuvaus funktiolla H ja $\|\bar{x} - \bar{p}\| \leq \alpha$. mot

Nyt voidaan edetä tämän kappaleen varsinaiseen pääasiaan. Ensiksi esitellään käänteiskuvauslause.

Käänteiskuvauslause Olkoon $H : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ avoimessa joukossa määritelty jatkuvasti derivoituva funktio. Mikäli $\bar{p} \in D$ on sellainen että $H'_{\bar{p}}$ on bijektio, tällöin on olemassa pisteen $\bar{p}$ avoin ympäristö U siten että $V = H(U)$ on pisteen $H(\bar{p})$ avoin ympäristö ja funktion H rajoittuma alueeseen U on bijektio jatkuvasti derivoituvalla käänteiskuvauksella $K : V \to U$.

Todistus Bijektiivisyyden nojalla funktion $H'_{\bar{p}}$ normi saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa (tai ainakin infimum ja supremum tunnetaan). Tällöin on olemassa sellainen $r > 0$ että

$$
2r\|\bar{z}\| \leq \|H'_{\bar{p}}(\bar{z})\|
$$

kun $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$. Koska H on derivoituva, on olemassa pisteen $\bar{p}$ ympäristö, jossa $H'_{\bar{x}}$ on kääntyvä ja toteutuu

$$
r\|\bar{z}\| \leq \|H'_{\bar{x}}(\bar{z})\|
$$

kun $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$. Kohdistetaan mielenkiinto nyt pisteen $\bar{p}$ ympäristöön U, jossa H on injektiivinen ja joka sisältyy palloon, jonka keskipisteenä on $\bar{p}$ ja säteenä $a > 0$ sellaisena kuin se surjektiivisen kuvauksen lauseessa määriteltiin. Tällöin $V = H(U)$ on pisteen $H(\bar{p})$ ympäristö ja edellisistä lauseista voidaan päätellä rajoittumalla $H|_U$ olevan jatkuvan käänteiskuvauksen $K : V \to \mathbb{R}^n$.

Pitää osoittaa enää että K on derivoituva mielivaltaisessa pisteessä

$\bar{y_1} \in V$. Olkoon $\bar{x}_1 = K(\bar{y_1}) \in U$. Koska H on derivoituva pisteessä $\bar{x}_1$, niin vastaavasti

$$H(\bar{x}) - H(\bar{x}_1) - H'_{\bar{x}_1}(\bar{x} - \bar{x}_1) = \|\bar{x} - \bar{x}_1\| u(\bar{x}),$$

missä $u(\bar{x}) \to 0$, kun $\bar{x} \to \bar{x}_1$. Olkoon M_1 käänteiskuvaus lineaariselle funktiolle $H'_{\bar{x}_1}$, jolloin

$$\bar{x} - \bar{x}_1 = M_1(H'_{\bar{x}_1}(\bar{x} - \bar{x}_1)) = M_1(H(\bar{x}) - H(\bar{x}_1) - \|\bar{x} - \bar{x}_1\| u(\bar{x})).$$

Jos $\bar{x} \in U$, niin $\bar{x} = K(\bar{y})$ tietyllä $\bar{y} = H(\bar{x}) \in V$. Lisäksi $\bar{y}_1 = H(\bar{x}_1)$, joten voidaan kirjoittaa toinen muoto

$$K(\bar{y}) - K(\bar{y_1}) - M_1(\bar{y} - \bar{y}_1) = \|\bar{x} - \bar{x}_1\| M_1(u(\bar{x})).$$

Koska $H'_{\bar{x}_1}$ on injektio, niin pätee

$$\|\bar{y} - \bar{y}_1\| = \|H(\bar{x}) - H(\bar{x}_1)\| \geq \frac{r}{2} \|\bar{x} - \bar{x}_1\|$$

oletuksella että y on riittävän lähellä pistettä y_1. Lisäksi aiempana esitetyn nojalla $\|M_1(\bar{u})\| \leq (1/r)\|\bar{u}\|$ kaikilla $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$. Täten

$$\|K(\bar{y}) - K(\bar{y_1}) - M_1(\bar{y} - \bar{y}_1)\| \leq (2/r^2)\|u(\bar{x})\| \|\bar{y} - \bar{y}_1\|.$$

Nyt kun $\bar{y} \to \bar{y}_1$, niin $\bar{x} = K(\bar{y}) \to K(\bar{y_1}) = \bar{x}_1$ ja siten $\|u(\bar{x})\| \to 0$. Voidaan siis tehdä johtopäätös että $K'_{\bar{y_1}}$ on olemassa ja pätee $M_1 = (H'_{\bar{x}_1})^{-1}$. mot

Implisiittisen funktion lause Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avoin joukko ja $(\bar{a}, \bar{b}) \in D$. Oletetaan että $H : D \to \mathbb{R}^m$ on derivoituva, $H(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ ja että lineaarinen kuvaus $H'_{(\bar{a},\bar{b})}(\bar{0}, \bar{v}), \bar{v} \in \mathbb{R}^m$ on bijektio $H' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, niin
(a) on olemassa pisteen $\bar{a}$ avoin ympäristö W ja tietty derivoituva funktio $\phi : W \to \mathbb{R}^m$ siten että $\bar{b} = \phi(\bar{a})$ ja $H(\bar{x}, \phi(\bar{x})) = 0$ kaikilla $\bar{x} \in W$.
(b) on olemassa pisteen $(\bar{a}, \bar{b})$ avoin ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, niin että pari $(\bar{x}, \bar{y}) \in U$ toteuttaa yhtälön $H(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ jos ja vain jos $\bar{y} = \phi(\bar{x}), \bar{x} \in W$.

Todistus Olkoot $\bar{a} = \bar{0}$ ja $\bar{b} = \bar{0}$. Olkoon $K : D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ määritelty

$$K(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, H(\bar{x}, \bar{y})), (\bar{x}, \bar{y}) \in D.$$

K on derivoituva funktio, koska sen komponentit ovat derivoituvia. Täten

$$K'_{(\bar{x},\bar{y})}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, H'_{(\bar{x},\bar{y})}(\bar{u}, \bar{v})),$$

kun $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ ja $(\bar{u},\bar{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Väitetään nyt että $K'_{(\bar{0},\bar{0})}$ on kääntyvä alueella $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Jos ilmaistaan

$$H'_{(\bar{0},\bar{0})}(\bar{u},\bar{v}) = H'_{(\bar{0},\bar{0})}(\bar{u},\bar{0}) + H'_{(\bar{0},\bar{0})}(\bar{0},\bar{v}) = L_1(\bar{u}) + L_2(\bar{v}),$$

niin lausekkeen $K'_{(\bar{0},\bar{0})}$ käänteiskuvaus on lineaarinen kuvaus J joukossa $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ muodossa

$$J(\bar{x},\bar{z}) = (\bar{x}, {L_2}^{-1}(\bar{z} - L_1(\bar{x}))).$$

Käänteiskuvauslauseesta seuraa, että on olemassa pisteen $(\bar{0},\bar{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avoin ympäristö U siten että $V = K(U)$ on saman pisteen avoin ympäristö ja rajoittuma $K|_U$ on bijektio joukolle V jatkuvalla derivoituvalla käänteiskuvauksella $\psi : V \to U$, jolle $\psi(\bar{0},\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0})$. Nyt ψ saa muodon

$$\psi(\bar{x},\bar{z}) = (\phi_1(\bar{x},\bar{z}), \phi_2(\bar{x},\bar{z})),$$

kun $(\bar{x},\bar{z}) \in V$ sekä $\phi_1 : V \to \mathbb{R}^n$ ja $\phi_2 : V \to \mathbb{R}^m$. Koska

$$(\bar{x},\bar{z}) = K \circ \psi(\bar{x},\bar{z}) = K(\phi_1(\bar{x},\bar{z}), \phi_2(\bar{x},\bar{z}))$$

$$= (\phi_1(\bar{x},\bar{z}), H(\phi_1(\bar{x},\bar{z}), \phi_2(\bar{x},\bar{z}))),$$

saadaan $\phi_1(\bar{x},\bar{z}) = \bar{x}$ kaikilla $(\bar{x},\bar{z}) \in V$. Nyt ψ saa yksinkertaisemman muodon

$$\psi(\bar{x},\bar{z}) = (\bar{x}, \phi_2(\bar{x},\bar{z})),$$

kaikilla $(\bar{x},\bar{z}) \in V$. Nyt jos $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ määritellään $R(\bar{x},\bar{z}) = \bar{z}$, niin R on lineaarinen, jatkuva ja $\phi_2 = R \circ \psi$. Täten ϕ_2 on derivoituva ja saadaan

$$\bar{z} = H(\bar{x}, \phi_2(\bar{x},\bar{z}))$$

kaikilla $(\bar{x},\bar{z}) \in V$. Olkoon nyt $W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | (\bar{x},\bar{0}) \in V\}$ pisteen $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ avoin ympäristö ja määritellään $\phi(\bar{x}) = \phi_2(\bar{x},\bar{0})$, kun $\bar{x} \in W$. Selvästi $\phi(\bar{u},\bar{0}) = \bar{0}$ ja äsken muodostettu yhtälö saa muodon

$$H(\bar{x}, \phi(\bar{x})) = \bar{0}$$

kaikilla $\bar{x} \in W$. Sitten $\phi'_{\bar{x}}(\bar{u}) = \phi_2(\bar{x},\bar{0}) \cdot (\bar{u},\bar{0})$ kun $\bar{x} \in W, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$, jolloin voidaan todeta, että funktio ϕ on derivoituva. Tämä todistaa kohdan (a).

Että kohta (b) saataisiin todistettua loppuun, oletetaan että $(\bar{x},\bar{y}) \in U$ toteuttaa yhtälön $H(\bar{x},\bar{y}) = \bar{0}$. Nyt $K(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x}, H(\bar{x},\bar{y})) = (\bar{x},\bar{0}) \in V$, josta seuraa että $\bar{x} \in W$. Vastaavasti $(\bar{x},\bar{y}) = \psi(\bar{x},\bar{0}) = (\bar{x}, \phi_2(\bar{x},\bar{0})) = (\bar{x}, \phi(\bar{x}))$, joten $\bar{y} = \phi(\bar{x})$. mot

3 Pinnat

3.1 Pinnan määritelmä

Tässä kappaleessa aletaan käsitellä tämän tutkielman varsinaista aihetta. Aivan ensimmäiseksi on määriteltävä pari keskeistä käsitettä pintojen kannalta.

Määritelmä 3.1.1. Injektiivinen ja säännöllinen kuvaus joukolta $D \subset \mathbb{R}^2$ joukkoon $\mathbb{R}^3$ on *peitefunktio* $f : D \to \mathbb{R}^3$.

Tämän määritelmän on tarkoitus osoittaa, että puhuttaessa pinnoista tarkoitetaan tasaisia kaksiulotteisia kappaleita kolmiulotteisessa avaruudessa. Injektiivisyys takaa, ettei pinta vahingossakaan leikkaa itseään ja säännöllisyys takaa pinnan tasaisuuden.
Pinnan ideaa tajutakseen täytyy ymmärtää että pinnan jokaista riittävän pientä aluetta kohden täytyy löytyä alkukuva tasosta $\mathbb{R}^2$. Eli siis jokainen pinnan riittävän pieni alue voidaan palauttaa jollekin tasolle.

Määritelmä 3.1.2. *Pinta* on avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko $M \subset \mathbb{R}^3$ siten että jokaiselle pisteelle $\bar{p} \in M$ löytyy yksiselitteinen peite $X \subset \mathbb{R}^2$, jonka kuva sisältää pisteen $\bar{p}$ jonkin ympäristön pinnassa M.

Otetaan yksinkertaisena esimerkkinä pinta, joka kuvautuu peitefunktiolla $f(x, y) = (x, y, x)$. Visuaalisesti tämä on taso, joka sisältää y-akselin ja suoran $x = z$. Että tämä taso voitaisiin todeta pinnaksi, täytyisi kuvaus todeta injektiiviseksi ja säännölliseksi. Injektiivisyys on helppo todeta, kun pudotetaan kuvatun pinnan jokainen piste kohtisuoraan xy-tasoon. Käänteiskuvaus tälle funktiolle on $g(x, y, z) = (x, y, 0)$. Säännöllisyyden toteamiseksi täytyy muodostaa peitefunktion Jaakobin matriisi seuraavasti.

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nähdään heti että rivit ovat lineaarisesti riippumattomia ja matriisin aste on 2, joten tämä funktio on säännöllinen eli injektiivinen ja se on siis peitefunktio.
Aina kun peitefunktio on muotoa $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$ eli toisin sanoen jos kuvauksen kolmas komponentti ilmaistaan suoraan kahden ensimmäisen avulla, funktiota kutsutaan *Mongen peitefunktioksi*. Sopivan peitefunktion kuva $M = f(D)$ toteuttaa aina määritelmän 3.1.2. Tällöin pintaa M kutsutaan *yksinkertaiseksi* pinnaksi.
Seuraavaksi esitellään lause, joka osoittaa milloin implisiittisesti määritellyt

funktiot avaruudessa $\mathbb{R}^3$ toteuttavat pinnan, kun c on vakio siten että funktion f määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki ne pisteet $\bar{p}$ joilla $f(\bar{p}) = c$.

Lause 3.1.3. Olkoon f reaaliarvoinen funktio avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja c vakio. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = c\}$ on pinta, jos derivaatta df ei ole nolla missään pisteessä joukossa M. (Tässä oletetaan luonnollisesti vain reaalisia tapauksia, ei esimerkiksi että neliöön korotettu luku voisi olla negatiivinen.)

Todistus Mikäli $\bar{p}$ on piste kuvajoukossa M, on löydettävä sopiva peitefunktio, joka kattaa sen lähiympäristön joukossa M. Jatkuvasti derivoituvalle funktiolle $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

niin on selvää olettaa että jokin funktion osittaisderivaatoista on nollasta poikkeava jotta $df \neq 0$. Tässä tapauksessa implisiittisen funktion lause sanoo että pisteen $\bar{p}$ ympäristössä yhtälö $f(x, y, z) = c$ voidaan ratkaista jollekin yhtälön muuttujalle. Oletetaan että se on vaikka z. Tarkemmin ilmaistuna voidaan määritellä derivoituva reaaliarvoinen funktio pisteen (p_1, p_2) ympäristössä D siten että ensiksikin jokaiselle pisteelle $(u, v) \in D$ piste $(u, v, h(u, v))$ sijaitsee kuvajoukossa M, ja toiseksi muotoa $(u, v, h(u, v))$ olevat pisteet, joiden komponentti (u, v) löytyy lähtöjoukosta D, täyttävät pisteen $\bar{p}$ ympäristön joukossa M. Tästä seuraa suoraan, että Mongen peitefunktio $f : D \to \mathbb{R}^3$, joka on muotoa

$$f(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

toteuttaa määritelmän 3.1.2. Koska $\bar{p}$ oli mielivaltainen piste joukossa M, voidaan todeta että M on pinta. mot

Tämän avulla on helppo osoittaa esimerkiksi kaikkien pallojen kuorien olevan pintoja. Ne toteuttavat implisiittisen kaavan

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2,$$

missä $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ on keskipiste. Derivaatta $2(x - c_1)dx + 2(y - c_2)dy + 2(z - c_3)dz$ saa ainoan nollakohtansa pallon keskipisteessä, joka ei sijaitse pallon kuorella. Täten edellisen lauseen nojalla pallon kuori on pinta.

Esitellään seuraavaksi pari yleistä mallia pinnoille.

Esimerkki 3.1.4. *Sylinterit* muodostuvat kun tasoa vastaan kohtisuorassa oleva suora kulkee kyseisessä tasossa olevaa käyrää pitkin. Olkoon kyseinen taso vaikkapa xy-taso ja suora yhdensuuntainen z-akselin kanssa. Olkoon käyrä $\alpha = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja funktio $f(x, y, z)$

avaruudessa $\mathbb{R}^3$ siten että $f(x, y, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Käyrän määritelmän mukaan sen osittaisderivaatat eivät voi missään määrittelypisteessä olla samaan aikaan nollia. Koska

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(\alpha_1(t), \alpha_2(t)),$$

niin tästä seuraa ettei df voi olla koskaan nolla määrittelyjoukossaan. Täten se muodostaa pinnan.

Edellä esitelty tason malli saadaan liikuttamalla suoraa käyrää pitkin. Seuraava malli saadaan kiertämällä käyrää suoran ympäri.

Esimerkki 3.1.5. *Kiertopinnat* muodostuvat siten että samassa tasossa sijaitsevat käyrä ja suora, jotka eivät leikkaa toisiaan. Kun tämä käyrä kierretään suoran ympäri, saadaan aikaan niin sanottu kiertopinta. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi kyseiseksi tasoksi jokin koordinaattiakselien määräämä taso ja suoraksi eräs koordinaattiakseli. Olkoot ne vaikkapa xy-taso ja x-akseli. Oletetaan käyrän sijaitsevan x-akselin yläpuolella leikkauspisteiden välttämiseksi. Jos kyseisen käyrän pisteet ovat muotoa $\bar{p} = (p_1, p_2, 0)$, niin pinnan pisteet ovat puolestaan muotoa

$$(p_1, p_2 \cos v, p_2 \sin v), 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Toisin sanoen piste $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$ sijaitsee kiertopinnassa, jos ja vain jos piste $\bar{p_*} = (p_1, \sqrt{p_2^2 + p_3^2}, 0)$ sijaitsee annetulla käyrällä. Mikäli annettu käyrä on muotoa α on implisiittisessä muodossa $f(x, y) = c$, niin määrätään funktio $g(x, y, z) = (x, \sqrt{y^2 + z^2})$. Kun $g(x, y, z) = c$, niin käyttämällä ketjusääntöä on helppo näyttää tämän derivaatan olevan aina jotain muuta kuin nolla, joten kyseinen yhtälö muodostaa pinnan. Tällainen pinnan määritelmä sisältää kuitenkin yhden ongelman, nimitäin sen että peitefunktiot määritellään aina avoimelle joukolle avaruudessa $\mathbb{R}^2$, mutta $0 \leq v \leq 2\pi$ on selvästi suljettu väli. Tämä ongelma voidaan kuitenkin välttää määrittelemällä pinta yhtä useammalla päällekkäisellä peitefunktiolla. Tässä tapauksessa voitaisiin käyttää vaikka neljää peitefunktiota f_1, f_2, f_3 ja f_4, jotka on määritelty termin v väleillä $f_1 :]0, \pi[, f_2 :]\pi, 2\pi[, f_3 :]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi[$ ja $f_4 :] - \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$. Näiden peitefunktioiden kuvajoukkojen muodostama unioni on juuri yllä esitetty kiertopinta.

3.2 Peitefunktioiden ominaisuuksia

Edellä on pelkästään määritelty mikä pinta on. Seuraavaksi vilkaistaan muutamia peitefunktioiden ominaisuuksia, joiden avulla pintoja voidaan tutkia. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}^3, (x, y) \to f(x, y)$ peitefunktio. Kun jompikumpi muuttujista kiinnitetään vakioksi, funktio tuottaa käyrän. Kaikilla pisteillä $(x_0, y_0) \in D$ käyrä $x \to f(x, y_0)$ on nimeltään funktion *x-parametrinen käyrä*, $y = y_0$ ja samoin vastaavasti $y \to f(x_0, y)$ on funktion *y-parametrinen käyrä*, $x = x_0$. Kuvajoukko $f(D)$ koostuu siis horisontaalisista ja vertikaalisista käyristä, jotka muodostavat koko kuvajoukon.

Määritelmä 3.2.1. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}^3, (x, y) \to f(x, y)$ peitefunktio. Kun toinen muuttuja kiinnitetään vakioksi, funktion kaava kuvaa käytännössä pelkkää käyrää. Nyt x-parametrisen käyrän nopeusvektori ilmaistaan merkinnällä $f_x = (\frac{d\alpha_1}{dx}(x), \frac{d\alpha_2}{dx}(x), \frac{d\alpha_3}{dx}(x))$ ja vastaava y-parametrisen käyrän vektori ilmaistaan $f_y = (\frac{d\alpha_1}{dy}(y), \frac{d\alpha_2}{dy}(y), \frac{d\alpha_3}{dy}(y))$. $f_x(x_0, y_0)$ ja $f_y(x_0, y_0)$ ovat nimeltään funktion f *osittaisnopeuksia* pisteessä (x_0, y_0).

f_x ja f_y ovat siis myös saman lähtöjoukon funktioita kuin f ja kuvaavat sen tangenttivektoreita annetussa pisteessä.
Seuraava määritelmä auttaa jättämään pois huolen peitefunktion injektiivisyydestä.

Määritelmä 3.2.2. Säännöllinen peitefunktio $f : D \to \mathbb{R}^3$, jonka kuvajoukko sijaitsee pinnalla M, on nimeltään joukon $f(D)$ *parametrisoija* joukossa M.

Tämän määritelmän nojalla peitefunktio on vain injektiivinen parametrisoija. Ihanteellisessa tapauksessa $f(D)$ peittää koko pinnan M. Parametrisoijat ovat tärkeä työkalu pintojen käsittelylle. Seuraavaksi esitellään keino sen määrittämiseksi, onko annettu funktio $f : D \to \mathbb{R}^3$ pinnan M parametrisoija.
Funktion f kuvajoukon täytyy tietysti sijaita joukossa M. Huomataan, että jos kyseinen pinta on ilmaistu implisiittisessä muodossa $g = c$ niin yhdistetyllä funktiolla $g(f)$ on vakioarvo c.
Kun tutkitaan, onko f säännöllinen, huomataan aluksi että parametriset käyrät ja osittaisnopeudet ovat hyvin määriteltyjä kuvaukselle $f : D \to \mathbb{R}^3$. Nyt ristitulon

$$f_x \times f_y = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

kaksi alinta riviä antavat funktion f Jaakobin matriisin kaikissa pisteissä. Täten funktion säännöllisyys on yhtäpitävä sen kanssa että $f_x \times f_y$ ei ole koskaan nolla. Ristitulon ominaisuuksien nojalla toisin ilmaistuna, osittaisnopeuksien vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Esimerkki 3.2.3. Parametrisoidaan sylinteri M. Oletetaan esimerkin 3.1.4. lailla, että M määräytyy xy-tasossa olevan käyrän $f(x, y) = c$ mukaan. Jos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$ on äskeisen käyrän parametrisointi, merkitään $g(x, y) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), y)$ parametrisoijaksi. Selvästi g sijaitsee joukossa M, kattaa sen kokonaan ja on differentioituva. Edelleen g on säännöllinen, koska jokaisessa pisteessä osittaisderivaatat

$$g_x = (\frac{d\alpha_1}{dx}, \frac{d\alpha_2}{dx}, 0)$$

$$g_y = (0, 0, 1)$$

ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki 3.2.4. Parametrisoidaan kiertopinta. Olkoon kiertopinta M sama kuin esimerkissä 3.1.5. eli x-akselin ympäri kierretty käyrä xy-tasossa x-akselin yläpuolella. Olkoon nyt $\alpha(x) = (g(x), h(x), 0)$ käyrän parametrisoija. Esimerkistä 3.1.5. muistetaan että akselin ympäri kiertyessään käyrän pisteiden x-koordinaatti ei muutu, mutta y- ja z-koordinaatit muuttuvat. Peitefunktio on siis $f(x, y) = (g(x), h(x)\cos y, h(x)\sin y)$. Tämä määrittelee kuvauksen, jonka kuvajoukkona on koko M, kunhan taas asetetaan päällekkäisiä avoimia määrittelyvälejä, joilla $f(x, y)$ on määritelty. Yksinkertaisuuden vuoksi niiden voidaan olettaa olevan samat kuin esimerkissä 3.1.5. Kuvausten injektiivisyys on helppo todeta, kun kunkin pinnan termit projisoidaan takaisin $xy-$ tai $xz-$tasolle. Laskennallisesti voidaan näyttää, että f_x ja f_y ovat lineaarisesti riippumattomia, joten f on pinnan M parametrisoija.

3.3 Derivoituvat funktiot ja tangenttivektorit

Nyt aloitetaan varsinainen pintojen analysointi. Pintaa ympäröivä muu avaruus pyritään jättämään kokonaan pois, koska halutaan saada selkoa vain itse pinnan ominaisuuksista.
Jos funktio h on määriteltynä pinnalla M eikä missään muualla ja $f : D \to M$ on peitefunktio, niin yhdistelmäfuktiota $h \circ f$ kutsutaan *koordinaattiesitykseksi* funktiolle h. Luonnollisesti h edellytetään derivoituvaksi funktioksi. Myöskin funktioille $H : \mathbb{R}^n \to M$ jokainen peitefunktio f pinnalle M muodostaa koordinaattiesityksen $f^{-1}(H)$ funktiolle H. Selvästikin tämä yhdistetty funktio on määritelty vain sellaisille pisteille $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ siten että $H_{\bar{p}}$ sijaitsee joukossa $f(D)$. Luonnollisesti taas määritellään H niin

että se ilmaisijoineen on differentioituva.
Että nähtäisiin miten tämä määritelmä toimii käytännössä, tarkastellaan aluksi merkittävää erikoistapausta.

Lemma 3.3.1. Mikäli käyrä $\alpha : I \to M$ sijaitsee kuvajoukossa $f(D)$, jonka määrittää vain yksi peitefunktio f, niin on olemassa yksikäsitteiset derivoituvat funktiot $a_1, a_2 : I \to D$ siten että $\alpha(t) = f(a_1(t), a_2(t))$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Todistus Määritelmän mukaan ilmaisija $f^{-1}\alpha : I \to D$ on derivoituva. Sehän on vain käyrä, jonka kuva kulkee joukossa D. Mikäli a_1, a_2 ovat käyrän $f^{-1}\alpha$ koordinaattifunktioita, niin $\alpha = ff^{-1}\alpha = f(a_1, a_2)$. Nämä ovat ainoat mahdolliset funktiot sillä jos $\alpha = f(b_1, b_2)$, niin

$$(a_1, a_2) = f^{-1}\alpha = f^{-1}f(b_1, b_2) = (b_1, b_2).$$

mot

Seuraavaksi määritellään tangentti pinnalle.

Määritelmä 3.3.5. Olkoon $\bar{p}$ pinnan M piste. Vektori $\bar{v}$ on pinnan M *tangentti pisteessä* $\bar{p}$, jos vain se on jonkin pinnassa olevan käyrän nopeusvektori.

Kaikkien pisteessä $\bar{p}$ olevien tangenttivektorien joukkoa kutsutaan pinnan M *tangenttitasoksi pisteessä* $\bar{p}$ ja se ilmaistaan perkinnällä $T_{\bar{p}}(M)$. Seuraava tulos osoittaa jokaisen pisteen $\bar{p}$ tangenttitason $T_{\bar{p}}(M)$ olevan kaksiulotteinen vektorialivaruus tangenttiavaruudelle $T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^3)$.

Lemma 3.3.6. Olkoon $\bar{p}$ piste pinnassa M ja f pinnan peitefunktio siten että $f(x_0, y_0) = \bar{p}$. Vektori $\bar{v}$ on pinnan M tangentti pisteessä $\bar{p}$ jos ja vain jos $\bar{v}$ voidaan ilmaista lineaariyhdisteinä komponenteille $f_x(x_0, y_0)$ ja $f_y(x_0, y_0)$.

Todistus Koska osittaisnopeudet ovat lineaarisesti riippumattomia, pyritään johtamaan lopputulokseksi, että ne muodostavat kannan tangenttitason pinnalle M kaikissa pisteissä joukossa $f(D)$. Huomataan aluksi että käyrän f parametriset käyrät ovat käyriä pinnassa M, joten nämä osittaisnopeudet ovat pinnan tangentteja pisteessä $\bar{p}$.
Oletetaan ensin että $\bar{v}$ on pinnan tangentti pisteessä $\bar{p}$. Täten on olemassa käyrä α pinnassa M siten että $\alpha(0) = \bar{p}$ ja $\alpha'(0) = \bar{v}$. Nyt lemman 3.3.1. mukaan α voidaan ilmaista muodossa $\alpha = f(a_1, a_2)$. Täten ketjusäännön mukaan

$$\alpha' = f_x(a_1, a_2)\frac{da_1}{dt} + f_y(a_1, a_2)\frac{da_2}{dt}.$$

Mutta koska $\alpha(0) = \bar{p} = f(x_1, x_2)$, ovat $a_1(0) = x_0$ ja $a_2(0) = y_0$. Täten antamalla arvo $t = 0$ saadaan

$$\bar{v} = \alpha'(0) = \frac{da_1}{dt}(0) f_x(x_0, y_0) + \frac{da_2}{dt}(0) f_y(x_0, y_0).$$

Toiseen suuntaan, olettaen että tangenttivektori $\bar{v}$ voidaan ilmaista muodossa

$$\bar{v} = c_1 f_x(x_0, y_0) + c_2 f_y(x_0, y_0).$$

Samoin laskutoimituksin kuin edellä saadaan että $\bar{v}$ on pisteessä $t = 0$ oleva nopeusvektori käyrälle

$$t \to f(x_0 + tc_1, y_0 + tc_2).$$

Täten $\bar{v}$ on pinnan M tangentti pisteessä $\bar{p}$.

Derivaatan yleisiin ominaisuuksiin perustuu järjellinen päätelmä, että tangenttitaso $T_{\bar{p}}(M)$ on pinnan M lineaarinen approksimaatio lähellä pistettä $\bar{p}$.

Määritelmä 3.3.7. Euklidinen *vektorikenttä* Z pinnalla M on funktio, joka asettaa jokaiseen pinnan pisteeseen $\bar{p}$ tangenttivektorin $Z_{\bar{p}}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Euklidinen vektorikenttä V, jolle jokainen vektori $V(\bar{p})$ on tangentti tasolle M pisteessä $\bar{p}$ on nimeltään *tangenttivektorikenttä* pinnalla M. Usein nämä vektorikentät ovat määriteltyjä vain osassa pintaa M. Kuten ennenkin, tässäkin asiassa oletetaan derivoituvuutta.
Euklidinen vektori $\bar{z}$ pisteessä $\bar{p}$ pinnassa M on nimeltään *normaali*, jos se on ortogonaalinen tangenttitasolle $T_{\bar{p}}(M)$ eli siis jokaiselle tangenttivektorille pisteessä $\bar{p}$ pinnalla M. Vektorikenttä Z pinnalla on *normaalikenttä* sikäli mikäli jokainen vektori $Z_{\bar{p}}$ on normaali pinnalle M.
Koska $T_{\bar{p}}(M)$ on kaksiulotteinen aliavaruus avaruudessa $T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^3)$, on olemassa vain yhteen suuntaan osoittava normaali pinnalla M pisteessä $\bar{p}$. Kaikki normaalivektorit tässä pisteessä ovat paralleeleja. Täten, jos normaalivektori on nollavektorista poikkeava, $T_{\bar{p}}(M)$ koostuu kaikista niistä vektoreista avaruudessa $T_{\bar{p}}(\mathbb{R}^3)$, jotka ovat tälle ortogonaalisia.
On verrattain helppoa tutkia tangentti- ja normaalivektorikenttiä pinnoilla, mikäli pinnat ilmaistaan implisiittisesti.

Lemma 3.3.8. Mikäli $M : g = c$ on pinta, niin *gradienttivektorikenttä* $\nabla g = \sum(\partial g/\partial x_i)U_i$ rajoittuneena joukon M pisteisiin on häviämätön normaalivektorikenttä pinnassa M.

Todistus Gradientti on häviämätön eli siis nollasta poikkeava pinnalla M lauseen 3.1.3. nojalla, koska osittaisderivaatat eivät voi kaikki olla yhtä aikaa nollia pinnalla M.
Täytyy osoittaa että $(\nabla g)(\bar{p}) \cdot \bar{v} = 0$ jokaisella pinnan tangenttivektorilla $\bar{v}$ pisteessä $\bar{p}$. Ensin huomataan että pinnassa olevalle käyrälle α $g(\alpha) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on vakioarvo c. Ketjusäännön mukaisesti

$$\sum \frac{\partial g}{\partial x_1}(\alpha)\frac{d\alpha_i}{dt} = 0.$$

Nyt valitaan käyrälle alkunopeus

$$\alpha'(0) = \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

pisteessä $\alpha(0) = \bar{p}$. Siten

$$0 = \sum \frac{\partial g}{\partial x_1}(\alpha(0))\frac{d\alpha_i}{dt}(0) = \sum \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{p})v_i = (\nabla g)(\bar{p}) \cdot \bar{v} = 0.$$

mot

Määritellään seuraavaksi suunnattu derivaatta pinnoille. Ensiksi se määriteltiin suorille kolmiulotteisessa avaruudessa. Nyt sen uudelleen määrittelyssä hyödynnetään lemmaa 3.3.8.

Määritelmä 3.3.9. Olkoon $\bar{v}$ tangenttivektori pinnalla M pisteessä $\bar{p}$ ja olkoon h differentioituva reaaliarvoinen funktio äskeisellä pinnalla. *Suunnattu derivaatta suuntaan* $\bar{v}$ on $\bar{v}[h]$ on vakioarvo $(d/dt)(h \circ \alpha)(0)$ pinnan M kaikille käyrille α, joilla on alkunopeus $\bar{v}$.

Suunnatuilla derivaatoilla pinnoilla on täsmälleen samat lineaariset ominaisuudet kuin euklidisessakin tapauksissa.

3.4 Muodot pinnoilla

Esitiedoissa esiteltiin 1-muodon määritelmä. (0-muoto h pinnassa on vain derivoituva reaaliarvoinen funktio.) 1-muoto ϕ pinnalla on siis lineaarinen ja reaaliarvoinen tangenttivektorien funktio. 2-muoto on täysin analoginen 1-muodolle siten että yhden vektorin sijasta se operoi järjestettyjä vektoripareja.

Määritelmä 3.4.1. *2-muoto* η pinnalla M on reaaliarvoinen funktio kaikille järjestetyille tangenttivektoripareille $\bar{x}, \bar{y}$ pinnalla M siten että
(1) $\eta(\bar{x}, \bar{y})$ on lineaarinen vektoreitten $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ suhteen.
(2) $\eta(\bar{x}, \bar{y}) = -\eta(\bar{y}, \bar{x})$.

Määritelmän kohdasta (2) voidaan johtaa ominaisuus

$$\eta(\bar{x}, \bar{x}) = 0$$

kaikille tangenttivektoreille. Vastaisuudessa oletetaan luonnostaan aina että muodot ovat derivoituvia. Itsestäänselvänä pidetään sitäkin että vain samanasteissa muotoja voidaan yhdistellä.
Seuraava lemma näyttää, miten 2-muodot liittyvät determinantteihin.

Lemma 3.4.2. Olkoon η 2-muoto pinnalla M ja olkoot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ saman pinnan tangenttivektoreita. Silloin

$$\eta(a\bar{x} + b\bar{y}, c\bar{x} + d\bar{y}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \eta(\bar{x}, \bar{y})$$

Todistus Koska η on lineaarinen ensimmäisten komponenttiensa suhteen, sen arvo vektoriparille $a\bar{x}+b\bar{y}, c\bar{x}+d\bar{y}$ on $a\eta(\bar{x}, c\bar{x}+d\bar{y})+b\eta(\bar{y}, c\bar{x}+d\bar{y})$. Koska η on lineaarinen myös jälkimmäisten komponenttiensa suhteen, saadaan että

$$a\eta(\bar{x}, c\bar{x}+d\bar{y})+b\eta(\bar{y}, c\bar{x}+d\bar{y}) = ac\eta(\bar{x}, \bar{x})+ad\eta(\bar{x}, \bar{y})+bc\eta(\bar{y}, \bar{x})+bd\eta(\bar{y}, \bar{y}).$$

Määritelmän antisymmetriasääntö (2) antaa muodon

$$\eta(a\bar{x} + b\bar{y}, c\bar{x} + d\bar{y}) = (ad - bc)\eta(\bar{x}, \bar{y}).$$

mot

Seuraavan määritelmän antama uusi operointimuoto antaa meille mahdollisuuden muodostaa eriasteisista muodoista korkeamman asteen muotoja.

Määritelmä 3.4.3. Mikäli ϕ ja ψ ovat 1-muotoja pinnalla M, *kiilatulo* $\phi \wedge \psi$ on 2-muoto pinnalla M siten että

$$(\phi \wedge \psi)(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{x})\psi(\bar{y}) - \phi(\bar{y})\psi(\bar{x})$$

kaikille pinnan vektoripareille $\bar{x}, \bar{y}$.

Kiilatulolla on kaikki perinteiset algebralliset ominaisuudet paitsi kommutatiivisuus. Yleisesti ottaen mikäli ϕ on p-muoto ja ψ q-muoto($p, q = 0, 1, 2$), niin

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{pq}\psi \wedge \phi.$$

Eriasteisille muodoille voidaan soveltaa kiilatuloa siten että p-muodon ja q-muodon operaatio on $(p + q)$-muoto. Koska pinnalla kuitenkin on vain kaksi

ulottuvuutta, kiilatulo on nolla mikäli $p + q > 2$. Tarvitaan siis määritelmä vain operaatiolle, kun $p = q = 1$.
Siirrytään eriasteisten muotojen derivointiin. Kaikilla p-muodoilla ilmenee että ulkoinen derivaatta on $(p + 1)$-muoto. Ainoa uusi asia, joka pitää siis määritellä on derivaatta 1-muodoille.

Määritelmä 3.4.4. Olkoon ϕ 1-muoto pinnalla M.
ulkoinen derivaatta $d\phi$ on 2-muoto siten että mille tahansa pinnan M peitefunktiolle f

$$d\phi(f_x, f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi(f_y)) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi(f_x)).$$

Tämä ei ole täysin kattava määritelmä. Derivaattojen vastaavuuden kanssa on ongelma. Nyt on oikeastaan määritelty $d_f\phi$ pinnan kunkin peitefunktion f kuvajoukossa pinnalla M. Täytyy siis osoittaa että alueella, jossa kaksi peitefunktiota ovat päällekkäiset, $d_f\phi$ ja $d_g\phi$ ovat samat. Vasta sitten on tuotettu funktion derivaatta $d\phi$ pinnalla M.

Lemma 3.4.5. Olkoon ϕ 1-muoto pinnalla M. Mikäli $f : D \to M$ ja $g : E \to M$ ovat peitefunktioita pinnalle M, niin $d_f\phi = d_g\phi$ joukkojen $f(D)$ ja $g(E)$ päällekkäisissä osissa.

Todistus Koska g_x ja g_y ovat lineaarisesti riippumattomia kaikissa pisteissä, lemman 3.4.2. nojalla riittää osoittaa että

$$(d_g\phi)(g_x, g_y) = (d_f\phi)(g_x, g_y).$$

Nyt on olemassa sellaiset yksiselitteiset funktiot $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ että $g = f(\bar{u}, \bar{v})$ ja ketjusäännön mukaan

$$g_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} f_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} f_y$$

$$g_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} f_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} f_y.$$

Sitten lemman 3.4.2. mukaan

$$(d_f\phi)(g_x, g_y) = J(d_f\phi)(f_x, f_y)$$

missä J on Jaakobin determinantti $(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) - (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x})$. Täten on selvää määritelmän 3.4.4. nojalla että $(d_g\phi)(g_x, g_y) = (d_f\phi)(g_x, g_y)$ todistettaisiin, täytyy vain olla

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi g_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi g_x) = J\{\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\phi f_y) - \frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\phi f_x)\}.$$

Riittää operoida termillä $(\frac{\partial}{\partial x})(\phi g_y)$, sillä vain vaihtamalla termien x ja y paikkaa, saadaan aikaiseksi $(\frac{\partial}{\partial y})(\phi g_x)$. Koska nämä derivaatat pitää vähentää toisistaan, voidaan unohtaa kaikki sellaiset termit, jotka menevät vastakkain, kun x ja y ovat kaikkialla vaihtaneet paikkaa keskenään. Operoimalla termillä ϕ saadaan aikaisemmista yhtälöistä muodostettua

$$\phi(g_y) = \phi(f_x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \phi(f_y)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}.$$

Ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi g_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_y)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + ...$$

jossa yhtäpitävästi yllä olevan lausuman nojalla on häivytetty symmetrisiä termejä. Kun seuraavaksi käytetään ketjusääntöä ja yllä olevaa lausumaa, niin saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi g_y) = (\frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\phi f_x)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + ...)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\phi f_y)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + ...)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}.$$

Nyt vain vaihdetaan termien x ja y paikkaa, samoin tehdään myös $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ suhteen, ja vähennetään yllä oleva yhtälö itsestään. Tuloksena on ylempänä oleva lausahdus, joka oli todistettava. mot

Seuraavaksi todistetaan ettei pinnoilla ole olemassa toisen kertaluvun derivaattaa.

Lause 3.4.6. Mikäli h on derivoituva reaaliarvoinen funktio pinnalla M, niin $d(dh) = 0$.

Todistus Olkoon $\psi = dh$, joten on osoitettava $d\psi = 0$. Lemman 3.4.2. nojalla riittää todistaa, että jokaiselle peitefunktiolle f pinnalle M pätee $(d\psi)(f_x, f_y) = 0$. Määritelmän mukaan on $f_x[h] = \frac{d}{dt}(h \circ \alpha)(0)$, jossa $\frac{d}{dx}f = f_x$ on tämän määritelmän mukainen käyrä α, kun $\alpha(x) = f(x, y_0)$. Tällöin $f_x[h] = \frac{\partial}{\partial x}(h \circ f)$. Siispä

$$\psi(f_x) = dh(f_x) = f_x[h] = \frac{\partial}{\partial x}(h \circ f)$$

ja vastaavasti

$$\psi(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(h \circ f).$$

Täten

$$d\psi(f_x, f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi(f_y)) - \frac{\partial}{\partial y}(\psi(f_x)) = \frac{\partial^2(h \circ f)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(h \circ f)}{\partial y \partial x} = 0.$$

mot

Monet laskelmat ja todistukset pelkistyvät siihen ongelmaan, että kaksi samanmuotoista funktiota ovat samat. Nyt on nähty, ettei ole välttämätöntä tutkia ovatko funktioiden arvot samat kaikilla tangenttivektoreilla. Yleisesti, jos f on peitefunktio, niin 1-muodoille f $\phi = \psi$ jos ja vain jos $\phi(f_x) = \psi(f_x)$ ja $\phi(f_y) = \psi(f_y)$ ja 2-muodoille f $\mu = \nu$ jos ja vain jos $\mu(f_x, f_y) = \nu(f_x, f_y)$. Yleisemmin f_x ja f_y voidaan korvata millä tahansa kahdella vektorikentällä, jotka ovat lineaarisesti riippumattomia joka pisteessä.

3.5 Lisää pintojen funktioista

Kun aletaan määritellä derivoituvuutta funktioille kahden eri pinnan välillä, niin oletetaan koordinaattifunktioiden olevan derivoituvia kuin edellä.

Määritelmä 3.5.1. Funktio $H : M \to N$ pinnalta toiselle on *differentioituva* sikäli kun kaikille peitefunktioille f pinnalla M ja g pinnalla N yhdistelmäfunktio $g^{-1}Hf$ on euklidisesti derivoituva (ja luonnollisesti määriteltynä avoimille joukoille avaruudessa $\mathbb{R}^2$). H on nimeltään *pintojen välinen funktio.*

Luonnollisesti $g^{-1}Hf$ on määritelty kaikissa peitefunktion f lähtöjoukon pisteissä (x, y) siten että $H(f(x, y))$ sijaitsee peitefunktion g arvojoukossa. Määritelmä pätee, kun löydetään riittävästi peitefunktioita kattamaan pinnat M ja N.
Seuraavaksi määritellään pintojen välisen funktion derivaatta.

Määritelmä 3.5.2. Olkoon $H : M \to N$ pintojen välinen funktio. Funktion *derivaatta* H' asettaa pinnan M jokaisen tangenttivektorin $\bar{v}$ pinnan N tangenttivektoriksi $H'_{\bar{v}}$. Tämä tarkoittaa että mikäli $\bar{v}$ on käyrän α alkunopeus pinnalla M, niin $H'_{\bar{v}}$ on käyrän $H(\alpha)$ alkunopeus pinnalla N.

Voidaan osoittaa, että jokaisessa pinnan pisteessä $\bar{p}$, H' on lineaarinen transformaatio tangenttitasolta $T_{\bar{p}}(M)$ tangenttitasolle $T_{H(\bar{p})}(N)$. Määritelmästä seuraa välittömästi että H' ilmaisee käyrien nopeuksia. Mikäli $\bar{\alpha} = H(\alpha)$ on pinnan M käyrän α kuva pinnalla N, niin $H'_{\alpha'} = \bar{\alpha}'$. Voidaan myös osoittaa että yhdistelmäfunktioiden derivaatat ovat derivaattafunktioiden yhdistelmiä niin kuin euklidisissakin tapauksissa. Funktion $H : M \to N$ derivaatta voidaan siis muodostaa osittaisnopeuksista. Mikäli $f : D \to M$ on joukon M parametrisoija, niin olkoon yhdistelmäfunktio $H(f) : D \to N$ ja merkitään sitä g. Selvästi F muuntaa peitefunktion f parametrikäyrät funktion g vastaaviksi parametrikäyriksi. Koska H' tuottaa käyrien nopeuksia, seuraa välittömästi että

$$H'_{f_x} = g_x, H'_{f_y} = g_y.$$

Koska f_x ja f_y muodostavat kannan pinnan M tangenttitasolle kaikissa pisteissä $f(D)$, nämä määrittävät kuvauksen H'.
Kuvauksen säännöllisyys toteutuu myös pintojen välisillä funktioilla helposti. $H : M \to N$ on *säännöllinen* jos sen kaikki derivaattafunktiot $H'_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}(M) \to T_{H(\bar{p})}(N)$ ovat injektioita. Koska näillä tangenttitasoilla on sama dimensio, niin lineaarialgebran perusteella tiedetään injektiovaatimuksen olevan yhtä pitävän sen kanssa että H' on lineaarinen isomorfismi. $H : M \to N$, jolla on käänteiskuvaus $H^{-1} : N \to M$ on nimeltään *diffeomorfismi*. Voidaan ajatella kuvauksen H muuntavan pinnan M pinnaksi N. Soveltamalla euklidista muotoilua käänteiskuvauslauseelle funktion H koordinaattiselle ilmaukselle $g^{-1}Hf$ voidaan päätellä seuraava yleistys käänteiskuvauslauseelle.

Lause 3.5.3. Olkoon $H : M \to N$ pintojen välinen kuvaus ja olettaen että $H'_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}(M) \to T_{H(\bar{p})}(N)$ on lineaarinen isomorfismi jossain yhdessä tietyssä pinnan M pisteessä $\bar{p}$. Tällöin on olemassa pisteen $\bar{p}$ ympäristö κ pinnalla M siten että kuvauksen H rajoittuma ympäristöön κ on diffeomorfismi pisteen $H(\bar{p})$ ympäristölle λ pinnalla N.

Välitön seuraus on että *säännöllinen injektiivinen kuvaus* $H : M \to N$ *on diffeomorfismi*. Kunhan H on injektion lisäksi myös surjektio, sillä on yksiselitteinen käänteiskuvaus H^{-1} ja tämä on derivoituva, jos jokaisella ympäristöllä λ, joka on määritelty samoin kuin yllä, on sitä vastaava diffeomorfismin käänteiskuvaus $\kappa \to \lambda$.
Derivoituvilla muodoilla on se huomattava ominaisuus, että ne voidaan siirtää pinnalta toiselle mielivaltaisen kuvauksen avulla. Jos tutkitaan vaikkapa 0-muotoa h, niin mikäli $H : M \to N$ on pintojen välinen funktio ja h on funktio pinnassa M, ei ole olemassa mitään järjellistä tapaa siirtää funktiota h pinnalle N. Jos sen sijaan h on kuvaus pinnalla N, ongelma on helppo ratkaista. h siirretään takaisin yhdistelmäfunktiolla $h \circ H$ pinnalle M. Vastaava siirto 1- ja 2-muodoille määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 3.5.4. Olkoon $H : M \to N$ pintojen välinen kuvaus.
(1) Jos ϕ on 1-muoto pinnalla N, olkoon $H'\phi$ 1-muoto pinnalla M siten että

$$(H'\phi)(\bar{x}) = \phi(H'_{\bar{x}})$$

kaikille tangenttivektoreille $\bar{x}$ pinnalla M.
(2) Jos η on 2-muoto pinnalla N, olkoon $H'\eta$ 2-muoto pinnalla M siten että

$$(H'\eta)(\bar{x}, \bar{y}) = \eta(H'_{\bar{x}}, H'_{\bar{y}})$$

kaikille tangenttivektoripareille $\bar{x}, \bar{y}$ pinnalla M.

Eri muotojen välillä keskeiset operaatiot ovat yhteenlasku, kiilatulo ja ulkoinen derivointi.

Lause 3.5.5. Olkoon $H : M \to N$ pintojen välinen kuvaus ja olkoot ξ ja η muotoja pinnalla N. Silloin
(1) $H'(\xi + \eta) = H'\xi + H'\eta$,
(2) $H'(\xi \wedge \eta) = H'\xi \wedge H'\eta$,
(3) $H'(d\xi) = d(H'\xi)$.

Todistus Tapauksessa (1) ξ ja η oletetaan p-muodoiksi (p=0,1 tai 2) ja varsinainen todistus on perustuu pelkkään laskemisrutiiniin. Tapauksessa (2) on mahdollista että ξ ja η ovat eri asteen muotoja. Kun ξ on funktio h, annettu kaava tarkoittaa käytännössä $H'(h\eta) = h(H)H'(\eta)$. Kaikissa tapauksissa kohta (2) perustuu kuitenkin vain derivaatan laskusääntöihin. (3) Kun ξ on 1-muoto, on osoitettava että kaikille peitefunktioille $f : D \to M$.

$$(d(H'\xi))(f_x, f_y) = (H'd\xi)(f_x, f_y).$$

Olkoon $g = H(f)$ ja muistetaan että $H'(f_x) = g_x$ ja $H'(f_y) = g_y$. Täten termien d ja H' määritelmillä saadaan

$$\begin{aligned} d(H'\xi)(f_x, f_y) &= \frac{\partial}{\partial x}\{(H'\xi)(f_y)\} - \frac{\partial}{\partial y}\{(H'\xi)(f_x)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\{\xi(H'f_y)\} - \frac{\partial}{\partial y}\{\xi(H'f_x)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\xi f_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi f_x). \end{aligned}$$

Vaikka g ei olisikaan peitefunktio, voidaan osoittaa viimeisimmän muodon olevan yhtäpitävä muodon $d\xi(g_x, g_y)$ kanssa. Sitten

$$d\xi(g_x, g_y) = d\xi(H'f_x, H'f_y) = (H'(d\xi))(f_x, f_y).$$

Voidaan tehdä johtopäätös että funktioilla $d(H'\xi)$ ja $H'(d\xi)$ on sama arvo muuttujien arvoilla f_x, f_y. mot

3.6 Muotojen integroinnista

Seuraavaksi siirrytään muotojen integrointiin pinnoilla. Periaatteessa integrointi on mahdollista vain euklidisessa avaruudessa, mutta pinnoilla olevien muotojen integrointi voidaan toteuttaa palauttamalla ne takaisin euklidiselle avaruudelle ja integroida ne siellä.

Tutkitaan ensin yksiulotteista tapausta. Pinnan M *käyräsegmentillä* tarkoitetaan suljetulla reaaliakselin välillä määriteltyä käyrää $\alpha : [a, b] \to M$. Mikäli ϕ 1-muoto pinnalla M, niin $\alpha^{-1}\phi$ kuvaa pinnan funktion arvojen palauttamista reaaliakselille käyrää α pitkin. Nyt voidaan luoda integraalin määritelmä.

Määritelmä 3.6.1. Olkoon ϕ 1-muotoinen funktio pinnalla M ja olkoon $\alpha : [a, b] \to M$ 1-segmentti. *Funktion ϕ integraali yli käyrän α* on

$$\int_\alpha \phi = \int_{[a,b]} \alpha^{-1}\phi = \int_a^b \phi(\alpha'(t))dt.$$

Kun 1-muoto ϕ voidaan ilmaista ulkoisena derivaattana dh, viivaintegraalilla $\int_\alpha \phi$ on ominaisuus, jonka avulla voidaan johtaa eräs integraalilaskennan päälauseista.

Lause 3.6.2. Olkoon h funktio pinnalla M ja $\alpha : [a, b] \to M$ 1-segmentti kyseisellä pinnalla pisteestä $\bar{p} = \alpha(a)$ pisteeseen $\bar{q} = \alpha(b)$. Silloin

$$\int_\alpha dh = h(\bar{q}) - h(\bar{p}).$$

Todistus Määritelmän mukaan

$$\int_\alpha dh = \int_a^b dh(\alpha')dt.$$

Mutta

$$dh(\alpha') = \alpha'[h] = \frac{d}{dt}(h \circ \alpha).$$

Täten

$$\int_\alpha dh = \int_a^b \frac{d}{dt}(h \circ \alpha)dt = h \circ \alpha(b) - h \circ \alpha(a) = h(\bar{q}) - h(\bar{p}).$$

mot

Integraalia $\int_\alpha$ kutsutaan *polkuitsenäiseksi*. Käytännön sovelluksena voi todeta integroinnin käytön fysiikassa, kun halutaan määrittää tarvittavan työn määrää. Edellä oleva lause osoittaisi tehdyn työn määrän olevan sama kuljetusta matkasta riippumatta. Vain aloitus- ja lopetuskohta merkitsevät.
Matemaattisesti tilannetta katsotaan näin: pisteestä $\bar{p}$ pisteeseen $\bar{q}$ " rajoittuvan " segmentin α ala on integraali funktiosta dh, mikä on $h(\bar{q}) - h(\bar{p})$. Tämä sama tulos tullaan todistamaan 2-ulotteisessa tapauksessa Stokesin lauseen yhteydessä.

Kaksiulotteinen integrointiväli ei ole muuta kuin suljettu suorakaide $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ tasossa $\mathbb{R}^2$. Pinnan M *2-segmentti* on derivoituva kuvaus $f : R \to M$. Vaikka käytetäänkin peitefunktiomuotoa f, ei oleteta sen olevan säännöllinen tai injektiivinen. Osittaisnopeudet f_x ja f_y ovat silti käytettävissä, vaikkei f itse olisikaan peitefunktio.
Mikäli η on 2-muoto pinnalla M ja f kyseisen pinnan määräävä peitefunktio, sen palautusfunktio ilmaistaan muodossa $f^{-1}\eta$. Tämä avulla voidaan luoda uusi integraalin määritelmä.

Määritelmä 3.6.3. Olkoon η 2-muoto pinnalla M ja olkoon $f : R \to M$ 2-segmentti. *Funktion η integraali yli funktion f* on

$$\int\int_f \eta = \int\int_R f^{-1}\eta = \int_a^b \int_c^d \eta(f_x, f_y)dxdy.$$

Edellinen määritelmä on selvästi analoginen aiemmin annetulle.

Määritelmä 3.6.4. Olkoon $f : R \to M$ 2-segmentti pinnalle M suljetulta suorakaiteelta $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. Funktion f *reunakäyrät* tai *reunat* ovat 1-segmentit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siten että

$$\alpha(x) = f(x, c)$$

$$\beta(y) = f(b, y)$$

$$\gamma(x) = f(x, d)$$

$$\delta(y) = f(a, y)$$

Tällöin 2-segmentin f *reuna* ∂f on ilmaistavissa

$$\partial f = \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

Nämä neljä käyräsegmenttiä saadaan, kun funktiota $f : R \to M$ tarkastellaan vain suorakaiteen R reunoilla. Kaavan miinusmerkit termien γ ja δ edessä kuvaavat sitä että niiden kulkusuunta on koordinaatiakselien negatiivisiin suuntiin ja reuna todellakin tekee kierroksen koko alueen R ympäri. Nyt jos ϕ on 1-muoto pinnalla M, niin funktion ϕ *integraali yli reunan* ∂f määritellään

$$\int_{\partial f} \phi = \int_\alpha \phi + \int_\beta \phi - \int_\gamma \phi - \int_\delta \phi.$$

2-ulotteinen analogia lauseelle 3.6.2. on seuraavaksi.

Lause 3.6.5. Stokesin lause Jos ϕ on 1-muoto pinnalla M ja $f : R \to M$ on 2-segmentti, niin

$$\int\int_f d\phi = \int_{\partial f} \phi.$$

Todistus Tutkitaan kaksinkertaista integrointia ja näytetään sen osoittautuvan funktion ϕ integraaliksi yli reunan ∂f. Yhdistämällä määritelmät 3.4.4. ja 3.6.3. saadaan

$$\int\int_f d\phi = \int\int_R (d\phi)(f_x, f_y)dxdy = \int\int_R (\frac{\partial}{\partial x}(\phi \circ f_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi \circ f_x))dxdy.$$

Olkoot $h = \phi(f_x)$ ja $g = \phi(f_y)$. Tällöin yhtälö tulee muotoon

$$\int\int_f d\phi = \int\int_R \frac{\partial g}{\partial x}dxdy - \int\int_R \frac{\partial h}{\partial y}dxdy.$$

Oletetaan nyt että määrittelyvälit $a \le x \le b, c \le y \le d$ ovat nollaa suurempia. Kun ensin integroidaan muuttujan x suhteen, saadaan

$$\int\int_R \frac{\partial g}{\partial x}dxdy = \int_c^d I(y)dy,$$

jossa

$$I(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)dx.$$

Termin $I(y)$ osittaisintegroinnissa muuttujan x suhteen y on tavallinen vakio, jolloin kyseessä on täysin tavallinen integrointi. Tällöin saadaan

$$I(y) = g(b, y) - g(a, y).$$

Täten

$$\int\int_R \frac{\partial g}{\partial x}dxdy = \int_c^d g(b, y)dy - \int_c^d g(a, y)dy.$$

Nyt määritelmän mukaan

$$g(b, y) = \phi(f_y(b, y)).$$

Mutta $f_y(b, y)$ on $\beta'(y)$ eli kyseisen reunakäyrän nopeusvektori reunalla ∂f. Määritelmän 3.6.1. mukaan

$$\int_c^d g(b, y)dy = \int_c^d \phi(\beta'(y))dy = \int_\beta \phi.$$

Vastaavalla argumentoinnilla saadaan, että

$$\int_c^d g(a,y)dy = \int_c^d \phi(\delta'(y))dy = \int_\delta \phi.$$

Täten

$$\int\int_R \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \int_\beta \phi - \int_\delta \phi.$$

Täysin samalla argumentoinnilla integroimalla muuttujan y suhteen saadaan

$$\int\int_R \frac{\partial h}{\partial y} dxdy = \int_\gamma \phi - \int_\alpha \phi.$$

Kun kaikki yllä esitetty tieto yhdistetään, saadaan

$$\int\int_f d\phi = \{\int_\beta \phi - \int_\delta \phi\} - \{\int_\gamma \phi - \int_\alpha \phi\} = \int_{\partial f} \phi.$$

mot

Viivaintegraali $\int_\alpha \phi$ ei ole kovinkaan herkkä käyrän α uudelleenparametrisoinnille. Suunta on oikeastaan ainoa asia, josta kaikki riippuu.

Lemma 3.6.6. Olkoon $\alpha(h) : [a,b] \to M$ käyräsegmentin $\alpha : [c,d] \to M$ uudelleenparametrisointi. Kaikille 1-muodoille ϕ pinnalla M

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \begin{cases} \int_\alpha \phi, & \textit{jos } h \textit{ on suuntansa säilyttävä} \\ -\int_\alpha \phi, & \textit{jos } h \textit{ on suuntaa kääntävä} \end{cases}$$

Todistus Koska termillä $\alpha(h)$ on nopeusvektori

$$\alpha(h)' = \frac{dh}{dt}\alpha'(h),$$

saadaan

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \int_a^b \phi(\alpha(h)')dx = \int_a^b \phi(\alpha'(h))\frac{dh}{dx}dx.$$

Seuraavaksi suoritetaan muuttujan vaihto integroinnissa. Mikäli h on suuntansa säilyttävä, niin $h(a) = c$ ja $h(b) = d$, jolloin yllä oleva integraali saa muodon

$$\int_c^d \phi(\alpha')dx = \int_\alpha \phi.$$

Toisaalta suuntaa vaihtavassa tapauksessa $h(a) = d$ ja $h(b) = c$ saadaan

$$\int_d^c \phi(\alpha')dx = -\int_c^d \phi(\alpha')dx = -\int_\alpha \phi.$$

mot

Tämä lemma antaa konkreettisen merkityksen 2-segmentin f reunan $\partial f = \alpha+\beta-\gamma-\delta$ kaavassa oleville miinus-merkeille. Kaikille käyrille $\xi : [t_0, t_1] \to M$ voidaan asettaa suuntaa vaihtava uudelleen parametrisointi $-\xi$ näin

$$(-\xi)(t) = \xi(t_0 + t_1 - t).$$

Täten edellisen lemman mukaan

$$\int_{-\xi} \phi = -\int_{\xi} \phi$$

ja jos f on 2-segmentti, niin

$$\int_{\partial f} \phi = \int_{\alpha} \phi + \int_{\beta} \phi - \int_{\gamma} \phi - \int_{\delta} \phi = \int_{\alpha} \phi + \int_{\beta} \phi + \int_{-\gamma} \phi + \int_{-\delta} \phi.$$

3.7 Pintojen topologiaa

Tutkaillaan muutamia pintojen topologisia perusominaisuuksia.

Määritelmä 3.7.1. Pinta M on *yhtenäinen*, mikäli pinnan kahden mielivaltaisen pisteen $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ välillä on käyräsegmentti.

Yhtenäisyys tarkoittaa käytännössä sitä, että pinta muodostuu vain yhdestä kappaleesta, niin että pintaa pitkin voi kulkea pisteestä toiseen. Esimerkiksi pinta $M : z^2 - x^2 - y^2 = 1$, joka on hyperboloidi, muodostuu kahdesta eri kappaleesta ja se siis ei ole yhtenäinen.

Määritelmä 3.7.2. Pinta M on *kompakti*, mikäli se voidaan peittää äärellisellä määrällä 2-segmenttejä.

Yleisesti ottaen siis kompaktit pinnat ovat kooltaan äärellisiä. Pallojen kuoret ovat kompakteja, koska paloittain määritellyn r-säteisen pallon peitefunktio on muotoa

$$f(x, y) = (r \cos x \cos y, r \sin x \cos y, r \sin y),$$

kun se on määritelty avoimella välillä $R : -\pi < x < \pi$, $-\pi/2 < y < \pi/2$,

$$f(x, z) = (r \cos x \cos z, r \sin x \cos z, r \sin z),$$

kun se on määritelty avoimella välillä $R : -\pi < x < \pi$, $-\pi/2 < z < \pi/2$ ja

$$f(y, z) = (r \cos y \cos z, r \sin y \cos z, r \sin z),$$

kun se on määritelty avoimella välillä $R : -\pi < y < \pi$, $-\pi/2 < z < \pi/2$. Nämä osaset ovat äärellisiä 2-segmenttejä.

Todistetaan seuraavaksi lemma, joka olettaa sen yksinkertaisen perustotuuden, että suljetulla välillä

$$R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

määritelty reaaliarvoinen jatkuva funktio saavuttaa maksimiarvonsa jossain pisteessä suorakaiteella R.

Lemma 3.7.3. Mikäli h on jatkuva funktio kompaktilla pinnalla M, niin h saavuttaa maksiminsa jossain pisteessä pinnalla M. Samoiten tietysti myös miniminsä.

Todistus Määritelmän mukaan pinta voidaan kattaa äärellisellä määrällä 2-segmenttejä

$$f_i : R_i \to M(1 \leq i \leq k),$$

joiden kuvajoukko peittää koko pinnan M. Koska jokainen f_i on derivoituva, ne ovat myöskin jatkuvia, joten jokainen yhdistelmäfunktio $hf_i : R_i \to \mathbb{R}$ on myös jatkuva. Jokaisella indeksillä i on siis piste (x_i, y_i) joukossa R_i, jossa hf_i saavuttaa maksiminsa. Olkoon vaikkapa $h(f_1(x_1, y_1))$ suurin maksimiarvoista indeksivälillä $1 \leq i \leq k$. Oletetaan sitten funktion h saavan suurimman arvonsa pisteessä $\bar{m} = f_1(x_1, y_1)$. Voidaan vielä todistaa, että jos $\bar{p}$ on mielivaltainen piste pinnalla M, niin $h(\bar{m}) \geq h(\bar{p})$. Koska 2-segmentit $f_1, f_2, ..., f_k$ peittävät koko pinnan M, on olemassa sellainen indeksi i että $\bar{p} = f_i(x, y)$. Sitten kuitenkin edellä käydyn nojalla

$$h(\bar{m}) = h(f_1(x_1, y_1)) \geq h(f_i(x_i, y_i)) \geq h(f_i(x, y)) = h(\bar{p})$$

mot

Tämä on erittäin kätevä tulos, jos halutaan osoittaa jonkin pinnan epäkompaktius. Esimerkin 3.1.4. sylinterin z-komponentti on rajaton, kun käyrä etenee xy-tasossa. Tämä ei siis ole kompakti pinta.
Märitelmä 3.7.2. on kuitenkin mutkikkaampi kuin ensivaikutelma antaa ymmärtää. Esimerkiksi avoin kiekko xy-tasossa $D : x^2+y^2 < 1$ on rajoitettu pinta, mutta se ei ole kompakti. Esimerkiksi jatkuva funktio $h = (1-x^2-y^2)^{-1}$ ei saavuta maksimiaan pinnalla D. Yleisesti ottaen kompaktilla pinnalla ei voi olla avoimia reunoja, vaan sen on oltava kaikkialta suljettu ja rajoitettu. Käydään vielä kolmas pinnan luonteen määritelmä.

Määritelmä 3.7.4. Pinta M on *suunnistuva*, mikäli on olemassa sellainen 2-muoto μ pinnalla M, joka ei saavuta missään pinnan pisteessä arvoa nolla.

Periaatteessa suunnistuvalla kappaleella voidaan tehdä ero "ylä-"ja "alapuolen"välillä. Seuraava lause selventänee määritelmää.

Lause 3.7.5. Pinta $M \subset \mathbb{R}^3$ on suunnistuva, jos ja vain jos pinnalla M on normaalivektorikenttä Z, joka on nollasta poikkeava jokaisessa pisteessään.

Todistus Käytetään ristituloa muuttamaan normaalivektorikentät 2-muodoiksi ja sama päinvastoin. Vektorikentän Z avulla määritellään 2-muoto μ pinnalla M seuraavasti: Kaikille pinnan M pisteessä $\bar{p}$ oleville tangenttivektoripareille $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ on

$$\mu(\bar{v}, \bar{w}) = Z(\bar{p}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}).$$

μ on häviämätön 2-muoto pinnalla M. Tämä johtuu ristitulon laskusäännöistä. Sehän lasketaan determinanttina

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Tämä voi saada arvon nolla ainoastaan silloin kun vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat paralleleja. Täten M on suunnistuva.

Vastakkaisesti olkoon puolestaan M suunnistuva pinta ja μ häviämätön 2-muoto. Jos $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ muodostavat lineaarisesti riippumattoman vektoriparin pisteessä $\bar{p}$, niin

$$\mu(\bar{v}, \bar{w}) \neq 0,$$

sillä muutoin μ olisi nolla pisteessä $\bar{p}$. Nyt määritellään

$$Z(\bar{p}) = \frac{\bar{v} \times \bar{w}}{\mu(\bar{v}, \bar{w})}.$$

Tällä yhtälöllä on se huomattava ominaisuus, että se on riippumaton alkioitten $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ valinnasta. Mille tahansa muulle vastaavalle vektoriparille $\bar{v}'$ ja $\bar{w}'$ seuraa lemmasta 3.4.2.

$$\frac{\bar{v}' \times \bar{w}'}{\mu(\bar{v}', \bar{w}')} = \frac{\bar{v} \times \bar{w}}{\mu(\bar{v}, \bar{w})}.$$

Ristitulot voidaan supistaa osamääristä pois koska determinantteina ne eivät saa arvokseen nollaa, kuten edellä jo todettiinkin. Täten on löydetty hyvin määritelty euklidinen vektorikenttä koko pinnalle M. Jälleen ristitulon laskennalliset ominaisuudet voivat osoittaa, että Z on kaikkialla normaali pinnalle M muttei koskaan nolla. mot

Täten lemman 3.3.8. mukaan jokainen pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$, joka voidaan esittää implisiittisesti on suunnistuva. Tällaisia ovat kaikki sylinterit, kiertopinnat ja pallojen kuoret. Kuitenkin suunnistumattomiakin pintoja esiintyy avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tällainen on esimerkiksi Möbiuksen kappale.
Kolme edellä mainittua ominaisuutta, yhtenäisyys, kompaktius ja suunnistuvuus, ovat ns *topologisia ominaisuuksia.* Ne voidaan määritellä käyttäen vain avoimia joukkoja ja jatkuvia funktioita ottamatta lainkaan huomioon derivoituvuutta. Niille voidaan todistaa seuraava lause.

Lause 3.7.6. Olkoot M ja N pintoja siten että M sisältyy pintaan N. Mikäli M on kompakti ja N on yhtenäinen, niin $M = N$.

Todistus Koska M on pinta, se on myös avoin joukko. Näin voidaan todeta, kun pinta nähdään relatiivitopologiana. (Eli jos (X, τ) on topologinen avaruus ja $Y \subset X$, niin (Y, τ') on topologinen avaruus, kun $\tau' = \{A \cap Y | A \in \tau\}$. Pinta N on topologia avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja M on sen relatiivitopologia.) Näin on koska peitefunktioiden lähtöjoukkojen avoimuus on kuvautuva ominaisuus jatkuvilla kuvauksilla. Oletetaan, ettei pinta M täytä kokonaan pintaa N ja johdetaan ristiriita. Olettamuksen mukaan pinnassa N on piste $\bar{n}$, joka ei sijaitse pinnassa M. Olkoon $\bar{m}$ piste pinnassa M. Koska N on yhtenäinen, siitä löytyy käyräsegmentti α siten että sen päätepisteinä ovat

$$\alpha(0) = \bar{m}, \alpha(1) = \bar{n}.$$

Olkoon t^* pienin yläraja niistä termeistä t, joilla $\alpha(t) \in M$. Väitetään $\bar{p}^* = \alpha(t^*) \in M$.
Tämän todistamiseksi asetetaan reaaliarvoinen funktio h pinnalle M sellaiseksi että $h(\bar{p})$ mittaa euklidista etäisyyttä $d(\bar{p}, \bar{p}^*)$. Nyt $h \geq 0$ on jatkuva siinä mielessä että kaikilla pinnan M peitefunktioilla f, $h(f)$ on jatkuva. Koska M on kompakti, lemman 3.7.3. mukaan h saavuttaa miniminsä jossain pinnan M pisteessä. Pienimmän ylärajan määritelmän mukaan on olemassa $t < t^*$ äärettömän lähellä termiä t^* siten että $\alpha(t) \in M$. Koska α on jatkuva funktio, vastaavat etäisyydet $d(\bar{p}^*, \alpha(t))$ käyvät äärettömän pieniksi. Täten funktion h minimiarvo voi olla vain nolla. Tämä on mahdollista ainoastaan pisteessä $\bar{p}^*$, joka siis kuuluu funktion määrittelyjoukkoon M.
Koska M on pinnan N avoin osajoukko, jokainen pistettä $\bar{p}^*$ riittävän lähellä oleva pinnan N piste kuuluu myös pintaan M. Täten jos $t > t^*$ on riittävän lähellä arvoa t^*, $\alpha(t)$ täytyy sisältyä pintaan M. Tämä on kuitenkin ristiriidassa termin t^* määritelmän kanssa. mot

Mikäli N ei olisi yhtenäinen, se voisi koostua kahdesta erillisestä pinnasta, joista M olisi toinen. Vastaavasti jos M ei olisi kompakti, lause ei toimisi. M voisi olla vaikka avoin kiekko xy-tasossa.

3.8 Monistot

Tässä viimeisessä kappaleessa katsotaan voidaanko pinnan käsitettä yleistää korkeamman asteen avaruuksille kuin $\mathbb{R}^3$. Tämän takia joudutaan kuitenkin hylkäämään pinnan määritelmä 3.1.2. ja kehittelemään tilalle jotain muuta. Olkoon pinta nyt pelkästään joukko M, joka ei sisälly välttämättä pelkästään avaruuteen $\mathbb{R}^3$. *Abstrakti peitefunktio* pinnalle M on nyt vain injektiivinen kuvaus $f : D \to M$ avoimelta joukolta $D \subset \mathbb{R}^2$ pinnalle M. Tällaisen funktion derivoituvuudesta ei voi sanoa oikeastaan mitään, mutta loppujen lopuksi toimivan määritelmän aikaansaamiseksi tarvitaan vain sujuva päällekkäisyys peitefunktioille. Tämän todistaminen on kuitenkin täysin mahdotonta, joten siitä on tehtävä aksiooma.

Määritelmä 3.8.1. Pinta M on joukko, joka on muodostettu tietyllä kokoelmalla $\wp$ abstrakteja peitefunktioita siten että
(1) Peitefunktioiden kuvajoukko peittää kokonaan joukon M.
(2) Mille tahansa kahdelle peitefunktiolle f ja g, jotka kuuluvat yllä mainittuun kokoelmaan, yhdistelmäfunktiot $g^{-1}f$ ja $f^{-1}g$ ovat euklidisesti derivoituvia.

Tämä määritelmä yleistää määritelmän 3.1.2. ja sisältää sen, mutta on samalla laajempi. Että ero perinteiseen kolmiuloteiseen pintaan tulisi selvemmäksi, puhutaan tästä lähtien *abstraktista pinnasta.*
Että saataisiin abstrakti pinta muodostettua mahdollisimman monesta peitefunktiosta, on soveliasta laajentaa kokoelmaa $\wp$ sellaisilla abstrakteilla peitefunktioilla, jotka sujuvasti peittävät toisiaan joukossa $\wp$. Nämä ovat ainoita, joita voidaan hyödyntää pintaa M käsitellessä. Tämä tarkoittaa kuitenkin sitä että vaikka pinnat M_1 ja M_2 koostuisivatkin täysin samoista pisteistä, ne tulkitaan eri pinnoiksi, mikäli laajennetutkin peitefunktiokokoelmat $\wp_1$ ja $\wp_2$ ovat erit.
Abstraktien pintojen laskutoimitusten suhteen vielä yksi hyvin keskeinen ongelma on ratkaisematta, nimittäin pinnassa olevan käyrän nopeusvektorin määritteleminen. Kaikki tähän mennessä annetut määritelmät ja lauseet pätevät vain avaruudelle $\mathbb{R}^3$ ja nyt se on häivytetty. Määritelmä termille $\alpha'(t)$ voidaan kuitenkin tehdä melko kivuttomasti suunnatun derivaatan kautta.

Määritelmä 3.8.2. Olkoon $\alpha : I \to M$ käyrä abstraktilla pinnalla M. Kaikille t joukossa I *nopeusvektori* $\alpha'(t)$ on funktio

$$\alpha'(t)[h] = \frac{d(h \circ \alpha)}{dt}(t)$$

kaikilla derivoituvilla reaaliarvoisilla funktioilla h pinnalla M.

Täten $\alpha'(t)$ on reaaliarvoinen kuvaus, jonka lähtöjoukkona ovat kaikki derivoituvat funktiot pinnalla M. Tässä onkin kaikki mitä tarvitaan avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitsevien pintojen laskutoimitusten yleistämiseen abstrakteille pinnoille.
Nyt kuitenkin häiritsee vielä se että on tarvittavat laskutoimitusten käsitteet avaruudessa $\mathbb{R}^3$, joita on käsitelty esitiedoissa, ja niiden rinnalle on asetettu uusia laskennallisia määritelmiä, jotka toimivat pinnoilla, muttei ole olemassa sellaisia määritelmiä, jotka toimisivat kummissakin joukoissa. Halutaan määritellä vain yksi laskutoimitusten periaate, josta edellä käsitellyt asiat ovat vain erityistapauksia. Yleisin objekti, jossa laskutoimitukset voidaan määritellä, on nimeltään *monisto*. Se tarkoittaa yksinkertaisesti vain abstraktia pintaa, jolla on mielivaltainen dimensio n.

Määritelmä 3.8.3. Olkoon *n-ulotteinen monisto* M joukko, joka on varustettu *abstraktien peitefunktioiden* kokoelmalla $\wp$, siten että
(1) Kokoelman $\wp$ peitefunktioiden kuvat peittävät koko pinnan M
(2) Kaikilla peitefunktioilla f ja g, jotka kuuluvat kokoelmaan $\wp$, yhdistelmäfunktiot $f^{-1}g$ ja $g^{-1}f$ ovat euklidisessa mielessä derivoituvia ja määriteltyjä avoimissa joukoissa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Täten määritelmän 3.8.1. mukainen pinta on 2-ulotteinen monisto. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on puolestaan sellainen monisto, jonka peitefunktioiden kokoelma muodostuu ainoastaan identiteettifunktiosta.
Mielivaltaisen n-ulotteisen moniston M differentiaalilaskenta määritellään samoin kuin silloin jos $n = 2$, joka on vain abstraktin pinnan erikoistapaus. Derivoituvia funktioita, tangentteja ja tangenttivektorikenttiä käsitellään samoin kuin aiemminkin, erona vain että $i = 1, 2$ sijasta on $i = 1, 2, ..., n$. Derivoituvat eri muotoiset funktiot, joita ollaan käsitelty aiemmin, käyttäytyvät monistolla M samoin kuin tapauksessa $n = 2$. Aina kun on kyse differentiaalilaskennasta matematiikassa tai sen sovelluksissa, useaulotteisilla monistoilla on tapana hypätä esille jossain välissä, silloinkin kun kyseessä vaikuttaisi olevan vain 2- tai 3-ulotteinen tapaus.

Viitteet

[1] Barrett O'Neill, *Elementary differential geometry*, Academic press, inc., Orlando, 1966

[2] Robert G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, inc., United States of America, 1975