

Riikka Palkki

VERTAILUTEHTÄVÄT JA
TARKOITUKSELLISET
VIRHEET – ERILAISIA
RATKAISUTAPOJA
TARKASTELEMALLA KOHTI
JOUSTAVAA MATEMATIIKAN
OSAAMISTA

OULUN YLIOPISTON TUTKIJAKOULU;
OULUN YLIOPISTO,
LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA

A

SCIENTIAE RERUM
NATURALIUM



ACTA UNIVERSITATIS OULUENSIS
A Scientiae Rerum Naturalium 771

RIIKKA PALKKI

**VERTAILUTEHTÄVÄT JA
TARKOITUKSELLISET VIRHEET –
ERILAISIA RATKAISUTAPOJA
TARKASTELEMALLA KOHTI
JOUSTAVAA MATEMATIIKAN
OSAAMISTA**

Esitetään Oulun yliopiston tekniikan ja luonnontieteiden
tohtoriohjelmatoimikunnan suostumuksella julkisesti
tarkastettavaksi Linnanmaan Wetteri-salissa (IT115),
17. kesäkuuta 2022 klo 12.00

OULUN YLIOPISTO, OULU 2022

Copyright © 2022
Acta Univ. Oul. A 771, 2022

Työn ohjaaja
Professori Peter Hästö

Esitarkastajat
Dosentti Päivi Portaankorva-Koivisto
Dosentti Markus Hähkiöniemi

Vastaväittäjä
Professori Minna Hannula-Sormunen

ISBN 978-952-62-3337-6 (Paperback)
ISBN 978-952-62-3338-3 (PDF)

ISSN 0355-3191 (Printed)
ISSN 1796-220X (Online)

Kannen suunnittelu
Raimo Ahonen

PUNAMUSTA
TAMPERE 2022

Palkki, Riikka, Comparison tasks and intentional errors – towards mathematical flexibility by looking for different solution strategies.

University of Oulu Graduate School; University of Oulu, Faculty of Science

Acta Univ. Oul. A 771, 2022

University of Oulu, P.O. Box 8000, FI-90014 University of Oulu, Finland

Abstract

In this dissertation I discuss mathematical flexibility and the learning of mathematics using comparison tasks and intentional errors. The term “flexibility” is used to denote the ability to produce different strategies for tackling a given task and choose the most appropriate. I use the term “comparison task” to mean an example where the solutions to a task by two imaginary pupils’ are presented and examined by using given questions. The task may include some typical, intentional error. By using comparison tasks, it is possible, according to previous research, to develop mathematical skills and flexibility. Flexibility is important in mathematics for solving problems of different types, as well as for developing thinking. Furthermore, the use of intentional errors has produced good learning results in quantitative research. However, from a qualitative perspective, comparison tasks and especially intentional errors are still under-researched.

My dissertation includes four articles and the summary. The research material consists of 266 students’ answers to an equation solving test; the recorded discussions of 25 class teachers, subject teachers and teacher trainees; 23 mathematics teachers’ answers to a questionnaire and classroom discussions (4 teachers, 74 pupils). The research methods are quantitative (regression analysis and cross tabulation) and qualitative (phenomenography, content analysis and case study).

The flexibility of the Finnish students who participated in the research was not very high. According to the teachers’ conceptions and beliefs, comparison tasks and intentional errors could be used to help improve for example the ability to view problems from different perspectives, analytic skills and learning to live with errors. A teacher’s role could develop into more that of a coach. These tasks seemed to be useful in the classroom. On the other hand, teachers were concerned about whether pupils possess the skills or interested to use these methods or if they may confuse an erroneous solution with the right one. On the whole, teachers’ openness to these task types suggested that flexibility could be brought to the school classroom, but teachers’ concerns about, for example, students’ pre-knowledge or possible misconceptions should be considered in teacher training and future research.

Keywords: comparison tasks, educational methods, errors, flexibility, intentional error, mathematical flexibility, mathematics, mathematics teaching, procedural flexibility, solution strategies

Palkki, Riikka, Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet – erilaisia ratkaisutapoja tarkastelemalla kohti joustavaa matematiikan osaamista.

Oulun yliopiston tutkijakoulu; Oulun yliopisto, Luonnontieteellinen tiedekunta

Acta Univ. Oul. A 771, 2022

Oulun yliopisto, PL 8000, 90014 Oulun yliopisto

Tiivistelmä

Käsittelen väitöskirjassani matemaattista joustavuutta sekä matematiikan opiskelua vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden kautta. Joustavuudella tarkoitan kykyä tuottaa erilaisia ratkaisutapoja ja valita niistä sopivin. Vertailutehtävällä puolestaan tarkoitan esimerkkiä, jossa on kahden kuvitteellisen oppilaan ratkaisutavat, joita tutkitaan annettujen kysymysten avulla. Tehtävään voi olla upotettu jokin tyypillinen, tarkoituksellinen virhe. Vertailutehtävät edistävät aieman tutkimuksen mukaan matematiikan osaamista ja joustavuutta. Joustavuus on tarpeen matematiikassa, jotta voi ratkaista erityyppisiä tehtäviä ja kehittää ajattelua. Niin ikään tarkoituksellisten virheiden käyttö on aiemmissa määrällisissä tutkimuksissa tuottanut hyviä oppimistuloksia. Laadullisesti vertailutehtäviä ja varsinkin tarkoituksellisia virheitä on kuitenkin tutkittu melko vähän.

Väitöskirjani koostuu neljästä artikkelista ja niiden yhteenvedosta. Tutkimusaineistonani ovat 266 oppilaan vastaukset yhtälönratkaisutestiin, 25 luokan- ja aineenopettajan sekä opettajaopiskelijan keskustelujen äänitykset, 23 matematiikan opettajan kyselyvastaukset ja luokkahuonekeskustelut (4 opettajaa, 74 oppilasta). Tutkimusmenetelmäni ovat määrällisiä (regressioanalyysi ja ristiintaulukointi) ja laadullisia (fenomenografia, sisällönanalyysi ja tapaustutkimus).

Tutkimukseen osallistuneiden suomalaisoppilaiden joustavuus ei ollut kovin suurta. Opettajien käsitysten ja uskomusten mukaan vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden kautta voitaisiin kehittää esimerkiksi asioiden näkemistä eri tavoin, analysointitaitoja ja virheiden kanssa elämään oppimista. Opettajan rooli voisi muuttua opettajasta enemmän valmentajaksi. Luokkahuonetilanteessa tehtävien käyttö vaikutti hyödylliseltä. Toisaalta opettajat olivat huolissaan, onko oppilailla valmiuksia tai kiinnostusta menetelmien käyttöön tai sekoittaisivatko oppilaat virheellisen ratkaisutavan oikeaan. Kaiken kaikkiaan opettajien avoimuus tehtävätyyppejä kohtaan osoitti, että joustavuutta voitaisiin tuoda kouluympäristöön. Opettajien huolet esimerkiksi tarvittavista esitiedoista tai oppilaiden mahdollisista väärinkäsityksistä tulisi kuitenkin huomioida koulutuksissa ja jatkotutkimuksessa.

Asiasanat: joustavuus, matemaattinen joustavuus, matematiikan opetus, matematiikka, opetusmenetelmät, proseduraalinen joustavuus, ratkaisustrategiat, ratkaisutavat, tarkoituksellinen virhe, vertailutehtävät, virheet

Esipuhe

Tein väitöskirjaani vuodesta 2014 vuoteen 2022. Ennen tätä projektia olin työskennellyt matematiikan, fysiikan ja kemian opettajana, mutta en aavistanutkaan, miten paljon näkemykseni tulisivat avartumaan matematiikan opetukseen liittyvän tieteelliseen tutkimukseen tutustumisen ja sen tekemisen myötä. Esimerkiksi löysin minulle uudet opetus- ja oppimismenetelmät: vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet. Opin joustavuuden olevan tärkeä osa matematiikkaa. Koko matematiikanopetus alkoi näyttäytyä keskustelevana ja aktiivisena, tutkivanakin oppimisena, kun aiemmin olin kokenut itsenäisen rutiinien toistamisen olevan tärkeää varsinkin matematiikan opiskelun alkuvaiheessa. Toki olen kiitollinen opettajantaipaleestani ja kaikista henkilöistä, jotka siinä tukivat, sillä tämä ura antoi paljon perspektiiviä tutkimuksen tekoon.

Tutkimuksen rinnalla seurasin lapseni matemaattista kehitystä. Hän keksi päiväkotikäisenä, että luvun viisi voi lihapullilla esittää erilaisissa muodostelmissa. Kun kerroin, että saman voi tehdä sormilla, hän ei aluksi meinannut sitä hyväksyä. Vähitellen lapsi oppi asioiden näkemistä eri näkökulmista. Hänen tehtäväkirjoissaan pyydettiin etsimään viittä eroavaisuutta kahden kuvan välillä, jolloin hän oppi vertailua ja virheiden etsimistä oikeaan malliin verraten. Ja joskus, kun lapseni teki virheen jossain tehtävässä, hän suuttui niin, että meni pöydän alle murisemaan. Vertailu ja virheisiin suhtautuminen vaikuttavat voivan tulla jo ennen kouluikää mukaan lapsen elämään. Ääretöntäkin pohdittiin moneen otteeseen, ja miten voisi pysäyttää riemua, kun lapsi sanoo, että on vieläkin yhden isompi luku, ”ääretönynksi”, vaikkei asia menekään ihan niin kuin hänen ymmärryksessään. Nyt koulutaipaleella hän on jo ratkonut alkusysäyksen matemaattiselle joustavuudelle antavia tehtäviä. Neuloessani puolestaan huomasin, että ohjeita seurattaessa yleisempien periaatteiden löytäminen auttaa tekemistä selvästi verrattuna siihen, että tarkastaa joka silmukan mallista.

Väitöskirjassani tutkin matematiikkaa opettavia opettajia, yläkoululaisia ja lukiolaisia. Aluksi olin kiinnostunut joustavuudesta, eri ratkaisutavoista ja vertailutehtävien käytöstä, mutta pian löysin mukaan tarkoitukselliset virheet sekä idean virheiden esittämisestä ja tutkimisesta jo ennen niiden tekemistä. Artikkelit valmistuivat, ja aihe hahmottui paremmin. Työskentelin välillä tiiviimmin Joustava yhtälönratkaisu -opetuksenkehittämishankkeessa, vähän Joustavaan matematiikkaan -hankkeessa ja välillä apurahojen voimin tutkimusta tehden. Matkasin opettajien täydennyskoulutusten järjestäjänä ympäri Suomea ja tutkimuksen parissa kolmesti Ruotsiin, kahdesti Saksaan ja kerran Yhdysvaltoihin. Pääsin opet-

tamaan lukuisia opettajia ja tulevia matematiikan opettajia, joiden kanssa käydyistä keskusteluista sain tuoreita ajatuksia, jos myöskin pääsin niitä jakamaan. Väitöskirjaprosessini ylipäänsä sai minut rohkaistumaan ja kasvamaan sekä tutkijana että ihmisenä.

Haluan kiittää tutkimukseeni osallistuneita ja tutkimukseeni mahdollistaneita tahoja. Tutkimustani rahoittivat Oulun yliopiston Luonnontieteellisen tiedekunnan MALU-tohtorikoulutusohjelma, Jenny ja Antti Wihurin rahasto, Suomalaisen tiedeakatemian Vilho, Yrjö ja Kalle Väisälän rahasto, Oulun yliopiston tukisäätiö, Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö ja Oulun yliopiston tutkijakoulu. Konferenssimatkojani rahoittivat Opetus-, kasvatus- ja koulutusalojen säätiö OKKA, Oulun yliopiston tutkijakoulu UniOGS, Matemaattisten aineiden opetustyön tukirahasto ja Exactus-tohtoriohjelma. Näille kaikille suuri kiitos ja vielä erityiskiitos Oulun yliopiston Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikölle tuesta.

Valtava kiitos ohjaajalleni Peter Hästölle. Samoin suuri kiitos kuuluu kollegalleni Dimitri Tuomelalle, MALU-tohtorikoulutettavien porukalle ja kaikille muille tutkimuksessa kannustaneille. Kiitos Jon R. Starille innoituksesta joustavuuden pariin niin artikkeleiden kuin keskusteluidenkin kautta. Kiitos väitöskirjan esitarkastajille Päivi Portaankorva-Koivistolle ja Markus Hähkiöniemelle hyödyllisistä kommenteista sekä kiitos vastaväittäjäksi suostumisesta Minna Hannula-Sormuselle. Kiitos kaikille väitöskirjaprosessiin osallistuneille. Kiitos Virpille ja muille Joustava yhtälönratkaisu -hankkeessa työskennelleille. Kiitos luotto-oikolukijalleni Tuirelle. Valtava kiitos läheisilleni projektissani tukemisesta ja jaksamisesta kulkea rinnallani. Kiitos perheelleni, sukulaisilleni ja ystävilleni. Kiitos etenkin Harrille ja Oulalle. Tässä nyt olen, pää pilvissä ja jalat maassa.

Oulussa 26.4.2022

Riikka Palkki

Osajulkaisut

Yhteenvedossa osajulkaisuihin viitataan niiden roomalaisilla numeroilla:

- I Hästö, P. & Palkki, R. (2019). Finnish students' flexibility and its relation to speed and accuracy in equation solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24(3–4), 42–58.
- II Palkki, R. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 6(1), 105–128. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.6.1.327>
- III Palkki, R. & Hästö, P. (2018). Mathematics teachers' reasons to use (or not) intentional errors. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16(2), 263–282. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2018.0453>
- IV Palkki, R. (2016). Virheellinen esimerkki matematiikan luokkahuonekeskustelussa. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö. (toim.), *Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 2015* (s. 111–121). Haettu osoitteesta http://www.protsv.fi/mlseura/julkaisut/MALU2015_Final.pdf

Selvitys itsenäisestä osuudesta osajulkaisuissa

- I Aiheen, tutkimuskysymysten (hypoteesien) ja menetelmien valinnan teki Peter Hästö neuvotellen tästä kanssani. Pehdyin ja kokosin joustavuuteen liittyviä tutkimuksia ja kirjoitin niistä. Tutkimusasetelman suunnittelussa olin mukana, kun suunnittelimme laajempaa kansainvälistä tutkimusta, jonka sisällä tämä toteutettiin. Suunnittelin aineistonkeruuta ja olin yhteydessä mahdollisiin kouluihin yhteistyössä tutkimusavustajan kanssa. Olin mukana suomentamassa testiä ja käymässä läpi testien pisteytysohjeita. Tutkimusavustaja teki varsinaiset pisteytykset. Hästö teki aineiston alkuperäiset analysoinnit, jotka toistin ohjeistettuna. Hästö teki tulkinnat. Kirjoitimme artikkelin yhteistyössä Peter Hästö'n kanssa.
- II Valitsin aiheen itse, samoin laadin tutkimuskysymykset ja tutkimusasetelman. Suunnittelin ja toteutin aineistonkeruun, litteroin nauhoitukseni sekä pehdyin aiempaan tutkimuskirjallisuuteen ja metodeihin yksin ja itsenäisesti. Tulkitsin tulokset ja kirjoitin artikkelin yksin.
- III Valitsin aiheen, tein tutkimuskysymyksen, laadin tutkimusasetelman ja valitsin menetelmät itsenäisesti. Suunnittelin aineistonkeruun, lähetin kyselyt ja kokosin aineiston yksin. Pehdyin virheiden käyttöön etsimällä itsenäisesti alan tutkimuskirjallisuutta. Pehdyin tutkimusmetodeihin yksin, ja analysoin aineiston itsenäisesti. Peter Hästö osin toisti analysoinnit luotettavuuden ta-

kaamiseksi. Tulosten tulkinnan ja artikkelin kirjoittamisen teimme yhteistyössä Hästön kanssa.

- IV Olin mukana opettajien käyttämän materiaalin ja menetelmän suunnittelussa ja vastuussa yhteydenpidosta opettajiin. Aiheen, tutkimuskysymykset, tutkimusasetelman ja menetelmät valitsin itsenäisesti. Suunnittelin ja toteutin aineistonkeruun itsenäisesti, nauhoitin osan oppitunneista, litteroin videoinnit ja perehdyin aiempaan tutkimuskirjallisuuteen itsenäisesti, analysoin aineiston itsenäisesti, tein tulosten tulkinnan yksin ja kirjoitin artikkelin yksin.

Sisällys

Abstract

Tiivistelmä

Esipuhe 7

Osajulkaisut 9

Sisällys 11

1 Johdanto 13

2 Aiempia tutkimuksia ja tutkimuksen tavoitteet 17

2.1 Matemaattisen tiedon kolme lajia 17

2.1.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto 17

2.1.2 Proseduraalinen joustavuus 19

2.2 Vertailutehtävät matematiikan opetuksessa 24

2.2.1 Vertailutehtävän ja vertailumenetelmän määritelmät 24

2.2.2 Vertailutehtävät aiemmissä tutkimuksissa 27

2.2.3 Vertailutehtävien tarpeellisuus ja toimivuus 30

2.2.4 Opettajien käsitykset ja vertailutehtävät 32

2.3 Virheet ja tarkoitukselliset virheet matematiikan opetuksessa 35

2.3.1 Virheen määritelmä matematiikassa 35

2.3.2 Virheistä oppiminen 37

2.3.3 Tarkoituksellisen virheen määritelmä 41

2.3.4 Tarkoituksellisiin virheisiin liittyvä tutkimus 42

2.3.5 Tarkoituksellisten virheiden tarpeellisuus ja toimivuus 46

2.3.6 Opettajien uskomukset, virheet ja tarkoitukselliset virheet 47

2.4 Tutkimuksen tavoitteet 49

3 Käytetyt menetelmät ja aineisto 53

3.1 Aineiston keruuseen liittyvät hankkeet 53

3.2 Määrälliset tutkimusmenetelmät 56

3.3 Laadulliset tutkimusmenetelmät 56

3.3.1 Fenomenografia 57

3.3.2 Sisällönanalyysi 59

3.3.3 Tapaustutkimus 61

3.4 Osallistujat, tutkimusaineisto ja aineiston analyysi 62

3.4.1 Artikkel I 64

3.4.2 Artikkel II 67

3.4.3 Artikkel III 68

3.4.4 Artikkel IV 70

4 Tulokset	73
4.1 Artikkel I: Suomalaisoppilaiden joustavuus ja sen yhteys nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisussa	73
4.2 Artikkel II: Opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä.....	76
4.2.1 Osallistujien oma oppiminen	78
4.2.2 Menetelmän haasteita ja hyötyjä	78
4.2.3 Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa.....	79
4.2.4 Yhteenveto.....	82
4.3 Artikkel III: Matematiikan opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä tarkoituksellisia virheitä.....	85
4.4 Artikkel IV: Tarkoituksellinen virhe matematiikan luokkahuonekeskustelussa	88
4.5 Tulosten yhteenveto	91
4.6 Luotettavuus, rajoitukset ja tutkimuseettinen pohdinta.....	95
5 Johtopäätökset ja pohdinta	99
5.1 Artikkel I: Suomalaisoppilaiden joustavuus ja sen yhteys nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisussa	99
5.2 Artikkel II: Opettajien ja opettajaopiskelijoiden vertailutehtäviin liittyvät käsitykset	101
5.3 Artikkel III: Matematiikan opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä tarkoituksellisia virheitä.....	103
5.4 Artikkel IV: Tarkoituksellinen virhe matematiikan luokkahuonekeskustelussa	104
5.5 Koonti tutkituista käsitteistä.....	105
5.6 Yleisempää pohdintaa	111
5.7 Jatkotutkimuskohteita	118
5.8 Tutkimuksen käytännön merkitys ja hyödynnettävyys	119
Lähdeluettelo	121
Osajulkaisut	133

1 Johdanto

Väitöstutkimukseni liittyy matematiikan opetukseen. Tutkimuksen kohteena ovat yläkoulu- ja lukioikäiset oppilaat, matematiikkaa opettavat opettajat sekä opiskelijat matematiikan aineenopettajakoulutuksessa. Pohdin joustavuutta ja kahta tehtävätyyppiä, joita kutsun tässä tutkimuksessa vertailutehtäviksi ja tarkoitukselliseksi virheiksi. *Vertailutehtävissä* on esitetty kahden kuvitteellisen oppilaan erilaiset ratkaisutavat, ja oppilaiden tehtävänä on analysoida näitä ratkaisutapoja annettujen kysymysten avulla. Joskus tehtävässä voi esiintyä *tarkoituksellinen virhe*, joka paikannetaan ja korjataan. Tutkin oppilaiden joustavuutta, opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävistä ja virheistä sekä opettajien käytännön toimintaa käytettäessä tarkoituksellisen virheen sisältävää vertailutehtävää.

Ensiksi kerron hiukan siitä, millaisia uskomuksia matematiikan opetukseen ja opiskeluun liittyy. Matematiikan opetuksessa on perinteisesti tehty runsaasti tehtäviä, jotka kehittävät laskurutiinia. Opettajilla voi olla syvälle juurtuneita uskomuksia siitä, että runsaalla harjoittelulla saadaan parhaita tuloksia, vaikka itse asiassa voimakkaina tällaiset uskomukset voivat Kuparin (1999) mukaan olla yhteydessä heikompiin oppimistuloksiin. Niin ikään oppilailta on matematiikan tehtävien tekemiseen liittyviä uskomuksia. He voivat esimerkiksi ajatella, että matematiikassa toistetaan opettajan näyttämää sääntöä tai heidän mielestään tehtävä on ratkaistavissa vain, jos sen pystyy aloittamaan nopeasti tai kun ratkaisustrategia on jo etukäteen selvillä (Schoenfeld, 1992). Oppilaat voivat myös ajatella työskentelyn tähtäävän nopeaan oikean ratkaisun löytämiseen (Törner, 1998). Nämä uskomukset ovat nähdäkseni yhteydessä siihen, että matematiikka helposti nähdään opettajan esittämien ratkaisustrategioiden toistamisena, joka vielä pitäisi tehdä mahdollisimman nopeasti. Näin matematiikan opiskelu saattaa näyttytyä nopeuskilpailuna. Tähän on huomattu voitavan vaikuttaa esimerkiksi tekemällä tehtäviä yhteisöllisesti Varga–Neményi-menetelmällä, jossa oppilaat ratkaisevat tehtäviä yhdessä pohtien (Tikkanen, 2008). Näin kilpailuasetelmaa oppilaiden välillä ei tule. Arvelen, että vertailutehtävien tutkimiseen liittyy samankaltainen mahdollisuus pohtia tehtäviä ilman ajatusta nopeasta vastauksen löytämisestä.

Mentäessä syvemmälle matematiikan oppimisessa tarvitaan asioiden näkemistä eri näkökulmista, jolloin erilaiset ratkaisutavat ja joustavuus tulevat tärkeiksi. Opettajien uskomuksissa toisaalta ovat jo 1990-luvulla tulleet esiin runsaan harjoittelun korostamisen lisäksi ongelmanratkaisun pitäminen tärkeänä ja erilais-

ten ratkaisutapojen arvostaminen (Kupari, 1999). On kuitenkin selvítettävä, miten tähän voitaisiin päästä käytännön luokkahuonetilanteissa. Entä jos tehtävätyyppi muuttuu erilaisia ratkaisutapoja, analysointitaitoja ja keskustelua tukevaksi ja virheet nähdään oppimismahdollisuuksina? Onko lisääntynyt joustavuus yhteydessä siihen, että opitaan ratkaisemaan nopeasti ja oikein, vai millainen yhteys joustavuudella, nopeudella ja oikeellisuudella oikein on? On jo todettu, että joustavuus sallii nopean ja oikean tehtävien ratkaisemisen (Heinze, Star & Verschaffel, 2009), mutta miten tämä ilmenee tutkittujen suomalaisoppilaiden tekemän yhtiönratkaisutestin pohjalta?

Tutkimukseni taustalla on se, miten matemaattinen tieto lisääntyy käytettävissä vertailutehtäviä. Käsittelenkin teoriaosassa matemaattisen tiedon eri puolia: konseptuaalista tietoa, proseduraalista tietoa ja proseduraalista joustavuutta. Virheen tarkoituksellinen käyttäminen on kehittänyt oppilaiden matematiikan käsitteellistä osaamista (esim. Booth, Lange, Koedinger & Newton, 2013). Joustavuutta ja useita ratkaisutapoja yläkouluikäisillä on tutkittu melko paljon Yhdysvalloissa etupäässä määrällisesti, ja tulosten mukaan lähestymistapa kehittää proseduraalista tietoa ja *proseduraalista joustavuutta*, jolla tarkoitetaan kykyä tuottaa eri ratkaisutapoja ja valita niistä tehokkain (esim. Durkin, Rittle-Johnson, Star & Loehr, 2021; Star, Pollack ym., 2015; Star & Rittle-Johnson, 2008). Joustavuus on tärkeää matematiikan ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseksi, koska ongelmanratkaisussa tarvitaan juuri erilaisia näkökulmia.

Joustavuutta tarvitaan siis matematiikassa, mutta miksi? Miksi joustavuus on keskeistä? Mitä hyötyä on tulla joustavaksi? Joustavuuden merkitys kokonaisvaltaisen osaamisen tärkeänä tekijänä selviää tarkastelemalla siihen läheisesti liittyvää käsitettä ”adaptiivinen asiantuntijuus” ja vertaamalla sitä ”rutiiniasiantuntijuuteen”. Adaptiivisella asiantuntijuudella tarkoitetaan Hatanon (2003) mukaan ”kykyä käyttää opittuja proseduureja joustavasti ja luovasti”. Puolestaan rutiiniasiantuntijuudella tarkoitetaan sitä, miten voi soveltaa opittua proseduuria tutunnäköiseen tehtävään nopeasti ja oikein. Tämä kuitenkin tapahtuu ilman ymmärrystä ja kykyä soveltaa tietoa uudentyyppisiin ongelmiin (Hatano, 2003). Rutiiniasiantuntijuuden ongelma koskee sekä koululaisia että kapean alan asiantuntijoita (Hatano, 2003). Baroody (2003) esittää Polyan ja Szegon esimerkin uudesta kaupungista. Jos on uusi asukas, voi hahmottaa reitin kotoa kauppaan ja reitin kotoa töihin, mutta ei vielä suoraa reittiä töistä kauppaan. Henkilön kuljetua aikansa hän osaa arvioida lyhimmän mahdollisen reitin myös silloin, kun suorin tie on suljettu. Tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan syvennyt tämän tarkemmin näihin asiantuntijuuden lajeihin, vaan pitäydytään joustavuuden käsit-

teessä. Termit adaptiivisuus ja joustavuus ovat sinänsä lähellä toisiaan, ja niitä ovat käyttäneet rinnakkain esimerkiksi Heinze, Star ja Verschaffel (2009).

Virheiden tarkoituksellista hyödyntämistä on tutkittu jo jonkin verran määrällisesti, mutta ei juuri lainkaan laadullisesti. Virheiden käyttöön voi liittyä sekä oppilaiden että opettajien puolelta negatiivisia uskomuksia. Yhä nykyäänkin virheet nähdään negatiivisena, hävettävänä ja jopa itseä uhkaavana asiana (Steuer & Dresel, 2015). Virheiden esittämistä opetuksessa vältellään (Metcalf, 2017). Tarkoitukselliset virheet vaikuttavat kuitenkin useamman tutkimuksen mukaan lupaavalta keinolta matematiikan osaamisen lisäämiseen (esim. Adams ym., 2014; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007). Voisiko virheet nähdä luonnollisena osana oppimista upottamalla niitä vertailutehtäviin?

Tässä väitöskirjassa pyrin täydentämään joustavuutta, vertailutehtäviä ja tarkoituksellisia virheitä koskevaa tietoa. Ensiksi tutkin yläkoululaisten ja lukiolaisten joustavuutta ja joustavuuden suhdetta nopeuteen ja oikeellisuuteen, mistä ei vielä tiedetä kovin paljoa. Oppilaiden osaamisen – joustavuuden, nopeuden, oikeellisuuden ja niiden välisen yhteyden – tutkiminen on tärkeää. Sillä saadaan tietoa tämänhetkisestä tilanteesta ja mahdollisista jatkossa huomioitavista seikoista, jos joustavuutta halutaan painottaa kouluopetuksessa. Tässä yhteydessä pohdin myös opettajien uskomuksia joustavuuden tarpeellisuudesta.

Toiseksi tutkin opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä. Suomalaisopettajat ovat tunnettuja korkeasta koulutustasostaan ja autonomiastaan opetuksessa (esim. Sahlberg, 2010), ja on tarpeen pohtia, miten menetelmät voisivat soveltua opettajille, jotka voivat itse suuresti vaikuttaa opetukseensa. Joustavuuteen liittyvät uskomukset ovat tärkeitä kartoittaa, jotta saadaan selville, mistä tavoitteista opettajat ovat tällä hetkellä kiinnostuneita ja pitävätkö he joustavuutta tärkeänä opetuksessa. On tarpeen tutkia, miten vertailutehtävät soveltuvat suomalaiseen koulumaailmaan, sillä Suomessa matemaattista joustavuutta ei suoraan mainita opetussuunnitelmassa. Tätä vastoin esimerkiksi Yhdysvalloissa joustavuuden tärkeys todetaan kansallisissa suosituksissa (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Lisäksi ylipäänsä maiden välillä vaikuttaisi olevan eroja matemaattisessa ajattelussa, kuten esimerkiksi Cai (2004) totesi tutkiessaan yhdysvaltalais- ja kiinalaisoppilaiden matemaattista ajattelua ongelmanratkaisussa.

Kolmanneksi tutkin, mikä edistää ja vaikeuttaa vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöä opetuksessa. Aiemmissä kohdissa tutkitut asiat ja valmiiden tehtävien käytön mahdollisuus eivät vielä riitä siihen, että opettajat osaisivat luoda joustavuuden kehittymistä tukevia oppimistilanteita. Siksi on tärkeää

selvittää käytännön realiteetteja, esimerkiksi sitä, millainen toiminta tukee matemaattisen osaamisen lisääntymistä. Näin selville saatavia seikkoja on mahdollista hyödyntää käytännön kouluopetuksessa, opettajakoulutuksessa ja opettajien täydennyskoulutuksessa.

Käytän määrällisiä ja laadullisia tutkimusmenetelmiä. Aineistona toimivat matematiikan testit, opettajien ja opettajaopiskelijoiden keskustelut, opettajien kyselyvastaukset ja oppitunnin videoinnit. Olen kerännyt aineiston vuosina 2014–2016 Suomessa. Aineiston analyysimenetelminä käytän regressioanalyysia, ristiintaulukointia, fenomenografiaa, sisällönanalyysia ja tapaustutkimusta. Tutkimukseni koostuu neljästä artikkelista, joista ensimmäinen käsittelee joustavuuden yhteyttä nopeuteen ja oikeellisuuteen, toinen opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailutehtävistä, kolmas matematiikan opettajien uskomuksia virheistä ja tarkoituksellisista virheistä ja neljäs tarkoituksellisen virheen sisältävän vertailutehtävän hyödyntämistä opettajajohtoisessa keskustelussa.

2 Aiempia tutkimuksia ja tutkimuksen tavoitteet

Tässä luvussa esittelen joustavuutta, vertailutehtäviä, virheitä ja tarkoituksellisia virheitä. Aluksi pohjustan näitä käsitteitä matemaattisen tiedon käsitteellä. Sitten määrittelen joustavuuden, vertailutehtävät, virheet ja tarkoitukselliset virheet, pohdin niiden opettamista ja oppimista erityisesti matematiikan opetuksessa sekä esittelen aiheeseen liittyvää tutkimuskirjallisuutta. Luvun lopuksi määrittelen väitöstutkimukseni tavoitteet.

2.1 Matemaattisen tiedon kolme lajia

Matematiikan oppimisessa ja opetuksessa on oleellista, mitä, miten ja miksi opitaan, kun opiskellaan. Matemaattinen tieto eroaa luonnontieteiden tiedosta, sillä sitä ei saavuteta esimerkiksi kokeellisten havaintojen kautta (Kitcher, 1984). Lisäksi tiedetään, että opettajan matemaattinen tieto on tärkeää oppilaan matemaattisille saavutuksille (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Paneudun nyt matemaattisen tiedon kolmeen eri lajiin. Määrittelen proseduraalisen tiedon, konseptuaalisen tiedon ja proseduraalisen joustavuuden. Tälle tutkimukselle keskeisin termi näistä on (proseduraalinen) joustavuus.

2.1.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Matemaattinen tieto on perinteisesti jaettu *konseptuaaliseen tietoon eli käsitteetietoon (conceptual knowledge)* ja *proseduraaliseen tietoon eli menetelmätietoon (procedural knowledge)*. Proseduraalinen tieto tarkoittaa ”miten”-kysymykseen vastaamista ja konseptuaalinen tieto ”miksi”-kysymykseen vastaamista (Hiebert & Lefevre, 1986). Proseduraalista tietoa käytetään esimerkiksi tehtävässä, jossa pyydetään laskemaan huoneen pinta-ala annettujen mittojen avulla. Konseptuaalista tietoa puolestaan tarvitaan, jos pyydetään arvioimaan huoneen pinta-ala ja perustelemaan arvio.

Proseduraaliseksi tiedoksi aritmetiikassa yleensä ajatellaan rutiinien ulkoa muistelua ja konseptuaaliseksi tiedoksi tietoa, jonka merkitys opitaan (Baroody, 2003). Proseduraalinen tieto liittyy laskemiseen ja konseptuaalinen tieto käsitteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämiseen. Proseduraalinen tieto edellyttää operaatioiden muistamista ilman taustalla olevien merkitysten ymmärtämistä (Arslan, 2010). Konseptuaalisessa tiedossa puolestaan tärkeää on suhteiden ym-

märtäminen (Hiebert & Lefevre, 1986). Nämä Baroodyn, Arslanin sekä Hiebertin ja Lefevren hiukan erilaiset näkökulmat painottavat käsittäkseni samoja asioita: proseduraalinen tieto liittyy matematiikan tekniseen puoleen – sujuvaan laskemiseen – ja konseptuaalinen tieto syvällisempään ymmärtämiseen.

Kahtiajako proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon ehkä yksinkertaistaa matemaattista tietoa, mutta auttaa hahmottamaan, mistä seikoista se koostuu. Matemaattisen tiedon kahtiajako ei kuitenkaan ole itsestään selvää, sillä tiedon lajien välillä voidaan nähdä yhteyksiä. Oppiminen edellyttää käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä ja tulkitsemista (Arslan, 2010). Oppimiseen siis väistämättä tarvitaan konseptuaalista tietoa, mutta missä vaiheessa proseduraalinen tieto otetaan mukaan oppimiseen? Millainen yhteys niiden välillä oikein on?

Kahtiajakoa mietittäessä voi pohtia termiä ”ymmärtäminen” ja sitä, miten se toteutuu kummassakin osa-alueessa. Matematiikan opetuksen sanotaan tähtäävän ymmärtämisen lisäämiseen, mutta sen sijaan se vaikuttaakin lisäävän mekaanisen laskemisen osaamista (Pehkonen, 2011). Tämä kuulostaa mielestäni todella huolestuttavalta, sillä ymmärtämisen ajattelisi olevan matematiikan ydintä. Matemaattisen ymmärtämisen Pehkonen (2011) sanoo vastaavan kysymykseen ”miksi?” ja sisältävän muun muassa matemaattisten väitteiden analysoinnissa tarvittavia taitoja. Tämä nähdäkseni viittaa ymmärtämisen liittyvän enemmän konseptuaaliseen tietoon.

On havaittu, että proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto eivät kehity toisistaan erillisinä (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Baroodynkin (2003) huomauttaa, että proseduraalisten huomioiden tekeminen edeltää konseptuaalista tietoa ja puolestaan konseptuaalinen tieto voi olla joko suorassa tai epäsuorassa yhteydessä proseduurien keksimisessä. Oppiminen ei siis tapahdu ilman käsitteitä, mutta toisaalta tarvitsee osata laskeakin. Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kahtiajako ei siis ole ongelmaton. On myös esitetty, että konseptuaalisella tiedolla voi olla suurempi vaikutus proseduraaliseen tietoon kuin päinvastoin (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto vaikuttavat siis olevan vuorovaikutuksessa keskenään. Tämä saa pohtimaan, riittääkö kahtiajako kuvaamaan matemaattisen tiedon monitahoisuutta.

Matemaattiseen tietoon ja ongelmanratkaisuun liittyy oleellisesti erilaisten laskustrategioiden käyttö. Joutsenlahti (2005) onkin puhunut strategiatiedosta määritellen sen monimutkaisissa tilanteissa käytetyiksi operaatioiksi, joilla ohjailaan kognitiivisia prosesseja. Matemaattinen ajattelu koostuu uskomuksista, kulttuurista, ongelmanratkaisusta, informaation prosessoinnista ja matemaattisista

kyvyistä, ja siinä prosessoidaan konseptuaalista, proseduraalista tai strategista matemaattista tietoa ajattelijan metakognitioiden kautta (Joutsenlahti, 2005; Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Strategiatiedon mukaan ottamisen näen oleellisena lisänä. Strategiatiedon lisäksi kahtiajaon ongelmaan on ratkaisuksi ehdotettu proseduraalista tai strategista joustavuutta (Star, 2005, 2007), josta kerron tarkemmin seuraavassa alaluvussa.

2.1.2 Proseduraalinen joustavuus

Star (2005, 2007) on ehdottanut käsitetiedon yhdistämistä proseduraaliseen tietoon ja käyttänyt myöhemmin termiä proseduraalinen joustavuus. Hänen mukaansa sekä tutkimuksessa että opetuksen uudistuksissa keskitytään ymmärtämisestä puhuttaessa käsitteelliseen tietoon, jolloin unohdetaan proseduraaliseen kompetenssiin liittyvä ymmärtäminen (Star, 2005). Tulkitsen tämän niin, että konseptuaalinen tieto on mielletty syvälliseksi ja proseduraalinen tieto pinnalliseksi, mutta myös proseduraaliseen tietoon voisi liittyä syvällistä osaamista. Proseduraaliseen tietoon liittyvän ymmärtämisen ja syvällisen osaamisen kuvaamiseksi tarvitaan uutta termiä, sillä konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto eivät yksin riitä selittämään matematiikassa tarvittavaa tietoa.

Proseduraalinen joustavuus (procedural flexibility) määritellään tiedoksi useammasta ratkaisutavasta samaan matematiikan tehtävään ja kyvyksi valita ratkaisutavoista sopivin (Rittle-Johnson & Star, 2007; Star & Rittle-Johnson, 2008). Joskus käytetään termiä strateginen joustavuus, jolla viitataan samaan asiaan painottaen eri ratkaisustrategioiden merkitystä joustavuuden oppimisessa. Käytän jatkossa termiä proseduraalinen joustavuus tai lyhyemmin joustavuus, jolla viitataan edellä mainitun määritelmän mukaiseen strategioiden ja prosessien käytön joustavuuteen. Joskus käytän myös termiä matemaattinen joustavuus asiayhteydessä, jossa joustavuus voidaan sekoittaa muuhun kuin matematiikkaan, esimerkiksi opettajan toimintaan liittyvään (psykologiseen) joustavuuteen. Termiä joustavuus ovat käyttäneet nyttemmin myös Star ja kollegat (esim. Liu ym., 2018; Star, Tuomela ym., 2022).

Pohditaan seuraavaksi hiukan tarkemmin, mitä joustavuus käytännössä tarkoittaa. Yksinkertaisena esimerkkinä on $1+2+3+4+6+7+8+9$. Sen voi ratkaista perinteistä vasemmalta oikealle laskemista joustavammin aloittamalla laskemisen reunoilta etsien ”kymppipareja”. Joustavuus siis vaatii innovatiivista ajattelua.

Jos ongelmanratkaisija osaa yhtälönratkaisussa käyttää standardimenetelmää tehokkaampaa ratkaisutapaa, hän toimii joustavasti. Kuvan 1 ensimmäinen ratkai-

sutapa on yhtälönratkaisussa standardimenetelmä, jossa noudatetaan sääntöä: 1) avaa sulut, 2) siirrä muuttujatermit vasemmalle ja luvut oikealle, 3) sievennä lausekkeet ja 4) jaa muuttujan kertoimella. Standardimenetelmä vaikuttaa olevan levinnyt laajasti koululaisten keskuuteen ainakin Suomessa, Ruotsissa ja Espanjassa (Star, Tuomela ym., 2022). Joustava ratkaisutapa on esimerkiksi Kuvan 1 tehtävän oikeanpuolimmainen ratkaisutapa.

$$\begin{array}{rcl}
 3(x + 4) = 6 & & 3(x + 4) = 6 \\
 3x + 12 = 6 & & x + 4 = 2 \\
 3x = -6 & & x = -2 \\
 x = -2 & &
 \end{array}$$

Kuva 1. Kaksi eri ratkaisutapaa samaan tehtävään.

Standardistrategian käyttämistä on tutkittu jonkin verran. Buchbinder, Chazan ja Fleming (2015) havaitsivat, että yhdysvaltalaisopettajien standardistrategian suosiminen yhtälönratkaisussa esti useiden ratkaisutapojen käyttöä, joka puolestaan mahdollistaisi joustavuuden kehittymisen. Verschaffel, Greer ja DeCorte (2007) laittoivat merkkeille useita tutkimuksia läpi käydessään, että standardistrategia oli vahvana mielessä jopa laskua 4002–3998 laskettaessa. Standardistrategian rinnalle vaikuttaisi olevan tarpeen esittää myös muita vaihtoehtoisia strategioita, jottei ajattelu jumittuisi standardistrategian suosimiseen.

Joustavuutta ei myöskään ole se, että tuntee systemaattisesti erilaisia eri tilanteisiin sopivia strategioita. Se, että opetetaan useita tilanteita ja jokaiseen erikseen niihin toimiva strategia, ei vielä kehitä omaa kykyä liikkua eri ratkaisutapojen välillä ja tehdä valintoja. Joustavuutta ratkaisussa osoittaa se, että osaa myös muokata ratkaisutapaansa tilanteen niin vaatiessa. Jos Kuvan 1 esimerkki olisi erityyppinen, esimerkiksi kertojalla jako ei menisi tasan, ratkaisija huomaisi, ettei Kuvan 1 jälkimmäisen ratkaisutavan käyttö ole enää tilanteeseen sopivampi. Siinänsä toinen ratkaisutapa edelleen on *innovatiivinen*, kekseliäs tapa, mutta strategiana se ei aina ole tilanteeseen sopivin. Tämä näkökulma tosin on ristiriidassa sen kanssa, että Xu ja kollegat (2017) käyttivät innovatiivista ratkaisutapaa suoraan joustavuuden määritelmässä. He näkivät joustavuuden tietona useista strategioista, joilla voi ratkaista ongelman ja kykynä soveltaa innovatiivista strategiaa annetussa ongelmanratkaisuympäristössä. Ero ei ole suuri, mutta pitäydyn kuitenkin jatkossa ajatuksessa, että innovatiivinen ei välttämättä ole tehokkain ratkaisutapa.

Joustavuutta on tutkittu eri yhteyksissä. Joustavien ratkaisujen määrä yhdysvaltalaisilla kuudesluokkalaisilla oli opetuskokeilun jälkeen 2,5 yhtälöä 19 yhtälöstä eli 13 %, kun verrokkiryhmällä joustavuus oli 3,7 % (Star & Seifert, 2006). Joustavuuden sekä nopeuden ja oikeellisuuden yhteyttä on tutkittu jonkin verran. On havaittu, että joustavuus voi mahdollistaa tehtävien nopean ja oikean ratkaisemisen (Heinze, Star & Verschaffel, 2009; Lemaire & Siegler, 1995). Toisaalta kiinalaiset oppilaat eivät osoittaneet suurta joustavuutta, vaikka heidän ratkaisemiensa tehtävien oikeellisuus oli hyvällä tasolla (Xu ym., 2017). Joustava ratkaisujen vaihtaminen myös vaikutti yhdeksäsluokkalaisten latvialaisoppilaiden akateemiseen pärjäämiseen etäopetuksen aikana (Hacatrjana, 2022), joten joustavuus vaikuttaa laajemminkin tärkeältä taidolta. Joustavalla ratkaisujen vaihtamisella tarkoitetaan tässä matemaattisen ongelmanratkaisun osa-aluetta, jossa mahdollista saatua ratkaisua arvioidaan ja lisäksi tarvittaessa joustavasti vaihdetaan ratkaisustrategiaa (Hacatrjana, 2022).

Xu ja kollegat (2017) kehittivät joustavuutta mittaavan testin. Testin ensimmäisessä vaiheessa oppilaiden tuli ratkaista 12 yhtälöä, toisessa vaiheessa ratkaista samoja yhtälöitä uudelleen mahdollisimman monella eri tavalla ja kolmannessa vaiheessa koehenkilöiden tuli ympyröidä innovatiivisena pitämänsä ratkaisutapa. Tätä testiä käytimme kansainvälisessä tutkimuksessa (n=791), jossa espanjalaiset, suomalaiset ja ruotsalaiset oppilaat tekivät joustavuutta mittaavan yhtälönratkaisutestin (Star, Tuomela ym., 2022). Tässä tutkimuksessa ensinnäkin iällä oli vaikutusta joustavuuden ja *oikeellisuuden (accuracy)* esiintymiseen. Toiseksi joustavuus oli keskimäärin melko matalalla tasolla, sillä oppilaat ratkaisivat joustavasti noin 15 % annetuista tehtävistä. Kolmanneksi standardistrategian käyttö näyttäisi olevan levinnyt laajasti kaikkiin kolmeen maahan. Neljänneksi joustavasti tehtäviä ratkaisseet oppilaat tekivät tehtävät keskimäärin parhaiten eli heillä oli suurin tehtävien oikeellisuus. Joustavuudessa oli lisäksi eroja maiden välillä (Star, Tuomela ym., 2022).

Oleellista on myös, miten joustavuutta mitataan. Joustavuuden käsite on operationalisoitu kansainvälisessä kolmen maan tutkimuksessa joustavuuden mittamisen helpottamiseksi (Star, Tuomela ym., 2022). Oppilaan tekemistä pidetään joustavana, jos hän täyttää kolme kriteeriä annetun tehtävän (yhtälön) kohdalla:

- A) oppilas osoittaa tietonsa standardiratkaisumenetelmästä kyseiseen yhtälöön,
- B) oppilas osoittaa tietonsa tilanteeseen sopivasta ratkaisumenetelmästä kyseiseen yhtälöön ja

C) oppilas tunnistaa tilanteeseen sopivimman strategian parhaaksi niistä, jotka hän tuotti annettuun yhtälöön.

Jos oppilas tuottaa tilanteeseen sopivan strategian (B), mutta ei täytä toista kahdesta muusta kohdasta (A tai C), puhutaan, että hänellä on *potentiaalista joustavuutta* (*potential flexibility*) annettuun yhtälöön. Jos oppilas esittää tilanteeseen sopivan strategian ratkaisun ensimmäisellä ratkaisukierroksella, hänellä on *spontaanista joustavuutta* (*spontaneous flexibility*) (Star, Tuomela ym., 2022). Spontaanista joustavuudesta on käytetty myös termiä *praktinen joustavuus* (*practical flexibility*) (Xu ym., 2017).

Tutkimuksissa joustavuutta on operationalisoitu eli käsite on muutettu empiirisesti mitattavaan muotoon. Kuitenkin on tärkeää muistaa, ettei joustavuus synny irrallaan muusta matemaattisesta kehityksestä, vaan sillä on yhteys muihin matemaattisen tiedon lajeihin. Joustavasti toimiva ongelmanratkaisija tarvitsee sekä proseduraalista tietoa että konseptuaalista tietoa. On nimittäin havaittu, että sekä proseduraalinen tieto että konseptuaalinen tieto erikseen tukevat joustavuuden kehittymistä (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011).

Joustavuutta on tutkittu paljon yhtälönratkaisun yhteydessä, mutta sitä voidaan viedä muillekin matematiikan osa-alueille. Niin ikään määritelmää voidaan laajentaa kattamaan esimerkiksi ratkaisutapojen muokkaaminen ja yhdistäminen sekä se, että oppilaat alkavat itse tuottaa ja vertailla eri ratkaisutapoja (JoMa, 2022). Tässä laajemmassa näkökulmassa joustavuus on lähellä avointa ongelmanratkaisua, jossa oppilaat pohtivat *avoimia ongelmia* (*open-ended problems*). Ne ovat ongelmia, joissa tehtävää ratkaistaessa on mahdollista tehdä valintoja alku- ja lopputilanteesta tai molemmista (Pehkonen, 1999). Tällainen lähestymistapa vaikuttaa nähdäkseni hyödylliseltä jo senkin vuoksi, että matematiikka nähdään muunakin kuin laskukilpailuna, jollaisena se oppilaiden uskomusten pohjalta voi näyttäytyä (vrt. Schoenfeld, 1992; Törner, 1998). Onkin ehdotettu, että matematiikan puhuminen ääneen tulisi aloittaa jo varhain. Näverin, Ahteen ja kollegoiden (2014) mukaan tärkeää olisi, että oppilaat alkaisivat jo esiopetuksesta lähtien selittää johtopäätöksiään ja ajatteluaan ääneen, jotta ei muodostuisi myöhemmin vaikeasti muutettavaa suorituskeskeistä mallia.

Joustavuuden ohella käytetään joskus termiä *adaptiivisuus* (*adaptivity*) eli *mukautuvuus*. Adaptiivisuudella tarkoitetaan kykyä käyttää merkityksellisesti opittuja proseduureja joustavasti ja luovasti (Hatano, 2003). Tämän perusteella adaptiivisuus vaikuttaa hiukan laajemmalta näkökulmalta kuin joustavuus, sillä adaptiivisuudella viitataan kykyyn, joka vaatii joustavuutta, kun taas joustavuus-

della suppeammin kykyyn tuottaa eri ratkaisutapoja ja valita niistä tehokkain tai sopivin (esim. Rittle-Johnson & Star, 2007). Lemairen ja Sieglerin (1995) tutkimuksessa adaptiivisuutta kehittämällä yhteenlaskutehtävät myös sujuivat nopeammin ja oikeellisemmin, joten adaptiivisuus vaikuttaisi mahdollistavan matematiikan osaamisen lisäämisen.

Adaptiivisuus voidaan aritmetiikassa jakaa a) proseduraaliseen joustavuuteen ja b) lukukäsitteen joustavuuteen (McMullen ym., 2016). Tämä on siis määritelmänsäkin nojalla proseduraalista joustavuutta laajempi termi ainakin aritmetiikan yhteydessä. *Adaptiivisella numerotiedolla (adaptive number knowledge)* puolestaan tarkoitetaan tietoa, jossa numeeriset merkit ja suhteet yhdistetään sujuvasti yhteen (McMullen ym., 2017). Tämä määritelmä on hyvin lähellä joustavuuden laajempaa näkökulmaa. Adaptiivinen numerotieto oli tutkimuksessa yhteydessä senhetkisiin aritmetiikan taitoihin ja tietoihin, ja se lisäksi ennusti tulevia esialgebran taitoja (McMullen ym., 2017). Adaptiivinen numerotieto on siis tärkeä osa matematiikan osaamisen kehittymistä. Erityisesti *joustavaa rationaalilukukäsitettä* tutkittaessa puolestaan on havaittu, että se on proseduraalisesta ja konseptuaalisesta tiedosta erillinen komponentti, joka on yhteydessä myöhempään algebran osaamiseen (McMullen ym., 2020). Joustavan (adaptiivisen) lukukäsitteen kehittämisestä pelillisesti on saatu hyviä oppimistuloksia oppimispelien ”Number Navigation Game” ja ”NanoRoboMath” avulla (Brezovszky, 2019; Kärki, ym., 2021). On siis tärkeää, että joustavuuden kehittämiseen kiinnitetään huomiota varhaisesta matematiikan opetuksesta lähtien.

Tässä väitöstutkimuksessa pysyttelen termissä joustavuus ja tarkastelen erityisesti yläkoulu- ja lukioikäisten yhtälönratkaisun opiskelua sekä toisaalta opettajien käsityksiä ja uskomuksia. Tutkimuksessani on mukana muitakin kuin edellä mainittujen ikäluokkien opettajia.

Huomautettakoon vielä, että matematiikan osaaminen ei liity pelkästään tiedon hankintaan. Nykyisin sen käsitetään muodostuvan useista eri osista. Matemaattisen *taitavuuden (proficiency)* ajatellaan koostuvan seuraavista osa-alueista: 1. käsitteellinen ymmärtäminen, 2. proseduraalinen sujuvuus, 3. strateginen kompetenssi, 4. adaptiivinen päättely ja 5. rakentava asenne (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 117). Näistä on helppo keskittyä kohtaan kaksi, sillä sujuvaa laskemista on helppo mitata. Kuitenkin matematiikan oppimisen moniulotteisuus tulisi huomioida ja painottaa kaikkia osa-alueita. Proseduraalisen joustavuuden ottaminen mukaan opetuksessa mitattavaksi asiaksi tukee nähdäkseni tätä taitavuuden laajempaa määrittelyä, sillä joustavuuden voisi ajatella liittyvän myös muihin osa-alueisiin, kuten kohtiin kolme ja neljä.

Sawyerin (2014) mukaan elämme nykyään *tietotaloudessa (knowledge economy)*. Siinä faktojen muistelu ja proseduurien osaaminen eivät riitä. Sen sijaan tarvitaan monimutkaisten käsitteiden syvää ymmärrystä, kykyä uusien ideoiden, teorioiden, tuotteiden ja tiedon luomiseen, kriittisyyttä ja kykyä selkeään ilmaisuun sekä tieteellistä ja matemaattista ajattelua (Sawyer, 2014). Nykyään tarvitaan siis erilaisia taitoja kuin opetuksessa muutamia vuosikymmeniä sitten. Proseduraalista tietoa täytyy syventää joustavuuden suuntaan. Oppimiskäsityksen täytyy muuttua, mikä tulee ilmi nykyisestä perusopetuksen opetussuunnitelmasta (Opetushallitus, 2014). Puhutaan niin sanotuista 2000-luvun taidoista, joihin kuuluvat luovuus ja innovatiivisuus, kriittinen ajattelu, ongelmanratkaisu ja päätöksenteko, oppimaan oppiminen sekä joukko muita yhteistyöhön, informaation lukuun ja globaaliin maailmaan liittyviä kykyjä (Binkley ym., 2012). Joustavuuden näen osana tulevaisuuden matematiikan taitoja, sillä se liittyy oleellisesti neljään ensimmäiseksi mainittuun 2000-luvun taitoon. Nykyaikana vaaditaan myös hyvää päätöksentekotaitoa, joten on yhä tärkeämpää osata pohtia asioihin eri ratkaisuvaihtoehtoja ja valita niistä sopivin (vrt. proseduraalisen joustavuuden määritelmä).

2.2 Vertailutehtävät matematiikan opetuksessa

Matematiikkaa voidaan opiskella eri tavoin, ja eräs vastaus kysymyksiin ”miten” ja ”miksi” ovat vertailutehtävät. Vertailutehtävät ovat matematiikan oppimismenetelmä, jota on hyödynnetty muun muassa Yhdysvalloissa (Star, Pollack ym., 2015) ja viime aikoina Suomessa (Joustavaan matematiikkaan [JoMa], 2022; Joustava yhtälönratkaisu [JYR], 2019).

Vertailutehtävien avulla voidaan kehittää matemaattista osaamista. Seuraavassa määrittelen vertailutehtävät ja esittelen niihin liittyvää tutkimusta erityisesti yläkoulun (7.–9. luokkien) matematiikan opetuksessa. Tämän jälkeen pohdin vertailutehtävien toimivuutta ja opettajien suhdetta näihin tehtäviin.

2.2.1 Vertailutehtävän ja vertailumenetelmän määritelmät

Matematiikassa sama tehtävä voidaan usein ratkaista erilaisilla ratkaisutavoilla. Tämä on matemaattisessa ongelmanratkaisussa tärkeä taito, sillä eri tavoilla ratkaistaessa tulee osata tuottaa haastaviin tehtäviin mahdollisia erilaisia ratkaisureittejä, vertailla niitä ja valita niistä potentiaalisin. Matalan kynnyksen keino lähes-

tyä useita ratkaisutapoja on esittää valmiita ratkaisustrategioita samaan tehtävään ja keskustella niistä vertaillen. Määritellään seuraavaksi vertailutehtävät.

Useisiin ratkaisutapoihin ja vertailuun liittyviä tehtäviä on käytetty Yhdysvalloissa, jossa niistä on puhuttu termillä *työstetty esimerkkipari*, *WEPs (worked example pairs)*. *Työstetyssä esimerkissä (worked example)* on esitetty jokin esimerkki ja siihen liittyviä kysymyksiä, esimerkkiparissa näitä on kaksi.

Työstetty esimerkkipari siis tarkoittaa kahta rinnakkain sijoitettua esimerkkivastausta, joihin on kirjoitettu kuvitteellisten oppilaiden selitykset ratkaisulle, ja tehtävässä kysytään kysymyksiä esimerkkiparia tutkivalta oppilaalta tai luokalta (Star, Newton ym., 2015; Star, Pollack ym., 2015). Star ja kollegat ovat käyttäneet myös termiä *CEMS (Comparison and Explanation of Multiple Strategies)*, mikä tarkoittaa vertailua ja eri ratkaisustrategioiden selittämistä (Star, Rittle-Johnson & Durkin, 2016). Nytemmin on käytetty termiä *CDMS (Comparison and Discussion of Multiple Strategies)*, jossa korostetaan useista ratkaisutavoista keskustelua (Durkin, Rittle-Johnson, Star, & Loehr, 2021). Taulukossa 1 olen esittänyt käytetyt termit mukaan lukien oman tutkimusryhmäni käyttämät termit, vertailutehtävät ja vertailumenetelmä.

Taulukko 1. Vertailutehtävistä käytetyt termit.

Menetelmä	Suomennos	Lähde
Comparing Solution Methods	Ratkaisutapojen vertailun menetelmä	Rittle-Johnson & Star, 2007
Worked Example Pairs (WEPs)	Työstetyt esimerkkiparit	Star, Newton ym., 2015
Comparing and Explanation of Multiple Strategies (CEMS)	Vertailu ja eri ratkaisutapojen selittäminen	Star, Rittle-Johnson & Durkin, 2016
Comparing and Discussion of Multiple Strategies (CDMS)	Useiden ratkaisutapojen vertailu ja niistä keskustelu	Durkin, Rittle-Johnson, Star & Loehr, 2021
Comparison Method/ comparison tasks	Vertailumenetelmä/ vertailutehtävä	Palkki, 2018; tämä väitöskirja



Vertailutehtävillä (comparison tasks) tarkoitan jatkossa samaan tehtävään esitettyjen eri ratkaisutapojen tutkimista ja vertailua apukysymysten avulla joko yksin pohtien tai yhdessä keskustellen. Käytetyt ratkaisutavat voivat olla joko opettajan tai oppimateriaalin laatijan valmiiksi pohtimia tai spontaanisti opetuksessa esiin nousevia. Käytän tätä omaa määritelmää, jotta saan painotettua vertailun tärkeyttä tehtäviä tehtäessä. Lisäksi termi yksinkertaistuu helposti suomen kielessä käytettäväksi. Käsitteen taustalla olevat tehtävät ovat kuitenkin samoja kuin termeissä

WEPs, CEMS tai CDMS (Taulukko 1). Olen ollut mukana kääntämässä ja muokkaamassa Suomen oloihin vertailutehtäviä (JYR, 2019), jotka pohjautuvat Starin ja kollegoiden alkuperäisideaan (esim. Star, Pollack ym., 2015). Esimerkki vertailutehtävästä Joustava yhtälönratkaisu -materiaalissa on esitetty Kuvassa 2.

Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $3(x + 2) = 15$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	$3(x + 2) = 15$	$3(x + 2) = 15$
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3x + 6 = 15$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{15}{3}$
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3	$3x + 6 - 6 = 15 - 6$	$x + 2 = 5$
Sain vastaukseksi $x = 3$	$3x = 9$	$x + 2 - 2 = 5 - 2$
	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$
	$x = 3$	

Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
Vastaukseni on $x = 3$

a) Kuinka Kalle ratkaisi yhtälön? Entä Leena? Ovatko he päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän?
b) Huomaatko yhtäläisyyksiä Kallen ja Leenan ratkaisuissa?
c) Kumpaa tapaa itse käyttäisit kyseisen yhtälön ratkaisuun?
d) Jos yhtälö olisi muotoa $3(x + 2) = 17$, kumpi ratkaisutavoista olisi parempi, miksi?

Kuva 2. Vertailutehtävä Joustava yhtälönratkaisu -materiaalista (Uudelleenjulkaistu tekijöiden luvalla lähteestä JYR, 2019).

Vertailutehtäviä on erityyppisiä eri tavoitteineen. Star, Pollack ja kollegat (2015) ovat luokitelleet neljä erityyppistä työstettyä esimerkkiparia (WEPs): Kumpi on parempi? (Which is better?), Kumpi on oikein? (Which is correct?), Miksi se toimii? (Why does it work?) ja Kuinka ne eroavat? (How do they differ?). Yhteistä on, että kaikissa käytetään eri ratkaisutapoja eli (ratkaisu)metodeja ja niitä vertaillaan annettujen kysymysten avulla. Erona on, että eri tehtävätyypit tähtäävät kukin hiukan erilaisen matematiikan osaamisen kehittymiseen. Olen koonnut näiden tehtävätyyppien sisällöt ja tavoitteet Starin ja kollegoiden artikkelin (Star, Pollack ym., 2015) pohjalta Taulukkoon 2. Näistä toisesta, ”Kumpi on oikein?”, käytän jatkossa nimitystä tarkoituksellisen virheen sisältävä (vertailu)tehtävä, ja palaan tähän tehtävätyyppiin tarkemmin luvussa 2.3.

Taulukko 2. Erityyppiset vertailutehtävät (Star, Pollack ym., 2015 tekstin pohjalta).

Vertailutehtävä	Sisältö	Tavoite
Kumpi on parempi?	Kaksi eri oikeaa ratkaisutapaa samaan ongelmaan	Ymmärtää, miksi toinen ratkaisutapa on tehokkaampi tai helpompi kuin toinen
Kumpi on oikein?	Oikein tehty ja virheellinen ratkaisutapa	Ymmärtää ja välttää tavallisia virheitä
Miksi se toimii?	Kaksi eri oikeaa metodia samaan ongelmaan	Valottaa käsitteellistä taustaa, joka on toisessa metodissa näkyvämpi kuin toisessa
Kuinka ne eroavat?	Kaksi eri ongelmaa, ratkaistu toisiinsa liittyvillä tavoilla	Havainnollistaa, mitä ongelmien ja vastausten suhde paljastaa taustalla olevasta matematiikan käsitteestä

Tutkimuksessa on päädytty kolmeen tärkeään periaatteeseen, joita tarvitaan eri ratkaisutapoja käytettäessä (Yakes & Star, 2011). Kutsun näiden muodostamaa kokonaisuutta *vertailumenetelmäksi* (*Comparison Method*):

1. Vertailtavien eri ratkaisutapojen esittäminen rinnakkain (ei peräkkäin).
2. Vertailukeskustelun käyminen eri ratkaisutavoista, opettajan rooli on keskustelun ohjailu.
3. Samaan ongelmaan useiden ratkaisuiden tuottaminen tai uusien ongelmien luominen annetulla ratkaisutavalla.

Käyttämällä vertailumenetelmää oppilaat voivat paitsi vertailla ratkaisuja, myös keskustella niistä yhdessä ja varioida tehtävää.

Oppilaille voidaan antaa valmiita vertailutehtäviä, mutta heitä voi myös kannustaa itse laskemaan tehtäviä, vertailemaan vieruskaverin kanssa ratkaisutapoja ja miettimään esimerkiksi, onko käytetty samaa vai eriä ratkaisutapaa ja miten ratkaisut eroavat toisistaan. Vertailutehtävät voisivat olla ensimmäinen askel laajemmissa tavoitteissa, joita ovat oppilaan omaan pohdintaan kannustaminen sekä erilaisten ratkaisutapojen löytäminen ja tutkiminen.

2.2.2 Vertailutehtävät aiemmissa tutkimuksissa

Vertailua voi hyödyntää eri tavoin. Eräässä tutkimuksessa Alfieri ja kollegat (2013) tekivät 57 *opetuskokeilusta* (*experiment*) meta-analyysin, jossa todettiin vertailun olevan tehokas keino oppimiseen eri yhteyksissä, joskin oppimistulok-

sisä oli eroa tutkimuksien välillä. Tapauksien samankaltaisuuksien etsiminen, aistisisältöjen käyttäminen, periaatteiden tarjoaminen vertailun jälkeen ja testaus heti vertailun jälkeen liittyivät kaikki lisääntyneeseen oppimiseen (Alfieri, Nokes-Malach & Schunn, 2013). Tärkeää tämän analyysin mukaan on, ettei jäädä vain vertailun tasolle, vaan pohditaan periaatteita, joita vertailun avulla saatiin esille.

Vertailutehtävien käyttöä matematiikassa on tutkittu etenkin Yhdysvalloissa Harvardin yliopiston professorin Jon R. Starin johdolla. Tutkimustulokset vertailun hyödyistä matematiikan oppimisessa ovat olleet erittäin lupaavia, kun Star ja hänen kollegansa ovat tutkineet vertailun käyttöä erityisesti algebran ja yhtälönselvityksen yhteydessä yli vuosikymmenen ajan. He ovat käyttäneet sekä tutkijajärjestelmän opettajavetoisia koeasetteluita (Star ym., 2016). Esittelen seuraavaksi näitä tutkimuksia ja niiden tuloksia.

Rittle-Johnson ja Star (2007) arvioivat 70 seitsemäsluokkalaista kahta vertailutyypistä: samaan tehtävään eri ratkaisutapojen vertailua ja eri tehtäviin saman ratkaisumethodin vertailua. Mukana oli kontrolliryhmä, jossa opiskeltiin tehtäviä peräkkäin ilman vertailua. Oppilaat, jotka käyttivät vertailua, saavuttivat paremmat pisteet sekä proseduraalisessa joustavuudessa että proseduraalisessa tiedossa. Toisessa tutkimuksessa kolmen tunnin yhtälönselvityssessioilla saatiin kehitettyä proseduraalista joustavuutta (Star & Rittle-Johnson, 2008). Puolta ryhmästä kehoitettiin ratkaisemaan yhtälöitä eri tavoin. Tämän ryhmän tieto useista ratkaisutavoista ja niiden käyttö lisääntyivät. Kun toiselle puolelle ryhmästä näytettiin suoraan eri ratkaisutapoja, lisääntyi paitsi tietämys eri ratkaisutavoista myös tehokkaista ratkaisutavoista (Star & Rittle-Johnson, 2008).

Vuoden mittaisessa opetuskokeilussa huomattiin, että vertailutehtävien lisääntyneellä käytöllä oli positiivinen vaikutus oppilaiden proseduraaliseen tietoon (Star, Rittle-Johnson & Durkin, 2016). Vertailun käyttö niin ikään oli kahdessa eri tutkimuksessa yhteydessä sekä joustavuuden että proseduraalisen tiedon kasvuun, ja vertailutehtävien käytön suurempi määrä oli yhteydessä parempiin joustavuustuloksiin (Star, Pollack ym., 2015; Star & Rittle-Johnson, 2008). Jälkimmäisen korkeaan joustavuuteen olivat eräissä tutkimuksissa yhteydessä hyvät esitiedot matematiikassa (Star, Newton ym., 2015). Sukupuoli niin ikään vaikutti, sillä tytöt saavuttivat enemmän joustavuutta. Vaikutti myös siltä, että ne, joilla oli alun perin matala joustavuus, nostivat sitä eniten lisää (Star, Newton ym., 2015).

Pohdin sitten, miten vertailua kannattaa käyttää. Erityyppistä vertailua tutkittiin 162:lla seitsemäs- ja kahdeksäsluokkalaista ja huomattiin, että on väliä, millaista vertailua käyttää. Konseptuaalinen tieto ja proseduraalinen joustavuus kehittyivät parhaiten vertailtaessa samaan tehtävään eri ratkaisutapoja (Rittle-

Johnson & Star, 2009). Muita tutkittuja tapoja olivat samantyyppisten ongelmien ratkaisu samalla ratkaisumenetelmällä ja erilaisten ongelmien ratkaisu käytettävissä samaa ratkaisutapaa. Eräässä tutkimuksessa seitsemäs- ja kahdeksaluokkalaisten (n=236) käyttivät vertailutehtäviä, ja algebran esitietojen havaittiin vaikuttavan siihen, onko oppilas riittävän kypsä käyttämään rinnakkaisten ratkaisutapojen vertailua peräkkäisen vertailun sijaan (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2009).

Durkinin, Rittle-Johnsonin, Starin ja Loehrin (2021) tutkimuksessa selvitettiin, miten 16 opettajan oppilaat pärjäsivät matematiikan testissä käytettyään algebran opiskeluun runsaasti vertailutehtäviä sisältävää materiaalia ja niistä keskustelua (CDMS, ks. Taulukko 1). Verrokkina toimivat 13 opettajaa, jotka käyttivät perinteistä materiaalia. Suurin osa oppilaista oli yhdeksäsluokkalaisia. Vertailutehtäviä käyttäneet oppilaat pärjäsivät paremmin matematiikan jälkitestissä, mikä johtui etenkin heidän suuremmista joustavuuspisteistään (Durkin, Rittle-Johnson, Star & Loehr, 2021).

Vertailutehtävien kohdalla voi tulla mieleen miettiä, kenelle ne soveltuvat. Tutkimusten mukaan ne käyvät yhtälönratkaisun oppimista aloitteleville oppilaille (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012), ja heikoimmat oppilaat kokevat hyötyvänsä niistä (Lynch & Star, 2014b). Ennestään jo tiedetään, että oppilaat ylipäänsä hyötyvät vertailutehtävistä (esim. Star, Pollack ym., 2015), joten vertailutehtävistä vaikuttaa olevan hyötyä kaikenlaisille oppilaille. Toisaalta lahjakkaatkaan oppilaat eivät välttämättä valitse sopivinta strategiaa, vaikka tietäisivät sen (Newton, Star & Lynch, 2010; Star & Newton, 2009). Tämän pohjalta myös lahjakkaiden voisi ajatella hyötyvän vertailutehtävistä, sillä he voisivat oppia valitsemaan tehokkaimman tavan. Tästä voidaan lisäksi päätellä, että joustavuus ei välttämättä tule aina ilmi testeissä, jos oppilaat eivät esitä kykyään valita sopivin strategia.

On tutkittu jonkin verran sitä, miten tehtävien oikeellisuus ja joustavuus liittyvät toisiinsa. Heinze, Star ja Verschaffel (2009) totesivat, että joustavuus ja adaptiivisuus mahdollistavat tehtävien nopean ja oikean ratkaisemisen. Kiinalaisten kohdalla kuitenkin selvitettiin, että yhtälönratkaisun joustavuus ei korreloi oikeellisuuden kanssa eli ne, jotka ratkaisevat paljon tehtäviä oikein, eivät välttämättä ole joustavia (Star & Seifert, 2006; Xu ym., 2017). Nopeutta ja oikeellisuutta joustavuuden yhteydessä olisi kuitenkin tarve tutkia vielä lisää.

Tutkimme tutkimusryhmämme kanssa 149:ää suomalaista lukiolaista, jotka tekivät joustavuustestin (samat oppilaat kuin lukiolaiset Artikkelissa I) sekä heidän tuloksiaan 1–2 vuotta myöhemmin suoritettussa ylioppilaskokeessa. Jos huomioitiin oikeellisuuden vaikutusta ja sitä, että proseduraalisesti joustavat henkilöt kirjoittivat aineita enemmän, eivät pitkän matematiikan arvosana ja fysiikan arvo-

sana olleet yhteydessä joustavuuteen. Tuloksista havaittiin, että vain lyhyen matematiikan arvosana ja kemian arvosana liittyivät joustavuuteen (Hästö, Palkki, Tuomela & Star, 2019). Tutkimuksessa ei selvinnyt juuri uutta tietoa joustavuuden oppimisesta, joten joustavuuden ja muun koulumenestyksen yhteyttä tulisi tutkia lisää.

Yhteenvedona päättelen, että vertailutehtävät vaikuttavat kehittävän maattisen tiedon eri lajeja, joten niiden käyttö on erittäin hyödyllistä matematiikan oppimiselle.

2.2.3 Vertailutehtävien tarpeellisuus ja toimivuus

Pohdin seuraavaksi, miksi vertailutehtäviä tarvitaan ja miksi ne ovat hyödyllisiä ja toimivia. Useiden ratkaisutapojen käyttö ei ole itsestäänselvyys koulumatematiikassa. Oppilaat nimittäin helposti ajattelevat, että tehtäviä voi ratkaista vain yhdellä, opettajan esittämällä ratkaisutavalla (Schoenfeld, 1992). Oppilaat eivät näin ollen ole välttämättä tottuneet useiden ratkaisutapojen käyttöön. Tosin tämän toteava tutkimus on melko vanha, joten uskomukset ovat voineet muuttua. Kuitenkaan perinteisissä oppikirjojen tehtävissä ei useita ratkaisutapoja juuri ole esitetty.

Vertailutehtävillä voidaan kehittää matematiikan osaamista, kuten useissa edellisessä luvussa mainituissa tutkimuksissa todettiin. Oppilailla tulee olla joustavuutta, jotta he voivat ymmärtää toteuttamiaan manipulaatioita (Hiebert & Carpenter, 1992). Joustavuus siis liittyy ymmärtämiseen, jonka merkitystä matematiikan oppimiselle ei voi korostaa liikaa. Joustavuus ja sitä kehittävät vertailutehtävät vaikuttavat tältäkin kannalta katsottuna erittäin tarpeellisilta opiskella.

Ongelmanratkaisijalle on muiden seikkojen ohella tärkeää, että hän osaa käyttää eri ratkaisutapoja (Guberman & Leikin, 2013). Vertailutehtävillä pyritään lisäämään oppilaiden joustavuutta ja siten luomaan valmiuksia ratkaista perusrutiineista poikkeavia ongelmatehtäviä. Joustavuuden oppimisen voidaankin nähdä olevan yksi askel ongelmanratkaisun oppimiseen (Star & Rittle-Johnson, 2008). Osataksaan ratkaista vaativia ongelmia, tulee oppilaan osata muodostaa erilaisia mahdollisia ratkaisutapoja ja valita niistä soveltuvien. Jo lineaarisen yhtälönratkaisunkin yhteydessä voidaan harjoittaa joustavuutta ja samalla ikään kuin suljetuissa olosuhteissa ongelmanratkaisua. Lopulta tavoitteena kuitenkin on joustavuuden käyttäminen tuottamalla itse eri ratkaisutapoja ja valitsemalla niistä tehtävään sopivin eikä niinkään vertailutehtävien käyttö sinänsä.

Vertailutehtävien kautta opitaan perustelu- ja keskustelutaitoja. Vertailutehtävät ikään kuin pakottavat oppilaat keskustelemaan, sillä heidän ei tämän tyyppisissä tehtävissä tarvitse laskea itse. Sen sijaan he joutuvat perustelemaan ja pohtimaan ratkaisutapoja sekä vertaamaan niitä keskenään annettujen kysymysten avulla. Tämä lähtökohta tulee suoraan tehtävänasettelusta. On syytä olettaa, että myös yksin vertailutehtäviä tehdessä joutuu perusteluihin kiinnittämään runsaasti huomiota.

Vertailutehtävien käyttöön liittyy siis yleensä oleellisesti *vertailukeskustelun* käyminen. Se tarkoittaa ratkaisusta keskustelua, jota opettaja voi tarvittaessa hienovaraisesti ohjailta. Oppilaiden yhteistyötä pidetään laajalti tärkeänä matematiikan oppimisen keinona (Opetushallitus, 2014; Star & Kokka, 2013). Siirryttäessä kenties aiempaa keskustelevampaan opetukseen on tarpeen muun muassa huomioida luokkahuoneen sosiaalisia ja sosiomatemattisia normeja, joista voi neuvotella yhdessä luokan kanssa (Fukawa-Connelly, 2012; Partanen, 2011; Yackel & Cobb, 1996).

Pohdin seuraavaksi, miksi vertailutehtävät toimivat *kognitiivisen kuorman teorian* (*cognitive load theory*; Sweller, 2011) näkökulmasta. Voidaan puhua *työstetty esimerkki -efektistä* (*worked example effect*), mikä tarkoittaa sitä, että oppilas oppii enemmän tutkimalla ongelmaa ja sen ratkaisua kuin varsinaisesti ratkaisemalla ongelman, sillä tällöin työmuistin kuorma vähenee (Sweller, 2011). Vertailutehtävät ovat hyvä oppimisen työkalu kognitiivisen kuorman tarkastelun kannalta. Swellerin (2011) mukaan työstettyjen esimerkkien käyttäminen on ylivertainen tapa ongelmanratkaisun oppimiseen, mutta vain jos *asiaankuulumatonta kognitiivista kuormaa* (*extraneous cognitive load*) vähennetään. Tämä kuorma tarkoittaa prosessointia, joka ei tue opetuksellisia päämääriä, vaan päinvastoin johtuu esimerkiksi huonosta suunnittelusta tai siitä, että muut kuin asiaankuuluvat prosessit vievät voimavaroja. On siis tärkeää suunnitella tehtäviä siten, että keskitytään laittamaan niihin juuri oleelliset asiat. Kognitiivisen kuorman teoriassa puhutaan *luontaisesta kognitiivisesta kuormasta* (*intrinsic cognitive load*), jolla viitataan oppimisen monimutkaiseen sisältöön, joka edelleen on yhteydessä oppijan esitietoihin (Große & Renkl, 2007; Sweller 2011). Kolmas kognitiivisen kuorman komponentti on *oleellinen kognitiivinen kuorma* (*germane cognitive load*), jolla tarkoitetaan opiskelijan oppimista edistäviä kognitiivisia resursseja (Große & Renkl, 2007). Kognitiivisen kuorman teoria on laajalti hyväksi havaittu teoria, joskin sen toimivuutta on myös kyseenalaistettu (Moreno, 2006).

Jos verrataan työstettyjä esimerkkejä vertailutehtäviin, voidaan havaita, että niissä on paljon samaa, onhan vertailutehtävissä kaksi työstettyä esimerkkiä rin-

nakkain. Työstetyissä esimerkeissä pyritään ongelmanratkaisutaitojen opettamiseen (Moreno, 2006), kuten ajattelisin olevan tavoite vertailutehtävissäkin. Kuitenkin herää ajatus, voiko kaksi esimerkkiä tuoda jo liikaa kognitiivista kuormaa, varsinkin kun niihin liittyy vielä kysymyksiä. Toisaalta kuorman suuruutta vähentää se, että tehtäviä ohjataan käsittelemään kysymys kerrallaan ja ensimmäinen osatehtävä on vaikkapa esimerkkien läpi lukeminen ja samankaltaisuuksien etsiminen. Oleellista kognitiivista kuormaa voidaan siis säädellä tehtävän sisällä.

2.2.4 Opettajien käsitykset ja vertailutehtävät

Vertailutehtävien käytössä on huomioitava materiaalin ja oppilaiden lisäksi tehtäviä käyttävään opettajaan liittyviä seikkoja. Etenkin opettajan käsitykset ja uskomukset ovat oleellisia.

Käsityksiä tutkitaan muun muassa fenomenografiassa, joka on eräs laadullisen tutkimuksen tutkimussuuntaus (Marton, 1988). Käsitykset ajatellaan ”merkityksenantoprosesseina” (Huusko & Paloniemi, 2006). Käsitykset siis kuvastavat sitä, millaisia merkityksiä ihmiset antavat asioille. Käsityksissä mennään pelkkien mielipiteiden tutkimista syvemmälle (Huusko & Paloniemi, 2006). Termejä käsitykset, ajatukset ja näkemykset käytetään matematiikan opetuksen tutkimuksessa aika lailla rinnakkain, eikä tässä mennä tarkemmin näiden termien eroihin.

Opettajien valmiutta useiden ratkaisutapojen käytölle ja niiden mahdollisesti tuottamille avoimille vastauksille on Bingolbalin (2011) mukaan tutkittu niukasti. Hänen tutkimuksessaan 500 turkkilaisopettajaa koki, etteivät ole valmiita useiden ratkaisutapojen käyttöön ja että heillä on vaikeuksia oppilaiden avoimiin kysymyksiin vastaamisessa ja arvioimisessa (Bingolbali, 2011). Opettajat siis ovat huolissaan tällaisen lähestymistavan käytöstä ja epävarmoja oman osaamisensa suhteen. Toki tässä kyselyssä selvitetty lähestymistapa vaikuttaa olleen avoimempi kuin vertailutehtävissä, joissa esimerkkien analysointiin on valmiit kysymyspohjat, joskin oppilaiden vastaukset niihin voivat vaihdella.

Opettajien käsityksiä vertailutehtävien käytöstä on selvitetty yhdysvaltalais-tutkimuksissa. Opettajien näkemyksiä eri ratkaisutapojen käytöstä selvitettiin haastattelujen ja kyselyiden avulla (Lynch & Star, 2014a). Opettajat näkivät useita mahdollisuuksia, mutta myös käyttöä estäviä seikkoja. Hyvinä puolina sille, että käytetään eri ratkaisutapoja, opettajat näkivät mahdollisuuden huomioida yksilölliset erot, mahdollisuuden kehittää matemaattista ymmärtämistä, onnistumisen mahdollisuuden lisäämisen oppilaalle sopivan menetelmän löytymisen myötä, affektiiviset ja motivaatioseikat (esimerkiksi kyllästymisen ja turhautumisen tun-

teen väheneminen) ja tehokkuuden lisääntymisen. Negatiivisina puolina nähtiin motivaation huononeminen ja affektiiviset tekijät, oppilaiden vastustus, oppilaiden uskomukset matematiikasta (tehtävän ratkaisuun on olemassa vain yksi oikea tapa), opettajan tiedon rajat, fyysisten resurssien rajat, lisähaasteet opettajan työhön ja opettajalta puuttuvat tiedot useista ratkaisutavoista (Lynch & Star, 2014a). Opettajien käsityksiä tuli ilmi melko suuri variaatio. Myönteisiä puolia useiden ratkaisutapojen käytölle nähtiin paljon. Mielenkiintoista oli, että affektiiviset ja motivaatioseikat tulivat esiin sekä negatiivisina että positiivisina puolina. Haasteita opettajien tiedoissa ja työssä nähtiin jonkin verran.

Edellinen tutkimus käsitteli useisiin ratkaisutapoihin liittyviä opettajan näkemyksiä. Kun tähän lisätään vertailu, voidaan puhua vertailumenetelmän käytöstä. Tätä tutkittiin opettajien näkökulmasta myös Yhdysvalloissa. Tutkimuksessa todettiin, että menetelmän menestyksekkäs soveltaminen edellyttää opettajan omaa matemaattista joustavuutta ja tietoa vertailun käytöstä (Yakes & Star, 2011). Eräässä kokeilussa 24 opettajaa sai päivän täydennyskoulutuksen useiden ratkaisutapojen (vertailumenetelmän) käytöstä sisältäen esittelyn aiheesta ja matematiikan tehtävien tekemistä. Lisäksi opettajat refleктоivat oppimaansa neljän ja yhdeksän kuukauden päästä sekä käyttivät menetelmää työssään ja kävivät ryhmäkeskustelun. Opettajat kokivat ymmärtävänsä paremmin useiden ratkaisujen vertailua ja sen oppilaille tuomaa joustavuutta. He näkivät hyötyinä sen, että oppilaat voivat miettiä laaja-alaisemmin, oppia selittämään ja puolustamaan omaa ajatteluaan ja tarkistaa ratkaisun. Haasteina opettajat näkivät sen, että opettajan oli vaikea keskustella oppilaiden kanssa luennoimisen sijaan, opettaja valitsi itse yhden ratkaisutavan ja opettajat pelkäsivät useamman ratkaisutavan voivan sekoittaa oppilaita (Yakes & Star, 2011).

Verrattuna edelliseen tutkimukseen opettajat olivat tässä saaneet täydennyskoulutusta vertailun käytöstä ja tuntuivat sisäistävän sen idean siten, että pystyivät käyttämään vertailua menestyksekkäästi. Joitain haasteita käytössä tuli ilmi, esimerkiksi opettajat olivat tottuneet itse valitsemaan parhaaksi kokemansa ratkaisutavan ja pelkäsivät oppilaiden ajatusten sekoittuvan. Ajatusten sekoittuminen kuulostaa tyypilliseltä asialta, joka opettajille tulee mieleen uuden opetusmenetelmän kohdalla ja etenkin nyt, kun oppilaille tarjoillaan kerralla enemmän tietoa (useita ratkaisutapoja) kuin perinteisillä oppitunneilla.

Kolmen aiemman tutkimuksen lisäksi on tutkittu suoraan vertailutehtävien käyttöä. Opettajat käyttivät vertailutehtäviä (141 algebran tehtävän paketti) vuoden mittaisessa kokeilussa kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisille oppilaille (Star, Newton ym., 2015). Tutkimuksessa selvitettiin muun muassa, millaiset opettajien

käyttämät kysymystyypit olivat yhteydessä joustavuuteen. Saatiin selville, että opettajat, joiden oppilaat saavuttivat korkeat joustavuuspisteet, kysyivät useammin avoimia kysymyksiä kuin ne opettajat, joiden oppilailla pisteet jäivät matalammiksi (Star, Newton ym., 2015). Avoimia kysymyksiä käyttäneet opettajat saivat mahdollisesti aikaan syvällisempiä joustavuuskeskusteluja. Kuitenkin opettajilla oli vaikeuksia saada oppilaita mukaan keskusteluihin (Star, Pollack ym., 2015). Vuoden opetuskokeilussa havaittiin lisäksi, että opettajilla oli hankaluuksia sisällyttää vertailutehtäviä kurssillensa, sillä he käyttivät niitä paljon harvemmin kuin oli tarkoitettu (Star, Pollack ym., 2015). Vertailutehtävien käyttöön selvästi sisältyy niin haasteita kuin mahdollisuksiakin opettajan näkökulmasta katsottuna. Starin, Newtonin ja kollegoiden (2015) kysymystyyppien luokittelu opettajien oppituntiaineiston koodausta varten pohjautui Taylorin ja Starin (2011) luokitteluun, jota he olivat kehittäneet edelleen. Kysymystyypit on esitetty Taulukossa 3. Voisi pohtia myös muiden kysymystyyppien merkitystä, esimerkiksi sitä, ovatko ne yhteydessä laadukkaampaan vertailutehtävien käyttöön.

Taulukko 3. Starin, Newtonin ja kollegoiden (2015) luokittelu opettajien käyttämistä kysymystyypeistä (Muokattu Artikkelista IV).

Taso	Kysymys- tyyppi	Esimerkki	Tarkoitus
Taso 1	Avoin	"Haluaako joku kommentoida tätä ideaa?"	Oppilaille mahdollisuus jakaa ideoitaan, kehittää niitä edelleen, kritisoida muiden ideoita tai osoittaa algebrallista ajattelua (esim. yleistää).
Taso 2	Miksi	"Miksi hänen ratkaisutapansa on parempi?"	Käsitteellinen ymmärrys, kuten miksi ratkaisu on oikea ja miksi tietty ratkaisumetodi ehkä olisi ollut parempi valinta.
Taso 3	Miten	"Miten sait tämän?"	Proseduraalinen ymmärrys, kuten miten ratkaista tehtävä, miten käyttää tiettyä sääntöä tai kaavaa ja miten sieventää lauseke.
Taso 4	Mitä	"Mikä on tämän nimi?"	Selventävä informaatio, kuten erityisesti sanasto ja kaavat tai yksinkertaisen vastauksen selvittäminen.
Taso 5	Retorinen /valinta	"Onko vastaus 3?"	Sisältöön liittyvien kyllä- ja ei-vastauksen selville saaminen tai vaihtoehdon tarjoaminen. Ei tarjoa aitoa mahdollisuutta osallistaa oppilaita kysymyksellä.
Taso 6	Logisti- nen/hal- linta	"Miksi on seuraava kysymys?"	Keskittyy logistisiin huoliin kuten osoittamaan oppilaille kysymyksen tai sivunumeron tai hallinnallisiin huoliin kuten oppilaan käytökseen tai materiaalin jakamiseen.

2.3 Virheet ja tarkoitukselliset virheet matematiikan opetuksessa

Määrittelen aluksi, mitä virheillä tarkoitetaan matematiikassa ja pohdin sitten virheistä oppimista sekä virheiden toimivuutta ja merkitystä. Tämän jälkeen määrittelen tarkoitukselliset virheet ja tutustun niihin liittyvään tutkimukseen sekä pohdin opettajien suhtautumista virheisiin ja tarkoituksellisiin virheisiin.

2.3.1 Virheen määritelmä matematiikassa

Virheitä voi olla monenlaisia ja ne voivat syntyä monista eri syistä. Kukaan ei haluaisi tehdä virheitä, mutta niitä tulee väistämättä eteen, vaikka niitä kuinka välttelisi. Määrittelen aluksi, mitä virheellä tarkoitetaan ja pohdin sitten, mistä ne voivat olla peräisin ja millaiset virheet ovat mielenkiintoisia.

Matematiikan oppimisessa *virheillä* (*errors*, laajempi määritelmä) tarkoitetaan laajasti ottaen virheellisiä vastauksia, virheellisiä ratkaisuja, lipsahduksia ja taustalla olevia virhekäsityksiä (Olivier, 1992; Santagata & Bray, 2015). Käytän jatkossa virheistä tätä laajaa määritelmää. Tällaisten virheiden luonnollisuutta voi korostaa kutsumalla niitä *spontaaneiksi virheiksi*, kuten olemme tehneet artikkelissa III. Tämä nimitys erottaa luonnollisesti esiin tulevat virheet tarkoituksellisista virheistä, jotka määritellään myöhemmin.

On olemassa erityyppisiä virheitä, esimerkiksi huolimattomuudesta tai käsitteellisestä väärinymmärryksestä johtuvia. *Huolimattomuusvirheet* (*slips*) on helpo korjata (Olivier, 1992), mutta muuntyyppisistä virheistä voi olla vaikea päästä eroon. *Virheet tai virhekäsitykset* (*errors*, suppeampi määritelmä) ovat ”systemaattisia, sitkeitä ja kokonaisvaltaisia erehdyksiä” (Brodie, 2014). Virhekäsitykset siis ovat hyvin perustavanlaatuisia ja lujaan juurtuneita, joten niitä voi olla vaikea käsitellä.

On tutkittu, millaisia erilaisia virheitä esiintyy. Esimerkiksi matemaattisten symbolien, kuvaajien ja ongelmanratkaisun yhteydessä tutkittiin virhetyyppejä (Velloo, Krishnasamy & Wan Abdullah, 2015). Tässä selvisi, että 57 % virheistä oli konseptuaalisesta ymmärryksestä johtuvia, 24 % huolimattomuudesta johtuvia, 13 % ongelmanratkaisuvirheitä ja 6 % arvoista johtuvia. Virheiden syynä olivat ymmärtämisen puute, proseduurien unohtaminen, tehtävänannon kopioimiseen liittyvä hutiloiminen, huolimattomuus ja arvailu (Velloo ym., 2015). Virheet voivat siis juontua erilaisista lähteistä. Konseptuaalinen ymmärrys on tärkeä osa matematiikkaa, ja siten siitä johtuvat virheet ovat merkityksellisiä. Puolestaan funktioiden opiskelussa virheiden taustalla voivat olla konseptuaalisen tiedon puute,

muistamiseen perustuva oppiminen tai se, etteivät oppilaat ole valmiita aiheeseen (Başibüyük, Şahin, Gökkurt, Erdem & Soylu, 2016). Virheiden syntyyn vaikuttavat siis useat eri seikat.

Matematiikassa kaikilla esiintyy virheitä riippumatta oppilaan iästä, kyvykkydestä tai asuinpaikasta (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Virheisiin ei voi olla törmäämättä. Arkikokemuksenkin pohjalta tiedetään, että kaikki tekevät virheitä joskus, mutta mistä virheet oikein johtuvat? Kyproslaiset alakouluopettajat (n=254) näkivät oppilaiden matematiikan virheiden taustalla erilaisia syitä, joista voitiin luokitella neljä pääkategoriaa: oppilaan ominaisuudet, opettajan rooli, matemaattinen tieto ja matematiikan luokkahuoneen säännöt (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Ensimmäiseen kategoriaan liittyi ajatus, että virheet johtuvat kiinnostuksen tai valmistautumisen puutteesta. Toinen kategoria viittaa opettajien mahdollisuuteen saada oppilaansa välttämään virheitä. Kolmas kategoria liittyy siihen, että virhe nähdään esteenä (obstacle). Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että desimaalilukujen oppimisen esteenä on luonnollisiin lukuihin liittyvän tiedon yliyleistäminen. Neljäs kategoria liittyy *didaktiseen sopimukseen (didactic contract)*, jolla viitataan oppilaiden ja opettajan vuorovaikutukseen suhteessa tarvittavaan tietoon (Gagatsis & Kyriakides, 2000). On mielenkiintoista, ettei virheitä nähdä pelkästään oppilaasta johtuviksi, vaan niin opettajalla, oppiaineella, tiedon rakenteella kuin toimintatavoillakin on osansa.

Virheiden synnyn kannalta mielenkiintoisia ovat nimenomaan väärinkäsitykset, sillä ne paljastavat jotain syvempää ymmärtämisestä ja osaamisesta. Eräs väärinkäsitysten lähde on aiemman tiedon yliyleistäminen uudessa yhteydessä (Smith III, DiSessa & Roschelle, 1994). Tätä ilmiötä rationaalilukujen kohdalla kuvaa termi *luonnollisten lukujen ennakoasenne (natural number bias)*, jossa luonnollisia lukuja koskevat ominaisuudet virheellisesti laajennetaan koskemaan rationaalilukuja (Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & Van Dooren, 2013). Matematiikan oppija voi esimerkiksi kuvitella, että $\frac{1}{4}$ on suurempi kuin $\frac{1}{3}$, sillä hän yrittää soveltaa luonnollisille luvuille oppimiaan tietoja murtolukujen kohdalla. Voidaan myös luulla, että 0,25 on suurempi kuin 0,4. Yhtälönratkaisussa puolestaan virheitä voivat aiheuttaa esimerkiksi yhtäsuuruusmerkin tai miinusmerkin ymmärtäminen väärin (Booth & Koendinger, 2008).

2.3.2 Virheistä oppiminen

Virheet nähdään usein häiriötekijöinä, mutta niitä voi hyödyntää matematiikan oppimisessa positiivisella tavalla. Tässä alaluvussa esittelen virheisiin liittyvää aiempaa tutkimusta.

Matematiikan oppimisen tutkimuksessa virheet nähtiin vuosikymmeniä sitten negatiivisena, sekaannusta aiheuttavana asiana, joita tulisi välttää (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Nähdäkseni tämä käsitys vaikuttaa elävän yhäkin jossain määrin. Jo Piaget'n työstä lähtien virheiden tekeminen on kuitenkin tutkijoiden parissa nähty positiivisena asiana (Gagatsis & Kyriakides, 2000). McNallyn (1974) mukaan Piaget uskoi yksilön kehittyvän progressiivisesti luopumalla virheellisistä ideoista oikeiden edessä tai tarkemmin muuttavan epäsopivat ideat korkeammalle tasolle sopiviksi käsityksiksi. Piaget näki adaptaation taustalla kaksi täydentävää aspektia, assimilaation ja akkomodaation. *Assimilaatiossa* ollaan tekemisissä ympäristön kanssa senhetkisten kognitiivisten rakenteiden, skeemojen, kautta. *Akkomodaatiossa* sisäisten mallien tulee muuttua, kun kohdataan ulkoinen ristiriita (McNally, 1974). Akkomodaatio voi tarkoittaa virheistä oppimista, sillä virheellinen malli muuttuu oikeaksi tai oikeammaksi. Se voi myös tarkoittaa sitä, että opettaja esittää oikean ratkaisun, mutta erilaisen kuin oppija ajatteli. Akkomodaation avulla voi esimerkiksi korjata virheellistä aiempaa käsitystä uuden skeeman mukaiseksi. Tämän vuoksi virheet opettavat. Joskus virheistä oppiminen voi puolestaan olla assimilaation avulla oppimista, kun senhetkinen virheellinen rakenne korjataan.

Virheiden hyödyistä oppimisessa löytyy useita tutkimuksia. Niiden sanotaan tarjoavan ponnahduslaudan oppimiselle (Borasi, 1994). Kaikki meistä tekevät virheitä, joten virheistä oppiminen on erittäin tärkeä taito oppia. Virheet paljastavat oppilaan päättelyn ja mahdollistavat sitä kautta oppimisen (Brodie, 2014; Santagata & Bray, 2015). Virheiden avulla nähdään, missä kohtaa oppimisprosessia ollaan menossa. Virheet voidaan käsittää todella tärkeänä keinona edistää oppimista. Ajattelen, että jos ei löydä rajojaan, ei myöskään voi kehittyä. Virheitä onkin esitetty matematiikan opetuksen lähtökohdaksi (Schleppenbach, Flevaris, Sims & Perry, 2007).

Aivotutkimus on ottanut kantaa virheistä oppimiseen. Aivot ovat oppimisen peruslähtökohta, ja oppiminen muuttaa aivojen rakennetta (National Research Council, 2000). Aivot ovat siis joustavia ja muuttuvia. Ihminen oppii ja aivot oppivat. Rottakokeessa pelkkä liikunta ei lisännyt synapsien välisiä yhteyksiä, vaan tähän vaadittiin oppimista (National Research Council, 2000). Uuden opis-

kelu on hyväksi aivoille, joten sitä kannattaisi harjoittaa. Miten virheet sitten vaikuttavat aivoihin? Ihmisten reagointi virheisiin riippuu heidän oppimiseen ja älykkyyteen liittyvistä uskomuksistaan: ne, jotka uskovat, että älykkyyttä ei voi kehittää, pärjäävät virheen jälkeen heikommin kuin ne, jotka uskovat, että älykkyyttä voi lisätä (Moser, Schroder, Heeter, Moran & Lee, 2011). Jos siis usko voivansa oppia virheistä, oppii paremmin. Itse asiassa virheiden tekeminen saa aivosolujen synapsit reagoimaan huolimatta edes siitä, huomaako tekijä itse virheensä (Moser ym., 2011). Aivot siis reagoivat virheisiin jopa paremmin kuin me itse. Haasteiden kanssa ponnisteleminen vaikuttaa aivoihin hyvin mielenkiintoisella tavalla.

Virheistä oppimiseen vaikuttavat älykkyyden kokemisen lisäksi muutkin seikat. Virheiden tekemisestä esimerkiksi rangaistaan kokeessa. Ei ihme, että virheitä pelätään. Tulis ja kollegat (2017) tutkivat 614:ta oppilasta matematiikan, saksan ja englannin oppitunneilla. He saivat selville, että jos oppijalla on positiivisia uskomuksia virheistä oppimisesta, hän todennäköisemmin analysoi ja korjaa virheensä (Tulis, Steuer & Dresel, 2017). Olisi siis tärkeä huomioda, mitä oppilas ajattelee virheistä oppimisesta. Uskomuksia tulisi näiden tutkimusten pohjalta pyrkiä muokkaamaan virheitä salliviksi sekä rakentaviksi virheistä oppimista kohtaan.

Virheistä oppiminen koulussa on mutkikas prosessi, johon vaikuttavat useat eri seikat. Käsittelen nyt virheiden taustalla olevaa oppimiskäsitystä, virheisiin tarvittavaa tukea, negatiivista tietoa ja oppimisympäristöä.

Nykyajan tietotaloudessa pelkkä faktojen ja proseduurien muistelu ei riitä (Sawyer, 2014). Virheistä oppiminen tulee nähdäkseni entistä tärkeämmäksi taidoksi, sillä käsitteelliset virheet tulevat paremmin ilmi, kun opiskelu ei ole vain muistamista. On tärkeää kohdata virhe ja pohtia, mitä sen taustalla on. Kun ilmenee virhe, siihen reagoidaan. Tapahtuu akkomodaatiota, jossa kohdataan ulkoinen ristiriita, ja tämän seurauksena sisäinen malli muuttuu (McNally, 1974). Siten virheistä opitaan.

Virheitä ei tulisi yrittääkään väistää, sillä niitä välttämättä esiintyy – ovathan ne joka paikassa näkyvä ilmiö (Gagatsis & Kyriakides, 2000; Smith III, DiSessa & Roschelle, 1994). Virheisiin tulisi antaa scaffolding-tyyppistä, rakentavaa ja reagoivaa tukea (Wischgoll, Pauli & Reusser, 2015). Virheiden kohdalla huomioitaisiin siis oppilaan senhetkinen taso sellaisella tuella, jonka on tarkoitus vähentyä ajan myötä. Lisäksi virheistä oppimisessa tarvitaan kognitiivisia ja metakognitiivisia prosesseja (Tulis ym., 2017), joita tulisi siis kehittää, jotta virheistä saataisiin

mahdollisimman suuri hyöty irti. Lisäksi lasten virheisiin kohdistuva muisti vaikuttaa olevan rajoitettu (Loehr, Fasio & Rittle-Johnson, 2020).

Negatiivinen tieto (negative knowledge) tarkoittaa tietoa siitä, mikä ei toimi (Gartmeier, Bauer, Gruber & Heid, 2008). Negatiivista tietoa tarvitaan varmuuden lisäämiseen, tehokkuuden nostamiseen ja toiminnan reflektion aikaansaamiseen (Gartmeier ym., 2008). Virheistä oppimisen voisi näin ollen mielestäni nähdä osana negatiivisen tiedon kasvattamista. Asiantuntijakin tarvitsee negatiivista tietoa ja virheistä oppimista (Gartmeier ym., 2008). Negatiivisen tiedon käsitteen myötä päästään kiinni keinoon, jolla välttää virheitä: tietämällä, mikä on väärin. Negatiivinen tieto voidaan mielestäni nähdä eräänä asiantuntijuuden muotona. Negatiivisessa tiedossa asiantuntijuus näyttäytyy uudella tavalla: puutteiden tiedostamisena ja virheiden kohtaamisena. Näin virheistä oppiminen liittyy tiedon hankkimisen näkemiseen uudella tavalla. Virheet kasvattavat negatiivista tietoa, ainakin jos kiinnitetään huomiota siihen, miksi virhe tehtiin. Kaikkien virheiden kohdalla näin ei kuitenkaan ole, vaan huolimattomuusvirheet ovat kohtalaisen erilainen asia kuin käsitteelliset virheet.

Virheistä oppiessa on tarpeen pohtia, millaisessa ympäristössä opiskellaan. Tehokas oppimisympäristö koostuu useista eri asioista. Nykytietämyksen mukaan tärkeitä ovat *oppilaskeskeisyys (learner centered)*, *tietokeskeisyys (knowledge centered)*, *arviokeskeisyys (assessment centered)* ja *yhteisökeskeisyys (community centered)* (National Research Council, 2000). Virheistä oppimiseen vaikuttaa tämän lisäksi niin sanottu *virheilmapiiiri (error climate)*, jonka määritelmässä Steuer, Rosentritt-Brunn ja Dresel (2013) viittaavat Oseriin ja Spytchigeriin (2005). Heidän mukaansa virheilmapiiirillä kuvataan laajuutta ja laatua, jolla ympäristö tukee ja vaikeuttaa virheistä oppimista. Ilmapiiirissä siis huomioidaan myös ympäristön, esimerkiksi koululuokan, virheisiin suhtautuminen. Virheilmapiiirin huomioiminen mahdollistaa lisäymmärryksen saamisen oppilaiden virheitä ja epäonnistumisia seuraavista reaktioista (Steuer, Rosentritt-Brunn & Dresel, 2013), ja virheilmapiiiri voi parhaimmillaan tukea oppilaan opiskelumotivaatiota (O' Dell, 2015).

Oppimisympäristössä tulisi muistaa myös keskustelu. Virheistä voi oppia varsinkin, jos virheet hyödynnetään ja niistä keskustellaan (Steuer & Dresel, 2015). Nähdäkseni myös virheet voivat tulla paremmin ilmi, kun oppilas kertoo enemmän ajattelustaan. Tehokas oppimisympäristö, joka huomioi virheet, voisi olla mielestäni ihanteellinen tapa oppia. Virheet ja virhekäsitykset tulisi ottaa osaksi oppimisprosessia. Toisaalta myös on selvitetty, että oppilaat siirtyvät helposti takaisin virhekäsityksiinsä esimerkiksi testin jälkeen, jos oppimisessa ei ole huo-

mioitu esitietoja (Bransford, Brown & Cocking, 2000; Sawyer, 2014). Virheet tulisi siis ehdottomasti huomioida oppimisessa.

Miten virheistä oppiminen oikein tapahtuu? Tein neljävuotiaan lapseni kanssa päättelytehtävää. Kirjassa oli avaimen kuva, ja sama avain piti löytää viiden avaimen varjokuvan joukosta. Lapsi valitsi ensin väärän avaimen. Hän ei osannut vastata ”miksi”-kysymykseen, joten kiinnitin huomion avaimenpään muotoon kysyen, minkä muotoinen se on. Tämän jälkeen hän tiesi oikean vastauksen. Mitä voidaan olettaa, että hän oppi? Hän oppi mahdollisesti, että kannattaa katsoa avaimen reiän muotoa. Jos jatketaan kuvittelua, voidaan miettiä, mitä tapahtuisi, jos häneltä kysyttäisiin samaa tehtävää uudelleen. Todennäköisesti hän vastaisi oikein, mutta perustuisiko tämä vain muistiin? Jotta hän todella olisi oppinut virheestään, tulisi hänen osata soveltaa tietoa ainakin hiukan erityyppisessä tehtävässä eli tarvitaan transfer-vaikutusta (Byrnes, 1996; National Research Council, 2000). *Transferilla* tarkoitetaan kykyä laajentaa vanhassa kontekstissa opittu asia uuteen kontekstiin (Byrnes, 1996). Virheistä oppimiseen ei näin mielestäni riitä rutiininomainen opiskelu, vaan virheistä oppimisen täytyy ulottua ajatteluntaitojen opetteluun.

Virheisiin liittyvää tutkimusta matematiikan parissa on tehty Suomessa hyvin vähän. Leppäahon (2007) esittelemässä ratkaisukarttametodissa virheitä ei pyyhitä, vaan ne jäävät osaksi oppimisprosessia. Tämän voisi ajatella vähentävän virheisiin liittyviä negatiivisia asenteita. Suomalaisessa pitkittäistutkimuksessa puolestaan on havaittu matematiikan huolimattomuusvirheiden lisääntyneen tultaessa 1980-luvulta 2000-luvulle (Näveri, 2009). Näveri (2009, s. 108) ehdottaa, että syy tähän on ”muistinvarainen, mekaaninen, visualisuuteen perustuva laskeminen” eikä luvuilla laskemisen heikkeneminen. Vaikuttaa siltä, että oppilaat painottavat mekaanista laskutaitoa ja tekevät aiempaa helpommin virheitä.

Virheitä ja niiden kohtaamista on maailmalla tutkittu monesta muustakin näkökulmasta, joita en nyt tässä käsittele tarkemmin. On kiinnitetty huomiota muun muassa tyypillisiin virhekäsityksiin (Nesher, 1987; Smith III ym., 1994), opettajan virheisiin liittyvään tietoon (Peng & Luo, 2009) ja opettajien virheisiin reagoimiseen (Kersting, Givvin, Thompson, Santagata & Stigler, 2012; Schleppebach, Flevares, Sims & Perry, 2007).

2.3.3 Tarkoituksellisen virheen määritelmä

Virheitä voidaan käyttää opetuksessa sijoittamalla virhe tarkoituksella laskutehtävään tai esimerkkiin. Kyse on pedagogisesta keinosta, jolla pyritään edistämään matematiikan oppimista.

Durkin ja Rittle-Johnson (2012) ovat käyttäneet termiä *väärin tehty esimerkki* (*incorrect example*) kuvaamaan esimerkkiä, jossa on esitetty jokin tyypillinen virhe. Tämän rinnalla on esitetty *oikein tehty esimerkki* (*correct example*). Puolestaan Adams ja kollegat (2012) ovat käyttäneet termiä *virheellinen esimerkki* (*erroneous example*) kuvaamaan käytännössä samaa asiaa kuin väärin tehty esimerkki. Heidän määritelmässään virheelliset esimerkit ovat työstettyjä esimerkkejä, joihin on sisällytetty virheellisiä askelia ja jotka on tarkoitettu auttamaan oppilaita huomaamaan periaatteita ja virheitä, joita välttää (Adams, McLaren, Durkin, Mayer & Rittle-Johnson, 2012). Puhutaan myös ongelmiin vaihe vaiheelta esitetyistä ratkaisuksista, joissa yksi tai useampi vaihe on väärin (Isotani ym., 2011). Adamsin ja kollegoiden tutkimuksissa virheellinen esimerkki on esitetty yksin, toisin kuin Durkin ja Rittle-Johnsonin tutkimuksissa, joissa he ovat esittäneet rinnakkain virheellisen ja oikein lasketun esimerkin.

Voidaan puhua myös työstetyn esimerkkiparin tehtävätyypistä ”Kumpi on oikein?” (Taulukko 2). Näissä virheellistä ja oikeaa ratkaisutapaa verrattaessa tarkoituksena on tyypillisen virheen paikantaminen, ymmärtäminen ja myöhemmin välttäminen (Star, Pollack ym., 2015). Tehtävätyypillä on muitakin tavoitteita kuin tavallisten virheiden ymmärtäminen ja välttäminen, kuten proseduraalisen tiedon kasvattaminen, konseptuaalisen tiedon muistaminen ja väärinkäsitysten vähentäminen (Star, Pollack ym., 2015). Tehtävätyypillä oletetaan siis olevan laajoja vaikutuksia matematiikan osaamiseen.

Määrittelyn seuraavaksi, mitä termiä tässä tutkimuksessa käytetään. *Tarkoituksellisella virheellä* (*intentional error*) käsitän yleistä virhekäsitystä kuvaavaa virheellistä välivaihetta, joka oppilaan on tarkoitus paikantaa ja korjata. Sekä väärät esimerkit että virheelliset esimerkit näin ollen sisältävät tarkoituksellisia virheitä. Virheellinen välivaihe sijoitetaan esimerkkiin, jonka opettaja voi etukäteen suunnitella. Tällainen esimerkki esitetään usein oikein tehdyn esimerkin rinnalla. Spontaanisti eli luonnostaan esiintyviä virheitä kutsun spontaaneiksi virheiksi. Esimerkki tarkoituksellisesta virheestä on esitetty Kuvassa 3.

Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Aluksi yhdistän vasemman puolen termit keskenään.	$45y + 90 = 60y$	$45y + 90 = 60y$	Aluksi vähennän molemmilta puolilta $45y$.
Tämän jälkeen vähennän molemmilta puolilta $60y$.	$135y = 60y$	$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$	Muokkaan yhtälön molempia puolia suorittamalla yhteenlaskut.
Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 75 ja saan vastauksen.	$135y - 60y = 60y - 60y$	$90 = 15y$	Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 15.
	$75y = 0$	$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$	Suoritan jakolaskut puolittain ja saan yhtälön ratkaisun.
	$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$	$6 = y$	
	$y = 0$		



- a) Kuvaile, mitä eroa Kallen ja Leenan ratkaisuissa on. _____
- _____
- b) Kumpi on oikeassa? Miksi? Miten tarkistat tämän? _____
- _____
- _____
- c) Mikä virhe on tehty? Kirjoita omin sanoin sääntö, jolla virhe voidaan välttää.
-

Kuva 3. Tarkoituksellisen virheen sisältävä tehtävä (Uudelleenjulkaisu tekijöiden luvalla lähteestä JYR, 2019).

Tarkoituksellisia virheitä voi hyödyntää esimerkiksi esittämällä virheellisen ja oikean ratkaisutavan rinnakkain ja analysoimalla niitä tai muuten houkuttelemalla tarkoituksella esiin virheitä (Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Faran, Osher, Sofen & Shalom, 2017; Kapur, 2016).

2.3.4 Tarkoituksellisiin virheisiin liittyvä tutkimus

Kerron seuraavaksi tarkoituksellisten virheiden käyttöön liittyvästä tutkimuksesta oppimisessa ja opetuksessa.

Faranin ja kollegoiden (2017) tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää *virheitä sisältävän oppimisen (errorful learning)* hyötyjä lapsilla. Hän tutki 3- ja 6-vuotiaita ja pyrki selvittämään, missä iässä virheitä sisältävä oppiminen alkaa olla hyödyllistä verrattuna niin sanottuun *virheitä sisältämättömään oppimiseen (errorless learning)*. Lapsille näytettiin ja opetettiin 20 lyhyttä lausetta, joista virhei-

tä sisältävässä asetelmassa puuttui aluksi kolmas sana, ja virheitä sisältämättömässä asetelmassa ei puuttunut yhtään sanaa. Puolet lauseista opetettiin virheitä sisältävässä asetelmassa ja puolet virheitä sisältämättömässä asetelmassa. Molempien ikäryhmien lapset vaikuttivat hyötyvän virheitä sisältävästä asetelmasta. Nuorempien lasten muisti oli heikompi, mutta muistikaava on sama kuin vanhemmalla ikäryhmällä (Faran ym., 2017). Tarkoituksellisia virheitä kannattaa tämän mukaan hyödyntää opetuksessa siis jo pienillä lapsilla.

Virheiden on ehdotettu matematiikan tutkivan oppimisen ponnahduslaudoiksi jo 1990-luvulla (Borasi, 1994). Borasin tutkimuksen opetuskokeilussa opettaja käytti joko etukäteen suunniteltua virhettä tai oppilailta spontaanisti nousevaa virhettä tarkoituksena näyttää, että virheet ovat oppimismahdollisuuksia. Tapaustutkimuksessa selvisi, että opetuskokeiluun osallistuneiden kahden 16-vuotiaan oppilaan asenne ja käytös matematiikkaa kohtaan muuttuivat menestymistä edistävemmäksi. Kokeilussa oppilaat pystyivät kokemaan ongelmanratkaisua, tutkimista, matemaattista kommunikaatiota, omistajuutta, rakentavia epäilyksiä ja konflikteja, monitorointia ja perustelua sekä matematiikan humanistisempia ja jännittävämpiä puolia (Borasi, 1994). Virheiden käyttö vaikuttaa tämän pohjalta antavan mahdollisuuden matematiikan opetuksen kehittämiseen monipuolisesti.

Siegler (2002) on pohtinut virheiden selittämistä näkökulmasta, jolla voidaan ymmärtää *kognitiivista muutosta (cognitive change)*. Hän esitti, että kun käytetään *itseselitystä (self-explanation)* sekä virheelliset että oikeat ratkaisut, on se oppimiselle enemmän hyödyksi kuin jos itseselitetään vain oikeat ratkaisut. Hänen mukaansa myös pitempi virheellisten ja oikeiden ratkaisujen pohtimiseen käytetty aika on yhteydessä suurempaan oppimiseen (Siegler, 2002). Tarkoituksellisesta virheestä voi siis oppia, ja siihen kannattaa käyttää riittävästi aikaa.

Saksalaistutkimuksessa yliopisto-opiskelijat hyötyivät todennäköisyyslaskennan yhteydessä virheellisistä esimerkeistä, mutta vain, jos heillä oli riittävästi esitietoja (Große & Renkl, 2007). Esitietoja siis tämän mukaan tarvittaisiin virheistä oppimiseen. Oppilaat, joilla oli heikot esitiedot, oppivat paremmin oikein lasketuista esimerkeistä (Große & Renkl, 2007). Vaikuttaa siltä, että esitietojen merkitykseen tulisi suhtautua vakavasti. Tosin voisi ajatella, että yliopistossa esitietojen merkitys koostuu tehtävien vaikeuden ja matemaattisen tiedon kasautuvan luonteen vuoksi.

Isotinin ja kollegoiden (2011) tutkimuksessa kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksaluokkalaisten (n=255) oppilaat käsittelivät virheellisiä esimerkkejä desimaalilukujen yhteydessä luokkahuoneolosuhteissa. Osa oppilaista käytti pelkästään työstettyjä esimerkkejä tai ongelmanratkaisua. Tutkimuksen mukaan virheelliset esi-

merkit eivät olleet oppilaille, joilla on hyvät esitiedot, niin tehokkaita, kuin aiemmassa tutkimuksessa on saatu selville. Todettiin, että tähän syynä saattaa olla virheellinen tapa esittää esimerkit tai se, etteivät virheelliset esimerkit toimi niin hyvin luokkahuoneolosuhteissa kuin laboratorio-olosuhteissa (Isotani ym., 2011). Tämä tutkimus herättää huolen siitä, onko tarkoituksellisia virheitä lopulta mahdollisuus hyödyntää luokkahuoneolosuhteissa ja edistävätkö ne matematiikan oppimista.

Sama tutkimusryhmä jatkoi tehtävien kehittelyä muun muassa siten, että iteseselitysaskelta yksinkertaistettiin niin, että oppilaat täyttivät yhden vastauksen täydentämiskohdan kahden sijaan (McLaren ym., 2012). Oppilaita myös kehoitettiin etsimään ja korjaamaan virhe. Uudemmassa tutkimuksessa (n=208) kuudes- ja seitsemäsluokkalaisista puolet käytti tietokoneavusteisia virheellisiä esimerkkejä desimaalilukutehtävissä ja puolet tavallisia tehtäviä. Viivästetyssä jälkitestissä virheellistä esimerkkiä käyttäneet oppilaat pärjäsivät merkittävästi paremmin. Tästä voidaan päätellä, että virheelliset esimerkit mahdollisesti saavat aikaan syvällistä kognitiivista prosessointia, jonka avulla oppilas voi järjestää oppiainesta ja hyödyntää esitietoja. Tässä tutkimuksessa eivät menestyneet vain oppilaat, joilla oli korkeat esitiedot, vaan kaikki oppilaat (McLaren ym., 2012). Tehtävätyyppi siis saatiin toimimaan kaikentasoisille oppilaille. Oppilaat joutuvat käyttämään prosessointia näissä tehtävissä.

Kolmannessa saman tutkimusryhmän tutkimuksessa selvitettiin niin ikään tietokoneavusteisten desimaalilukulaskujen *arviointia (critique)* (Adams ym., 2014). Tutkittiin, auttavatko yleisiin virhekäsityksiin perustuvien esimerkkien arviointi ja palautteen saaminen oppimaan paremmin kuin samojen ongelmien ratkaisu ja palautteen saaminen. Virheellistä esimerkkiä tutkineet oppilaat osasivat arvioida paremmin jälkitestin vastauksiensa oikeellisuutta ja välttää siten tyypillisiä virheitä. Virheellisiä esimerkkejä käyttäneet oppilaat eivät olleet niin tyytyväisiä käyttämäänsä oppimismenetelmään, mutta he oppivat desimaalilukuja syvällisemmin (Adams ym., 2014). On mielenkiintoista, että oppilaat eivät itse pitäneet tarkoituksellisen virheen käytöstä, mutta silti hyötyivät siitä.

Durkin ja Rittle-Johnson (2012) tutkivat desimaalilukujen suuruuden arviointia neljäs- ja viidesluokkalaisilla (n=74). Osa oppilaista teki tehtäviä, joissa tuli verrata virheellistä ja oikein tehtyä esimerkkiä ja osa teki tehtäviä, joissa vertailtiin pelkästään oikein tehtyjä esimerkkejä. Virheellisen ja oikean ratkaisutavan vertailu auttoi oppilaita oppimaan ja käyttämään oikeita käsitteitä ja proseduureja paremmin kuin kahden oikean ratkaisun vertailu (Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Oppilaiden esitiedot eivät vaikuttaneet oppimiseen toisin kuin Großen ja Renklin

(2007) tutkimuksessa. Vaikuttaisi siis, että nuorempien oppilaiden esitiedoilla mahdollisesti ei olekaan niin suurta vaikutusta kuin vanhempien oppilaiden. Asiaa tosin pitäisi selvittää vielä lisää. Onhan mahdollista, että esimerkiksi matematiikan osa-aluekin vaikuttaa asiaan. Lisäksi oli huomioitavaa, että nyt virheellisen esimerkin rinnalla oli oikein tehty esimerkki toisin kuin Adamsin ja kollegoiden tutkimuksessa.

Eräässä muussa tutkimuksessa kuudesluokkalaisille teetettiin tietokoneavusteisesti tehtäviä, joissa saattoi tulla eteen *kognitiivinen konflikti* (*cognitive conflict*, Huang, Liu & Shiu, 2008). Tietokone antoi oppilaille ristiriidan sisältävää palautetta, joka auttoi oppilaita selvittämään omat virheensä. Kognitiivinen konflikti tuli siitä, että oppilaille tuotiin vastakkain virheellinen ja oikea näkökulma, jotka eivät voineet olla yhtä aikaa voimassa. Tuloksista selvisi, että oppilaat kykenivät näissä tehtävissä korjaamaan desimaalilukuihin liittyviä väärinkäsityksiään (Huang ym., 2008). Tietokoneavusteinen kognitiivinen konflikti vaikuttaa hyvin toimivalta tavalla käyttäen tarkoituksellista virhettä oppimisen tukena.

Tietokoneavusteista algebraa opiskeltiin niin ikään käyttäen työstettyjä esimerkkejä itseselityksen kanssa (Booth, Lange, Koedinger & Newton, 2013). Itseselityksen kanssa käytettynä työstetyt esimerkit auttoivat kehittämään konseptuaalista osaamista. Virheellisesti ratkaistun esimerkin käyttö joko yksin tai oikein tehdyn esimerkin rinnalla auttoi algebran käsitteellisen ymmärtämisen kehittämisessä (Booth ym., 2013). Tarkoituksellinen virhe auttaisi tämän mukaan siis nimenomaan konseptuaalisen osaamisen kehittämisessä.

Barbierin ja Boothin (2016) tutkimuksessa oppilaat tutkivat algebrassa tarkoituksellisen virheen sisältävää esimerkkiä, oikein tehtyä esimerkkiä tai perinteistä ongelmanratkaisutehtävää. Ne oppilaat, joilla oli eniten haasteita matematiikassa, vaikuttivat hyötyvän juuri tarkoituksellisen virheen tutkimisesta ja tehtävän ratkaisemisesta itse tämän jälkeen (Barbieri & Booth, 2016). Tarkoituksellinen virhe siis voi olla tarpeen juuri heikoimmin menestyneille oppilaille. Näillä esitiedot voivat olla heikot, eli Großen ja Renkelin (2008) tutkimus näyttäytyy eri valossa. Eniten tarkoituksellisista virheistä eivät ehkä hyödykään vain oppilaat, joilla on hyvät esitiedot.

Virheistä oppimista on myös epäonnistumisista oppiminen. Vaikeuksia voidaan tuottaa tarkoituksella. Kapur (2016) on esittänyt erilaisia termejä *tuottavasta onnistumisesta* (*productive success*), *epätuottavasta onnistumisesta* (*unproductive success*) ja *tuottavasta epäonnistumisesta* (*productive failure*). Viimeinen termi liittyy menetelmään, jossa ohjataan oppilaita ratkaisemaan ongelmaa, johon liittyviä käsitteitä he eivät ennestään tunne. Menetelmä sisältää ongelmanratkaisuvai-

heen ja tätä seuraavan vahvistusvaiheen (Kapur, 2016). Oppilaat joutuvat ponnistelemaan ja todennäköisesti epäonnistumaan, ennen kuin oikeita ratkaisuja vahvistetaan. Oppilaat ikään kuin altistetaan virheille ja niistä oppimiselle.

Yhteenvetona voidaan sanoa, että tarkoituksellisten virheiden hyödyistä matematiikan oppimiselle on erittäin lupaavia tuloksia. Niitä voidaan käyttää eri tavoin ja eri-ikäisille oppilaille. Edellä mainittujen tutkimusten lisäksi tarkoituksellisia virheitä on tutkittu esimerkiksi lääketieteen opiskelijoiden keskuudessa, jolloin hyötyjä on niin ikään nähty (Stark, Kopp & Fischer, 2011). Tarkoituksellisiin virheisiin kannattaa käyttää aikaa, ja niihin kannattaa yhdistää itseselitystä. Niitä voidaan käyttää yksin tai oikein tehdyn esimerkin rinnalla. Tulokset hiukan vaihtelevat riippuen mahdollisesti oppilaiden esitiedoista tai siitä, millä luokka-asteella tehtäviä on käytetty, mutta vaikuttaa siis siltä, että tarkoitukselliset virheet soveltuvat heikoimminkin menestyneille oppilaille.

2.3.5 Tarkoituksellisten virheiden tarpeellisuus ja toimivuus

Tarkoituksellisten virheiden käytössä tulee huomioida, miksi niitä käytetään ja miksi ne toimivat. On esitetty kolme seikkaa, jotka vaikuttavat tarkoituksellisen virheen (virheellisten esimerkkien) käyttöön. Virheellisten esimerkkien käytössä oleellista on, että 1) vältetään häpeän tunnetta ja motivaation puutetta tutkimalla toisten virheitä eikä omia, 2) esimerkit ovat *vuorovaikutteisia (interactive)* ja *osallistavia (engaging)* sekä 3) tehtävät pyrkivät vähentämään ylimääräistä prosessointia (extraneous processing) ja lisäämään oleellista prosessointia (essential processing) (Adams ym., 2014). Virheelliset esimerkit vapauttavat muistikapasiteettia oppimiselle, mutta yhtäaikaaisesti vaativat aktiivista oppimista (McLaren ym., 2012). Tarkoitukselliset virheet siis toimivat, koska ne eivät vaadi niin paljon muistia kuin mahdollisesti perinteiset tehtävät. Toisaalta voi pohtia, olisiko juuri tämä syynä siihen, että virheitä ei välttämättä muisteta niin hyvin jälkeenpäin, kuten Loehr ja kollegat (2020) esittävät.

Tarkoituksellisia virheitä käytettäessä oppilas joutuu analysoimaan tehtäviä eikä voi keskittyä pelkästään proseduraaliseen tietoon vaan konseptuaalinen tieto saattaa saada suuremman roolin – kehittäväthän tehtävät mahdollisesti juuri konseptuaalista osaamista (Booth ym., 2013). Tässä jakoa proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon käytetään perinteisessä mielessä, ja jää vielä pohdittavaksi, miten proseduraalinen joustavuus liittyy tarkoituksellisiin virheisiin.

Virheelliset esimerkit mahdollistavat arvioinnin ja perustelujen harjoittelun ja voivat siten syventää oppimista (McLaren ym., 2012). Virheiden käsittely

saa tutkimuksen mukaan aikaan uutta oppimista, parantaa muistia ja oikeiden ratkaisujen generoimista, saa aikaan aktiivista oppimista, saa suuntaamaan huomion paremmin ja informoi opettajia, milloin keskittyä opettamiseen (Metcalfe, 2017). Mielestäni on mielenkiintoinen havainto, että virheiden käyttö myös kehittää muistia, sillä Loehrin ja kollegoiden (2020) mukaan virheitä ei välttämättä muistettaisi jälkikäteen.

Barbierin ja Boothin (2016) mukaan tutkijat käyttävät tutkimusasetelmissaan yleensä joko kognitiivisia tai motivaatioon liittyviä interventioita, joilla pyritään vaikuttamaan oppimiseen. Ensimmäiset pyritään saamaan sopiviksi oppilaan kognitiiviselle kapasiteetille ja jälkimmäisillä pyritään lisäämään osallisuutta, vaihtamaan uskomuksia ja lisäämään ohjeiden tehokkuutta. Näiden kahden intervention yhdistäminen esimerkiksi käyttämällä virheen tutkimista voisi olla vielä tehokkaampaa (Barbieri & Booth, 2016).

2.3.6 Opettajien uskomukset, virheet ja tarkoitukselliset virheet

Miten virheet ja tarkoitukselliset virheet näyttäytyvät opettajien näkökulmasta? Opettajat ovat avainasemassa siinä, miten virheitä esitellään oppilaille ja millaisia uskomuksia virheitä kohtaan välitetään. Opettajien uskomuksia virheistä ja etenkin tarkoituksellisista virheistä on kuitenkin toistaiseksi tutkittu varsin niukasti.

Erityisen mielenkiintoisia ovat opettajien uskomukset. *Uskomukset* liittyvät siihen, mitä ihmiset uskovat ympäröivästä maailmasta ja sen ilmiöistä. Pehkosen (1998, 2009) mukaan uskomukset voivat olla tietoisia tai tiedostamattomia sekä kognitiivisia ja affektiivisia. Käsite *asenne* on melko lähellä tätä, mutta eroaa kuitenkin uskomuksista, sillä asenteet liittyvät affektiiviseen puoleen (Pehkonen, 1998, 2009). Uskomukset voidaan johtaa siitä, mitä ihmiset tekevät tai ajattelevat (Pajares, 1992). Näin ollen uskomuksiin voidaan päästä käsiksi tutkimalla esimerkiksi ihmisten ajatuksia.

Virheiden tutkiminen olisi tärkeää muun muassa, koska tiedetään, että opettajien uskomukset matematiikan opettamisesta ja heidän luokkahuonekäytäntönsä ovat yhteydessä toisiinsa (Speer, 2008; Stipek, Givvin, Salmon & MacGyvers, 2001). Toisaalta oppilaat kopioivat helposti opettajiensa virheisiin liittyvän asenteen (Tulis, 2013).

Esimerkiksi yhdysvaltaisopettajat välttelevät tutkimuksen mukaan virheitä (Metcalfe, 2017). Virheitä kohti tulisi mielestäni rohkeasti mennä ja ottaa ne osaksi oppimista. Virheiden kautta sekä oppilas että opettaja osaavat suunnata

oppimistaan paremmin (Metcalf, 2017). Virheet siis saavat jotain todella oleellista aikaan, joten virheitä kannattaisi hyödyntää opetuksessa.

On myös esitetty, että opettajat saattavat pelätä tarkoituksellisten virheiden käyttöä, sillä ne eivät ole ainakaan yhdysvaltalaisoppikirjoista toistaiseksi tuttuja (Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Virheitä ei kuitenkaan tarvitsisi pelätä, sillä juuri niiden, tarkoituksellistenkin, kautta voisi oppia. Opettajien epäluulot virheiden käyttöä kohtaan tulisi kuitenkin ottaa huomioon.

Son (2013) on tutkinut tulevien opettajien (n=57) tapaa neuvoa suorakulmioihin liittyvissä virheissä. Opettajaopiskelijat olettivat virheiden johtuvan proseduraalisen tiedon puutteesta, vaikka ne johtuivat käsitteellisen tiedon puutteesta, jolloin neuvo oli virheellisesti proseduraalista. Opettajaopiskelijat eivät konseptuaalisesta tietämyksestään huolimatta osanneet neuvoa oikealla tavalla (Son, 2013). Virheiden hyödyntämiseen ei siis riitä pelkästään hyvä konseptuaalinen tieto vaan tarvittaisiin joitain muitakin taitoja.

Kun virheet otetaan osaksi opetusta, täytyy muistaa, että ei riitä, että oppilaille kerrotaan, onko ratkaisu oikein vai väärin (Metcalf, 2017). Oppimiselle olisi hyödyllistä saada virheitä sisältävää opetusta, jossa virheet korjataan palautteen avulla. Virheitä ei siis tule piilotella, vaan rohkeasti nostaa ne osaksi opetusta (Metcalf, 2017).

Opettajan tulisi Wischgollin, Paulin ja Resserin (2015) mukaan panostaa oppilaan jumissa olemiseen tai virheisiin ja tarjota virheisiin scaffolding-tyyppistä tukea, joka riippuu oppijan senhetkisestä tasosta ja ymmärryksestä. Heidän tutkimuksensa mukaan onnistuneissa tuutorointitilanteissa tuutorit neuvoivat sekä virheen aikana että sen jälkeen. Lisäksi oppilaiden suoritus jälkitehtävässä riippui tuutorin kyvystä reagoida (Wischgoll ym., 2015). Vaikuttaa siis siltä, että virheistä oppimisessa erityisen tärkeää on reagoida oppilaan tarpeisiin ja tuoda hänelle hänen oman tasoistaan tukea. Tässä tulee huomioida lähikehityksen vyöhyke (Wischgoll ym., 2015).

Pohdin seuraavaksi, millaisia uskomuksia opettajilla on virheistä. Opettajien virheisiin liittyviä uskomuksia on tutkittu toistaiseksi melko vähän. Psykologiassa on kehitetty virheorientaatiota mittaava kysely (Rybowiak, Garst, Frese & Batinic, 1999), jonka pohjalta on edelleen toteutettu opettajien uskomuksia matematiikan kontekstissa mittaava kysely (Matteucci, Corrazza & Santagata, 2015). Jälkimmäistä käytettiin 60 opettajalla. Klusterianalyysillä pystyttiin tunnistamaan kaksi virheisiin liittyvää asennoitumismallia, *virheorientaatiota (error orientation)*, positiivinen ja negatiivinen. Virheorientaatiolla tarkoitetaan virheisiin liittyvien uskomusten kokoelmaa. Opettajat, joilla oli negatiivinen virheorientaatio, saivat

paljon pisteitä kategorioissa virhekuormitus (error strain), virheiden peittely (covering up errors) ja virhekommunikaatio (error communication). Puolestaan positiivinen virheorientaatio toi pisteitä kategorioissa virheiden ajattelu (thinking about errors), virheistä oppiminen (learning from errors), virheen riskin ottaminen (error risk taking) ja virheiden ennakointi (error anticipation).

Tutkimuksessa videoitiin lisäksi kolmen opettajan opetusta. Videoanalyysin perusteella opettajan positiivinen asenne virheitä kohtaan vaikutti tehostavan oppimista, ja opettajat myös näyttivät mallia, miten suhtautua virheisiin tehokkaasti. Lisäksi havaittiin, että opettajilla oli yhä sekalaisia ajatuksia virheistä ja että tähän liittyvää täydennyskoulutusta tarvittaisiin (Matteucci, Corrazza & Santagata, 2015). Virheitä saatetaan siis yhäkin pelätä, vaikka opettajan tulisi rohkeasti näyttää mallia virheisiin suhtautumisessa. Voisi selvittää lisää, millaisia uskomuksia opettajilla on virheistä ja tarkoituksellisista virheistä.

Jos opettajat ajattelevat, että virheitä tulee välttää, he välttelevät riskejä ja ohittavat tilaisuuksia käsitteellisen ymmärryksen kehittämiseen (Bray, 2011; Santagata, 2005). Virheisiin liittyvissä luokkahuonetilanteissa näkyvät myös yleiset opettajien uskomukset oppilaiden kyvystä tukea toisiaan, vastauskeskeisyydestä ja käsitteellisen ymmärtämisen painottamisesta (Bray, 2011). Opetuksessa olisi siis tärkeää huomioida sekä suoraan virheisiin liittyvät uskomukset että yleensä matematiikkaan liittyvät uskomukset.

Virheiden käyttö on haastavaa, mutta oppilaille hyödyllistä. Opettajien uskomuksia ja heidän tapaansa käsitellä virheitä tulisi tutkia lisää ja erityisesti tarkoituksellisten virheiden osalta.

2.4 Tutkimuksen tavoitteet

Perustelen ja määrittelen tässä kappaleessa tämän väitöstutkimuksen tavoitteet. Ensinnäkin tavoitteena on tutkia joustavuuden (flexibility) suhdetta nopeuteen (speed) ja oikeellisuuteen (accuracy) matematiikassa. Joustavuudesta on saatu jo melko paljon tietoa esimerkiksi Jon R. Starin ja kollegoiden tutkimuksessa Yhdysvalloissa, mutta vielä on selvittämättä tarkemmin, miten nopeus ja oikeellisuus liittyvät joustavuuteen ja miten joustavia suomalaislapset ja -nuoret ovat. Opettajien uskomuksia joustavuuteen liittyen on tutkittu jonkin verran, mutta olisi tarpeen tietää enemmän siitä, näkevätkö opettajat joustavuuden tarpeelliseksi opettavaksi asiaksi.

Aion tässä tutkimuksessa selvittää joustavuutta ja tarkoituksellisia virheitä pääosin laadullisesti. Vertailutehtäviin ja virheisiin liittyvässä tutkimuksessa on

lähinnä määrällisen tutkimuksen keinoin saatu selville, että vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet ovat erittäin hyödyllisiä oppimiselle. Ne kehittävät muun muassa oppilaiden matemaattisen tiedon eri lajeja, arviointitaitoja ja asennetta matematiikkaa kohtaan (esim. Adams ym., 2014; Borasi, 1994; Durkin, Rittle-Johnson, Star ym., 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008; Star, Pollack ym., 2015).

Opettajien käsityksiä vertailutehtävistä on jo selvitetty jonkin verran, mutta puuttuu tietämys, voisivatko käsitykset olla erilaisia eri maassa, esimerkiksi Suomessa ja millaisia käsityksiä paitsi nykyisillä myös tulevilla opettajilla on vertailun käytöstä. Opettajien uskomuksia tarkoituksellisista virheistä ei tietoni mukaan ole tutkittu lainkaan aiemmin.

Vertailutehtäviä ja virheitä käytännön luokkahuonetilanteissa on toistaiseksi tutkittu laadullisesti melko niukasti, ja tämä tutkimus on suunnattu paikkaamaan tätä tutkimusaukkoa. Tarkoituksena on saada selville, millaisia käsityksiä ja uskomuksia opettajilla on vertailutehtävien ja virheiden käytöstä ja toisaalta, miten vertailutehtävien ja virheiden käyttö voidaan toteuttaa käytännön luokkahuonetilanteissa. Käytännön luokkahuonetilanteiden kuvaamista en ole aiemmassa tutkimuskirjallisuudessa nähnyt.

Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

TK1. Miten joustavia testatut suomalaisoppilaat ovat yhtälönratkaisussa? Mikä on joustavuuden suhde nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisun yhteydessä? Miten tutkitut suomalaisopettajat näkevät joustavuuden tarpeellisuuden?

TK2. Millaisia käsityksiä ja uskomuksia opettajilla ja opettajaopiskelijoilla on vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttämiseen liittyen?

TK3. Mitkä tekijät edistävät tai vaikeuttavat vertailutehtävien käyttöä käytettäessä tarkoituksellisen virheen sisältävää tehtävää?

Koko tutkimuksen tarkoituksena on näin selvittää joustavuutta, opettajien käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä ja toisaalta tutkia niiden käyttöä käytännön luokkahuonetilanteissa. Tutkimus koostuu neljästä osatutkimuksesta, joista kustakin on julkaistu yksi artikkeli. Ensimmäinen artikkeli vastaa tutkimuskysymykseen yksi. Toinen artikkeli vastaa kaikkiin tutkimuskysymyksiin (ensimmäiseen osittain). Kolmas artikkeli vastaa tutkimuskysymyksiin kaksi ja kolme ja neljäs artikkeli tutkimuskysymykseen kolme. Artikkeleihin liittyvät tutkimuskysymykset olen esittänyt Taulukossa 4.

Taulukko 4. Artikkeleihin liittyvät tutkimuskysymykset.

Artikkeli	TK1	TK2	TK3
Artikkeli 1	X		
Artikkeli 2	X	X	X
Artikkeli 3		X	
Artikkeli 4			X

3 Käytetyt menetelmät ja aineisto

Tämä luku käsittelee väitöskirjassani käytettyjä menetelmiä ja aineistoa. Esittelen aluksi hankkeet, joita olin mukana toteuttamassa ja joiden parissa keräsin osan aineistosta. Sen jälkeen kerron tutkimuksessa käytetyistä määrällisistä ja laadullisista tutkimusmenetelmistä. Lopuksi tuon esiin tutkimuksen osallistujia, tutkimusaineistoa ja aineiston analysointia.

3.1 Aineiston keruuseen liittyvät hankkeet

Kerron hankkeista, joiden toteutukseen osallistumisen ohessa keräsin artikkeleihin tarvittavaa aineistoa. Esittelen aluksi kansainvälisen joustavuuteen liittyvän tutkimushankkeen, jonka parissa keräsimme ensimmäisen artikkelin aineiston. Seuraavaksi luon lyhyen katsauksen opettajien täydennyskoulutushankkeeseen Tutkiva oppiminen matematiikassa, jonka ohessa keräsin puolet toisen artikkelini aineistosta. Kolmannen artikkelin aineiston keräsin laatimallani verkkokyselyllä, joka ei suoraan liittynyt mihinkään hankkeeseen. Lopuksi perehdyn Joustava yhtälönratkaisu -opetuksenkehittämishankkeeseen, jonka aikana suunnitelluilla ja pidetyillä oppitunneilla keräsin neljännen artikkelin aineiston.

Kansainväliseen joustavuutta tutkivaan tutkimushankkeeseemme (2016–) on osallistunut tutkijoita ja tutkimusapulaisia kolmesta maasta: Suomesta, Ruotsista ja Espanjasta. Lisäksi hankkeen johtajana toimii professori Jon R. Star Harvardin yliopistosta Yhdysvalloista. Olen osa tätä tutkimusryhmää. Tavoitteenamme on tutkia joustavuutta eri maissa. Hankkeessa teetimme joustavuustestin kolmen maan oppilaille kahdessa ikäryhmässä: kahdeksaluokkalaisille (Ruotsissa yhdeksäsluokkalaisille) ja lukion toista vuosikurssia käyville oppilaille. Osallistuin tutkimuksen alkuvalmisteluihin ja kansainvälisen tutkimusryhmän palaveriin niin etätapaamisina kuin kahdesti lähitapaamisena, Suomessa ja Yhdysvalloissa. Palavereissa keskustelimme muun muassa testin pisteytyksestä, käytetyistä käsitteistä ja menetelmistä, aineiston analysoinnista ja saaduista tuloksista. Osallistuin ryhmän mukana aineiston keruuseen, aiempiin tutkimuksiin perehtymiseen, analysoinnin suunnitteluun ja artikkeleiden tekemiseen. Tällä hetkellä ryhmältä on julkaistu yksi kolmen maan tuloksia vertaileva artikkeli (Star, Tuomela ym., 2022) sekä kaksi suomalaistuloksiin liittyvää artikkelia (Hästö & Palkki, 2019; Hästö, Palkki, Tuomela & Star, 2019). Näistä yksi (Hästö & Palkki, 2019) kuuluu tähän työhön yhtenä neljästä artikkelista (Artikkeli I).

Toisen artikkelin aineiston keräsin osin opettajille suunnatun täydennyskoulutuksen ohessa ja osin yliopistossa opettajaopiskelijoille pitämäni matematiikan didaktispainotteisen kurssin ohessa. Tutkiva oppiminen matematiikassa oli niin luokan- kuin aineenopettajille suunnattu matematiikan täydennyskoulutushanke, joka toteutettiin Oulun yliopistolla vuosina 2013–2014. Hanke oli Opetushallituksen rahoittama. Hankkeessa osallistujille pyrittiin antamaan monipuolinen kuva matematiikan oppimisesta ja tukemaan tutkivan ja keskustelevan matematiikan käyttöä. Osallistuin hankkeen kahteen viimeiseen lähikoulutusjaksoon vuonna 2014 kouluttajana ja järjestäjänä. Eräässä hankkeen tapaamisessa tutustuttiin joustavuuteen ja vertailutehtäviin erilaisia ratkaisutapoja tuottaen ja niistä keskustellen. Suunnittelin tälle koulutuskerralle aineistonkeruun opettajien keskusteluista, jotka nauhoitin ja myöhemmin litteroin. Artikkelin II aineistona toimivat nämä keskustelut sekä tulevien matematiikan opettajien käymät vastaavat keskustelut. Opettajaopiskelijoiden aineiston keräsin pitämälläni didaktispainotteisella matematiikan kurssilla.

Joustava yhtälönratkaisu (JYR) oli vuosina 2014–2019 Oulun yliopistossa toteutettu hanke, jossa kehitettiin oppimateriaalia ja uusia oppimisen tapoja yläkoulun lineaarisen yhtälönratkaisun opiskeluun sekä järjestettiin useita täydennyskoulutuksia opettajille (JYR, 2019). Hanke kuului valtakunnalliseen LUMA SUOMI -kehittämishjelmaan, jota Opetus- ja kulttuuriministeriö rahoitti vuosina 2014–2019 (LUMA, 2019). Ohjelman tarkoituksena oli lisätä lasten ja nuorten motivaatiota matematiikan ja luonnontieteiden opiskeluun sekä huomioida vuonna 2016 käyttöön otettu opetussuunnitelma. Osallistuin JYR-hankkeeseen aluksi materiaalin suunnittelussa, opetuskokeilun opettajien rekrytoinnissa ja yhteydenpidossa ja myöhemmin opettajien koulutusten suunnittelijana ja järjestäjänä. Hanketta toteutti Oulun yliopiston ryhmä, johon kuuluivat professori, kaksi väitöskirjantekijää ja hankkeen eri vaiheisiin osallistuneita tutkimusavustajia ja muita henkilöitä.

Hankkeessa kehitimme ensimmäisen version materiaalista yhteistyössä kolmen kehittäjäopettajan kanssa. Heidän oppituntinsa seitsemäsluokkalaisille videoitiin (vastasin erityisesti yhden koulun videoinneista), ja haastattelin opettajia useaan otteeseen. Kokemusten pohjalta materiaalia työstettiin edelleen. Lopputuotoksena laadimme vapaasti saatavilla olevan noin 10 oppitunnin materiaalipaketin lineaarisen yhtälönratkaisun aloittamiseen yläkoulussa. Osittain JYR-materiaalin mallina toimi Jon R. Starin ja hänen kollegoidensa Yhdysvalloissa kehittämä ja tutkima *Contrasting Cases* -materiaali (Contrasting Cases, 2020; Star, Pollack ym., 2015), jossa on eri matematiikan osa-alueille kuuluvia vertailutehtäviä. Suomensimme ja muokkasimme yhtälönratkaisuun liittyviä vertailuteh-

täviä suomalaiskoululaisille sopiviksi. Vertailutehtävien lisäksi JYR-materiaali painotti käsitteellisen kehityksen merkitystä (esimerkiksi yhtälön käsite ja sulku-lausekkeet), itsearviointia ja ryhmäarviointia sekä keskustelua matematiikan oppimisen keinoina. Oppilaat sijoitettiin oppitunneilla 3–5 henkilön ryhmiin, joissa he keskustelivat tehtävistä ja ratkaisuksistaan. Matematiikan pohtiminen ryhmissä vuorotteli opettajajohtosten osuuksien kanssa. Hankkeessa kehitettiin siis käsitteellistä ymmärrystä, joustavuutta ja keskustelua painottava materiaali ja lähestymistapa yläkoulun matematiikan opiskeluun. Osallistuin materiaalin ja menetelmän suunnitteluun yhdessä hankeryhmämme kanssa. Käyttämämme ideat pohjautuivat tutkimustietoon, johon perehdyimme yhä enemmän hankkeen edetessä.

Pidimme materiaalin suunnittelun lisäksi opettajille täydennyskoulutuksia sekä lähikoulutuksina että verkossa. Tässä yhteistyökumppanina toimi kaksi muuta LUMA SUOMI -hanketta: Sujuvuutta ja joustavuutta peruslaskutaitoon (0.–2. lk) ja Alakoulun aritmetiikkaa uusin silmin (3.–6. lk). Kolme hanketta yhdessä muodostivat yhteishankkeen nimeltä Vahvuutta lukukäsitteeseen, ymmärrystä yhtälönratkaisuun. Tässä koulutushankkeessa hahmottelimme aritmetiikan ja algebran oppimisen polkua esiopetuksesta yläkouluun saakka. Oleellista oli vahvan lukukäsitteen ja muuttujakäsitteen pohjustaminen luoden perustaa joustavalle yhtälönratkaisulle, josta on hyötyä paitsi peruskoulussa, myös sen jälkeen. Järjestimme koulutuksia seitsemällä paikkakunnalla eri puolilla Suomea, ja niihin osallistui yhteensä 286 opettajaa. Verkkokurssina toteutimme koulutuksen kahdesti, ja sen suoritti 70 opettajaa. Koordinoin näiden koulutusten järjestelyjä ja verkkokurssin toteutusta sekä osallistuin koulutusmateriaalin laatimiseen ja kouluttamiseen. Muissa tilaisuuksissa Joustava yhtälönratkaisu -materiaaliin tutustui noin 190 opettajaa muun muassa pitämässäni esitelmissä opettajien täydennyskoulutuspäivillä ja noin 150 matematiikan aineenopettajaopiskelijaa pitämälläni yliopistokursseilla.

JYR-hanke ei ollut tutkimushanke, mutta keräsin hankkeen aikana järjestetyistä oppitunneista materiaalia, jota hyödynsin neljännessä artikkelissani. Suunnittelin aineistonkeruun, ja halusin saada tarkempaa tietoa vertailutehtävien ja virheiden käytöstä. Tähän valikoin oppitunnin, jolla virheen sisältävää vertailutehtävää käytettiin opettajajohtoisesti. Aineistoa keräsin muun työskentelyn ohella videoimalla oppitunteja, suunnittelemalla opettajien haastatteluja ja toteuttamalla niitä, observoimalla osaa oppitunneista ja litteroimalla valitsemiani oppitunteja.

Artikkeli III sivusi JYR-hanketta siten, että osa kolmannen artikkelin kyselyn saaneista opettajista oli osallistunut myös JYR-hankkeeseen.

3.2 Määrälliset tutkimusmenetelmät

Määrällisiä menetelmiä käytimme ensimmäisessä osatutkimuksessa. Tutustuimme aineistoon ensin tilastojen avulla (descriptive statistics), ja sitten selvitimme muuttujien välisiä yhteyksiä regressioanalyysia ja ristiintaulukointia käyttäen.

Tilastollisista testeistä käytimme kahden muuttujan välistä Pearsonin korrelaatiota (bivariate Pearson correlation). Korrelaatiokerroin kuvaa yhteyttä muuttujien välillä (Metsämuuronen, 2007). Regressioanalyysissä tarkastellaan yhtä aikaa useita muuttujia. Selvitetään selittävän tai selittävien muuttujien (riippumattomien muuttujien) vaikutusta selitettävien muuttujien (riippuvien muuttujien) vaihteluun oletuksena, etteivät selitettävät muuttujat korreloi liikaa toistensa kanssa (Metsämuuronen, 2007; Kaakinen & Ellonen, n.d.). Termi lineaarinen regressioanalyysi viittaa siihen, että muuttujien välinen yhteys on lineaarista, jolloin voidaan piirtää riippuvuutta kuvaava regressiosuora. Regressioanalyysin vahvuutena on mahdollisuus tarkastella useita muuttujia yhtä aikaa, mutta toisaalta rajoituksena on se, ettei syy-seuraussuhteita voida suoraan päätellä (Kaakinen & Ellonen, n.d.).

Käydään vähän tarkemmin läpi regressioanalyysissa saatavia tunnuslukuja. R^2 on regressiomallin selitysosuus, joka kertoo, kuinka paljon selittävät muuttujat selittävät selitettävästä muuttujasta, ja F-testi kertoo mahdollisuudesta selittää muuttujien vaihtelua ylipäättään (Kaakinen & Ellonen, n.d.). Betan neliö ilmaisee, missä määrin riippuva muuttuja selittyy vastaavalla riippumattomalla muuttujalla kyseisessä aineistossa. Analyyseissä p-arvo liittyy yhteyden löytämisen todennäköisyyteen, jos nollahypoteesi olisi tosi (Kvantitatiivisen tutkimuksen verkkokäsikirja, n.d.). Tilastollisesti merkittäviä ovat lukua 0,05 pienemmät p-arvot (Kaakinen & Ellonen, n.d.).

Ristiintaulukoinnilla pyritään havaitsemaan muuttujien välistä yhteyttä yksinkertaisella tavalla (Metsämuuronen, 2007). Menetelmässä muodostetaan taulukko, josta tutkitaan selitettävän muuttujan jakaumaa suhteessa selittävään muuttajaan eri luokissa (Kvantitatiivisen tutkimuksen verkkokäsikirja, n.d.).

3.3 Laadulliset tutkimusmenetelmät

Valitsin laadullisen tutkimusotteen työni pääasialliseksi menetelmäksi eli artikkeleihin II, III ja IV. Tämän taustalla oli tieto, että määrällisesti vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöä on jo suhteellisen kattavasti tutkittu erityisesti Yhdysvalloissa, jossa nämä opetustavat ovat tuottaneet hyvin oppimistuloksia (esim. Adams ym., 2014; Star & Rittle-Johnson, 2008; Star, Pollack ym., 2015).

Halusin perehtyä nyt tarkemmin opettajien käsityksiin ja uskomuksiin vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä sekä lisätä laadullista tietoa vertailutehtävien toimivuudesta käytännön luokkahuonetilanteissa. Laadullinen tutkimus sopii näiden selvittämiseen hyvin, koska se on muun muassa tilanteellista, reflektivoaa, joustavaa ja tapausorientoitunutta (Schreier, 2012). Laadullisella tutkimusotteella pääsin tarkastelemaan lähemmin vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käytännön toimivuutta. Tulokset luonnollisesti eivät ole yleistettävissä kuten eivät laadullisen tutkimuksen tulokset yleensäkään. Sen sijaan saadaan tarkkaa kuvausta erilaisista mahdollisista näkökulmista.

Esittelen seuraavaksi laadullisista menetelmistä tarkemmin fenomenografian, sisällönanalyysin ja tapaus tutkimuksen.

3.3.1 Fenomenografia

Kerron nyt fenomenografisesta analyysistä eli fenomenografiasta yleisesti tutkimusmenetelmänä. Tässä tutkimuksessa käytin fenomenografiaa selvittämään käsityksiä vertailutehtävistä matematiikkaa opettavien luokan- ja aineenopettajien sekä tulevien matematiikan aineenopettajien näkökulmasta (Artikkeli II).

Fenomenografiassa (phenomenography) tutkitaan ihmisten (rajallisia) tapoja ymmärtää jokin käsite, ilmiö tai periaate (Marton, 1988). Syrjälä, Ahonen, Syrjänen ja Saari (1994) tarkentavat fenomenografian liittyvän laadullisesti eri tapoihin, joilla ihmiset käsittävät maailman ympärillään. Tutkitaan siis esimerkiksi ihmisten erilaisia käsityksiä jostain aihepiiristä. Tutkimuskohteena on ihmisten ja ympäröivän maailman suhde (Marton, 1988).

Tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita aineistosta eikä osallistujista eli informanteista sinänsä (Marton, 1988). Aineistona toimivat kirjalliseen muotoon saatettuna esimerkiksi yksilö- tai ryhmähaastattelut, dokumentit, kirjoitelmat tai kyselyt (Huusko & Paloniemi, 2006). Empiirisen aineiston avulla päästään käsiksi ihmisten käsityksiin. Tärkeää on asettaa kysymykset avoimiksi erilaisten käsitysten tuomiseksi esiin (Huusko & Paloniemi, 2006). Käsityksiä selvitetään siis avoimesta lähtökohdasta. Tarkoitus ei kuitenkaan ole jäädä erilaisten mielipiteiden selvittelyn tasolle. Käsitykset kertovat aiheesta syvällisemmin ja laajemmin kuin mielipiteet (Huusko & Paloniemi, 2006).

Metsämuurosen (2007) sekä Syrjälän ja kollegoiden (1994) mukaan fenomenografisesta näkökulmasta ihminen muodostaa selittäviä yhteyksiä olioiden ja ilmiöiden (ulkoisen maailman kokemusten) välillä ja muodostaa käsityksiä, joita voidaan tutkia empiirisesti. Fenomenografit vertailevat sekä eri ihmisten käsityk-

siä että käsitysten yhteyttä yksilön muihin käsityksiin. Tutkimuksen lähtökohtana on ontologinen kysymys tutkimuskohteesta ja toisaalta epistemologinen kysymys siitä, mitä voimme tietää. Tutkimuksessa kysytään, millä tavoin ilmiö on merkityksensä suhteen olemassa. Fenomenografiassa ihmisen subjektiivinen maailma ei itsessään ole ontologisesti olemassa, vaan on muiden ymmärrettävissä symbolisesti jaetun maailman kautta, joten tutkimuksellisesti oleellista on sen representaatioiden tutkiminen. Kielellistetetyt käsitykset ilmentävät sosiaalista todellisuutta. Epistemologisesti tulee ilmi ihmisten subjektiivinen todellisuus, jota ihmiset ilmentävät eri representaatioissa. Niistä tutkitaan käsitysten variaatiota (Metsämuurosen 2007; Syrjälä ym., 1994).

Fenomenografiassa teoria eli selitysmalli syntyy siten, että aineistosta luodaan merkityskategorioita ja edelleen ylemmän tason kategorioita (Syrjälä ym., 1994; Huusko & Paloniemi, 2006). Aineistoa luokitellaan siis aluksi niiden merkitysten mukaan useisiin pienempiin kategorioihin, jotka yhdistetään myöhemmin ylemmän tason abstraktimmiksi kategorioiksi. Jokaisessa vaiheessa kirjoitetaan kategorioiden kuvaus. Erilaisten käsitysten pohjalta syntyy kategorioita, joiden yhteyksiä tutkimalla voidaan ymmärtää ihmisten ajatuksia (Marton, 1988). Laadullisessa tutkimuksessa kategoria voi sisältää vain vähän aineistoa, mutta olla silti teoreettisesti merkittävä (Syrjälä ym., 1994).

Fenomenografinen analyysi koostuu kolmesta vaiheesta: 1) merkityksien etsimisestä, 2) kategorioiden muodostamisesta ja 3) abstraktimman kuvaustason ja kategorioiden välisten erojen etsimisestä (Huusko & Paloniemi, 2006). Tärkein tuotos on kategorioiden sisältö ja niiden kuvaukset (Marton, 1988). Tämän lisäksi pyritään löytämään abstraktimpi kuvaustaso ja selvittämään kategorioiden välisiä eroja (Huusko & Paloniemi, 2006). Kuitenkin mielessä voi olla hyvä pitää, että kuvataan ”tutkittavien arkikäsitysten variaatiota, merkityssisältöjä ja niiden ymmärtämisen rakennetta” (Huusko & Paloniemi, 2006, s. 171). Vaikka tulokset eivät ole yleistettävissä, fenomenografian avulla voidaan saavuttaa tietoa erilaisista mahdollisista käsityksistä ja niiden merkityksestä teorialle.

Fenomenografisen analyysin vahvuus on nähdäkseni siinä, että sillä pystytään nostamaan esiin monia erilaisia käsityksiä tutkitusta aiheesta, ja tämän myötä voidaan hahmottaa, millaisesta ilmiöstä on oikein kyse. Heikkoutena on kenties se, että tutkimuksessa ei välttämättä päästä kategorioiden kuvailua korkeammalle tasolle, vaikka se fenomenografisen tutkimuksen tavoite onkin.

3.3.2 Sisällönanalyysi

Pohdin tässä aluvuossa sisällönanalyysia yleisesti tutkimusmenetelmänä. Sisällönanalyysia käytin tutkimuksessani selvittäessäni matematiikan opettajien uskomuksia virheistä ja tarkoituksellisista virheistä (Artikkeli III).

Laadullinen sisällönanalyysi (qualitative content analysis, QCA) on metodi, jolla voidaan systemaattisesti kuvata laadullisen materiaalin merkityksiä (Schreier, 2012). Siinä luokitellaan materiaalia kategorioihin.

Sisällönanalyysi on systemaattista, joustavaa, ja se pelkistää aineistoa (Schreier, 2012). Viimeinen seikka erottaa sisällönanalyysin muista laadullisen tutkimuksen menetelmistä (Schreier, 2012). Sisällönanalyysissa pyritään siis suppeampaan aineistoon.

Sisällönanalyysilla analysoidaan erilaisia dokumentteja, esimerkiksi kirjoja, artikkeleita, haastatteluita, keskusteluja tai melkein mitä tahansa materiaalia, jota voidaan esittää kirjallisessa muodossa (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Tutkittava ilmiö pyritään saattamaan tiivistettyyn ja yleiseen muotoon. Sisällönanalyysi on eräs tekstianalyysin muoto, jolla kuvataan inhimillisiä merkityksiä (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Aineiston kerääminen ja analysointi ovat induktiivisia, sillä keräyksessä ei käytetä tiettyjä ohjaavia mittareita, ja analyysissä avainkategoriat ja käsitteet saavat tulla aineistosta (Schreier, 2012).

Sisällönanalyysissä luodaan koodauskehys, jolla valittua aineistoa analysoidaan. Sisällönanalyysi koostuu Schreierin (2012) mukaan kahdeksasta vaiheesta:

1. Tutkimuskysymyksen päättäminen
2. Aineiston valitseminen
3. Koodauskehysten rakentaminen
4. Aineiston jakaminen koodausyksiköihin
5. Koodauskehysten kokeileminen
6. Koodauskehysten arviointi ja muokkaaminen
7. Pääanalyysi
8. Tulosten tulkitseminen ja esittäminen

Näistä vaiheista voidaan kiinnittää huomio systemaattisuuteen, jolla koodausta pyritään tekemään mahdollisimman tarkasti muun muassa kokeilemalla koodauskehystä ja muokkaamalla sitä edelleen.

Tuomi ja Sarajärvi (2018) puolestaan viittaavat Timo Laineen runkoon laadullisen tutkimuksen etenemisestä. Aluksi laadullisessa tutkimuksessa tehdään selkeä päätös siitä, mihin keskitytään aineistossa ja mikä siinä kiinnostaa. Toisek-

si käydään läpi aineistoa erotellen kiinnostuksenkohteet, jätetään muu aineisto pois ja kerätään halutut asiat muusta aineistosta erilleen. Kolmanneksi luokitellaan, teemoitellaan tai tyypitellään aineisto ja neljänneksi kirjoitetaan yhteenveto. Kohdalla kaksi tarkoitetaan aineiston litterointia tai koodaamista. Kohdassa kolme puolestaan analysoidaan aineistoa esimerkiksi määrittelemällä luokkia ja lasquemalla niiden sisältöä (luokittelu), pilkkomalla ja ryhmittelemällä aineistoa etsien teemoihin liittyviä näkemyksiä (teemoittelu) tai käytetään tyyppiesimerkkejä (tyypittely) (Tuomi & Sarajärvi, 2018).

Sisällönanalyysin luokittelua voidaan tarkemmin kuvata Tuomea ja Sarajärveä (2018) mukailten seuraavasti:

1. Haastattelujen kuunteleminen ja auki kirjoitus sana sanalta
2. Haastattelujen, dokumenttien ym. aineistojen lukeminen ja sisältöön perehtyminen
3. Pelkistettyjen ilmaisujen etsiminen ja alleviivaaminen
4. Pelkistettyjen ilmaisujen listaaminen
5. Samankaltaisuuksien ja erilaisuuksien etsiminen pelkistetyistä ilmauksista
6. Pelkistettyjen ilmauksien ryhmittely/yhdistäminen ja alaluokkien muodostaminen
7. Alaluokkien yhdistäminen ja niistä yläluokkien muodostaminen
8. Yläluokkien yhdistäminen pääloukiksi tai yhdistäväksi luokaksi ja kokoavan käsitteen muodostaminen

Nähdäkseni Sarajärven ja Tuomen luokittelussa päästään vielä Schreieria tarkemmin sisällönanalyysin toteuttamisen ytimeen. Luokittelussa halutaan löytää pelkistettyjä ilmaisuja ja muodostaa ensin alaluokkia ja sitten yläluokkia.

Laadullisessa tutkimuksessa voidaan puhua aineistolähtöisestä, teoriasidonnaisesta tai teorialähtöisestä analyysistä (Eskola, 2007; Tuomi ja Sarajärvi, 2018). *Aineistolähtöisessä analyysissä (data driven content analysis)* tutkimusaineistosta rakennetaan teoreettinen kokonaisuus siten, että aineistoyksiköitä ei ole etukäteen päätetty eikä aiemmilla tiedoilla, havainnoilla tai teorioilla ole merkitystä. Aineistolähtöisen analyysin varjopuolena nähdään riski siitä, että tutkijan omat ennakkokäsitykset ohjaavat kuitenkin analyysia. Teoriaohjaavassa tai teoriasidonnaisessa analyysissä teoriaa voidaan käyttää apuna, mutta analyysia ei tehdä teorian pohjalta. Teorialähtöisessä analyysissä tukeudutaan teoriaan, malliin tai jonkin auktoriteetin ajatteluun. Malli kuvaillaan ja ilmiö määritetään mallin mukaisesti (Eskola 2007; Tuomi ja Sarajärvi, 2018). Näiden lisäksi voidaan puhua *ulkoapäin tulevasta sisällönanalyysistä (extrinsic content analysis)* (Cohen, Manion & Mor-

rison, 2007), jossa kategoriat on etukäteen päätetty ja joka voi olla teoriasidonnaista tai -lähtöistä.

Sisällönanalyysin vahvuutena näen sen, että sillä päästään tarkasti käsiksi johonkin valittuun ilmiöön. Puolestaan haasteena on rajata ilmiö tarpeeksi hyvin ja toisaalta tuottaa kuvausta riittävän yleisellä tasolla.

3.3.3 Tapaustutkimus

Pohdin nyt tapaustutkimusta yleisesti tutkimusmenetelmänä. Tapaustutkimusta käytän tässä työssä selvittämään tarkoituksellisen virheen sisältävän vertailutehtävän käyttöä (Artikkeli IV).

Tapaustutkimuksen (case study) tarkoituksena on saavuttaa monipuolinen ja syvä ymmärrys tutkimusaiheesta (Creswell, 2007). Tapaustutkimuksen kohteena on usein jokin tapahtumakulku tai ilmiö, jota kuvataan keräämällä siitä mahdollisimman monipuolinen aineisto (Laine, Bamberg & Jokinen, 2007; Yin, 2014). Tapaustutkimuksessa tarkastellaan siis jotain tiettyä kohdetta.

Tapaustutkimuksen tarkoituksena on rakentaa tapausten kuvailut, verrata tapauksia ja lopulta pohtia niiden merkityksiä (Creswell, 2007). Pyritään siis vastaamaan kysymyksiin ”miten” ja ”miksi”.

Tapaustutkimus voi tähdätä empiirisen väitteen havainnollistamiseen tai perusteluun, empiiristen havaintojen jäsentelyyn, arviointiin ja tulkintaan tai teorian rakentamiseen (Peltola, 2007). Tapaustutkimuksen avulla voidaan näyttää toteen syitä ja seurauksia, sillä siinä tarkastellaan seurauksia todellisessa kontekstissa (Cohen, Manion & Morison, 2007).

Useampaa tapausta käsittelevän tapaustutkimuksen kuvauksessa muodostetaan ensin tapauskohtaiset kuvaukset, sitten vertaillaan tapauksia ja lopuksi pohditaan niiden merkityksiä (Creswell, 2007). Analysointivaiheessa aineisto ensin hajotetaan pieniin osiin, joita voi kutsua segmenteiksi ja sitten jälleen yhdistetään niitä isompiin kokonaisuuksiin, kategorioihin, joiden pohjalta voidaan tehdä tulkintaa ja johtopäätöksiä (Kananen, 2013).

Kuitenkin tulee muistaa, että pelkkä tapausten kuvailu ei riitä, vaan on pyrittävä vuoropuheluun ilmiön ainutlaatuisien ominaisuuksien ja yleisempien havaintojen välillä (Peltola, 2007). Esimerkiksi tapausten samankaltaisuuksia ja eroavaisuuksia tutkittaessa voidaan päästä yleisempiä ilmiöitä selittäviin havaintoihin (Peltola, 2007).

Staken (1995) mukaan laadullisessa tutkimuksessa ei tarvitse puhua yleistämisestä (generalization), sillä sen tarkoitus on tarkentaminen (particularization).

Tarkoituksena on siis ymmärtää jotain yksittäistä tapausta mahdollisimman hyvin. Kuitenkin Yinin (2014) mukaan tapaustutkimuksen tarkoitus on analyytinen yleistäminen, mikä tarkoittaa teorioiden laajentamista ja yleistämistä. Jonkinasteinen yleistäminen voisi siis tapaustutkimuksessa olla mahdollista, kunhan se tehdään teoreettisella tasolla.

Tapaustutkimuksessa käytetään usein aineiston triangulaatiota. Triangulaatiossa aineistoa kerätään monista eri lähteistä käyttäen tilanteen vaatiessa sekä laadullista että määrällistä tutkimusta (Kananen, 2013). On olemassa aineisto-, teori-a-, menetelmä- ja tutkijatriangulaatiota. Aineistotriangulaatio tarkoittaa aineiston keräämistä eri lähteistä ja eri tavoin (Laine ym., 2007). Aineistotriangulaatiota käytetään monipuolisen kuvan saamiseksi tutkittavasta kohteesta. Sen käyttö on tyypillistä tapaustutkimuksessa (Kananen, 2013). Menetelmätriangulaatio tulee kyseeseen tapaustutkimuksessa, sillä erilaiset aineistot voivat vaatia erilaisia tutkimusmenetelmiä (Kananen, 2013).

Tapaustutkimuksen vahvuutena on, että tutkitusta, rajatusta tapauksesta saadaan erittäin monipuolinen, kattava ja yksityiskohtainen kuvaus. Tuloksia voidaan myös yleistää analyytisesti. Tapauksiin keskittymällä kuitenkin jätetään kertomatta mahdolliset muut kuvaukset.

3.4 Osallistujat, tutkimusaineisto ja aineiston analyysi

Tässä kappaleessa kerron tutkimuksen osallistujista sekä aineistoista ja niiden analysoinnista. Aluksi esitän yhteenvedon tutkimuskysymyksistä, osallistujista, aineistosta ja käytetyistä menetelmistä (Taulukko 5). Käyn sen jälkeen aineistoon liittyviä asioita läpi artikkeli kerrallaan.

Artikkelissa I käytimme alun perin tutkimushypoteeseja emmekä tutkimuskysymyksiä. Muutin hypoteesit tässä väitöskirjan yhtenveto-osassa kysymysmuotoon, jotta ne olisivat yhteneväisiä muun tutkimuksen kanssa.

Tutkimuskysymykset koskivat kapasiteettia ja innovatiivisuutta (joustavuutta) sekä nopeutta ja oikeellisuutta (Artikkeli I), vertailutehtävien, virheiden ja joustavuuden käyttöön liittyviä käsityksiä ja uskomuksia (Artikkelit II ja III) sekä tarkoituksellisten virheiden ja vertailutehtävien hyödyntämistä opetuksen tukena (Artikkelit II ja IV).

Taulukko 5. Artikkelien tietoja.

Artikkeli ja tutkimuskysymykset	osallistujat	aineisto	menetelmät
Artikkeli I			
1) Miten kapasiteetti innovatiivisuutta kohtaan (innovatiivisia ratkaisuja sisältävien tehtävien lukumäärä) on yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen?	266 oppilasta	yhtälönratkaisutestit	tilastolliset menetelmät: regressioanalyysi ja ristiintaulukointit
2) Miten taipumus innovatiivisuutta kohtaan on yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen?			
Artikkeli II			
1) Millaisia käsityksiä matematiikan opettajilla ja opettajaopiskelijoilla on useiden ratkaisutapojen ja niiden vertailun käytöstä?	25 opettajaa ja opettajaopiskelijaa (9+16)	litteroidut keskustelut	fenomenografinen analyysi
2) Millaisia eroja on matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksissä vertailumenetelmästä?			
Artikkeli III			
1) Millaisia syitä opettajat antavat spontaanien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöön opetuksessaan?	23 opettajaa	puoliavoimen kysely	sisällön-analyysi
2) Ovatko opettajat taipuvaisia käyttämään spontaaneja ja tarkoituksellisia virheitä opetuksessaan?			
Artikkeli IV			
1) Millaisia virhekäsityksiä virheellisen esimerkin käyttö tuo esiin?	74 oppilasta ja 4 opettajaa	oppitunnin opettajajohtoisesta aineiston litteraatiit	tapaus-tutkimus
2) Miten opettajat käyttävät virheellistä esimerkkiä? (opettajien toimintatavan kuvaus, käytetyt kysymystyyppit ja opettajan odotusaika)			

Neljän artikkelini tutkimuksiin osallistui yhteensä 340 oppilasta ja noin 40 opettajaa (osassa tutkimuksista oli keskenään samoja opettajia). Aineistona toimivat yhtälönratkaisutestit, litteroidut keskustelut, puoliavoimen kyselyn aineisto ja oppitunnin opettajajohtoisesta videoaineiston litterointit. Tutkimusmenetelmiä

olivat Artikkelissa I regressioanalyysi ja ristiintaulukointi, Artikkelissa II fenomenografia, Artikkelissa III sisällönanalyysi ja Artikkelissa IV tapaustutkimus.

3.4.1 Artikkelit I

Ensimmäisen artikkelin tutkimukseen osallistui 266 oppilasta, tarkemmin 93 kahdeksasluokkalaista, 164 lukion toisella luokalla opiskelevaa, joista edelleen 103 pitkän matematiikan lukijaa ja 61 lyhyen matematiikan lukijaa sekä yhdeksän ammattikoululaista. Kahdeksasluokkalaisista 75 oppilasta oli ollut jollain tavoin yhteydessä käsitteellistä ymmärrystä ja joustavuutta tavoittelevan materiaalin käyttöön. Mukana oli sekä maalais- että kaupunkilaiskouluja. Otos ei ollut edustava, vaan mukaan oli valikoitunut koululuokkia suomalaistutkijoiden yhteyksien perusteella. Keräsimme aineiston keväällä 2016.

Teetimme osallistujille kolmivaiheisen yhtälönratkaisutestin (Tri-phase flexibility assessment test), jonka suomensimme opettajanohjeineen. Testin oli kehittänyt ja testannut Xu:n ja kollegoiden tutkimusryhmä (Xu ym., 2017). Testi oli Artikkelin I tutkimuksen lisäksi osa kansainvälistä tutkimusta, jossa samalla testillä testasimme oppilaita Suomesta, Ruotsista ja Espanjasta (Star, Tuomela ym., 2022). Artikkelissa I keräämämme aineisto oli siis myöhemmin suoraan osa kansainvälistä aineistoa. Niin ikään samaa aineistoa käytimme kolmannessa tutkimuksessa, jossa vertasimme edellä mainitun yhtälönratkaisutestin tuloksia samojen oppilaiden myöhemmin tekemiin ylioppilaskokeisiin (Hästö, Palkki, Tuomela & Star, 2019).

Testi sisälsi 12 yhtälöä ja kolme vaihetta. Opettajan tuli lukea ääneen oppilaille aina seuraavan vaiheen ohje. Ensimmäisessä vaiheessa kukin yhtälö ratkaistiin merkittyyntä laatikkoon yhdellä ratkaisutavalla. Tähän aikaa oli 15 minuuttia. Toisessa vaiheessa samoja yhtälöitä ratkaistiin muihin laatikoihin (viisi) mahdollisimman monella eri tavalla. Tähän aikaa oli 20 minuuttia. Viimeisessä vaiheessa tuli viidessä minuutissa jokaisesta yhtälöstä ympyröidä parhaana pitämänsä ratkaisutapa. Yhtälöt on mahdollista jakaa kolmen yhtälön ryhmiin. Testin yhtälöt löytyvät Kuvasta 4.

1) $4(x - 2) = 24$	7) $8(x - 5) = 3(x - 5) + 20$
2) $3(x + 0,69) = 15$	8) $8(x - \frac{2}{5}) - 11 = 6(x - \frac{2}{5})$
3) $4(x + \frac{3}{5}) = 12$	9) $5(x + 0,6) + 3x = 5(x + 0,6) + 7$
4) $4(x + 6) + 3(x + 6) = 21$	10) $\frac{2x-6}{2} + \frac{6x-18}{3} = 5$
5) $5(x + \frac{3}{7}) + 3(x + \frac{3}{7}) = 16$	11) $\frac{x+3}{3} + \frac{3x-9}{9} = 1$
6) $2(x - 0,31) + 3(x - 0,31) = 15$	12) $\frac{5x+5}{5} + \frac{6x+6}{6} = 6$

Kuva 4. Testin yhtälöt (Uudelleenjulkaistu luvalla Artikkelista I © 2019 NCM).

Testit pisteytettiin Xu:n ja kollegoiden (Xu ym., 2017) pisteytysprotokollan mukaan, ja pisteytyksen tarkennuksista keskusteltiin kansainvälisen tutkimusryhmän palaverissa. Suomen testit pisteytti tutkimusavustaja, ja 12 oppilaan pisteytyksen tarkasti itsenäisesti kaksi muuta tutkimusryhmän henkilöä. Pisteytyksissä tuli ilmi 98 prosentin reliabiliteetti eri pisteyttäjien välisten arvioiden välillä (inter-rater reliability).

Testissä pisteytettiin, oliko ratkaisu oikein vai väärin. Erikseen luokiteltiin kukin ratkaistu yhtälö strategiatyypin mukaan: standardistrategia, innovatiivinen strategia tai muu strategia. Standardistrategialla tarkoitettiin strategiaa, jossa toteutettiin neljää vaihetta tässä järjestyksessä: 1) poista sulkeet, 2) yhdistä samannuotoiset termit, 3) siirrä muuttujatermit vasemmalle puolelle yhtälöä ja vakio-termit oikealle ja 4) jaa muuttujan kertoimella. Jokaiselle testin tehtävälle oli pisteytysohjeissa nimetty sekä standardistrategia että innovatiivinen strategia. Innovatiivisella strategialla tarkoitettiin esimerkiksi Kuvan 5 oikeanpuoleista strategiaa.

Standardistrategia

$$4(x + 6) + 3(x + 6) = 21$$

$$4x + 24 + 3x + 18 = 21$$

$$7x + 42 = 21$$

$$7x = -21$$

$$x = -3$$

Innovatiivinen strategia

$$4(x + 6) + 3(x + 6) = 21$$

$$7(x + 6) = 21$$

$$x + 6 = 3$$

$$x = -3$$

Kuva 5. Esimerkki standardistrategiasta ja innovatiivisesta strategiasta.

Aineistoa analysoitiin kvantitatiivisesti. Tulosten analysoinnin teki ensisijaisesti artikkelin toinen kirjoittaja Peter Hästö. Käytimme erilaisia kuvaajia aineiston selittämiseen. Käytimme neljää muuttujaa: kapasiteetti (innovatiivisuutta kohtaan), taipumus (innovatiivisuutta kohtaan), nopeus ja oikeellisuus. Selvitimme korrelaatioita muuttujien välillä ja sitten käytimme regressioanalyysia. Riippumattomina muuttujina toimivat kapasiteetti ja taipumus sekä riippuvina muuttujina nopeus ja oikeellisuus. Muuttujat selityksineen on esitetty Taulukossa 6. Lisäksi käytimme ristiintaulukointia, jolla yhteyksiä saatiin tarkasteltua lisää.

Taulukko 6. Muuttujat ja niiden määritelmät (Muokattu Artikkelista I).

Muuttuja (englanniksi, lyhenne)	Määritelmä
Kapasiteetti innovatiivisuutta kohtaan (capacity, cap)	Innovatiivisia strategioita sisältävien tehtävien lukumäärä
Taipumus innovatiivisuutta kohtaan (inclination, incl)	Innovatiivisia ratkaisuja sisältävien tehtävien lukumäärä ensimmäisellä kierroksella miinus innovatiivisia ratkaisuja myöhäisemmällä kierroksella sisältävien tehtävien lukumäärä
Nopeus (speed, speed)	Ensimmäisellä kierroksella yritettyjen tehtävien lukumäärä, riippumatta siitä, onko tehtävä oikein
Oikeellisuus (accuracy, acc)	Oikein ratkaistujen tehtävien lukumäärä jaettuna summalla, jossa oikein ratkaistujen tehtävien lukumäärä ja väärin ratkaistujen tehtävien lukumäärä

3.4.2 Artikkelii II

Toisen artikkelin tutkimukseen osallistui 25 suomalaista matematiikkaa opettavaa opettajaa ja opettajaopiskelijaa. Osallistujissa oli yhdeksän opettajaa: luokanopettajia alakoulussa ja aineenopettajia yläkoulussa ja lukiossa. Lisäksi tutkimukseen osallistui kuusitoista opettajaopiskelijaa: matematiikan aineenopettajaopiskelijoita ja luokanopettajaopiskelijoita, jotka opiskelivat matematiikkaa sivuaineena. Opettajat kävivät tutkimushetkellä vuonna 2014 Tutkiva oppiminen matematiikassa -täydennyskoulutuskurssia, jonka yhtenä osiona oli tutustuminen vertailutehtävien käyttöön ja joustavuuteen. Opettajaopiskelijat puolestaan kävivät vuonna 2015 yliopistolla pitämääni matematiikan kurssia, jossa oli didaktinen näkökulma. Nauhoitin heidänkin keskustelunsa pienryhmissä. Osa opettajista oli kuullut vertailun käytöstä aiemmin, opettajaopiskelijoista puolestaan ei kukaan. Suunnittelin Artikkelin II aineistonkeruun ja nauhoitin pienryhmien keskustelut, jotka myöhemmin litteroin.

Toisen artikkelin tutkimusmenetelmänä käytin fenomenografiaa (ks. kappale 3.3.1). Pyrin siis selvittämään erilaisten käsitysten kirjoja (Marton, 1988). Tiedonkeruumetodina oli ryhmähaastattelu. Ryhmähaastattelussa keskustellaan käyttäen virikkeitä (Valtonen, 2005), joihin nyt toimivat matematiikan tehtävät ja reflektiokysymykset.

Tutkimushetkellä osallistujat jakaantuivat aluksi pienryhmiin itsenäisesti. Opettajat muodostivat omalla kurssillaan kolme kolmen hengen pienryhmää ja opettajaopiskelijat omalla kurssillaan neljä neljän hengen pienryhmää. Sitten osallistujat alkoivat tehdä matematiikan tehtäviä. Jaoin kullekin pienryhmälle kaksi eri Yakesin ja Starin (2011) artikkelin suomennettua, pääosin yhtälönratkaisuun liittyvää tehtävää, joita he ratkaisivat kahdella eri tavalla sijoittaen vastaukset rinnakkain. Pyysimme osallistujia vertailemaan ratkaisutapoja. Seuraavaksi heidät jaettiin uusiin pienryhmiin, joissa esiteltiin omat tehtävät ja niiden ratkaisut. Tämän jälkeen osallistujat jatkoivat keskustelua Yakesin ja Starin (2011) käyttämien itsereflektiokysymysten avulla:

1. ”Pohdi vertailevaa tehtävien tekemistä suhteessa omaan opetukseeni.”
2. ”Pohdi vertailevaa tehtävien tekemistä suhteessa omiin matematiikan kykyihisi ja ymmärtämiseesi.” (Artikkeli II)

Tavoitteena oli peilata opettajan omaa kokemusta vertailumenetelmän käytöstä omiin kykyihinsä ja ajatukseensa vertailumenetelmän käytöstä opetuksessa. Lopuksi käytiin vielä yhteinen koontikeskustelu vetäjän ohjauksessa. Opettajien

osiossa tarkkailin tilannetta muistiinpanoja tehden ja nauhoitin keskustelut. Opettajaopiskelijoiden osiossa toimin itse keskustelun moderaattorina eli keskustelun ohjaajana ja valvojana.

Vertailutehtäviä koskeva osio kesti puolitoista tuntia, josta viimeiset puoli tuntia oli vertailutehtävistä ja joustavuudesta keskustelua, ja tämä viimeinen osio toimi varsinaisena tutkimusaineistonani. Aineisto koostui ääninauhalta litteroimistani keskusteluista, joista selvitin opettajien pedagogisia ajatuksia vertailumenetelmästä. Keskusteluista litteroin siis uudessa ryhmässä käydyin reflektiokeskustelun (noin 25 minuuttia) ja moderaattorin vetämän yhteenvetokeskustelun (noin viisi minuuttia).

Tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. ”Millaisia erilaisia käsityksiä matematiikan opettajilla ja opettajaopiskelijoilla on vertailumenetelmästä?”
2. ”Millaisia eroja on matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksissä vertailumenetelmästä?” (Artikkeli II)

Analysoin aineiston aineistolähtöisesti fenomenografisen analyysin periaatteita noudattaen. Jaoin aineiston yhden ihmisen puheenvuoroihin eli segmentteihin (Syrjälä ym., 1994). Luin aineiston läpi muutamia kertoja kokonaiskäsityksen saamiseksi. Aineiston analysoinnissa käytin QSR nVivo 10 -tietokoneohjelmaa. Luokittelussa etsin aluksi alemman, sitten ylemmän tason kategorioita. Analysoinnissa pyrin yksilön analysoinnin sijaan analysoimaan merkityksiä (Marton, 1988). Niin ikään tavoittelin abstraktia kuvaustasoa ja kategorioiden välisiä eroja (Huusko & Paloniemi, 2006).

3.4.3 Artikkelii III

Kolmannen artikkelin tutkimukseen osallistui 23 suomalaista opettajaa loppuvuonna 2015. Kyseessä oli laatimani puoliavoin nettikysely virheistä ja tarkoituksellisista virheistä. Lähetin kyselyn 50 opettajalle. Osallistujien määrä ei ollut kovin suuri, mutta laadulliseen tutkimukseen riittävä. Vastausprosentti oli 46 eli nettikyselyksi kuitenkin varsin korkea (vrt. Nulty, 2008).

Aineistonani toimivat 23 opettajan kirjalliset kyselyvastaukset. Kyselyssä oli avoimien kysymysten lisäksi suljettuja kysymyksiä. Opettajista suurimmalla osalla oli yli 10 vuoden opetuskokemus (65 %) ja kellään ei ollut alle kahden vuoden työkokemusta. Vastanneista 11 oli ollut jollain tavoin tekemisissä Joustava yhtä-

lönratkaisu -hankkeen kanssa. Tutkimuksessa käytettiin seuraavien avointen kysymysten vastauksia:

Q1. ”Minkä rooliin ajattelet virheillä olevan matematiikan oppimisessa?”

Q2. ”Miksi käytät tai et käytä tahallista virhettä?” (Artikkeli III)

Kysymyksessä Q2 käytin vielä termiä tahallinen virhe, jonka korvasi myöhemmin termi tarkoituksellinen virhe. Tahallinen virhe selitettiin osallistujille.

Varsinaiset tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. ”Millaisia syitä opettajat antavat spontaanien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöön opetuksessaan?”
2. ”Ovatko opettajat taipuvaisia käyttämään spontaaneita ja tarkoituksellisia virheitä opetuksessaan?” (suomennettu Artikkelista III)

Tein analysoinnin aluksi itsenäisesti. Opettajien vastaukset analysoin käyttäen laadullista sisällönanalyysia (ks. luku 3.3.2). Segmenttinä käytin yhtä opettajan lausetta. Sama lause saattoi joissain tapauksissa kuulua useampaan kategoriaan. Luotettavuuden lisäämiseksi ohjaajani luokitteli aineiston löytämäni kategorioiden pohjalta ja neuvottelimme sitten eroavaisuuksista, kunnes pääsimme niistä yksimielisyyteen.

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä käytin aineistolähtöistä sisällönanalyysia, jossa oli vaikutteita fenomenografisesta analyysistä. Tarkoituksena oli löytää ihmisten eri tavat kokea tai käsitteellistää ilmiö (Marton, 1986; Syrjälä ym., 1994). Hain siis virheisiin liittyvää käsitysten kirjoa. Kategorisoin lauseet niiden oletettujen tarkoitusten perusteella tarkoituksena saada kategorioiden ja niiden sisällön kuvaus, mikä on analyysin päätarkoitus (Marton, 1986). Aineistona käytin kyselylomakkeen kahta kysymystä. Prosessin tukena käytin QSR NVivo 10 -tietokoneohjelmaa. Tein alkuperäisen kategorisoinnin, mutta kategorisoinneista keskusteltiin molempien tutkijoiden kesken ja niitä osin muutettiin keskusteluiden perusteella. Sen jälkeen teimme aineiston kategorioihin jaottelun uudelleen sovittujen kategorioiden perusteella ja ratkaisimme syntyneet eroavaisuudet.

Toisessa tutkimuskysymyksessä käytin ulkoapäin ohjautuvaa sisällönanalyysia (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Kategoriat olivat ennalta määrättyjä ja toisensa poissulkevia. Osallistujien vastaukset jaettiin sen mukaan, tukivatko ne virheiden käyttöä vai eivät tai suhtautuivatko vastaajat asiaan neutraalisti tai varauksellisesti (Pro, Contra ja Neutral).

3.4.4 Artikkelin IV

Neljännän artikkelin tutkimukseen osallistui neljä suomalaista seitsemättä luokkaa (A, B, C ja D) sekä heidän matematiikan opettajansa. Ryhmät olivat eri kouluista ja eri matematiikan aineenopettajien opettamia (neljä opettajaa). Ryhmät osallistuivat Joustava yhtälönratkaisu -hankkeeseen keväällä 2015 ja käyttivät tutkimusryhmämme suunnittelemaa JYR-materiaalia osana matematiikan opiskeluaan. Yhteensä oppilaita osallistui 74.

Opettajat kuvailivat ryhmiään. Luokan A oppilaita (12 oppilasta) kuvailtiin ”taidoiltaan kaiken tasoisiksi, ei mielellään matematiikasta keskusteleviksi, mutta melko aktiivisiksi”. Luokan B oppilaita (17 oppilasta) kuvailtiin ”taidoiltaan heikoksi, joskus matematiikasta keskustelevaksi ja melko passiiviseksi”. Luokan C oppilaita (26 oppilasta) kuvailtiin ”melko aktiiviseksi, mutta ei mielellään matematiikasta keskustelevaksi”. Luokan D oppilaita (19 oppilasta) kuvailtiin ”pääosin matematiikassa lahjakkaiksi, jonkin verran matematiikasta keskusteleviksi ja melko aktiivisiksi”.

Tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

1. ”Millaisia virhekäsityksiä virheellisen esimerkin käyttö tuo esiin?”
2. ”Miten opettajat käyttävät virheellistä esimerkkiä? (opettajien toimintatavan kuvaus, käytetyt kysymystyypit ja opettajan odotusaika (vastausaika)” (Artikkeli IV)

Aineistona toimivat oppituntien keskustelut, jotka kuvasin osin itse videokameralla Joustava yhtälönratkaisu -projektin ohessa. Kuvauksissa käytimme kahta koko luokkaa kuvannutta kameraa ja pienryhmäkameroita. Kuvasimme siis neljää luokkaa eri kouluilla. Litteroin tutkimukseen valitsemani keskustelut myöhemmin.

Luokissa käytiin opettajajohtoiset koko luokan keskustelut Kuvan 6 tehtävästä, joka sisälsi tarkoituksellisen virheen. Tätä kutsuttiin artikkelissa oikean ja virheellisen esimerkin vertailuksi. Myöhemmin olen alkanut käyttää termiä tarkoituksellinen virhe, joka on laajempi termi (ks. luku 2.3.3). Tehtävässä esitettiin kahden kuvitteellisen oppilaan, Kallen ja Leenan, ratkaisut, joista toisessa esiintyi virhe. Luokkahuoneen oppilaat analysoivat ratkaisuja käyttäen tehtävässä annettuja kysymyksiä. Oppilaat perehtyivät tehtävään ensin itse ja sitten yhdessä opettajan kanssa koko luokan keskustelussa.

TEHTÄVÄ. Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin yhdistin vasemman puolen termit keskenään.	$45y + 90 = 60y$	$45y + 90 = 60y$	Ensin vähensin molemmilta puolilta termin 45y.
Seuraavaksi vähensin molemmilta puolilta termin 60y.	$135y = 60y$	$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$	Laskin $60y - 45y$ saaden vastaukseksi 15y.
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 75.	$135y - 60y = 60y - 60y$	$90 = 15y$	Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 15.
Sain ratkaisuksi $y = 0$.	$75y = 0$	$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$	Sain vastaukseksi $y = 6$.
	$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$	$6 = y$	
	$y = 0$		

Kysymyksiä:

- Kumpi ratkaisusta on oikein?
- Mikä virhe on tehty, että on päädytty väärään ratkaisuun?
- Muodosta omin sanoin ehto, joka kertoo, miten erilaisia termejä saa yhdistää keskenään.

Kuva 6. Tarkoituksellinen virhe matematiikan esimerkissä (CC BY 4.0 lisenssin alainen kuva Artikkelista IV © 2016 Palkki).

Käytin tutkimuksessa kolmea eri lähestymistapaa aineistoon. Ensinnäkin selvitin oppilaiden virhekäsitykset etsimällä ne litteroinneistani. Toiseksi kuvasin opettajan ja ryhmän puheita aineistolähtöisesti analysoiden. Kolmanneksi tutkin niin sanottua *opettajan odotusaikaa* (*teacher wait time*), joka tarkoittaa opettajan kysymyksen jälkeen oppilaille vastaamisen aloittamiseen annettua aikaa. Artikkelissa tästä käytettiin nimitystä ”vastausaika”, jota parempana suomennoksena nyt pidän termiä ”opettajan odotusaika”, sillä siitä selviää mielestäni tarkemmin, että aika liittyy opettajan toimintaan.

Virhekäsitysten selvittämiseksi litteroin aineiston ja luin sen huolellisesti läpi useampaan kertaan. Tämän jälkeen poimin aineistosta virhekäsitykset ja vielä kerran tarkastin, että kaikki oli varmasti löydetty.

Luokan puhetta kuvatessani tapauksina toimivat kunkin luokan keskustelut, joista muodostin kuvaukset ja yhteenvedot. Muodostin ensin tapauskohtaiset kuvaukset, sitten vertailin tapauksia ja lopuksi pohdin niiden merkityksiä, kuten tapaustutkimuksessa voidaan tehdä (Creswell, 2007). Lisäksi opettajien keskusteluista laskin, kuinka monta lausetta opettajat käyttivät suhteessa oppilaisiin ja

millaisia kysymystyyppä he käyttivät. Kysymystyyppä ovat aiemmin tutkineet Star, Newton ym. (2015). Kysymystyyppä ovat ”avoin”, ”miksi”, ”miten”, ”mitä”, ”retorinen/valinta” ja ”logistinen/hallinta” (ks. tarkemmin Taulukko 3). Tutkimuksessa laskin käytetyt kysymystyyppit. Keskustelujen luokittelussa käytin QSR NVivo 10 -tietokoneohjelmaa.

Ideaaliseksi opettajan odotusajaksi on saatu 3–5 sekuntia, joka vaikuttaa matematiikassa saavutettuihin oppimistuloksiin sekä opettajan ja oppilaan väliseen diskurssiin eli keskusteluun (Tobin, 1986). Aineistosta selvitin opettajan odotusajan eli ajan, jonka opettaja antoi oppilaille vastaamiseen (yli vai alle kolme sekuntia).

4 Tulokset

Tässä luvussa esittelen artikkelien tulokset ja niiden yhteenvedon. Tutkimukseni koostuu neljästä artikkelista (I–IV), joissa selvitetään joustavuutta opiskelijoilla sekä opettajien käsityksiä, uskomuksia ja tapaa suhtautua vertailutehtäviin, virheisiin ja tarkoituksellisiin virheisiin. Tässä ei käydä läpi kaikkien artikkelien kaikkia tuloksia, mutta toisaalta osa luvuista sisältää sellaisiakin tuloksia, joita ei ole artikkeleissa esitetty (II ja III).

Ensimmäiseksi esitän tuloksia testin tehneiden suomalaisoppilaiden (kahdeksasluokkalaisten ja lukiolaisten) joustavuudesta ja sen yhteydestä nopeuteen ja tehtävien oikeellisuuteen. Toiseksi tutkin opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä useiden ratkaisujen ja niiden vertailun käytöstä eli vertailumenetelmästä. Kolmanneksi selvitän opettajien uskomuksia virheistä ja tarkoituksellisista virheistä. Neljänneksi tutkin, mitä tapahtuu, kun matematiikan opettajat käyttävät tarkoituksellisen virheen sisältävää vertailutehtävää luokkahuoneessa. Lopuksi pohdin, mitä tuloksia tutkimus kokonaisuutena toi ilmi vastaamalla koko tutkimuksen tutkimuskysymyksiin.

4.1 Artikkelit I: Suomalaisoppilaiden joustavuus ja sen yhteys nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisussa

Tässä kappaleessa käyn läpi ensimmäisen artikkelin tuloksia kertoen aluksi yleisiä tuloksia, sitten regressioanalyysin tuloksia ja lopuksi ristiintaulukointeja.

Oppilaat tuottivat 12:een tehtävään keskimäärin 9,12 vastausta oppilasta kohden. Innovatiivisia ratkaisuja oli 3,2 oppilasta kohden (kaikkiaan 853). Parhaaksi merkityjä innovatiivisia ratkaisuja (vaihe 3) puolestaan oli 86 % kaikista innovatiivisista. Innovatiivisten ratkaisujen lukumäärän perusteella testiin osallistuneet suomalaisoppilaat eivät vaikuttaneet kovin joustavilta.

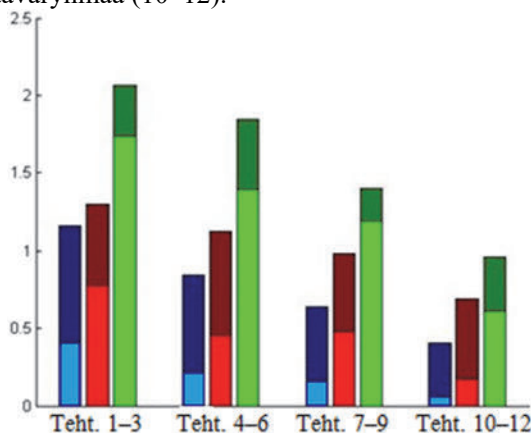
Seuraavissa tuloksissa tarkastelen kahdeksasluokkalaisten ja lukion toisen vuosikurssin opiskelijoita; yhdeksän ammattikoululaista on jätetty pois näistä tarkasteluista. Taulukossa 7 esitän diagrammeissa käytetyt värit, ryhmien lukumäärän ja oppilaiden lukumäärän kussakin ryhmässä.

Taulukko 7. Oppilasryhmät (Muokattu Artikkelista I).

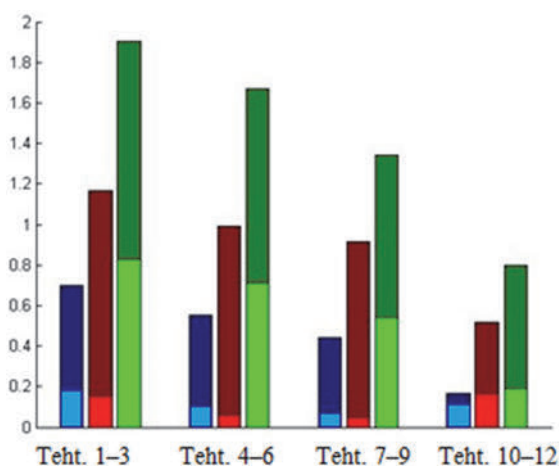
Ryhmä	Väri diagrammissa	Ryhmien lukumäärä	Oppilaiden lukumäärä
Kahdeksaluokkalaiset	sininen	6	93
Lukion 2.-luokkalaiset, lyhyt matematiikka	punainen	4	61
Lukion 2.-luokkalaiset, pitkä matematiikka	vihreä	5	103

Kuvassa 7 esitän oikeiden ja virheellisten ratkaisujen keskimääräiset lukumäärät tehtävää kohden aluksi tehtävien 1–3, sitten tehtävien 4–6, sitten tehtävien 7–9 ja lopuksi tehtävien 10–12 osalta. Esimerkiksi kuvan vasemman puolimmais sininen pylvä tarkoittaa, että yläkoululaiset ovat saaneet 1,2 oikeaa ratkaisua tehtävää kohden tehtäväryhmässä 1–3. Kussakin tehtävässä on ollut keskimäärin 0,4 oikeaa ja 0,8 virheellistä ratkaisua.

Kuvassa 8 puolestaan esitän innovatiivisten ja standardiratkaisujen keskimääräiset lukumäärät. Lukion toisen vuosikurssin pitkän matematiikan opiskelijoiden innovatiivisten ratkaisujen lukumäärä oli suurin (Kuva 8). Toisaalta lyhyen matematiikan lukijoiden innovatiivisten ratkaisujen lukumäärä on matalammalla tasolla kuin yläkoululaisten innovatiivisten ratkaisujen lukumäärä lukuun ottamatta viimeistä tehtäväryhmää (10–12).



Kuva 7. Oppilaiden oikeiden (kirkas alaosa) ja virheellisten (tumma yläosa) ratkaisujen keskimääräiset lukumäärät tehtävää kohden neljässä eri tehtäväryhmässä (Muokattu Artikkelista I).



Kuva 8. Oppilaiden keskimääräinen innovatiivisten (kirkas, alhaalla) ja standardiratkaisujen (tumma, ylhäällä) keskimääräiset lukumäärät tehtävää kohden neljässä eri tehtäväryhmässä (Muokattu Artikkelista I).

Tilastollisista testeistä katsoimme ensiksi korrelaatioita muuttujien riippuvuuden testaamiseksi. Nopeuden ja oikeellisuuden välinen korrelaatio oli 0,48 p-arvon ollessa pienempi kuin 0,001. Korrelaatio näiden muuttujien välillä oli siis suuri. Kapasiteetin ja taipumuksen välinen korrelaatio oli -0,06 ($p > 0,1$), joten ne puolestaan eivät korreloineet. Korrelaatiot vaikuttivat siihen, miten lineaarinen regressioanalyysi tehtiin. Siinä valittiin riippumattomiksi muuttujiksi ne muuttujat, joiden korrelaatio oli pieni. Linearisessa regressioanalyysissä käytimme kapasiteettia ja taipumusta riippumattomina muuttujina ja nopeutta ja oikeellisuutta riippuvina muuttujina. Tulokset on esitetty Taulukossa 8.

Taulukko 8. Lineaarisen regressioanalyysin tulokset (n=266) (Muokattu Artikkelista I).

Riippuva muuttuja	Riippumaton muuttuja	Standardisoitu β	t	p
Nopeus $R^2 = .29, F = 53.4, p < 0.001$	kapasiteetti	.535	10.280	.000
	taipumus	-.024	-.454	.650
Oikeellisuus $R^2 = .45, F = 107.7, p < 0.001$	kapasiteetti	.671	14.650	.000
	taipumus	-.003	-0.073	.942

Lisäksi standardisoidun betan neliöt osoittivat, että tässä aineistossa kapasiteetilla oli vahva riippuvuus nopeuteen ja oikeellisuuteen nähden, sillä selitysosuudeksi saatiin 29 % ja 45 %.

Halusimme tutkia muuttujien välistä yhteyttä vielä lisää, jotta saisimme tarkempaa kuvaa tilanteesta. Ristiintaulukoita esitän Taulukoissa 9 ja 10. Ristiintaulukoinneista nähdään eri tavalla kuin korrelaatio-suorasta, minne oppilaat sijoituvat. Taulukosta 9 nähdään, että suuri kapasiteetti liittyy suureen nopeuteen, sillä suuren kapasiteetin ja suuren nopeuden saavuttaneita oppilaita on paljon. Puolestaan suuren nopeuden ja pienen kapasiteetin saavuttaneita oppilaita niin ikään on paljon. Suuri kapasiteetti (7–12) on yhteydessä suureen nopeuteen ja pieni nopeus on yhteydessä pieneen kapasiteettiin. Pieni kapasiteetti ei ole yhteydessä pieneen nopeuteen, vaan arvoja löytyy paljon sekä pienen nopeuden että suuren nopeuden kohdalta. Taulukossa 10 puolestaan suuri kapasiteetti on yhteydessä suureen oikeellisuuteen, mutta ei päinvastoin.

Taulukko 9. Nopeuden ja kapasiteetin ristiintaulukoinnin yhteenveto (Muokattu Artikkelista I).

Nopeus/ Kapasiteetti	Pieni nopeus (1–6)	Suuri nopeus (7–12)	Yhteensä
Pieni kapasiteetti (0–6)	70	134	204
Suuri kapasiteetti (7–12)	1	61	62
Yhteensä	71	195	266

Taulukko 10. Oikeellisuuden ja kapasiteetin ristiintaulukoinnin yhteenveto (Muokattu Artikkelista I).

Oikeellisuus/ Kapasiteetti	Pieni oikeellisuus (0–0.5)	Suuri oikeellisuus (0.5–1.0)	Yhteensä
Pieni kapasiteetti (0–6)	112	92	204
Suuri kapasiteetti (7–12)	1	61	62
Yhteensä	113	153	266

4.2 Artikkelii II: Opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä

Perehdyn nyt toisen artikkelin tuloksiin. Lisäksi esittelen tuloksia laajemmin kuin alkuperäisessä artikkelissa, joten luku on laajempi kuin muiden artikkelien luvut

ja sisältää alalukuja. Artikkelissa II tutkin matematiikkaa opettavien opettajien (luokanopettajien ja aineenopettajien) ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. Aineistolähtöinen fenomenografinen luokittelu toi esiin kolme pääkategoriaa: 1) Osallistujien oma oppiminen, 2) Menetelmän haasteita ja hyötyjä ja 3) Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa. Kolmatta kategoriaa en käsitellyt artikkelissa, mutta käsittelen sen nyt tässä. Tutkimusyksikkönä käytin yhden opettajan tai opettajaopiskelijan yhtä puheenvuoroa.

Taulukko 11. Kategorioihin luokiteltujen puheenvuorojen lukumäärät (opettajat n=9 ja opettajaopiskelijat n=16) (Uudelleenjulkaistu [mukautettu] CC BY 4.0 lisenssin alainen kuva Artikkelista II © 2018 Palkki).

KATEGORIA/ Alakategoria	puheenvuoroja/ opettajat	puheenvuoroja/ opettajaopiskelijat
Osallistujien oma oppiminen	12	26
Hyöty omalle laskutaidolle	3	17
Hyöty omalle käsitteelliselle osaamiselle	9	3
Ei hyötyä omalle oppimiselle	0	4
En osaa sanoa	0	2
Menetelmän haasteita ja hyötyjä		
Haasteita	23	5
Vain lahjakkailla, ei valmiuksia	7	1
Sekoittaa oppilaita	5	1
Ei kiinnosta	3	2
Vaatimukset opettajalle	4	0
Ei kehitä ymmärrystä	3	0
Ajanpuute	1	1
Hyötyjä	34	23
"Jotain liikahtaa päässä eri tavalla"	9	8
Opitaan matematiikasta yleensä	6	2
Sopivan menetelmän löytäminen	2	6
Vastauksen tarkistaminen	4	3
Opettajasta tuleeikin valmentaja	7	0
Opitaan useita tapoja nähdä asioita	3	2
Keskustelu lisääntyy	3	0
Kertaaminen	0	2
Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa	19	39
Tarvitaan uusia opetusmenetelmiä	3	0
Rutiinit ovat tärkeitä	0	5
Kaava kahlitsee	6	8
Aion käyttää opetuksessani	1	3

KATEGORIA/ Alakategoria	puheenvuoroja/ opettajat	puheenvuoroja/ opettajaopiskelijat
Käytännön toteutus: peräkkäin	5	5
Käytännön toteutus: rinnakkain	3	5
Käytännön toteutus: tilanteen mukaan	1	10
Käytännön toteutus: vain yksi tapa	0	3

4.2.1 Osallistujien oma oppiminen

Ensimmäisessä pääkategoriassa esiintyi opettajien ja opettajaopiskelijoiden omia kokemuksia siitä, kun he tekivät kaksi eri ratkaisutapaa sisältäviä matematiikan tehtäviä. Opettajat kokivat hyötyä omalle käsitteelliselle osaamiselleen ja opettajaopiskelijat laskutaidolleen. Esimerkiksi yläkoulun opettaja A sanoi:

”Itellä ainakin huomasin, että kannattaa niinku tuolla menetelmällä. Että jopa itellä, jolla luulin, että on tuota aika vankka laskurutiini niin... niin... selvästi helpottaa tämmösiä, jossa on paljon montaa muuttujaa.”

Kaksi opettajaopiskelijaa ilmoitti, ettei osannut arvioida vaikutuksia ja neljä opettajaopiskelijaa arveli, ettei menetelmästä ollut hyötyä omalle oppimiselle; kukaan opettajista ei vastannut näin.

4.2.2 Menetelmän haasteita ja hyötyjä

Toisessa pääkategoriassa pohdittiin vertailumenetelmän oletettuja hyötyjä ja haasteita ilman varsinaista sen käyttämiseen liittyvää opetuskokemusta lukuun ottamatta yhtä opettajaa, joka kertoi jo hyödyntäneensä vastaavaa ideaa. Kävi ilmi, että opettajat näkivät menetelmän käytölle useita eri hyötyjä (yhteensä 56 puheenvuoroa) ja joitain haasteita (yhteensä 28 puheenvuoroa).

Menetelmän haasteina nähtiin esimerkiksi, että se sopisi vain lahjakkaille tai sekoittaisi oppilaita, oppilaita eivät kiinnostaisi useat ratkaisutavat, menetelmä toisi lisävaatimuksia opettajalle, se ei kehittäisi ymmärrystä tai sen käyttöön ei olisi aikaa. Osa osallistujista vaikutti ajattelevan, että hitaasti etenevien oppilaiden tulisi oppia yksi menetelmä kunnolla. Opettajat toivat esiin haasteita 23 puheenvuorossa, kun taas opettajaopiskelijat viidessä.

Hyötyinä nähtiin, että menetelmän myötä asioita voitaisiin nähdä eri tavoin, matematiikan todellinen luonne avautuisi, löydettäisiin itselle sopivin, nopein tai tehokkain ratkaisutapa, vastauksen voisi tarkistaa, opettajan rooli muuttuisi

enemmän ohjaajaksi tai valmentajaksi, opittaisiin näkemään asioita eri näkökulmasta myös arkielämässä, keskustelu lisääntyisi ja kertaaminen mahdollistuisi. Opettajat (34 puheenvuoroa) näkivät menetelmän potentiaalin selkeämmin kuin opettajaopiskelijat (23 puheenvuoroa). Esimerkiksi:

Opettajaopiskelija P: "No pitäis, päästä eroon [rutiinien opettamisesta]. Ja tuntuu, että tämä on nimenomaan tapa, miten vois luovuutta synnyttää niissä, että ne oppis ajattelemaan ite.

Alakoulun opettaja A: " ...Että tuo onkin mun puolella tuo ope. Eikä niin että se yrittää mulle täältä jotakin syöttää näin...Se on mun puolella, se yrittää keksiä mulle sopivia keinoja!"

Opettajien ja opettajaopiskelijoiden vastaukset erosivat jonkin verran. Esimerkiksi vain opettajien mielestä matematiikan heikoimmin menestyneet eivät hyötyisi menetelmästä, vaan päinvastoin se sekoittaisi heitä tai ei kehittäisi ymmärrystä. Opettajat pohtivat käytännön näkökulmiakin, kuten että menetelmästä olisi ylimääräistä vaivaa. Hyviä puolia olisivat esimerkiksi keskustelun lisääntyminen ja että opettajan rooli muuttuisi valmentajaksi. Näitä käytännön näkökulmia opettajaopiskelijat eivät mahdollisesti vähäisen opetuskokemuksensa vuoksi pystyneet tuomaan esiin. Sen sijaan opettajaopiskelijat nostivat esiin huolen, ettei toista ratkaisutapaa ymmärrettäisi tai siitä ei olisi hyötyä vaan jopa haittaa proseduraaliselle osaamiselle. Opettajaopiskelijat myös mainitsivat joustavuuden kehittämisen ja kertaamisen mahdollisuudet.

4.2.3 Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa

Kolmas pääkategoria ilmaisee, miten opettajat suhtautuisivat menetelmän käyttöön omassa opetuksessaan. Osallistujat pohtivat, millaisia seikkoja käytännön toteutus mahdollisesti edellyttäisi. Käyn läpi tätä kategoriaa nyt tarkemmin, sillä näitä tuloksia ei ole esitetty Artikkelissa II tai missään muualla aiemmin.

Ensimmäisessä alakategoriassa (Tarvitaan uusia opetusmenetelmiä) opettajista kolme esitti puheenvuoroissaan kommentteja siitä, että ylipäänsä tarvittaisiin uusia opetusmenetelmiä.

Toisessa alakategoriassa (Rutiinit ovat tärkeintä) osan opettajaopiskelijoista (viisi puheenvuoroa) mukaan uutta menetelmää ei tarvittaisi, sillä rutiinien opettaminen on tärkeintä, ainakin osalle oppilaista. Esimerkiksi opiskelija L ilmaisi asian seuraavasti:

Opettajaopiskelija L: ”Toisaalta se, jos miettii oppilaita niinku. Luokassa on 25 oppilasta tai 20 oppilasta vaikka. Luokassa on aika erilaisia ihmisiä, todennäköisesti päätyy aika eri tehtäviin elämässä niin. Toisaalta tarviiko kaikki sitä ymmärrystä sillä tavalla, että riittääkö niille se rutiini, jos se riittää niitten elämässä se rutiininomainen laskeminen?”

Alakategoriassa kolme (Kaava kahlitsee) osallistujat toivat esiin, että yhden ratkaisutavan käyttö luo mallin, jossa oppilaat tekevät kaavamaisesti kuten opettaja neuvoo. Heidän mukaansa oppikirjoissakin on luettelomaisia kaavoja, joita toistetaan, alakoulun jakolaskusta lukioon saakka. Oppilaat itse voivat vaatia opettajilta luetteloiden käyttöä, sillä kirjassa näytetään niitä: *”täälläkin on tällee sanottu”*. Opettajat kokivat kuitenkin, että säännöt kahlitsevat oppilaiden ajattelua eivätkä oppilaat ole niiden käytön vuoksi esimerkiksi toisilleen tukena opiskelussa. Yhden kaavamaisen menetelmän käyttö voi opettajien mukaan riittää tiettyyn pisteeseen saakka, mikä voi hämätä opettajia luulemaan, että oppilas osaisi. Joku opettaja näki myös vertailumenetelmän käytön kaavamaisena, jos sitä ei toteuteta oppimislähtöisesti, tutkivasti. Opettajat siis kokivat, että tarvitaan muunlaistakin kuin kaavoja ja luetteloita painottavaa opetusta. He myös näkivät, että kaavat voivat luoda virheellisen vaikutelman oppimisesta niin oppilaille kuin opettajillekin. Näitä ajatuksia kuvaa seuraava lukio-opettaja A:n puheenvuoro.

Lukio-opettaja A: ” Ja kaikki tämmöset peukalo-... semmoset sääntöluettelot... helposti niinku kahlitsee. Että mun pitää jotain oppii, opetella niinku. Vaikka sen vois niinku, olla tukena toisilleen.”

Alakategoriassa neljä (Aion käyttää opetuksessani) yksi opettaja tuo ilmi, että on käyttänyt ja aikoo jatkossa käyttää enemmän vertailumenetelmää omassa opetuksessaan. Muutamat opiskelijat sanoivat, että voisivat käyttää tätä aikanaan opetuksessaan. Tätä ei osallistujilta kuitenkaan suoraan kysytty, joten jää epäselväksi, moniko oikeasti olisi valmis käyttämään menetelmää.

Viimeinen alakategoria viisi (Käytännön toteutus) jakautui neljään eri tapaan, joilla menetelmää voisi osallistujien mukaan käyttää opetuksessa. Käytännön toteutus liittyy menetelmän käytön suhtautumiseen omassa opetuksessa siinä mielessä, että useiden menetelmien käytön toteuttamistapa paljastaa, olisiko aidosti valmis käyttämään eri ratkaisutapoja rinnakkain ja vertailemaan niitä.

Osa osallistujista haluaisi esittää ratkaisutavat peräkkäin (5 opettajien puheenvuoroa + 5 opettajaopiskelijoiden puheenvuoroa). He eivät välttämättä siis täysin hyväksyneet vertailun merkitystä. Rinnakkain ratkaisutapoja käyttäisi 3

opettajaa ja 5 opettajaopiskelijaa. Erään opettajan mielestä toinen ratkaisutapa voisi olla uusi. Opettajaopiskelijat olivat sitä mieltä, että samaan tehtävään voisi esittää eri ratkaisutapoja rinnakkain. Opettajat toivat esiin oppilaslähtöistä lähestymistapaa menetelmän käyttöön ja toisaalta esittivät luottamusta oppilaan kykyihin ymmärtää uusiakin asioita menetelmän myötä.

Opiskelija P: ”Ja mun mielestä siks just rinnakkain. Että se antais sen kuvan sille oppilaalle, että ei oo vaan yhtä ainoaa oikeaa ja että voit ite tehä sitä matikka...”

Varsinkin opiskelijat olivat sitä mieltä, että menetelmän käyttö riippuu tilanteesta. Opettajaopiskelijat toivat esiin näkökulman, että joskus useamman ratkaisutavan vertailua voi käyttää ja joskus ei. Yksi opettaja kertoi, että menetelmää voisi käyttää vertailuun nimenomaan, kun molemmat ratkaisutavat ovat hallussa ja sitä kautta oppia jotain uutta. Opettaja mahdollisesti ajoi takaa sitä, että vaikka molemmat menetelmät ovat hallussa, voidaan niitä vertailemalla oppia vielä jotain lisää matematiikasta tai ainakin tehokkaimmista ratkaisutavoista. Useiden opiskelijoiden ja yhden opettajan mukaan useiden ratkaisutapojen käyttö tai käyttämättä jättäminen ei ole joko–tai vaan niitä voi käyttää tilanteesta riippuen.

Opettajaopiskelija D: ”Vois tunnistaa tilanteet. Urheilupiireistä, milloin käytetään mitäkin, mikä sopii mihinkin tilanteeseen paremmin, sitä se just on.”

Opettajaopiskelija M: ”Toisaalta. Riippuu varmaan ryhmästäkin. Ja ikäluokasta.”

Kolme opettajaopiskelijoiden puheenvuoroa puolsi vain yhden ratkaisutavan käyttöä. Osallistujat toivat esiin, että voisi olla tarpeen vahvistaa yksi tapa ensin, kuten esimerkiksi alakoulussa lukemaan opettelussa suosittelaa. Koettiin, että ainakin hitaampien kohdalla tulisi toimia näin, sillä muuten on riskinä, etteivät he opi yhtäkään ratkaisutapaa. Usean ratkaisutavan käyttö nähtiin myös lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisen keinona. Opettajilla oli siis selkeä näkemys siitä, että varsinkin hitaammat oppilaat tarvitsevat vahvaa yhden menetelmän osaamista. Jotkut näkivät tärkeänä, että osaa käyttää useaakin ratkaisutapaa ja valita itselle sopivimman, mutta vasta kun molemmat tavat ovat hallussa. Jotkut näkevät hyödyllisenä eri tunneilla käydyt eri ratkaisutavat.

Opettajaopiskelija A: ”Jotenkin musta tuntuu, että tavallaan, kun uutta asiaa opetetaan, että se pitäisi olla se yks tapa vaan.”

Opettajaopiskelija D: ” - valitsee yleensä luontaisesti se, mikä on helppoa ja ei mieti oikeastaan sitä, että on eri menetelmiä ja molemmat vois opettaa. ”

Opettajaopiskelija F: ”Jos osaa yhdellä tavalla, niin miksi pitää opetella toinen tapa?”

Kolmas kategoria kertoi joidenkin opettajien kaipaavan opetusta, joka ei etene kaavan mukaan. Tulkitsen, että opettajat näkivät kaavamaisen ratkaisutavan käytön olevan standardi, jossa kuitenkin on sekä oppilaan että opettajan kannalta huonoja puolia. Opettajilla oli epäluuloja opetusmenetelmän käyttöönotosta ja hyödyistä, mutta toisaalta he näkivät useiden ratkaisutapojen paitsi tulevan oppilailta spontaanisti myös olevan vaihtoehto kaavamaiselle yhden tavan mukaan opettamiselle. Opettajien mukaan luettelot kahlitsevat paitsi oppilaita myös opettajia. Tämä tulisi tulkintani mukaan huomioida vertailumenetelmän käyttöönotossa, ettei siitä tule yksi kaavamainen opetusmenetelmä muiden joukkoon, kuten eräs kurssin opettajistakin arveli.

Jotkut opettajat ja opiskelijat pohtivat menetelmän soveltuvan lähinnä lahjakkailla, sillä he kokivat, että heikoimmille oppilaille tulee saada turvattua, että he osaavat yhden menetelmän. Tutkittavat ehdottivat, että kahta jo opittua menetelmää voisi vertailla tai joskus käyttää uuttakin toisen rinnalla. Lisäksi voisi käyttää tutkivaa, oppilaslähtöistä lähestymistapaa, jossa oppilaat itse etsisivät erilaisia ratkaisutapoja. Jotkut opettajaopiskelijat kyseenalaistivat kokonaan useiden ratkaisutapojen käytön.

Kaikkiaan opettajien suhtautuminen uuteen opetusmenetelmään on kohtalaisen avointa, joskin varauksellisuutta oli etenkin opettajaopiskelijoiden parissa.

4.2.4 Yhteenveto

Kokosin yhteenvedon (synteesin) kolmen pääkategorian tulkintojen pohjalta huomioiden, että fenomenografisessa tutkimuksessa ei tule tehdä yleistyksiä vaan koota erilaisia näkemyksiä (Marton, 1988). Tulkinnassa oleellista on tutkijan kokonaisnäkemys aiheesta aineiston ja teoreettisen taustan pohjalta.

Vertailumenetelmä herätti opettajissa ja opettajaopiskelijoissa erilaisia ajatuksia. Aluksi pohdittiin, olisiko menetelmästä hyötyä omalle oppimiselle. Opettajat näkivät sen auttavan käsitteellistä osaamista ja opiskelijat laskutaitoa. Vain opettajaopiskelijoiden puheenvuoroissa tuli esiin mahdollisia haittapuolia omalle osaamiselle, mikä viittasi nähdäkseni siihen, että he suhtautuivat menetelmään kriittisemmin. Opettajat ja opettajaopiskelijat näkivät haasteena menetelmän soveltu-

vuuden heikoille oppilaille, koska pelkäsivät sen sekoittavan oppilaita entisestään. Jotkut opettajat arvelivat toisen menetelmän käyttämisen herättävän vastustusta oppilaissa. Opettajat näkivät menetelmällä olevan todella monia etuja, kuten opettajan roolin muuttuminen enemmän valmentajan suuntaan, matematiikassa todella tarvittavien taitojen oppiminen ja yleensä erilaisten vaihtoehtojen näkeminen. Tutkittavat kokivat rutiininomaisen ratkaisutavan haittaavan oppimista ja kahlitsevan sekä opettajan että oppilaan ajattelua.

Artikkelin II tuloksista käyn läpi vielä saatujen kategorioiden yhteyttä aiemmissa tutkimuksissa ilmi tulleisiin opettajien käsityksiin, jotka poimin artikkelien tuloksista. Lynchin ja Starin (2014a) tutkimuksessa selvitettiin opettajien näkemyksiä useiden ratkaisutapojen käytön hyödyistä ja haasteista, Yakesin ja Starin (2011) tutkimuksessa tuotiin esiin opettajien ajatuksia vertailun käytöstä ja Artikkelin II tutkimuksessa selvitettiin opettajien käsityksiä useiden ratkaisutapojen ja niiden vertailun käytöstä. Tuloksista esiin saamani kategoriat ja rinnakkaiskategoriat on esitetty Taulukossa 12, jota siis ei vielä Artikkelissa II ollut mukana.

Taulukosta 12 nähdään, että kaikissa kolmessa tutkimuksessa esiin tulleita seikkoja on vain yksi: matemaattisen ymmärryksen syventäminen ja matematiikan ytimessä olevien yleisten ajattelutaitojen näkeminen selkeämmin. Kahdessa tutkimuksessa esiintyneitä vertailun käyttöä puoltavia seikkoja ovat asioiden näkeminen eri näkökulmasta, oppilaalle sopivimman menetelmän löytäminen sekä ajatusten kertominen tai keskustelun lisääntyminen. Näistä oppilaalle sopivimman menetelmän löytäminen tosin on ristiriidassa joustavuuden idean kanssa, sillä yhden ratkaisutavan valikointi ei edistä joustavuuden kehittymistä. Opetusta haastavia kahdessa tutkimuksessa esiintyneitä seikkoja puolestaan ovat oppilaiden vastustus, fyysisten resurssien rajat ja ajankäyttö, lisähaasteet opettajan työhön ja se että uudet menetelmät sekoittaisivat oppilaita. Nämä kaikki vaikuttavat tärkeiltä huomioitavilta seikoilta. Artikkelin II suomalaisopettajat ja opettajaopiskelijat toivat esiin myös täysin uusia seikkoja yhdysvaltalaisutkimuksiin verrattuna: kertaamisen, opettajan roolin muuttumisen valmentajaksi sekä pelon siitä, että menetelmä soveltuu vain lahjakkaille tai ettei menetelmä kehitä ymmärrystä.

Taulukko 12. Eri artikkeleiden tuloksien mukaisia opettajien käsityksiä vertailusta.

Lynch & Star, 2014a	Yakes & Star, 2011	Artikkeli II (Palkki, 2018)
eri ratkaisutapojen käyttö lisääntyy		erilaisia tapoja nähdä asioita
yksilöllisten erot voidaan huomioida		
matemaattisen ymmärtämisen kehittäminen	oppilaat voivat miettiä laajalaisemmin	"jotain liikahattaa päässä eri tavalla"/ opitaan matematiikasta yleensä oppilaalle sopivan (parhaan) menetelmän löytäminen
oppilaalle sopiva menetelmä		
affektiiviset ja motivaatioseikat (kyllästymisen ja turhautumisen väheneminen)		
tehokkuuden lisääntyminen	oppilaan ajattelun selittäminen ja puolustaminen	keskustelu lisääntyy
	ratkaisun tarkistaminen	vastauksen tarkistaminen kertaaminen opettajasta valmentaja
motivaation huononeminen ja affektiiviset tekijät (negatiivisesti)		
oppilaiden vastustus		ei kiinnosta
oppilaiden uskomukset matematiikasta (vain yksi ratkaisutapa)		
opettajan tiedon rajat, esim. ei tietoa useista ratkaisutavoista		
fyysisten resurssien rajat		ajanpuute
lisähaasteet opettajan työhön	opettajan vaikea keskustella luennoimisen sijaan itse valitsisi yhden ratkaisutavan	vaatimukset opettajalle
	sekoittaa oppilaita	sekoittaa oppilaita vain lahjakkaille/ ei valmiuksia ei kehitä ymmärrystä

4.3 Artikkelin III: Matematiikan opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä tarkoituksellisia virheitä

Käyn nyt läpi kolmannen artikkelin tuloksia. Kolmannessa artikkelissa tutkin yhdessä ohjaajani kanssa matematiikan opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä virheitä ja tarkoituksellisia virheitä. Menetelmänä oli sisällönanalyysi.

Ensimmäinen tutkimuskysymys liittyi syihin, miksi opettajat käyttävät tai eivät käytä virheitä tai tarkoituksellisia virheitä. Käyttämällä aineistolähtöistä sisällönanalyysia löysin ensin 20 alakategoriaa, joista yhdistelin lopulta seitsemän pääkategoriaa ja kategorian muut.

Ensimmäisessä kategoriassa Aktivointi ja keskustelu (10 lausetta) tuotiin esiin ajatuksia, jotka ilmensivät virheiden käytön olevan hyödyksi oppilaiden aktivoimisessa ja keskustelun synnyttämisessä. Oppilaat pystyivät ottamaan aktiivisemmän roolin oppimisessa ja keskustelussa. Opettajat käyttivät aktivointia ja keskustelua esimerkiksi seuraavasti:

”Pitämään oppilaat hereillä.”

”[. . .] keskustelemaan, mistä virheellinen ajattelu tulee.”

Toisessa kategoriassa Analyyttisten taitojen kehittyminen (21 lausetta) vaikutettiin ajateltavan, että virheitä käyttämällä oppilaat kehittyvät argumenttien ja väitteiden analysoinnissa. Analyyttisten taitojen kehittymistä opettajat kuvasivat esimerkiksi seuraavasti:

”Heidän täytyi ajatella, mistä virhe tuli.”

”Käytän virheitä silloin, kun ne johtavat ristiriitaan.”

”Katsomalla tehtyjä virheitä, täytyy ajatella välivaiheita...”

Kategoriassa Virhekäsitysten korjaaminen (15 lausetta) puolestaan oltiin sitä mieltä, että oppilaiden tekemät virheet voivat korjata tai ehkäistä väärää tietoa. Virhekäsitysten korjaamisesta kerrottiin esimerkiksi seuraavasti:

”[Virheet] voivat auttaa huomaamaan asioita ja ajattelumalleja, joissa on jokin korjattavaa.”

”Kokemuksesta tiedän, että oppilaat tekevät tietäytyyppejä virheitä ja yritän saada heidät huomaamaan ne.”

Virheiden kanssa elämään oppiminen -kategoria (9 lausetta) puolestaan toi esiin ajatuksen, että virheet tarjoavat mahdollisuuksia oppia selviytymään epäonnistu-

misen tunteen kanssa. Opettajat kertoivat esimerkiksi seuraavia ajatuksia virheidⁿ kanssa elämään oppimisesta:

”Virheidⁿ kautta saa mahdollisuuksia oppia tulemaan toimeen epäonnistumisen tunteen kanssa.”

”Kaikki tekevät virheitä, mukaan lukien opettaja, ei ole katastrofi epäonnistua.”

Virheidⁿ (väärin)muistaminen -kategoriassa (14 lausetta) tuotiin ilmi ajatuksia siitä, muistavatko oppilaat virheen olleen virhe. Opettajat toivat esiin esimerkiksi seuraavia ajatuksia virheidⁿ väärinmuistamiseen tai muistamiseen liittyen:

”Virheelliset aktiviteetit muistetaan usein oikeina.”

”Jos teet virheen, muistat sen luultavasti ensi kerralla oikein.”

Virheidⁿ (väärin)ymmärtäminen -kategoriassa (12 lausetta) mietittiin, ymmärtävätkö oppilaat esitetyn virheen olleen virheellinen. Opettajat pohtivat esimerkiksi seuraavasti:

”[. . .] Varmistan, että kaikki ymmärtävät, että kyseessä oli virhe.”

”Jotkut oppilaat sekoittavat oikein ja virheellisen ratkaisun.”

Aikarajat-kategoriassa (2 lausetta) arveltiin, ettei virheitä voi esittää oppitunneilla, koska siihen ei ole riittävästi aikaa. Muut-kategoriassa (22 lausetta) puolestaan todettiin esimerkiksi, että ”virheistä oppii”. Artikkelissa ajateltiin, että tätä ei voitu luokitella mihinkään muuhun kategoriaan, sillä ilmaisu oli epämääräinen. Kategoriasta tuli kuitenkin näiden ”virheistä oppii” -väitteiden vuoksi hyvin suuri. Lisäksi Matteuccin ja kollegoiden kategorioissa oli mukana virheistä oppiminen (Taulukko 13). Jälkeenpäin ajatellen nämä lauseet olisi mahdollisesti kuitenkin voinut luokitella mukaan varsinaisiin kategorioihin.

Opettajat kiinnittivät huomiotaan kognitiivisiin (tiedollisiin) seikkoihin affektiivisten (tunteisiin liittyvien) seikkojen sijaan. Tulosten perusteella opettajien taipumus nähdä virheet häiriötekijöinä voitiin jakaa kahteen luokkaan: siihen, että oppilas ymmärsi virheen alun perin väärin tai siihen, että oppilas unohtaisi virheen olleen virhe. Opettajat saattoivat pelätä aikarajoja ja sitä, että aiheuttaisivat oppilaille hämmennystä joko virheen väärinymmärtämisen tai väärinmuistamisen kautta. Virheet nähtiin silti mahdollisuutena keskustelulle, analysoinnille ja virheidⁿ kanssa elämään oppimiselle.

Vertailemalla Taulukon 13 Matteuccin ja kollegoiden (2015) sekä Artikkelin III kategorioita voidaan huomata, että kuusi kahdeksasta kategoriasta näkyy Artikkelissa III. Virhekompetenssi ja virhekuormitus eivät tulleet esiin tässä tutkimuksessa. Opettajien voi näin ollen ajatella nähneen virheet positiivisemmin kuin aiemman tutkimuksen opettajat. Virhekompetenssi mahdollisesti ei soveltunutkaan nyt mitattavaksi, sillä alkuperäisen virheorientaatiotestin (Rybowiak, Garst, Frese & Batinic, 1999) väitettä aikuisen testattavan omista virheistä ei voitu muuttaa koskemaan opettajan oppilailta näkemää virheitä. Seuraavat kategoriat eivät tulleet esiin aiemmassa tutkimuksessa: Virhekäsitysten korjaaminen, Virheen (väärin)muistaminen ja Aikarajat. Lisäksi Analysointitaidot ja Virheiden kanssa elämään oppiminen liittyivät kumpikin kahteen eri Matteuccin ja kollegoiden kategoriaan.

Taulukko 13. Virheorientaation dimensiot (Muokattu Artikkelista III).

Matteuccin ym. kategoria	Matteuccin ym. esimerkki	Artikkelin III esimerkki	Artikkelin III kategoria
Virhekompetenssi	Kun oppilas tekee jotain väärin, korjaan sen välittömästi		
Virheistä oppiminen	Oppilaiden virheet auttavat kehittämään työtäni	Virheet edistävät työskentelyä, koska ne pakottavat ajattelemaan	Analysointitaidot
Virheen riskin ottaminen	Jos haluaa menestyä koulussa, täytyy ottaa virheen tekemisen riski	Jos ei ole rohkeutta tehdä virheitä, ei voi tehdä mitään	Virheiden kanssa elämään oppiminen
Virheiden ennakointi	Tehdessä koulutehtäviä virheiden riski on suuri	Kaikki tekevät virheitä, mukaan lukien opettaja	Virheiden kanssa elämään oppiminen
Virheiden ajattelevuus	Ajattelen usein: "Kuinka olisin voinut ehkäistä tämän?"	Virheitä tutkiessa täytyy ajatella välivaiheita	Analysointitaidot
Virhekommunikaatio	Kun oppilas tekee virheen, kerron siitä muille, jotteivät he tekisi samaa virhettä	Katsomme yhdessä virheellistä ratkaisua ja etsimme, mistä virhe tuli	Aktivointi ja keskustelu
Virhekuormitus	Minusta on stressaavaa, jos oppilas tekee virheen		
Virheiden peittelevuus	Miksi mainita virhettä, jos se ei ole itsestään selvä?	Välttelen virheitä, sillä ne sekoittavat oppilaita	Virheiden (väärin)-ymmärtäminen

Ensimmäisestä tutkimuskysymyksestä aloitin artikkelin kirjoittamisen jälkeen jatkotutkimuksen, jossa laadin tässä artikkelissa saatujen seitsemän kategorian pohjalta kyselymittarin. Kehitin mittaria edelleen kahden pilotoinnin myötä. Lo-

pulta kuitenkin ilmeni, etteivät löydetyt kategoriat tulleet selvästi esille kvantitatiivisessa kategoriassa, vaan kysymyksiä yhdistyi eri tavoin kuin oli ajateltu, enkä jatkanut tutkimusta edelleen.

Toinen tutkimuskysymys liittyi opettajien uskomuksiin virheiden ja tarkoituksellisten virheiden käyttämisestä. Tämän tutkimiseen käytettiin ulkoapäin ohjautuvaa sisällönanalyysiä. Vastauksista myönteiset käsitykset virheistä erottuivat selvästi (Taulukko 14). Tarkoituksellisia virheitä kohtaan varauksellisuutta oli kuitenkin jonkin verran.

Taulukko 14. Opettajien uskomusten lukumäärät virheiden ja tarkoituksellisten virheiden käyttöön liittyen (Muokattu Artikkelista III).

	Puolesta	Vastaan	Neutraali
Virheet	46	0	9
Tarkoitukselliset virheet	19	9	11
Yhteensä	65	9	20

4.4 Artikkelin IV: Tarkoituksellinen virhe matematiikan luokkahuonekeskustelussa

Perehdyn seuraavaksi neljännen artikkelin tuloksiin. Neljännen artikkelini eri vaiheineen tein yksin. Artikkelissa selvitin tarkoituksellisen virheen käytön myötä esiin tulevia virhekäsityksiä ja toisaalta opettajien tapaa käyttää tarkoituksellista virhettä. Kyseessä oli tapaustutkimus. Tutkimuksessa paneuduin keskusteluihin, joita käytiin opettajan johdolla luokan käyttäessä Kuvan 6 (luku 3.4.4) tehtävää täydennettynä kuvitteellisten oppilaiden, Kallen ja Leenan, kuvilla.

Tutkiessani virhekäsityksiä minulla oli oletus, että oppilaat keskustelisivat samanmuotoisten termien virheellisestä yhdistämisestä, joka oli esimerkkitehtävään laitettu tarkoituksellinen virhe. Yllättäen keskusteluissa tuli kuitenkin esiin muitakin virhekäsityksiä. Esiin tuli viisi erilaista virhekäsitystä, muun muassa se, ettei muuttujatermejä voisi yhdistää ja ettei nollaa voisi saada vastaukseksi. Oppilaat pohtivat tehtävää esimerkiksi seuraavasti:

Kosti: Se on päätelty sen.

Tuukka: Se jako molemmat puolet 75:llä.

Vesa: Hä.

Kosti: Niin.

Opettaja B: Miksi se ei ois saanu jakkaa 75:llä?

Tuukka: Siitä tulee nolla. [...]

Tässä esimerkissä opettaja ei enää kysynyt ”miksi”-kysymystä. Se olisi voinut antaa lisäselitystä sille, miksi oppilas ajatteli, että nollaa ei voisi saada vastaukseksi, vaikka luonnollisesti todellisuudessa voi.

Toisena esimerkkinä Satu luokassa A pohti, miksi muuttujia ei voisi yhdistää.

Satu: X ja y ja jne. on muuttujia, joten ne pitää selvittää, ennen kuin niitä voi yhdistää.

Opettaja A kertoi, että samanmuotoisia termejä voi yhdistää. Mahdollisesti Satu ei siis hahmottanut, että yhtälön sisällä pätevät edelleen lausekkeen laskusäännöt ja samanmuotoisia termejä voi yhdistää ennen kuin on selvittänyt niiden arvot.

Opettajien tapaa käyttää virhettä tutkittiin kuvailemalla, miten luokkahuonetilanne eteni ja miten opettaja käytti eri kysymystyyppejä (Taulukko 15). Virhekäsityksiä tuli esiin kahdessa luokassa neljästä. Niissä luokissa, joissa esiintyi virhekäsityksiä, opettaja kysyi ”miksi”-kysymyksiä (Taulukko 15). Lisäksi näiden luokkien oppilasmäärä oli melko pieni. Yleisesti ottaen vaikutti, että opettaja sai keskustelun myötä mahdollisuuden saada selville myös muita kuin tarkoituksella tehtävään sijoitetun virheen ja korjata oppilaiden esittämiä virhekäsityksiä. Aina opettaja ei kuitenkaan korjannut esiin nousseita virhekäsityksiä.

Taulukko 15. Opettajien A, B, C ja D käyttämät kysymystyypit.

Kysymystyyppi (kpl) /Opettaja	avoin	miksi	miten	mitä	retorinen/ valinta	logistinen/ hallinta	Yhteensä
A	2	2	0	2	0	1	7
B	0	5	0	2	3	0	10
C	2	0	2	5	5	4	18
D	0	1	1	1	3	3	9

Käyn vielä läpi tehtävän käsittelyn aikana puhuttujen lauseiden määrää. Luokan A opettajan lausemäärä oli 50, kun oppilaiden yhteensä 16. Luokan B opettaja kyseli ja selitti paljon itse. Opettajan lausemäärä oli 62 ja oppilaiden 27, eli oppilaat kuitenkin osallistuivat keskusteluun kohtalaisen hyvin verrattuna muihin luokkiin. Luokan C opettaja puolestaan kyseli paljon, mutta oppilaat eivät juuri vastailleet hänen kysymyksiinsä. Opettaja puhui 43 lausetta, kun oppilaat 9 lausetta. Luokan D opettaja puhui 33 lausetta ja oppilaat 4 lausetta, tosin oppilaat mahdollisesti

keskustelivat jo pienryhmissä aiheesta. Vähäiseen keskusteluun saattoi lisäksi vaikuttaa se, että tehtävä oli helppo lahjakkaille oppilaille.

Taulukko 16. Puhutut (kielitieteelliset) lauseet opettajilla ja oppilailla (Muokattu Artikkelista IV).

Luokka	Oppilaita	Puhutut lauseet/ opettaja (kaikista)	Puhutut lauseet/ oppilas (kaikista)
A	12	50 (76 %)	16 (24 %)
B	17	62 (70 %)	27 (30 %)
C	26	43 (83 %)	9 (17 %)
D	19	33 (89 %)	4 (11 %)

Tutkimuksen kohteena oli myös opettajan odotusaika eli aika, jonka opettaja odottaa oppilaan vastausta esittämänsä kysymyksen jälkeen. Nyt opettajan odotusaika oli kuitenkin todella lyhyt (aina alle 3 sekuntia) eikä se siten ollut relevantti tutkimuskohde. Mielenkiintoinen seikka oli myös, että joskus opettaja ei tarttunut virheisiin ollenkaan ja virheitä jäi korjaamatta.

Puolestaan opettajat kaikissa luokissa puhuivat melko paljon itse (Taulukko 16). Luokissa A ja B oppilaat puhuivat enemmän kuin luokissa C ja D. Näissä luokissa opettajat esittivät ”miksi”-kysymyksiä. Lisäksi luokkakoko oli pienempi. Nämä seikat saattoivat vaikuttaa siihen, että luokissa A ja B tuli molemmissa esiin useita virhekäsityksiä (Taulukko 17). Opettajien toimintatavan kuvaus siis herätti epäilyksen siitä, että esimerkiksi käytetyt ”miksi”-kysymykset, luokan koko ja keskustelun määrä voisivat vaikuttaa tehtävätyypin käytön hyödyllisyyteen. Sen sijaan ryhmän taso siihen ei näyttänyt vaikuttavan ainakaan siten, että lahjakkaaksi kuvatussa ryhmässä olisi automaattisesti enemmän keskustelua.

Taulukko 17. Esiin tulleet virhekäsitykset (Muokattu Artikkelista IV).

Luokka	Virhekäsitykset	
	Kpl	Kuvaus
A	3	- Termien sekoittaminen - Muuttujatermejä ei voi yhdistää keskenään (kahdesti) (konseptuaalinen tieto)
B	3	- Kallen vastaus on aina oikein (kuten aiemmissa vertailutehtävissä) - Ei voi jakaa niin, että tulokseksi tulee nolla (konseptuaalinen tieto) - "60 nolla" eli kertomerkki puuttuu sijoituksesta (proseduraalinen tieto)
C	0	
D	0	

4.5 Tulosten yhteenveto

Tässä tutkimuksessa käsittelen joustavuutta ja matematiikan opetusmenetelmiä: vertailutehtäviä ja tarkoituksellisia virheitä. Vertailutehtävien ideana on esittää oppilaille rinnakkain kahden kuvitteellisen oppilaan ratkaisut samaan tehtävään ja vertailla näitä annettujen kysymysten avulla. Joskus tehtäviin voidaan upottaa tarkoituksella virheellinen välivaihe, joka selvitetään. Tällöin puhun tarkoituksellisesta virheestä. Olen tutkinut joustavuutta yhdessä artikkelissa ja näitä tehtävätyyppejä kolmessa artikkelissa. Artikkeleiden tulokset olen esittänyt tiiviisti edellisissä alaluvuissa. Nyt paneudutaan väitöskirjan yhteenveto-osan tutkimuskysymyksiin. Artikkelien ja väitöskirjan tutkimuskysymykset olen koonnut Taulukoon 18.

Tutkimuskysymyksessä 1 (TK1) pohdin aluksi joustavuutta. Testatut suomalaisoppilaat eivät testin perusteella vaikuta kovin joustavilta, sillä innovatiivisia ratkaisuja oli keskimäärin 27 prosentissa 12 tehtävästä. Tutkimme innovatiivisuuden suhdetta nopeuteen ja oikeellisuuteen regressioanalyysin ja ristiintaulukoinnin avulla. Niistä näimme, että kapasiteetti innovatiivisuutta kohtaan ennustaa sekä nopeutta että oikeellisuutta. Suuri kapasiteetti liittyy suureen nopeuteen ja oikeellisuuteen. Oppilaat, joiden kapasiteetti (innovatiivisuutta kohtaan) oli suuri, olivat myös nopeita ja tekivät tehtäviä oikein. Toisaalta joillain oppilailla, joilla kapasiteetti oli pieni, oli myös suuri nopeus ja oikeellisuus. Puolestaan taipumus innovatiivisuutta kohtaan ei vaikuta ennustavan nopeutta ja oikeellisuutta.

Taulukko 18. Artikkelien ja väitöskirjan tutkimuskysymykset.

Artikkelit ja tutkimuskysymykset	Väitöskirjan tutkimuskysymykset
Artikkeli I	
1) Miten kapasiteetti innovatiivisuutta kohtaan on yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen?	TK1. (Artikkelit I ja II) Miten joustavia testatut suomalaisoppilaat ovat yhtälönratkaisussa? Mikä on joustavuuden suhde nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisun yhteydessä? Miten tutkitut suomalaisopettajat näkevät joustavuuden tarpeellisuuden?
2) Miten taipumus innovatiivisuutta kohtaan on yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen?	
Artikkeli II	
1) Millaisia käsityksiä matematiikan opettajilla ja opettajaopiskelijoilla on useiden ratkaisutapojen ja niiden vertailun käytöstä?	TK2. (Artikkelit II ja III) Millaisia käsityksiä ja uskomuksia opettajilla ja oppilailta on vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttämiseen liittyen?
2) Millaisia eroja on matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksissä vertailumenetelmästä?	
Artikkeli III	
1) Millaisia syitä opettajat antavat spontaanien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöön opetuksessaan?	
2) Ovatko opettajat taipuvaisia käyttämään spontaaneja ja tarkoituksellisia virheitä opetuksessaan?	
Artikkeli IV	
1) Millaisia virhekäsityksiä virheellisen esimerkin käyttö tuo esiin?	TK3. (Artikkelit II ja IV). Mitkä tekijät edistävät tai vaikeuttavat vertailutehtävien käyttöä käytettäessä tarkoituksellisen virheen sisältävää tehtävää?
2) Miten opettajat käyttävät virheellistä esimerkkiä? (opettajien toimintatavan kuvaus, käytetyt kysymystyypit ja opettajan odotusaika)	

Joustavuuden opettamiseen liittyviä uskomuksia opettajilla ja opettajaopiskelijoilla ilmeni epäsuorasti. Osa opettajaopiskelijoista (viisi puheenvuoroa) puhui rutii-
nien tärkeydestä (Artikkeli II), mikä jollain tavoin kuulostaa vastakkaiselta näke-

mykseltä joustavuuden painottamiselle. Toisaalta usea opettaja ja opettajaopiskelija toi esiin myös kaavojen liiallisen painottamisen vaarallisuuden (Artikkeli II), mikä kuulostaa siltä, että opettajilla ja opettajaopiskelijoilla olisi kiinnostusta laajentaa opetustaan joustavuuden suuntaan. Opettajaopiskelijoilta tulleita negatiivisia näkemyksiä saattoi edesauttaa se, että kaikki opettajaopiskelijat eivät itsekään tehtäviä tehdessään kokeneet joustavuutta hyödylliseksi (Taulukko 11). Puheenvuoroja sen puolesta, että kaava kahlitsee ja joustavuutta painottavia menetelmiä tarvitaan, tuli myös esiin (14 kappaletta). Kaikkiaan opettajilla vaikutti olevan melko paljon kiinnostusta muuttaa opetustaan joustavuutta painottavammaksi (TK1).

Väitöskirjan tutkimuskysymyksessä 2 (TK2) tutkin opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttämisestä. Kävi ilmi, että opettajien käsitykset ja uskomukset puolisivat sitä, että menetelmät voisivat olla hyödyllisiä matematiikan oppimiselle. Opettajien näkemyksen mukaan oppilaat voisivat saada uusia tapoja nähdä asioita ja voisivat löytää itselleen sopivan ratkaisumenetelmän, opettaja voisi toimia enemmän ohjaajan tai valmentajan roolissa, päästäisiin irti rutiineja painottavasta opetuksesta, oppilaita saataisiin aktivoitua, analyyttiset taidot kehittyisivät, väärinkäsityksiä voitaisiin korjata ja virheiden kanssa opittaisiin elämään. Mahdollisina haasteina opettajien näkemyksien mukaan voisi olla se, ettei useiden ratkaisutapojen käyttö kiinnosta oppilaita tai heillä ei ole valmiuksia siihen, menetelmä soveltuisi vain lahjakkaille, aika ei riittäisi uusiin opetusmenetelmiin ja olisi riski virheiden ymmärtämisestä väärin tai niiden muistamisesta jälkeensä oikeellisenä ratkaisuna. Opettajien uskomukset menetelmän käyttöä kohtaan vaikuttivat olevan positiivisia, mutta he näkivät myös joitain esteitä.

Selvisei siis, että on lukuisia seikkoja, joita vertailutehtävien käyttö voisi opettajien käsityksien ja uskomusten mukaan mahdollistaa, esimerkiksi vertailu, keskustelu, analysointi ja virheiden kanssa elämään oppiminen. Opettajat näkivät joitain haittoja kuten kiinnostuksen tai ajan puute ja tarkoituksellisen virheen ymmärtäminen väärin. Opettajien käsitykset ja uskomukset toisaalta edistävät vertailutehtävien käyttöä, sillä opettajat näkivät niissä useita hyötyjä. Toisaalta opettajilla oli ennakkoluulojakin tehtävien käyttämisestä.

Vertailutehtävien ja virheiden käyttö näyttäytyi siis opettajien käsityksissä ja uskomuksissa pääosin hyödyllisenä keinona matematiikan oppimisen ja opetuksen parantamiseen. Opettajilla vaikutti olevan avoimuutta vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöön muutamat rajoitukset huomioiden (TK2). Kuitenkin opettajien huolet tulisi ottaa huomioon. Opettajat pelkäsivät esimerkik-

si sitä, että heillä ei ole aikaa menetelmän käyttöön, että oppilaat eivät ymmärrä virhettä tai oppilaat eivät ole kiinnostuneita tehtävästä (Artikkeli II; Artikkeli III). Opettajien käsityksistä ja uskomuksista voisi päätellä, että he näkivät vertailumenetelmän ja virheet mahdollisuutena syvällisempään oppimiseen (Artikkeli II; Artikkeli III). Kun alettiin tutkia menetelmiä luokkahuoneessa (Artikkeli IV), vertailutehtävä vaikutti edelleen hyödylliseltä etenkin, kun oppilaat puhuivat ajatuksiaan ääneen ja virhekäsityksiä paljastui.

Väitöskirjan tutkimuskysymyksessä 3 (TK3) selvitin vertailutehtävien käyttöä käytännön luokkahuonetilanteessa. Pohdin, mitkä seikat edistävät tai vaikeuttavat niiden käyttöä. Selvisi, että virheen sisältämää vertailutehtävää voi hyödyntää muidenkin kuin käsitellyn virhekäsityksen esiintuomisessa. Tätä mahdollisesti edesauttaa ”miksi”-kysymysten kysyminen (Artikkeli IV). Käyttöä edistäisi matematiikan oppimisen näkeminen aktiivisena tekemisenä sen sijaan, että toistettaisiin kirjoissa esiteltyjä laskukaavoja (Artikkeli II). Toisaalta menetelmän käyttöä voisi estää opettajan negatiiviset uskomukset ja esimerkiksi se, ettei opettaja tartu ilmi tulleisiin virhekäsityksiin (Artikkeli IV).

Artikkeleiden tuloksissa oli yhtäläisyyksiä ja eroja. Kolmessa jälkimmäisessä tutkimuksessa tuli ilmi, että vertailutehtävien käytössä on hyötyjä ja haasteita. Tämä näyttäytyi jokaisessa tutkimuksessa eri näkökulmasta. Vertailutehtävien käytön hyödyt vaikuttavat opettajien käsitysten ja uskomusten mukaan olevan moninaiset uusien ratkaisutapojen näkemiselle, oppilaiden aktivoimiselle, analysointitaitojen kehittämiseksi ja väärinkäsitysten korjaamiselle. Käytännön luokkahuonetilanteissa ilmeni, että virhekäsityksiä esittämällä voi tulla ilmi muitakin virhekäsityksiä.

Artikkelin II tutkimustuloksissa vertailumenetelmän haasteiksi ilmeni muun muassa se, että opettajat pelkäsivät, ettei menetelmä soveltuisi oppilaille, Artikkelin III opettajat toivat esiin väärinymmärtämisen tai -muistamisen riskiä tai ajan riittämättömyyttä. Artikkelista IV voidaan päätellä, että opettajien oman puheen suurempi määrä ja ”miksi”-kysymysten puute voisi vähentää vertailutehtävien hyötyjä, kun virhekäsityksiä ei nouse esiin (olettaen että niitä ylipäänsä on). Vertailutehtävien käytön mahdollistavia seikkoja tulisi tutkia laajemmin, sillä kaikki oppilaat ja opettajat eivät välttämättä ota uutta menetelmää suoraan avoimesti vastaan vaan voivat tarvita monilla osa-alueilla tukitoimia.

4.6 Luotettavuus, rajoitukset ja tutkimuseettinen pohdinta

Tässä luvussa pohdin artikkeli kerrallaan tutkimuksen luotettavuutta ja rajoituksia ja lopuksi yleisesti tutkimuksen etiikkaa.

Artikkelin I tilastolliset tulokset ovat toistettavissa. Kuitenkin tutkimusasetelmassa ja tulosten tulkinnassa on rajoituksia. Oletimme oppilaiden esittävän testissä ratkaisuksi innovatiivisia strategioita. Voi kuitenkin olla, että oppilaat itse olisivat, että heiltä odotetaan standardistrategiaa etenkin ensimmäisessä vaiheessa testiä tai etteivät he yleensäkin tuoneet esiin kaikkia osaamiaan strategioita (vrt. Torbeyens ym., 2006; Verschaffel, Greer ja De Corte, 2007). Mahdollisesti ongelmallista oli myös se, että samalla testillä mitattiin eri muuttujia, sillä muututjat saattoivat vaikuttaa toisiinsa. Nopeutta ja oikeellisuutta olisi voinut olla tarpeen mitata erillisellä testillä, jossa esimerkiksi strategian ”hyvä” valinta ei voisi vaikuttaa nopeuteen. Tulosten perusteella ei myöskään voi varmuudella sanoa, kehittykö joustavuus ennen nopeutta ja oikeellisuutta vai päinvastoin, vai vaikuttaako joustavuuden kehittymiseen vielä jokin kolmas tekijä.

Artikkelissa II tutkin matematiikanopettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. Käytin opettajien ja opettajaopiskelijoiden keskustelujen litteraatteja etsien niistä eri näkökulmia. Nauhoitin opettajien keskustelut heidän täydennyskoulutuskurssillaan ja opiskelijoiden pitämälläni kurssilla. Käytin sanelimia, jotta nauhoitus häiritsisi kurssilaisia mahdollisimman vähän. Osallistuvat opettajat olivat erittäin motivoituneita, sillä he osallistuivat vapaaehtoisesti täydennyskoulutukseen. Tämä saattoi vaikuttaa aineistoon ja mahdollisuuteen saada mahdollisimman kattava erilaisten käsitysten kirjo, sillä opettajat olivat koulutuksesta erittäin kiinnostuneita ja mahdollisesti innostuivat uudesta lähestymistavasta enemmän kuin keskiverto-opettajat. Oma näkökulmani muovautui vähitellen lukemieni tutkimusten vaikutuksesta joustavuudelle myönteiseksi, ja vaikka pyrin sulkemaan pois tarkastelusta oman näkökulmani, en voi olla varma, vaikuttiko se tulosten pohdintaan.

Kysymystä fenomenografisen tutkimuksen tutkimusprosessin luotettavuudesta Marton (1988, s. 148) vertaa kysymykseen siitä, löytäisivätkö kaksi kasvitieteilijää samalta saarelta samat kasvit ja lajit, mikä ei hänen mukaansa ole relevantti kysymys. Puolestaan kategorioiden olemassaolosta ja niiden käytettävyydestä toisilla tutkijoilla on voitava saavuttaa yhteisymmärrys (Marton, 1988).

On tärkeää myös, että tutkija on tietoinen omista käsityksistään (Huusko & Paloniemi, 2006). Tutkittaessa vertailumenetelmää olin itsekkin vasta muodostamassa käsitystäni menetelmästä, mutta pyrin mahdollisimman objektiiviseen

näkökulmaan. Tähtäsin avoimeen kysymyksenasetteluun, kuten fenomenografiasa kuuluu (Huusko & Paloniemi, 2006), mutta itsereflektiokysymykset kenties rajoittivat pohtimista jonkin verran. Huuskon ja Paloniemen (2006) tutkimuksen kolmatta vaihetta, abstraktimman kuvaustason ja kategorioiden välisten erojen etsimistä toteutettiin aineiston sallimissa rajoissa, joskin kategorioiden välisten erojen tutkiminen jäi melko vähäiseksi.

Opettajat ja opettajaopiskelijat pohtivat vertailumenetelmän hyötyjä ja haasteita ilman varsinaista opetuskokemusta menetelmän käytöstä, mikä saattoi vaikuttaa tuloksiin. Olisi tarpeen tutkia jatkossa, miten opettajat kokevat menetelmän käytettyään sitä, eroavatko käsitykset nyt saaduista käsityksistä tai millä tavoin menetelmää ylipäänsä käytetään. Nyt tutkitut opettajat eivät myöskään välttämättä hahmottaneet riittävän hyvin, mistä vertailukeskustelun käymisessä on kyse, sillä sen eri puolien pohdinta jäi melko vähäiseksi. Nyt selvitettiin siis opettajien ennakkokäsityksiä vertailutehtävistä ja tarkemmin vertailumenetelmästä. Tähän yhteenvedoon uutena sisällyttämäni eri tutkimusten yhteenvetotaulukko lisäsi näkemystä eri tutkimusten välillä.

Artikkelissa III tutkimme opettajien uskomuksia virheistä ja tarkoituksellisista virheistä. Luotettavuutta voidaan arvioida materiaalin ja kategorioiden autenttisuuden avulla (Syrjälä ym., 1994). Nyt kyseessä oli autenttinen opettajien vastausaineisto, josta muodostin kategoriat. Vastauksien laatuun kuitenkin vaikutti se, että osa osallistujista vastasi todella lyhyesti siinä missä joku toinen useilla lauseilla. Tutkimuksessa olisin voinut kerätä edustavan otoksen, jolloin mahdollisille yleistyksille opettajien uskomuksista olisi parempi pohja. Lisäksi aineisto oli jonkin verran painottunut opettajilla, jotka tunsivat Joustava yhtälönratkaisu - materiaalin ja sitä myötä mahdollisesti tarkoituksellisen virheen idean. Vastaajat saattoivat muutenkin olla keskivertoa aktiivisempia opettajia jo sillä perusteella, että he vapaaehtoisesti vastasivat kyselyyn.

Artikkelissa IV virhetehtävää käytettiin neljässä eri luokassa. Opettajien kuvaamat luokkien erot mahdollisesti vaikuttivat tuloksiin enemmän kuin alun perin tutkimusta tehdessä ajattelin. Lisäksi tutkittujen kysymystyyppien väliset erot olivat pieniä, joten vaikutuksesta on vaikea vetää tarkempia johtopäätöksiä, vaan tulisi tutkia opettajien toimintaa paljon pidemmällä aikavälillä, esimerkiksi lukuvuoden ajan. Oppilaiden keskusteluun osallistumiseen saattoi vaikuttaa se, että heitä videokuvattiin. Tämä mahdollisesti jännitti heitä eivätkä he halunneet osallistua keskusteluun. Syy-seuraussuhteista on vaikeaa sanoa mitään tarkkaa, mikä on luonnollista oppimisympäristön ollessa kompleksinen kokonaisuus. Olisin voinut tuoda tämän faktan tutkimuksessani selvemmin esiin.

Tutkimuksen lähtökohtana toimivat tutkimustoiminnan yleiset eettiset ohjeet (Tutkimuseettinen neuvottelukunta, 2012). Lichtman (2012, s. 52–55) on kerännyt pääperiaatteita tutkimuksen eettisyyteen liittyen: tutkimuksella ei saa tuottaa vahinkoa, täytyy säilyttää yksityisyys ja autonomia, tulee säilyttää ja käsitellä kerätty aineisto luottamuksellisesti, kysyä tutkimuslupa, varoa teeskenneltyä ystävyyttä, varoa häiritsevää ja epäsopivaa käytöstä, esittää aineisto oikeanmukaisesti sekä pohtia aineiston omistajuus, mahdollisten palkintojen jakaminen ja muita kysymyksiä. Aineistoa kerätessäni olen informoinut osallistujia antaen mahdollisuuden olla osallistumatta ja kertonut, että tietoja säilytetään ja käytetään luottamuksellisesti eikä nimi- tai muita tunnistetietoja tuoda esiin. Tutkijan tulisi kokea vastuuta, sitoutumista ja autonomiaa, mikä tulee esiin vastuullisuudessa eri tahoille, hyvän tavoittelussa ja itsemääräämisoikeuden säilyttämisessä (Atjonen, 2008). Näihin arvoihin tämä tutkimus pohjautui.

Tutkimuksiin osallistuneilta aikuisilta kysyin kirjallisen tai joissain tapauksissa suullisen luvan heitä koskevan kerätyn materiaalin käyttöön tutkimusaineistona. Opettajien nimet muutin muotoon ”yläkoulun opettaja A”. Lapsien huoltajilta kysyin kirjallisen luvan ja kerroin, että oppilaiden henkilöllisyys salataan. Muutenkin noudatettiin hyvän tutkimusetiikan periaatteita, mikä luonnollisesti on erityisen tärkeää lasten kohdalla (Atjonen, 2008). Osalta oppilaista en saanut lupaa heidän keskusteluidensa käyttämiseen tutkimustarkoituksiin, ja heidät sijoitettiin omaan ryhmäänsä, jota ei videokuvattu tai nauhoitettu, mutta opettaja oli yhtä lailla heidän käytettävissään.

5 Johtopäätökset ja pohdinta

Tässä luvussa teen johtopäätökset ja pohdin, mitä tämän tutkimuksen kautta opitaan joustavuudesta, vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä suhteessa aiempaan tutkimukseen. Aluksi käsittelen johtopäätöksiä ja pohdintaa artikkeli kerrallaan: yläkoululaisten ja lukiolaisten joustavuuden yhteyttä nopeuteen ja oikeellisuuteen (Artikkeli I), opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailutehtävistä (Artikkeli II), opettajien uskomuksia tarkoituksellisista virheistä (Artikkeli III) ja lopuksi tarkoituksellisen virheen ja vertailutehtävien käytännön hyödyntämistä yläkoulussa (Artikkeli IV). Tämän jälkeen pohdin, mitä tutkituista käsitteistä (joustavuus, vertailutehtävät, virheet, tarkoitukselliset virheet) opitaan aiemman tutkimustiedon ja tämän väitöstutkimuksen pohjalta. Sitten vedän yleisempiä johtopäätöksiä ja käsittelen väitöskirjan tutkimuskysymyksiä. Lopuksi pohdin mahdollisia jatkotutkimuskohteita sekä tutkimuksen käytännön merkitystä ja hyödynnettävyyttä.

5.1 Artikkelin I: Suomalaisoppilaiden joustavuus ja sen yhteys nopeuteen ja oikeellisuuteen yhtälönratkaisussa

Artikkelissa I tutkimme nopeutta, oikeellisuutta, kapasiteettia ja taipumusta innovatiivisuutta kohtaan. Tuloksista näen, että innovatiivisuus – ja siten joustavuus – ei ollut testiin osallistuneiden oppilaiden kohdalla kovin suurta, sillä innovatiivisia ratkaisuja oli vain 27 prosentissa 12 tehtävästä, vaikka oppilailla oli mahdollisuus tuoda esiin useita mahdollisia ratkaisutapoja. Toisaalta tiedetään, etteivät oppilaat välttämättä tuo esiin tehokkaita ratkaisutapoja, vaikka tietäisivätkin niitä (Newton, Star & Lynch, 2010; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2006). Tämänkaltaisen testitilanteen, jossa pyydettiin esittämään mahdollisimman monta ratkaisutapaa, kuitenkin ajattelisin tuovan innovatiiviset ratkaisutavat näkyville, jos oppilas kykenee sillä hetkellä niitä tuottamaan. Ovathan innovatiiviset ratkaisut usein lyhyempiä kirjoittaakin kuin standardimenetelmä. Sinänsä oppilaat osasivat valita innovatiivisen ratkaisutapansa parhaaksi todella hyvin, joten mahdollisuus joustavuuteen (vrt. määritelmän kohdat eli useiden ratkaisutapojen tuottaminen ja parhaan valinta) oli nähdäkseni olemassa. Toisaalta aiemmassa tutkimuksessa (eri testi) Yhdysvalloissa joustavuus yhtälönratkaisussa oli ollut vain 13 % (Star & Seifert, 2006), mihin verrattuna suomalaisten joustavuus olikin yllättävän suurta. Kuitenkin yhdysvaltalaisstudiossa mitattiin kuudesluokkalaisten joustavuutta, kun meidän tutkimuksemme kyseessä olivat kahdeksas-

luokkalaiset ja lukion toista vuosikurssia opiskelevat. Tämän pohjalta vaikuttaisi siltä, että joustavuus lisääntyy iän myötä.

Kun olimme tehneet Artikkelin I, käytimme samaa aineistoa osana kansainvälistä kolmen maan tutkimusta. Tähän tutkimukseen osallistui suomalaisoppilaiden lisäksi ruotsalais- ja espanjalaisoppilaita. Artikkelissa I innovatiivisuus oli yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen. Kolmen maan tutkimuksessa tulokset olivat samansuuntaisia kuin Artikkelissa I, sillä havaitsimme joustavuuden korreloivan positiivisesti tehtävien oikeellisuuden kanssa. Oppilailla, joilla oli suuri joustavuus, oli keskimäärin myös suuri tehtävien oikeellisuus (Star, Tuomela ym., 2022). Tämä on toki luonnollista samalla aineistolla. Ajattelen, että joustavuuden lisääntyessä oikeellisuuden tulee lisääntyä, sillä muuten joustavuus olisi oikeellisuudesta irrallinen ilmiö.

Kolmen maan tutkimuksessa joustavuudeksi saatiin noin 15 % yläkouluikäisillä ja lukiolaisilla, mikä oli melko pieni lukema. Tarkemmin suomalaiset tekivät kahdestatoista tehtävästä keskimäärin 1,7 tehtävää joustavasti, ruotsalaiset 2,3 ja espanjalaiset 1,4 (Star, Tuomela ym., 2022). Tässä joustavuus operationalisoitiin (muutettiin mitattavaan muotoon) hiukan eri tavoin kuin Artikkelissa I, jossa ratkaisutavan valinta ja standardistrategian tietäminen eivät olleet mukana. Siksi joustavuuslukemat olivat suurempia Artikkelissa I, vaikka aineisto on sama. Tulokset eivät kuitenkaan ole tässä kolmen maan tutkimuksessakaan yleistettävissä, sillä näyte ei ollut edustava.

Lisäksi tulee huomioida, että sekä joustava strategian valinta että tehokas strategian tuottaminen johtavat lisääntyneeseen nopeuteen ja oikeellisuuteen (Lemaire & Siegler, 1995). Valitettavasti menetelmien puolesta tuloksien pohjalta ei ollut mahdollista selvittää, kehittävätkö nopeus ja oikeellisuus joustavuutta tai päinvastoin. Mahdollisesti tätä ei voidakaan selvittää, ovathan yhteydet usein hyvin moniulotteisia. Vähintäänkin tarvittaisiin eri testi nopeuden mittaamiseen. Lisäksi testin rajallinen aika saattoi myös rajoittaa eri ratkaisutapojen lukumäärää.

Tulosten pohjalta ajattelen, että joustavuuden kehittymisestä tiedetään vielä vähän. Väitöskirjani tulosten perusteella otaksun, ettei se kehity itsekseen, olihan innovatiivisia ratkaisuja suhteellisen vähän. Joustavuuden kehittymisen tukemiseen tarvitaan näin ollen panostusta kouluopetuksessa. Useissa lähinnä Yhdysvalloissa toteutetuissa tutkimuksissa onkin havaittu, että joustavuutta voidaan kehittää vertailutehtävien avulla (Rittle-Johnson & Star, 2007, Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012; Star, Pollack ym., 2015; Durkin ym., 2021), ja joustavuus on tunnistettu tärkeäksi matematiikan taidoksi Yhdysvalloissa (National Council of

Teachers of Mathematics, 2014). Seuraavaksi pohditaan Suomen tilannetta käsitysten ja uskomusten ja käytännön luokkahuonekokeilun kautta.

5.2 Artikkelii II: Opettajien ja opettajaopiskelijoiden vertailutehtäviin liittyvät käsitykset

Artikkelissa II tutkin matematiikkaa opettavien opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmän käytöstä sen jälkeen, kun he itse olivat tuottaneet useita ratkaisutapoja, pohtineet ja vertailleet niitä sekä keskustelleet asiasta yleisemmin. Opettajia ja opettajaopiskelijoita ohjattiin tässä siis kehittämään myös omaa joustavuuttaan. Opettajien käsityksissä vertailumenetelmä näyttäytyi keskustelevana ja luovana tapana opiskella matematiikkaa, ja opettajan roolina voisi heidän mukaansa tämän myötä olla valmentajana toimiminen. Opettajien mielestä perinteinen rutiininomainen matematiikka voitaisiin haastaa ja löytää tilalle aktiivisuutta. Tämä voisi nähdäkseni näyttäytyä adaptiivisen asiantuntijuuden (Hatano, 2003) kehittämisenä rutiiniasiantuntijuuden sijaan.

Artikkelin II tutkimuksen opettajien näkemykset vertailumenetelmän hyödyistä ja haasteista olivat samansuuntaista aiempien tutkimusten kanssa (Lynch & Star, 2014a; Yakes & Star, 2011). Erona aiempaan tutkimukseen (Lynch & Star, 2014a) opettajien näkemyksissä oli nyt kuitenkin pienempi määrä esteitä menetelmän käyttöönottamiselle (Artikkeli II). Vaikuttaa siis, että tutkitut suomalaisopettajat suhtautuivat ajatukseen menetelmän käytöstä myönteisemmin kuin aiemmin tutkitut yhdysvaltalaisopettajat. Eräänä uutena asiana tutkittavat näkivät mahdollisuuden kertaamiseen, joka tuli ilmi opettajaopiskelijoiden näkemyksistä. Aiemmin opettajien näkemyksissä haasteeksi nähtyä vertailukeskustelun käymistä (Yakes & Star, 2011) tämän tutkimuksen opettajat ja opettajaopiskelijat eivät juuri pohtineet. He eivät mahdollisesti hahmottaneet tämän kuuluvan oleellisesti menetelmään, sillä heille ei ollut tätä välttämättä riittävästi painotettu.

Osan opettajista näkemyksissä menetelmän käyttö voisi mahdollistaa matematiikan opetuksen ja koko opetuskulttuurin muutoksen perinteistä opetusta aktiivisempaan ja luovempaan suuntaan. Opettajan roolin muutokseen voi liittyä osallistujien aktiivisuus ja täydennyskoulutuskurssilla yleensäkin puhuttu opetuksen muuttaminen. Käsitykset esimerkiksi yhteistyön ja luovuuden lisäämisestä ovat osa niin kutsuttuja 2000-luvun taitoja (Binkley ym., 2012), joten näkisin, että näitä taitoja tarvitaan myös arki- ja työelämässä.

Osallistujat olivat kriittisiä vertailumenetelmän käyttöönotolle ja hyödyille, mutta toisaalta näkivät useiden ratkaisutapojen paitsi tulevan oppilailta spontaani-

nisti myös olevan vaihtoehto kaavamaiselle yhden tavan mukaan opettamiselle. Käyttöön otossa tulisi nähdäkseni huomioida ajattelutavan muutos, jotta vertailua ei tuoda oppilaille vain uutena rutiininomaisesti suoritettavana menetelmänä. Jos esimerkiksi opetettaisiin, että tässä tapauksessa käytetään tätä ratkaisutapaa ja tässä toisessa toista, eri ratkaisutapojen idea unohtuisi. Oppilas ei tekisi itse valintaa ratkaisutapojen välillä. Tärkeää nähdäkseni on, että oppilaat pääsisivät selittämään ääneen eri ratkaisutapoja ja vertailemaan niitä. Osa opettajista ehdotti vertailua sen jälkeen, kun ratkaisutavat ovat hyvin hallussa, toiset puolestaan näkivät mahdollisuutena oppia vertailun kautta jotain uutta toisesta ratkaisutavasta ja löytää ajattelun tai laskemisen virheitä.

Tulkitsen, että vaikka menetelmässä nähtiin haasteita ja oltiin kriittisiä, opettajat näkivät sen mahdollistavan useita matematiikassa oleellisina pitämiään tietoja ja taitoja, jolloin menetelmän voisi ajatella heidän mielestään hyödyttävän matematiikan opetusta. Opettajat ja opiskelijat vaikuttivat avoimilta menetelmälle, vaikkei kovin moni pohtinutkaan ääneen menetelmän mahdollista käyttöä. Opiskelijat pohtivat kategorisoinnin ulkopuolella runsaasti omaa opiskeluaan ja peilaivat menetelmää sitä kautta.

Artikkelissa II tuli ilmi osallistujien ajatus, että jos annetaan vain yksi ratkaisutapa, oppilaille voi jäädä käsitys, että se on ainoa mahdollinen. Jos toinen tapa esitetään vasta uuden esimerkin yhteydessä, oppilas voi ajatella, että tapa toimisi vain samantyyppisille esimerkeille. Useiden ratkaisutapojen käyttö rinnakkain niitä vertaillen on jo tästäkin syystä tarpeen. Opettaja ei toimisi vain tiedon siirtäjänä, vaan valmentaisi oppilasta antaen useampia keinoja tehtävien selvittämiseen ja auttaisi oppilasta laajentamaan ymmärrystään useita ratkaisutapoja käyttäen.

Kuitenkin osallistujien mielessä oli myös haasteita, joita ei voi sivuuttaa. Onko menetelmä kognitiivisesti liian rasittava heikoimmin menestyneille oppilaille? Mistä heidän opetuksessaan tulisi lähteä liikkeelle? Nähdäänkö rutiinit oleellisimpana matematiikan opetuksessa? Aiemmassa laadullisessa tutkimuksessa kuitenkin myös heikosti menestyneet ovat kokeneet hyötyneensä vertailutehtävien käytöstä (Lynch & Star, 2014b), joten voisi ajatella, ettei menetelmä ole liian vaativa heikoimmillekaan oppilaille. Nähdäkseni huolissa on kyse siitä, millaisena matematiikan opetus nähdään. Jos siinä tähdätään mahdollisimman hyvään proseduraaliseen tietoon, niin voisi ajatella, ettei joustavuutta ja syvempää käsitteellistä osaamista tarvita, varsinkaan heikoimpien osalta. Näkisin kuitenkin, että juuri proseduraalinen joustavuus on tärkeää, jotta voidaan käyttää opittua tietoa sujuvasti. Entä miten oppilaita saisi etäännyttämään uskomuksesta, että yksi nopea vastaus riittää matematiikan tehtävän ratkaisemiseen (Törner, 1998)? Tähän kysy-

mykseen vertailutehtävät voisivat olla yksi ratkaisu, sillä niissä oppilaat ovat näkemykseni mukaan ikään kuin pakotettuja analysoimaan vastauksen etsimisen sijaan. Oppilaat voisivat alkaa oivaltaa, että matematiikka on muutakin kuin nopeita vastauksia.

Kaikkiaan on mielenkiintoista, miten laajasti tutkittavat aihetta pohtivat. Eri-laisten ajattelumallien oppiminenkin yleistettiin myös muualle kuin matematiikkaan ja nähtiin mahdollisuus oppimiskulttuurin muutokseen. Taulukossa 12 kaikissa kolmessa tutkimuksessa yhteiseksi seikaksi nousi matemaattisen ymmärryksen syventäminen ja matematiikan ytimessä olevien yleisten ajattelutaitojen näkeminen selkeämmin. Päättelen, että tämä seikka on selkeästi kaikkein oleellisin vertailua käytettäessä. Toisaalta suomalaisopettajat ja -opiskelijat olivat ainoita, joilta esiin nousi ajatus, ettei menetelmä kehittäisi oppilaan kognitiivisia taitoja (Taulukko 12). Tosin näkemyksiin saattoi vaikuttaa paitsi se, ovatko opettajat käyttäneet menetelmää käytännön koulumaailmassa, myös erilainen kulttuuriympäristö ja koulutustausta yhdysvaltalais- ja suomalaisopettajien välillä.

Sillä, miten opettaja itse näkee matematiikan opiskelun (matematiikkakuva), saattoi niin ikään olla suuri vaikutus opettajien esiin tulleisiin näkemyksiin. Se peilautui vastauksiin esimerkiksi siinä, arvostetaanko keskustelua tai rutiinien harjoittelua. Opettajien ja opettajaopiskelijoiden välillä oli myös joitain eroja, jotka saattoivat liittyä siihen, että opettajat pohtivat aihetta opettajan näkökulmasta, mutta opettajaopiskelijat pikemminkin oppilaan näkökulmasta. Lisäksi käytetyt matematiikan tehtävät eivät välttämättä olleet kaikille opettajille sopivan tasoisia, vaan liian haastavia, mikä saattoi saattaa heidät oppilaan rooliin.

5.3 Artikkelin III: Matematiikan opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä tarkoituksellisia virheitä

Artikkelissa III selvitimme opettajien syitä käyttää tai olla käyttämättä spontaaneja ja tarkoituksellisia virheitä sekä innokkuutta näiden käyttämiseen. Opettajien uskomuksia tarkoituksellisista virheistä ei tietojeni mukaan ollut tutkittu aiemmin.

Aiemmissa tutkimuksissa on tuotu esiin, että virheet kiusaannuttaisivat oppilaita tai vahingoittaisivat heidän itseluottamustaan (Bray, 2011; Silver, Ghouseini, Gosen, Charalambous & Strawhun, 2005). Nyt tällaisia kommentteja ei ilmennyt. Artikkelin III tutkimuksessa opettajat tarkastelivat virheitä enemmän kognitiivisesta kuin affektiivisesta näkökulmasta. Affektiivisesta näkökulmasta katsottuna vastaajat olisivat voineet olla varauksellisempia ja suhtautua virheisiin negatiivisemmin kuin tämän tutkimuksen opettajat. Lisäksi tulee huomioda, että ennako-

luulot tarkoituksellisia virheitä kohtaan saatiin selville tutkimuksessa, jossa tarkoituksellinen virhe oli selitetty, mutta ei ollut kerrottu, että sen voisi tuoda esiin oikein tehdyn esimerkin rinnalla.

Brayn (2011) mukaan virheet nähdään helposti oppimista häiritsevinä tekijöinä oppitunneilla. Esimerkiksi virheet voidaan muistaa vahingossa oikeina ratkaisuna, mikä voitiin Artikkelissa III jakaa kahteen mahdolliseen ajattelutapaan. Ensinnäkin opettajien uskomuksissa virheet voidaan kokea häiriötekijöinä, koska oppilaat eivät alun perin ymmärrä, missä oli virhe. Vaihtoehtoisesti opettajien mukaan oppilaat eivät myöhemmin muista, että kyseessä oli ollut virhe. Tätä jälkimmäistä tukee Loehrin ja kollegoiden (2020) ajatus, ettei virheitä aina välttämättä muisteta jälkeensä. Toisaalta Swellerin (2011) mukaan työmuistin kuorma vähenee tällaisissa tehtävissä. Minulla kuitenkin herää kysymys, siirtykö virheellinen esimerkki pitkäkestoiseen muistiin. Mietin myös, kasvaako varmasti negatiivinen tieto eli tieto siitä, mikä ei toimi (Gartmeier, Bauer, Gruber & Heid, 2008). Näkisin, että tähän ongelmaan voitaisiin vastata sillä, että paitsi virheellinen myös oikea periaate taustalla käytäisiin huolella läpi kuten jo aiemminkin on tutkimuksessa ehdotettu (Alfieri, Nokes-Malach & Schunn, 2013).

5.4 Artikkelin IV: Tarkoituksellinen virhe matematiikan luokkahuonekeskustelussa

Artikkelissa IV tutkin tarkoituksellisen virheen käyttöä koko luokan keskustelussa. Vertailutehtävien kautta voidaan oppia erilaisia matematiikassa tarvittavia taitoja, joten niiden kuten virheen sisältävien tehtävienkin avulla voisi syventää oppilaiden matemaattista osaamista (esim. McLaren ym., 2012; Star, Pollack ym., 2015).

Aiemmassa tutkimuksessa on todettu, että matematiikan käsitteellinen osaaminen on Suomessa jäänyt mahdollisesti liian vähäiselle huomiolle (Andrews, 2013; Attorps, 2006). Tähän voitaisiin vaikuttaa tarkoituksellisen virheen sisältävien tehtävien avulla, joiden on todettu kehittävän matematiikan käsitteellistä osaamista sekä oikeiden käsitteiden ja proseduurien käyttöä (Booth ym., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Tähän liittyy Artikkelissa IV esiin tullut seikka, että virheen käsittely toi esiin sekä käsitteisiin että prosedureihin liittyviä virhekäsityksiä. Tämä loi mahdollisuuden oikeiden käsitteiden ja proseduurien käytölle sitä kautta, että virhekäsitykset voitiin korjata. Virheen sisältävän vertailutehtävän käyttö toi esiin muitakin kuin tehtävään sisäänrakennettuja virhekäsityksiä, mikä näyttäisi edesauttavan myös niiden korjaamista. Tämä oli uutta aiempiin tutki-

muksiin verrattuna (vrt. Adams et al., 2014; Booth ym., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012).

Tärkeää olisi Sieglerin (2002) mukaan myös sekä virheellisten että oikeiden ratkaisujen itseselittäminen. Se toteutuikin tässä tutkimuksessa, tosin yhteisöllisesti (Artikkeli IV), ja päästiin käsiksi vieläpä virhekesityksiin. Oppilailla oli mahdollisuus perustella ajatuksiaan, joskin opettaja puhui itse kaikissa ryhmissä melko paljon ja oppilaat suhteessa paljon vähemmän.

Opettajan roolia vertailutehtävien käytössä on tutkittu jonkin verran. Tiedetään esimerkiksi, että avoimet kysymykset ovat yhteydessä oppilaiden kasvaneeseen joustavuuteen (Star, Newton ym., 2015). Nyt oppilaiden käsitteellistä ymmärrystä toivat esiin opettajan ”miksi”-kysymykset, jotka tähtäävätkin juuri käsitteellisen ymmärryksen kehittämiseen ja ymmärtämisen lisäämiseen (Pehkonen, 2011; Star, Newton ym., 2015). Tulisi kuitenkin myös muistaa, että käsitteellinen osaaminen ei ole ainoa ymmärtämiseen liittyvä asia, vaan myös proseduraaliseen osaamiseen liittyy ymmärtämistä (Star, 2005).

5.5 Koonti tutkituista käsitteistä

Muotoilen nyt kokonaiskuvaa tutkimistani käsitteistä. Listaan käsitteistä aiemmin tiedettyjä seikkoja ja omassa tutkimuksessani selville saamiani asioita. Lisäksi pohdin näitä käsitteitä tekstikappaleissa. Esitän seuraavissa listoissa käsitteet joustavuus, vertailutehtävät, virheet ja tarkoitukselliset virheet. Listauksia on mahdollista hyödyntää esimerkiksi jatkotutkimuksessa ja opettajien perus- tai täydennyskoulutuksessa.

Joustavuus

Joustavuudella yhtälöratkaisun yhteydessä tarkoitetaan kykyä tuottaa ongelmaan eri lähestymistapoja, verrata niitä ja valita sopivin strategia (esim. Star & Rittle-Johnson, 2008).

- Standardistrategia yhtälöratkaisuun vaikuttaa olevan vahvasti oppilaiden tiedossa (Star, Tuomela ym., 2022; Verschaffel, Greer & DeCorte, 2007).
- Standardistrategian suosiminen yhtälöratkaisussa esti eräässä tutkimuksessa useiden ratkaisutapojen käyttöä yhdysvaltalaisopettajilla (Buchbinder, Chazan & Fleming, 2015).

- Oppilaiden joustavuus yhtälönratkaisussa ei vaikuta olevan spontaanisti kovin suurta (Star & Seifert, 2006; Star, Tuomela ym., 2022).
- Joustavuus yhtälönratkaisussa oli testatuilla suomalaisoppilailla kohtalaisella tasolla (Artikkeli I).
- Oppilaat voivat nähdä matematiikan säännön toistamisena ja tehtävinä, joihin on löydyttävä nopeasti ratkaisustrategia, joka on vieläpä tiedettävä jo etukäteen (Schoenfeld, 1992).
- Oppilaat ajattelevat, että työskentely tähtää nopeaan oikean ratkaisun löytämiseen (Törner, 1998).
- Lahjakkaatkaan oppilaat eivät välttämättä käytä tilanteeseen sopivinta strategiaa (Newton, Star & Lynch, 2010; Star & Newton, 2009).
- Joustavuus voi mahdollistaa tehtävien nopean ja oikean ratkaisemisen (Heinze, Star & Verschaffel, 2009; Lemaire & Siegler, 1995)
- Oppilaat, joilla oli paljon innovatiivisia ratkaisuja, olivat nopeita. Oppilaat, joilla ei ollut paljon innovatiivisia ratkaisuja, olivat joko nopeita tai hitaita yhtälönratkaisijoita (Artikkeli I).
- Oppilaat, joilla oli paljon innovatiivisia ratkaisuja, ratkaisivat paljon tehtäviä oikein. Oppilailta, jotka ratkaisivat paljon tehtäviä oikein, oli joko paljon tai vähän innovatiivisia ratkaisuja (Artikkeli I).

Joustavuus yhtälönratkaisussa on melko paljon tutkittu aihe etenkin Yhdysvalloissa. Oppilaat Suomessakin vaikuttaisivat tuntevan hyvin standardistrategian (kerrosulut auki, suorita laskut, vie muuttujatermit vasemmalle ja vakiotermit oikealle, jaa kertoimella) (Star, Tuomela ym., 2022). Kuitenkin liiallisessa standardistrategian suosimisessa saattaa olla riskinä, että useiden ratkaisutapojen käyttö jää vähäisemmälle huomiolle (Buchbinder, Chazan & Fleming, 2015). Joustavuus ylipäänsä vaikutti olevan kohtalaisella tasolla, ja toisaalta tehtävien oikein tekeminen (oikeellisuus) ei ollut yhteydessä siihen, että oppilailta olisi paljon innovatiivisia ratkaisuja (Artikkeli I). Näistä voisinkin päätellä, että nopeuden ja oikeellisuuden painottaminen ei välttämättä edesauta joustavien ratkaisutapojen käyttöä. Joustavuutta edistävillä keinoilla vaikuttaisi siis olevan tarvetta.

Vertailutehtävät

Vertailutehtävissä esitetään rinnakkain oikea ja virheellinen ratkaisutapa, joita tutkitaan vertaillen. Voidaan puhua myös työstetystä esimerkkiparista (Star, Newton ym., 2015).

- Työstettyjä esimerkkejä tutkittaessa työmuistin kuorma vähenee verrattuna siihen, että ratkaistaisiin tehtäviä itse (Sweller, 2011).
- On tärkeää, että vertailun jälkeen esitetään yleisempiä periaatteita (Alfieri ym., 2013).
- Proseduraalinen tieto lisääntyy, kun käytetään vertailutehtäviä (Star, Rittle, Johnson & Durkin, 2016).
- Vertailutehtäviä käytettäessä proseduraalinen joustavuus lisääntyy (Rittle-Johnson & Star, 2007; Durkin, Rittle-Johnson, Star & Loehr, 2021).
- Opettajien käsitysten mukaan vertailutehtävien avulla voitaisiin kehittää esimerkiksi asioiden näkemistä eri näkökulmista, aktiivisuutta ja analysointitaitoja (Artikkeli II).
- Opettajan rooli voisi opettajien käsitysten mukaan näiden tehtävien myötä muuttua enemmän valmentajaksi (Artikkeli II).
- Opettajat suosivat avoimet kysymykset voivat auttaa vertailutehtävien potentiaalinen hyödyntämisessä (Star, Pollack ym., 2015).
- Vertailutehtävien myötä tietämys eri ratkaisutavoista lisääntyy (Star & Rittle-Johnson, 2008).
- Opettajien käsitysten mukaan oppilas voi vertailutehtäviä käyttäessään punnita ratkaisujaan (tarkistaa, löytää parhaan menetelmän) (Artikkeli II).
- Opettajat olivat huolissaan oppilaiden valmiuksista vertailutehtävien käyttöön ja kiinnostuksesta niitä kohtaan (Artikkeli II).
- Vertailutehtävät vaikuttavat hyödyttävän myös heikoimmin pärjänneitä oppilaita (Lynch & Star, 2014b).
- Oppilaiden saaminen mukaan vertailukeskusteluun voi olla haastavaa opettajalle (Star, Pollack ym., 2015).

Vertailutehtävät ovat keino lisätä proseduraalista tietoa, proseduraalista joustavuutta ja tietoisuutta eri ratkaisutavoista yhtälönratkaisun yhteydessä (Durkin, Rittle-Johnson, Star & Loehr, 2021; Star, Rittle-Johnson & Durkin, 2016; Rittle-Johnson & Star, 2007; Star & Rittle-Johnson, 2008). Työmuistin tarve vähenee (Sweller, 2011), joten voisi ajatella, että vertailutehtävän aloitus vaatii oppilaalta vähemmän ylimääräistä kognitiivista prosessointia kuin vastaavat perinteiset tehtävät. Näin oppilas voi kiinnittää huomiotaan uusiin opittaviin asioihin ja tutustua mahdollisesti sellaisiin menetelmiin, joita ei olisi itse vielä kyennyt konstruoimaan. Oleellista tehtävien käytössä on vuorovaikutus, joka mahdollistuu jo tehtävänannon perusteella, jos tehtäviä käytetään joko oppilaiden kesken tai yhdessä opettajan kanssa pohtien. Tämä näyttäytyi nähdäkseni opettajien käsityksenä, että

opettaja olisikin tehtäviä käytettäessä enemmän valmentajan roolissa (Artikkeli II).

Opettajien käsityksissä vertailutehtävistä nousi esiin useita niiden käyttöä puoltavia seikkoja, kuten asioiden näkeminen eri näkökulmasta, analysointitaidot ja ratkaisujen punnitseminen. Huolissaan opettajat olivat muun muassa oppilaiden valmiuksista käyttää tehtävätyyppejä ja kiinnostuksesta (Artikkeli II).

Vertailutehtävien kautta oppilailla vaikuttaisi olevan mahdollisuus tutustua matematiikkaan syvällisesti tutkien ja analysoiden. Lisäksi ajattelen, että tehtävätyypin kautta pääsee tutkimaan erilaisia ratkaisutapoja, jolloin on mahdollista löytää oppilaan omaa ajattelua lähellä olevia ratkaisustrategioita ja tarttumakohtia matematiikan omistajuutta kohti. Eri ratkaisutapojen tutkimisen voisi ajatella kehittävän ajattelua ja tietoisuutta eri tavoista tehdä asioita. Yhdessä ratkaisutavassa pitäytyminen ei kuitenkaan riitä, vaan nähdäkseni tehtävätyypin potentiaali on myös siinä, että matematiikan oppimisen voi nähdä adaptiivisen asiantuntijuuden kehittämisenä rutiiniasiantuntijuuden sijaan (vrt. Hatano, 2003). Opettajien käsitys, että tehtävätyyppi ei välttämättä sopisi kaikille (Artikkeli II) on toki todellinen huoli, mutta ei välttämättä ainakaan aina paikkansa pitävä, sillä yhdysvaltalais tutkimuksessa juuri heikoiten menestyneetkin oppilaat kokivat saavansa hyötyä vertailutehtävistä (Lynch & Star, 2014b). Kuitenkin tulisi huomioida, että vertailukeskustelun käymisessä saattaa ilmetä haasteita (Star, Pollack ym., 2015). Voisin ajatella tämän liittyvän siihen, että luokkahuoneen keskustelukulttuurin syntyminen vie aikaa.

Virheet

Virheellä tarkoitetaan virheellisiä vastauksia, virheellisiä ratkaisuja, lipsahduksia ja taustalla olevia virhekäsityksiä (Olivier, 1992; Santagata & Bray, 2015).

- Virheiden tekeminen nähdään yhä nykyäänkin negatiivisena, hävettävänä ja itseä uhkaavana asiana (Steuer ym., 2015).
- Opettajat näkevät virheet oppimista häiritsevinä tekijöinä, joista ei helposti aloiteta keskustelua koko luokan kanssa (Bray, 2011), vaikka juuri keskustelu edistäisi virheistä oppimista (Steuer & Dresel, 2015).
- Opettaja ei välttämättä huomaa virhettä tai puutu siihen luokan kesken käytävässä keskustelussa (Artikkeli IV).
- Virheet voisivat toimia oppimisen ponnahduslautana (Borasi, 1994).

- Virheisiin tulisi antaa rakentavaa ja reagoivaa tukea (Wischgoll, Pauli & Reusser, 2015).
- Virheet paljastavat oppilaan päättelyn ja mahdollistavat sitä kautta oppimisen (Brodie, 2014; Santagata & Bray, 2015).
- Virheiden käsittely toimii oppimisen suuntaamisen apuna (Metcalf, 2017).
- Virheiden käsittely kartuttaa negatiivista tietoa eli tietoa siitä, mikä ei toimi (Gartmeier ym., 2008).
- Virheistä oppimisessa tarvitaan kognitiivisia ja metakognitiivisia prosesseja (Tulis ym., 2017).
- Opettajien asenne virheitä kohtaan siirtyy oppilaille (Tulis, 2013).
- Tutkitut opettajat suhtautuivat ajatukseen virheistä oppimisesta pääosin myönteisesti (Artikkeli III).
- Jos oppijalla on positiivisia uskomuksia virheistä oppimisesta, hän todennäköisemmin analysoi ja korjaa virheensä (Tulis, Steuer, & Dresel, 2017).

Virheistä oppiminen on useissa tutkimuksissa nähty erittäin hyödyllisenä seikkana ja toimivan esimerkiksi oppimisen suuntaamisen apuna (Metcalf, 2017). Silti vaikuttaisi, että oppilaat ja opettajat pelkäävät virheitä tai näkevät ne oppimista häiritsevinä (Bray, 2011; Steuer ym., 2015). Kaikki kuitenkin tekevät väistämättä virheitä eikä niitä voi välttää. Virheiden kohtaamiseen tarvittavia kognitiivisia ja metakognitiivisia prosesseja (Tulis ym., 2017) tulisikin nähdäkseni kehittää – ja tähän olisi mahdollisuus matematiikan opiskelussa, kunhan virheet nähtäisiin oppimisen keinoina. Tärkeää on myös, että virheistä keskustellaan (Steuer & Dresel, 2015), joten yksi keino virheiden käytön hyödyntämiseen voisi olla tarkoituksellisten, tyypillisten käsitteellisten virheiden käyttäminen. Spontaanisti nouseviin virheisiin voisi olla hyvä myös tarttua, joskaan opettaja ei vaikuttanut aina tuovan niitä koko luokan keskusteluun aineistossani (Artikkeli IV). Opettaja ei toki aina välttämättä huomaa kaikkea, mitä luokkahuoneessa tapahtuu – eikä voikaan näin tehdä. Mielestäni olisi kuitenkin tärkeää lisätä opettajien tietoisuutta virheiden käsittelyn hyvistä puolista.

Tarkoitukselliset virheet

Tarkoituksellisessa virheessä oppilaille esitetään virheellisen välivaiheen sisältävä ratkaisutapa. Välivaiheessa on yleensä jokin oppilaiden usein tekemä virhe.

- Virheellisten esimerkkien käytössä oleellista on, että

- 1) vältetään häpeän tunnetta ja motivaation puutetta tutkimalla toisten virheitä eikä omia,
 - 2) esimerkit ovat vuorovaikutteisia ja osallistavia sekä
 - 3) tehtävät pyrkivät vähentämään ylimääräistä prosessointia ja lisäämään oleellista prosessointia (Adams ym., 2014).
- Tehtävätyypissä voidaan yhdistää tiedolliset ja motivaatioon liittyvät hyödyt (Barbieri & Booth, 2016).
 - Tarkoituksellisia virheitä käyttäneillä oppilailla oli viivästetyssä jälkitestissä paremmat matematiikan tulokset kuin tavanomaisia tehtäviä käyttäneillä (Adams ym. 2014).
 - Tarkoitukselliset virheet lisäävät algebran käsitetietoutta sekä auttavat käyttämään oikeita menetelmiä ja käsitteitä (Booth, Lange, Koedinger & Newton, 2013; Durking & Rittle-Johnson, 2012).
 - Virheiden avulla voitaisiin opettajien uskomusten mukaan aktivoida oppilaita, saada aikaan keskustelua ja opettaa virheiden kanssa elämistä (Artikkeli III).
 - Opettajat pelkäävät, että virheiden käsittely voisi sekoittaa oppilaita. Oppilaat eivät välttämättä huomaisi virhettä tai eivät jälkeempäin muistaisi, että esitetty ratkaisu oli virheellinen (Artikkeli III).
 - Virheiden taustalla olevan oikean periaatteen varmistaminen on tärkeää (Alfieri ym., 2013).
 - Opettaja voisi suosia avoimien kysymyksien lisäksi "miksi"-kysymyksiä (Artikkeli IV).
 - Virheen sisältävällä vertailutehtävällä saatiin tuotua näkyville oppilaiden omia virhekäsityksiä (Artikkeli IV)
 - Toimivaa on esittää rinnakkain oikea ja virheellinen ratkaisutapa (Durkin & Rittle-Johnson, 2012).
 - Oppilaat hyötyvät virheiden käsittelystä, vaikeivat edes pitäisi tehtävätyypistä (Adams ym., 2014).
 - Virheen sisältävissä vertailutehtävissä esitettyjen merkityksestä on ristiriitais-ta tietoa (esim. Durkin & Rittle-Johnson, 2012 vs. Große & Renkl, 2007)

Tarkoitukselliset virheet ovat aiemmassa tutkimuksessa lisänneet matematiikan osaamista (Adams ym., 2014; Booth, Lange, Koedinger & Newton, 2013; Durking & Rittle-Johnson, 2012). Tehtäviä käytettäessä tulisi huomioida, että tutkitaan toisten virheitä omien sijaan, keskustellaan ja minimoidaan ylimääräinen prosessointi sekä varmistetaan virheen taustalla oleva periaate (Adams ym., 2014; Alfieri ym., 2013). Virheiden käytön mahdollisina hyötyinä opettajat näkivät

mahdollisuuden aktivoida oppilaita, keskustella virheistä ja ylipäänsä oppia elämään virheiden kanssa (Artikkeli III).

Opettajien pelko on todellinen: sekoittaako virheiden käyttö oppilaita. Tutkimuksessa erotin tästä opettajien uskomuksesta kaksi mahdollista vaihtoehtoa: oppilas ei alun perin ymmärrä, että kyseessä on virhe tai oppilas ei jälkeenpäin muista, että kyseessä oli virheellinen esimerkki (Artikkeli III). Tutustuttuani virheisiin ja tarkoituksellisiin virheisiin näen virheet keskeisenä ja luonnollisena osana oppimista, ja niiden käytössä niin paljon hyvää, että niitä kannattaisi vähintäänkin kokeilla pitkäjänteisesti. Virheitä yhteisesti käsittelemällä voitaisiin mahdollisesti luoda positiivista virheilmapiiriä ja lisätä keskustelua. Tätä tosin tulisi tutkia vielä lisää. Samoin esitietojen merkitystä virheistä oppimiselle tulisi selvittää lisää.

5.6 Yleisempää pohdintaa

Käyn nyt läpi tuloksien pohdintaa yleisemmin väitöskirjan tutkimuskysymysten pohjalta peilaten tuloksia lisää tutkimuskirjallisuuteen.

Aluksi teen yhteenvedon väitöskirjan tutkimuskysymyksistä ja niiden tuloksista, jotka on esitetty tarkemmin luvussa 4.5. Neljässä osatutkimuksessa muodostin kuvaa joustavuuden osaamisesta suomalaisoppilailla sekä joustavuuden ja virheistä oppimisen lisäämisestä vertailutehtävien avulla. Ensinnäkin selvitin joustavuutta ja sen yhteyttä tehtävien tekemisen nopeuteen ja tehtävien oikeellisuuteen sekä joustavuuden opettamisen tarpeellisuuteen liittyviä uskomuksia (TK1). Havaitsin tarpeen joustavuuden opettamiselle koulussa, koska joustavuus oli vain kohtalaisella tasolla. Lisäksi jotkut tutkittavat korostivat rutiinien tärkeyttä vastakkaisena joustavuuden opettamiselle, mikä vaikuttaisi ilmentävän heidän vastustustaan joustavuutta kohtaan. Lähdin oletuksesta, että opettajien käsitykset ja uskomukset vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä määrittävät, onko niitä ylipäänsä mahdollista käyttää – ja miten. Toiseksi tutkinkin vielä tarkemmin opettajien käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävistä ja virheistä (TK2). Uskomukset ovat tärkeitä, sillä opettajien uskomukset ja luokkahuonekäytänteet ovat yhteydessä toisiinsa (Speer, 2008; Stipek ym., 2001). Käsityksistä ja uskomuksista pystyin päättämään opettajien etupäässä puoltavan uusien tehtävätyyppien käyttöä. Opettajilla oli myös huolia, kuten että menetelmät sekoittaisivat oppilaita tai että ne eivät soveltuisi kaikeskouluisille oppilaille. Nämä ja muut huolet tulisi huomioida ja mahdollisesti selvittää tarkemmin. Kolmanneksi selvitin seikkoja, jotka edistävät tai vaikeuttavat vertailutehtävien ja virheiden käytännön sovelta-

mista luokkahuonetilanteeseen (TK3). Tässä opettajan aktiivinen asenne ja perustelujen kysely vaikuttivat tärkeiltä. On myös tärkeää havaita, että opettajien asenne virheitä kohtaan siirtyy helposti oppilaille (Tulis, 2013).

Pohdin seuraavaksi tuloksia lisää. Näkökulmiani ovat joustavuus, vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden hyödyllisyyden, käytön rajoitukset, menettelyn toimivuus, käytännön luokkahuonetilanteet ja opetuksen kehittäminen.

Joustavuutta mitatessamme tulokset olivat yhtäältä testin tehneillä suomalaisoppilailla yleisesti ottaen kohtalaisia, mutta toisaalta silti varsin hyviä verrattuna esimerkiksi espanjalaisoppilaiden joustavuuteen (Star, Tuomela ym., 2022). Tulokset eivät kuitenkaan olleet yleistettävissä koskemaan kaikkia oppilaita Suomessa eivätkä myöskään Espanjassa. Artikkelissa I joustavuuden suhde tehtävien tekemisen nopeuteen ja oikeellisuuteen näyttäytyi toisaalta selvänä, sillä jos oppilaalla oli kapasiteettia joustavuutta kohtaan (innovatiivisia strategioita sisältävien tehtävien lukumäärä), myös hänen nopeutensa ja tehtävien oikeellisuutensa olivat suuria. Joustavuus tämän pohjalta vaikuttaisi olevan yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen. Toisaalta oli olemassa myös oppilaita, joilla oli pieni kapasiteetti ja suuri nopeus ja oikeellisuus (Artikkeli I). Kuitenkaan taipumuksen (kyky spontaanisti tuottaa innovatiivisia ratkaisuja) kohdalla vastaavaa yhteyttä ei yllättäen ollut (Artikkeli I). Otaksun tämän tarkoittavan sitä, että jaettaessa joustavuus kahteen osaan taipumus ei ole niin selvästi yhteydessä nopeuteen ja oikeellisuuteen kuin kapasiteetti. Tämä ei mielestäni kuitenkaan tarkoita, etteikö taipumusta tarvittaisi, vaan päinvastoin siihen tulisi kiinnittää huomiota opetuksessa. Taipumus joka tapauksessa on osa joustavuutta, jota tarvitaan matematiikassa. Ajattelen myös, että jos taipumus joustavuutta kohtaan ei liity nopeuteen ja oikeellisuuteen, tulisi sitä kehittää muuten kuin laskemalla. Tässä sana ”taipumus” viittaa itsestään kehittyvään ominaisuuteen, vaikka todellisuudessa sen kehittäminen vaatii työtä.

Suomessa on tutkittu kyselytutkimuksella opettajien käytännön kokemuksia heidän osallistuttuaan Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutusohjelmaan. Tässä tutkimuksessa opettajien näkemysten mukaan ohjelmalla ei niinkään vaikutettu oppilaiden ongelmanratkaisukykyihin, mutta motivaatiossa ja suhtautumisessa matematiikkaa kohtaan opettajat huomasivat vaikutuksia (Markkanen, 2019). Huomio tukee tämän tutkimuksen tuloksia siltä osin, että joustavuuden idealla voidaan vaikuttaa laajemminkin matematiikan oppimiseen. Oppilaiden motivaation raportoitua lisääntymistä pidän myös hyvänä asiana, vaikka tutkimuksessa ei sitä suoraan mitattukaan. Motivaation ja asennoitumisen muutoksista ei näin ollen voida vetää tarkempia johtopäätöksiä, vaan asiaa tulisi tutkia lisää.

Tutkitut suomalaisopettajat ja opettajaopiskelijat vaikuttivat olevan avoimempia useiden ratkaisutapojen käyttämiselle kuin Bingolbalin (2011) tutkimat 500 turkkilaisopettajaa, jotka pelkäsivät vaikeuksia vastaamisessa oppilaiden avoimiin kysymyksiin ja heidän arvioimisessaan. Vertailutehtävien käyttöön voi opettajilta löytyä paremmat valmiudet kuin avoimien tehtävien käyttöön. Vertailutehtävät ovatkin suljetumpia kuin avoimet tehtävät, joissa oppilaat löytävät eri ratkaisutapoja itse, ja siksi nähdäkseni helpompia ottaa käyttöön. Nyt opettajat eivät myöskään tuoneet esiin vertailukeskusteluun liittyviä huolia toisin kuin aiemmassa tutkimuksessa (Yakes & Star, 2010). Suhtautuminen joustavuutta kohtaan vaikutti siis laadullisen aineistoni perusteella hiukan ristiriitaiselta, ja tämä tulisi huomioida esimerkiksi jatkotutkimuksessa, opettajankoulutuksessa ja opettajien täydennyskoulutuksessa siten, että käsityksiä selvitettäisiin tarkemmin ja opettajat pääsisivät työstämään käsityksiään ja kuulemaan tutkimustuloksista. Kuitenkin – kuten tässäkin tutkimuksessa – opettajien uskomukset voivat olla myös ristiriidassa keskenään. Tällaista ristiriitaa on havaittu aiemminkin. Esimerkiksi Kuparin (1999) tutkimuksessa opettajien uskomuksissa korostuivat toisaalta ajattelemisen tärkeys ja erilaisten ratkaisutapojen merkitys ongelmanratkaisussa, mutta toisaalta rutiiniharjoittelun painottaminen.

On myös tärkeää huomata, että esimerkiksi joustavuuden ja rutiinin painoituksen välillä ei tulisi ajatella olevan tiukkaa kahtiajakoa. Rutiinejakin tarvitaan, eikä joustavuus muutenkaan ole muusta matematiikan oppimisesta irrallinen asia, sillä joustavuuden kehittymistä voidaan tukea sekä proseduraalisen tiedon että konseptuaalisen tiedon kautta (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011). Jo proseduraalisen joustavuuden alkuperäinen ideakin sitä paitsi oli käsitetiedon yhdistäminen proseduraaliseen tietoon (Star, 2005).

Tutkimuksen opettajien käsitysten ja uskomusten mukaan vertailutehtävät ja virheet voisivat olla hyödyllisiä opetuksen ja oppimisen kannalta (Artikkelit II–IV), mikä vahvistaa aiempia tutkimustuloksia menetelmien hyödyistä matemaattisen tiedon kehittymiselle (esim. Adams ym., 2014; Star & Rittle-Johnson, 2008). Tämän tutkimuksen tulokset kertovat, että vertailutehtäviä ja virheitä voi opettajien näkemyksien mukaan hyödyntää matematiikan opetuksen tukena monin tavoin, kuitenkin oppilaiden mahdolliset erot huomioiden. Opettajien käsitysten ja uskomusten mukaan vertailutehtävien ja virheiden avulla voi kehittää analysointitaitoja, aktiivisuutta, asioiden näkemistä eri tavoin, oppilaalle sopivan menetelmän löytämistä, virheiden kanssa elämään oppimista ja virheistä oppimista tuoden esiin erilaisia virhekäsityksiä (Artikkelit II ja III). Nämä ovat tärkeitä paitsi kou-

lumatematiikassa, myös arki- ja työelämätaitoina sekä tulevaisuuden taitona (vrt. Binkley ym., 2012).

Tarkoitukselliset virheet vaikuttavat hyödyllisiltä opetukselle aiemmankin tutkimuksen perusteella myös sen vuoksi, että sekä kognitiiviset hyödyt että motivaation parantaminen voidaan yhdistää käyttämällä tarkoituksellisia virheitä (Barbieri & Booth, 2016). Tämä tutkimus tuki tätä käsitystä tuomalla esiin muun muassa mahdollisuuden esimerkiksi uusien virhekäsitysten korjaamiseen (Artikkeli IV), mikä on osa tiedollista osaamista. Lisäksi opettajien käsityksien mukaan opetuskulttuuria voitaisiin muuttaa aktiivisemmaksi, ja opettajan rooli voisi muuttua kohti valmentajan roolia. Tämä tarkoittaa uudenlaista matematiikan opetusta heidän kuvailemansa perinteisen rutiinilähtöisemmän opetuksen tilalle (Artikkeli II). Nämä ovat uudenlaisia näkökulmia verrattuna esimerkiksi Adamsin ja kollegoiden (2014) esiin tuomiin seikkoihin virheellisten esimerkkien käytöstä. Heidän mukaansa virheellisten esimerkkien avulla voidaan 1) välttää häpeän tunnetta ja motivaation puutetta, sillä tutkitaan toisten virheitä, 2) tehdä tehtäviä vuorovaikutuksellisesti ja osallistavasti ja 3) vähentää ylimääräistä prosessointia (esimerkiksi turhat merkinnät tehtävässä) ja lisätä oleellista prosessointia.

Kuitenkin menetelmiä käytettäessä kouluttajien ja opettajien tulisi huomioida opettajien menetelmien käytölle esittämät mahdolliset haasteet kuten aikarajat, opettajilta vaadittu työ, oppilaiden erilaiset lähtökohdat sekä yksittäisten oppilaiden mahdolliset haasteet (Artikkelit II ja III). Nämä seikat muun muassa voivat hidastaa menetelmän käyttöä. Opettajilla oli joitakin huolia menetelmien käytöstä. Huolten suuruus ei tästä tutkimuksesta tule ilmi, eikä voida vetää johtopäätöksiä siitä, miten opettajat todellisuudessa käyttäisivät menetelmiä. Yksikin koettu epäkohta voi olla oleellinen, jos se estää menetelmän käytön. Opetuskokeilun opettajat sinänsä käyttivät menetelmiä aktiivisesti (Artikkeli IV), mutta opetuskokeiluihin lähteneet opettajat olivat aktiivisia opettajia, jotka mielellään halusivat jotain uutta opetukseensa. Tämä saattoi edesauttaa myönteistä suhtautumista vertailutehtävien käyttöön. Opettajien aktiivisuus pidemmässä opetuskokeilussa ei aiemmassa tutkimuksessa ollut niin selvää, sillä opettajat eivät välttämättä sitoutuneet käyttämään vertailutehtäviä kovin usein (Star, Pollack ym., 2015).

Pohdin nyt, miksi menetelmät toimivat. Vertailutehtävien kohdalla voidaan puhua työstetty esimerkki -efektistä, jossa työmuistin tarve kevenee. Tällöin tutkimalla ongelmaa ja sen ratkaisua opitaan enemmän kuin varsinaisen ratkaisemisen kautta (Sweller, 2011). Myös virheelliset esimerkit vapauttavat muistikapasiteettia oppimiseen, mutta yhtäaikaaisesti vaativat aktiivista oppimista (McLaren ym., 2012). Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet siis toimivat, koska ne

eivät vaadi niin paljon työmuistia kuin perinteiset tehtävät. Näitä huomioita tukevat tässäkin tutkimuksessa ilmenneet seikat, joiden mukaan opettajien näkemysten mukaan vertailutehtävät voisivat lisätä muun muassa aktiivisuutta (Artikkeli II). Oppilas voi keskittyä ymmärtämään oleellisia seikkoja. Toisaalta voi pohtia, olisiko juuri tämä syynä siihen, että virheitä ei välttämättä muisteta niin hyvin jälkeenpäin kuten Loehr ja kollegat (2020) esittivät. Opettajien huoli virheiden muistamisesta väärin (Artikkeli III) voi olla aiheellinen, ja sitä tulisi selvittää lisää. Tulee muistaa, että on tärkeää tuoda esiin periaatteita heti vertailun jälkeen (Alfieri ym., 2013), ja saman olettaisi pätevän virheenkin kohdalla. Pelkkä vertailutehtävien tai virheiden näyttäminen ei siis riitä, vaan tulee varmistaa, että ymmärretään, miten esitetyn tehtävän todella tulisi toimia.

Pohdin sitten, miten vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet soveltuvat eritasoisille oppilaille. Käsitiedon väärinymmärtäminen tai sen puute vaikuttavat olevan tärkeitä syitä virheiden taustalla (Başibüyük ym., 2016; Veloo ym., 2015). Tätä voi katsoa siitä näkökulmasta, että tarkoituksellisten virheiden avulla voisi opettajien näkemysten mukaan korjata näitä virhekäsityksiä tai puutteita kuten tässäkin tutkimuksessa opettajat esittivät ja tekivät (Artikkeli III; Artikkeli IV). Tässä aineistossa myös matematiikan osaamiseltaan heikoiksi kuvatut luokat vaikuttivat saavan korjattua virhekäsityksiään ja hyötyvän tehtävätyypistä (Artikkeli IV), kun aiemmassa tutkimuksessa tästä on ollut kahdenlaisia näkemyksiä. Vertailutehtävistä yleensä vaikuttavat hyötyvän laadullisen tutkimuksen mukaan heikotkin oppilaat (Lynch & Star, 2014b), mutta virheen sisältävän tehtävän ratkaisemisessa on esitetty erilaisia näkemyksiä riittävien esitietojen tarpeellisuudesta (Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007; McLaren ym., 2012). Tarkoituksellisen virheen tutkimisesta vaikuttivat eräässä tutkimuksessa hyötyvän eniten juuri ne, joilla oli eniten haasteita matematiikassa (Barbieri & Booth, 2016). Se tuli ilmi tässä tutkimuksessa siten, että virhekäsityksiä tuli keskusteluissa esille muuten, mutta luokassa, jossa oli erittäin hyvin menestyneitä oppilaita, näin ei käynyt (Artikkeli IV). Se tosin voi johtua myös siitä, ettei heillä yksinkertaisesti ollut virhekäsityksiä sillä hetkellä.

Puolestaan joustavuutta paransivat aiemman tutkimuksen mukaan eniten juuri ne, joilla oli vähiten joustavuutta alussa; joskin vertailun käyttö näyttää vaativan tietynlaista kypsyyttä esitiedoissa (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2009; Star, Newton ym., 2015). Esimerkiksi yhtälönratkaisun yhteydessä esitiedot ovat hyvin oleellisia, sillä yhtälönratkaisuun vaaditaan useiden eri matematiikan taitojen hallintaa (Kieran, 2004).

Pohdin seuraavaksi, miten opettajien käsitykset ja uskomukset ja käytännön luokkahuonetilanteet olivat yhteydessä toisiinsa. Opettajat olivat huolissaan, ettei menetelmä soveltuisi kaikille tai että se sekoittaisi oppilaita (Artikkeli II). Käytännössä kuitenkin juuri virhekäsitykset tulivat ilmi, kun heikommatkin oppilaat pääsivät ilmaisemaan (virheellisiä) ajatuksiaan ääneen (Artikkeli IV). Opettajien käsitys siitä, että vertailutehtävien kautta voitaisiin siirtyä kohti aktiivisempaa ja luovempaa matematiikan opetusta (Artikkeli II), toteutui siinä mielessä luokkahuonekokeilussa, että oppilaat pääsivät keskustelemaan ajatuksistaan (Artikkeli IV). Kuitenkaan luovuudesta tai opettajan roolin muuttumisesta valmentajaksi (Artikkeli II) on vielä vaikea sanoa tarkemmin, sillä Artikkelissa III ei tätä eksplisiittisesti käsitelty. Esimerkkinä silti voidaan kertoa luokkahuonekeskustelusta, jossa opettajan rooli oli pikemminkin ohjailla keskustelua ja tuoda ilmi oppilaiden uusia näkökulmia, niin virheellisiä kuin oikein ajateltuja (Artikkeli IV).

Käsitysten ja uskomusten muokkaamista menetelmän käyttö voisi kuitenkin vaatia, sillä esimerkiksi menetelmän soveltuvuudesta kaikille osallistujille oli ennakkoluuloja. Aiemman tutkimuksen mukaan opettajat voivat vältellä virheitä, jolloin mahdollisuus konseptuaalisen ymmärryksen kehittämiseen voidaan ohittaa (Bray, 2011; Santagata, 2005). Tässä tutkimuksessa virheitä ei vältelty, vaan ne tuotiin tarkoituksella esiin. Virhe saatiin luokkahuonekeskusteluissa paikannettua, ja myös uusia virhekäsityksiä nousi ilmi opettajan korjattavaksi (Artikkeli IV). Kaikki opettajat eivät kuitenkaan aina tarttuneet tähän tilaisuuteen (Artikkeli IV). Syyksi tähän voi arvella esimerkiksi sen, etteivät opettajat ole tottuneet ”ylimääräisiin” keskusteluihin, vaikka juuri oppilailta esiin nousevien keskusteluiden kautta voitaisiin lisätä oppilaiden käsitteellistä ymmärrystä. Tähän virheiden sivuuttamiseen saattoi vaikuttaa opettajien uskomus virheistä opetusta sekoittavina tekijöinä (Artikkeli III; Artikkeli IV). Virheen sivuuttaminen kuitenkin valitettavasti antoi negatiivisen mallin oppilaille, sillä opettajan asenne virheitä kohtaan vaikuttaisi olevan tärkeää tehokkaalle oppimiselle (Matteucci ym., 2015). Vertailutehtävät yleensäkin olivat uusi opetusmenetelmä opetuskokeilussa, joten pelkääntään uutuuden vuoksi oppilaille saattoi olla ennakkoluuloja tehtävätyyppiä kohtaan.

Pohdin seuraavaksi opetuksen kehittämistä ja opetuskokeilun tuomia muutoksia. Opetuksen kehittäminen systemaattisesti tuomalla uusia ideoita on aina haaste. Yhdysvalloissa järjestettiin opettajille täydennyskoulutusta, jossa he pääsivät itse kokeilemaan joustavuustehtäviä. Koulutuksen hyötyjä olivat muun muassa adaptiivisen opetustyökalun saaminen ja mahdollisuus tutkia omaa joustavuutta (Yakes & Star, 2011). Jatkossa opettajien koulutuksessa voitaisiin käydä

läpi tässä väitöstutkimuksessa esiin tulleita mahdollisia haasteita. Opettajien tulisi kuulla niin vertailutehtävien kuin virheiden hyödyistä ja päästä työstimään arveltuja ongelmakohtia.

Vertailutehtäviä käytettäessä oppilaat ovat ikään kuin pakotettuja analysoimaan, sillä vertailutehtävissä vastaus ja koko ratkaisu ovat jo valmiina. Vastauskeskeisyys on eräs ongelma matematiikan oppimisessa. Oppilaat pitävät vastausta helposti ainoana päämääränä ja näkevät, että on vain yksi oikea ratkaisutapa ja vieläpä sellainen, jonka opettaja näyttää (Schoenfeld, 1992). Vastauksen saamisen sijaan tulisi nähdäkseni kiinnittää huomio prosessiin ja ajattelun kehittymiseen. Tähän vertailutehtävät ja virheet voisivat tulosten mukaan tuoda muutosta. Samoin virheiden hyödyntäminen tarkoituksella ei ole välttämättä tuttua oppimateriaalista, joskin nyt sellaista on suomeksikin saatavilla (JoMa, 2022; JYR, 2019).

Nykyaikaisessa tietotaloudessa tarvitaan muun muassa käsitteiden syvää ymmärtämistä, uuden luomista, kriittisyyttä ja tieteellistä matemaattista ajattelua (Sawyer, 2014). Näihin tavoitteisiin pyrkimisessä (Artikkeli II; Artikkeli III) vertailutehtävät ja virheet voisivat olla eräs mahdollisuus, sillä opettajien mukaan niiden avulla voi kehittää muun muassa analysointitaitoja, aktiivisuutta ja luovuutta. Virhekäsityksiä voitaisiin korjata, ja opettaja toimisi ikään kuin valmentajana (Artikkeli II; Artikkeli III).

Tässä tutkimuksessa luotiin monitahoinen katsaus joustavuuden oppimiseen ja opettamiseen suomalaisessa kontekstissa joustavuuden osaamisen, opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsitysten ja uskomusten sekä käytännön luokkahuonetilanteiden kautta. Joustavuuden opettamista tarvitaan Suomessa, sillä tällä hetkellä oppilaiden joustavuus vaikuttaisi olevan melko matalalla tasolla. Opettajat vaikuttivat kohtalaisen avoimilta tehtävätyyppien käyttöön, ja luokkahuonetilanne osoitti, että tehtävien käytöstä voi tulla yllättäviäkin hyötyjä, kuten uusien virhekäsitysten löytäminen ja korjaaminen. Näin sekä opettajat että oppilaat hyötyivät tehtävätyypistä. Tehtävien käyttöä vaikuttaisivat tukevan opettajan käyttämät kysymystyypit. Opettajien uskomuksien merkitystä tulisi selvittää tarkemmin.

Lopulta, katsottaessa näitä artikkeleita, yhteenvetoa sekä aiempia vertailutehtäviin ja virheisiin liittyviä tutkimuksia, vaikuttavat vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet lupaavilta keinoilta matematiikan opetukseen. Ne edistävät tämän tutkimuksen opettajien käsitysten mukaan aktiivisuutta, analysointia ja virheiden kanssa elämään oppimista. Vielä tulisi tutkia lisää menetelmien käyttöä käytännön tilanteissa ja soveltumista oppilaille, joilla on erityyppiset esitiedot.

5.7 Jatkotutkimuskohteita

Pohdin nyt mahdollisia jatkotutkimuskohteita. Jatkossa joustavuuden yhteyttä nopeuteen ja oikeellisuuteen voisi vielä selvittää lisää. Suomalaisopiskelijoiden joustavuutta voisi tutkia laajemminkin kattavalla otoksella. Olisi mielenkiintoista ja tarpeen selvittää, muuttuvatko opettajien käsitykset ja uskomukset, kun he aidosti käyttävät menetelmiä. Tässä tutkimuksessa tätä ei vielä päästy kovin syvällisesti tarkastelemaan, sillä luokkahuonetilanteita ei tutkittu tarkemmin.

Vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käytön hyötyjä olisi tarpeen tutkia lisää aidoissa luokkahuonetilanteissa esimerkiksi siten, että osassa ryhmiä käytettäisiin erityyppisiä vertailutehtäviä ja osassa ei, minkä jälkeen selvitetäisiin, mitä eroa ryhmien välillä on. Olisi mielenkiintoista selvittää, minkä tyyppinen vertailutehtävä kehittää mitäkin matemaattisen osaamisen osa-aluetta tai muuta mahdollista osaamista. Tarkempi selvitys siitä, miten opettajien eri kysymystyypit vaikuttavat erilaisissa vertailutehtävätyypeissä, on vielä selvittämättä. Luokkien välisten taserojen ja muiden luokkiin liittyvien seikkojen vaikutusta opetuskokeilussa menestymiseen olisi niin ikään tärkeää pohtia tarkemmin. Vertailukeskustelun pohdinta jäi tässä tutkimuksessa melko vähäiseksi, ja sen haasteiden ratkaisemista olisi tarpeen selvittää lisää.

Mielenkiintoista olisi selvittää määrällisesti, miten vertailumenetelmää käytetään käytännön luokkahuonetilanteissa Suomessa laajemminkin ja miten sen käyttö vaikuttaa oppimistuloksiin yleisemmin Suomen kontekstissa. Yhdysvaltalais-tutkimukset eivät välttämättä ole suoraan yleistettävissä, sillä opetus suunnitelmat ovat erilaiset, opettajien koulutustausta on erilainen ja suomalaisopettajien autonomia on suurta (esim. Sahlberg, 2010).

Virheitä sisältävien tehtävien käyttöä voisi selvittää muutenkin kuin vertailutehtävien yhteydessä ja oikean ratkaisutavan rinnalla. Olisi hyödyllistä tietää, mihin kaikkeen tarkoituksellista virhettä on hyödyllistä soveltaa. Jatkossa voitaisiin selvittää, onko siinä todella eroa, miten virheet ja tarkoitukselliset virheet nähdään, ja miten esimerkiksi täydennyskoulutuksella voidaan vaikuttaa virheisiin liittyviin käsityksiin ja uskomuksiin. Entä mitä tarkemmin ottaen tapahtuu, kun oppilas tekee virheen? Millaisia tehtäviä virheistä oppimiseen olisi parasta hyödyntää? Miten oppilaat ja opettajat voisivat kehittää luokkansa virheilmapiiriä virheitä sallivaan ja hyödyntävään suuntaan?

Voitaisiin selvittää, mistä opettajien uskomuksessa virheiden muistamisesta oikeellisena ratkaisuna on oikein kyse, onko huoli todellinen ja voidaanko sitä jotenkin hälventää, jos se ei ole relevantti huoli. Vertailutehtävien soveltumista

erilaisille oppilaille tulisi selvittää lisää ja varmistaa, miten niistä saatava hyöty tulisi kaikille mahdolliseksi.

Jatkossa vertailutehtävien ja virheiden käyttöä voisi siis tutkia vielä lukuisista eri näkökulmista. Erityisesti niiden mahdollisia hyötyjä ja haittoja oppimiselle tulisi selvittää lisää, kuten myös esitietojen merkitystä. Esitietojen merkityksen näkisin tärkeänä niin oppilaan kuin opettajankin kohdalla, sillä opettajan suhtautumisen lisäksi myös hänen oman joustavuutensa voisi ajatella vaikuttavan tehtävien käyttöön ja opetukseen.

5.8 Tutkimuksen käytännön merkitys ja hyödynnettävyys

Pohdin nyt tutkimuksen käytännön merkitystä ja hyödynnettävyyttä. Tutkimuksissa ei tähdäty yleistettäviin tuloksiin, vaan joustavuuden pohtimiseen ja laadullisen tiedon lisäämiseen, mitä tehtiin eri näkökulmista. Opetuksessa tarvitaan monenlaisia asioita, joista tässä käsiteltiin kahta menetelmää: vertailutehtäviä ja tarkoituksellisia virheitä. Niitä käyttämällä voidaan monipuolistaa opetusta. Vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden yhteys joustavuuteen nähdäkseni liittyy siihen, että virheistä oppimista edistämällä edistetään myös sellaista asenneilmapiiriä, että joustavuuskin mahdollistuu. Vertailutehtävät ovat askel kohti joustavuutta.

Tämän ja aiempien tutkimusten perusteella vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet sopivat matematiikan oppimisen opetusmenetelmiksi. Tässä tutkimuksessa esiin tulleiden käsitysten ja uskomusten sekä käytännön kokeilujen perusteella menetelmissä on paljon oppimista tukevia piirteitä, joten niitä kannattaisi hyödyntää opetuksessa. Opettajat näkevät näissä menetelmissä etupäässä hyötyjä. Oppilaat saavat tarkoituksellisen virheen kautta muun muassa mahdollisuuksia tuoda ilmi ja korjata virhekäsityksiään. Opettajan tulee kuitenkin huomioida erilaiset oppijat: esitiedoilla voi olla merkitystä menetelmien tuloksekkaaseen käyttöön. Lisäksi opettajia saattaa arveluttaa, soveltuuko menetelmä kaikille tai sekoittavatko oppilaan virheellisen ratkaisun oikeaan. Näitä asioita tulisi työstää täydennyskoulutuksissa. Tämän tutkimuksen tulokset (esimerkiksi luku 5.5) voisivat olla pohjana täydennyskoulutusten ja opettajankoulutuksen koulutusosioille.

Oppimiseen vaikuttavat lukuisat eri seikat, mutta näyttää siltä, että vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttö monella tapaa edistää oppimista, joten niitä kannattaisi kokeilla opetusmenetelminä. Jo vähintään kymmenet opettajat ovatkin jo käyttäneet näitä menetelmiä osana Joustava yhtälönratkaisu -materiaalia. Opettajat saavat uuden työkalun keskusteleavamman luokkahuone-

kulttuurin luomiseen ja syvällisempään matematiikan opettamiseen sekä nykyisen opetussuunnitelman mukaiseen erilaisten opetusmenetelmien käyttämiseen. Rakentava suhtautuminen virheisiin on taito, jota tarvitaan niin arjessa, jatko-opinnoissa kuin työelämässä. Tunnistetut mahdolliset hankaluudet tulisi kuitenkin ottaa huomioon täydennyskoulutuksissa ja materiaalia käytettäessä.

Vertailutehtäviä ja tarkoituksellisia virheitä voi hyödyntää kouluopetuksessa, opettajankoulutuksessa tai täydennyskoulutuksessa itse ideoiden tai esimerkiksi käyttää kehittämäämme vapaasti saatavilla olevaa materiaalia (JYR, 2019). Tarjolla on myös opettajien täydennyskoulutusta (JoMa, 2022). Olisi myös tärkeää, että oppilaat sanallistaisivat ajatteluaan jo mahdollisimman varhain, jotta ei muodostuisi myöhemmin vaikeasti muutettavaa suorituskeskeistä mallia (Näveri, Ahtee, Laine, Portaankorva-Koivisto, Pehkonen & Hannula, 2014). Useat ratkaisutavat ja käsitteellisten virheiden auki selittäminen auttavat syventämään matematiikan opetusta ja opiskelua.

Lähdeluettelo

- Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E. & Rittle-Johnson, B. (2012). Erroneous examples versus problem solving: Can we improve how middle school students learn decimals? Teoksessa N. Miyakem, D. Peebles & R.P. Coppers (toim.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 34 (s. 1260–1265). Sapporo, Japan: Cognitive Science Society.
- Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S. & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior*, 36, 401–411. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.053>
- Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: A meta-analytic review. *Educational Psychologist*, 48(2), 87–113. <https://doi.org/10.1080/00461520.2013.775712>
- Andrews, P. (2013). Finnish mathematics teaching from a reform perspective: A video-based case-study analysis. *Comparative Education Review*, 57(2), 189–211. <https://doi.org/10.1086/669124>
- Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29(2), 94–107. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrq001>
- Atjonen, P. (2008). Vieläkö etsimme oikeaa ja hyvää? Aikamme kasvatuksen ja kasvatustieteen eettisiä haasteita. *Samalta viivalta*, 4, 13–44.
- Atorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations* (väitöskirja, Helsingin yliopisto). Haettu osoitteesta <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/20050>
- Barbieri, C. & Booth, J. L. (2016). Support for struggling students in algebra: Contributions of incorrect worked examples. *Learning and Individual Differences*, 48, 36–44. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.04.001>
- Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa A. J. Baroody & A. Dowker (toim.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (s. 1–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Başibüyük, K., Şahin, Ö., Gökkurt, B., Erdem, E. & Soyulu, Y. (2016). The mistakes that are made by students with regard to functions: Evidence from Erzincan (A province in Turkey). *Universal Journal of Educational Research*, 4(11), 2523–2532.
- Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education*, 36(1), 18–31. <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2011v36n1.2>
- Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M. & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. Teoksessa P. Griffin, B. McGaw & E. Care (toim.), *Assessment and teaching of 21st century skills* (s. 17–66). Dordrecht: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-2324-5_2
- Booth, J. L. & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 30 (30), 571–576.

- Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R. & Newton, K. J. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, 25, 24–34. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.11.002>
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166–208.
- Bransford, J. D., Brown, A. L. & Cocking, R. R. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school* (laajennettu painos). Washington, DC: National Academies Press.
- Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers’ beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics education*, 42(1), 2–38. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.1.0002>
- Brezovszky, B. (2019). *Using game-based learning to enhance adaptive number knowledge* (väitöskirja, Turun yliopisto). Annales Universitatis Turkuensis sarja - ser B osa Tom. 476 Humaniora. Haettu osoitteesta <https://urn.fi/URN:ISBN:978-951-29-7622-5>
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221–239. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1>
- Buchbinder, O., Chazan, D., & Fleming, E. (2015). Insights into the school mathematics tradition from solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 35, 2–8.
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston: Allyn and Bacon.
- Cai, J. (2004). Why do US and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Impact of early algebra learning and teachers’ beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2), 135–167. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.004>
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Abingdon, UK: Routledge.
- Contrasting Cases. (2020). *Using Contrasting Examples to Support Procedural Flexibility and Conceptual Understanding in Mathematics*. Harvard Graduate School of Education. Haettu 1.6.2020 osoitteesta <https://scholar.harvard.edu/contrastingcases>
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design. Choosing among five approaches* (2. painos). Thousand Oaks: Sage.
- Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, 22(3), 206–214. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.11.001>
- Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Loehr, A. (2021). Comparing and discussing multiple strategies: An approach to improving algebra instruction. *The Journal of Experimental Education*, 1–19. <https://doi.org/10.1080/00220973.2021.1903377>

- Eskola, J. (2007). Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin* (s. 133–157). Jyväskylä: PS-Kustannus.
- Faran, Y., Osher, Y., Sofen, Y. & Shalom, D. Ben. (2017). Errorful and errorless learning in preschoolers: At what age does the errorful advantage appear? *Cognitive Development*, 44, 150–156. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2017.10.002>
- Fukawa-Connelly, T. (2012). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 401–416. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.04.002>
- Gagatsis, A. & Kyriakides, L. (2000). Errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 59–82.
- Gartmeier, M., Bauer, J., Gruber, H. & Heid, H. (2008). Negative knowledge: Understanding professional learning and expertise. *Vocations and Learning*, 1(2), 87–103. <https://doi.org/10.1007/s12186-008-9006-1>
- Große, C. S. & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, 17(6), 612–634. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008>
- Guberman, R. & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 33–56. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7>
- Hacatrjana, L. (2022). Flexibility to change the solution: An indicator of problem solving that predicted 9th grade students' academic achievement during distance learning, in parallel to reasoning abilities and parental education. *Journal of Intelligence*, 10(1). doi.org/10.3390/jintelligence1001000
- Hatano, G. (2003). Foreword. Teoksessa A. J. Baroody & A. Dowker (toim.), *The development of arithmetic concepts and skills* (s. xi-xiii). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 41, 535–540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. A. Grouws (toim.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 65–97). New York: Simon & Schuster Macmillan.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, 42(2), 371–406.

- Huang, T. H., Liu, Y. C. & Shiu, C. Y. (2008). Construction of an online learning system for decimal numbers through the use of cognitive conflict strategy. *Computers and Education*, 50(1), 61–76. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2006.03.007>
- Huusko, M. & Paloniemi, S. (2006). Fenomenografia laadullisena tutkimussuuntauksena kasvatustieteissä. *Kasvatus: Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja*, 37(2), 162–173.
- Hästö, P., Palkki, R., Tuomela, D. & Star, J. R. (2019). Relationship between flexibility and success in national examinations. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (1), 1–13.
- Isotani, S., Adams, D., Mayer, R. E., Durkin, K., Rittle-Johnson, B. & McLaren, B. M. (2011). Can erroneous examples help middle-school students learn decimals? *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6964 LNCS, 181–195. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23985-4_15
- Joustavaan matematiikkaan [JoMa]. (2022). *Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutus*. Haettu 2.1.2022 osoitteesta <https://www.flexibility.fi/>
- Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä* (väitöskirja, Tampereen yliopisto). Acta universitatis Tampensis, 1061. Haettu osoitteesta <http://urn.fi/urn:isbn:951-44-6204-1>
- Joutsenlahti, J., & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silberberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.
- Joustava yhtälönratkaisu [JYR]. (2019). Joustava yhtälönratkaisu – LUMA SUOMI -kehittämishanke. Oulu. Haettu 12.12.2019 osoitteesta <http://ouluma.fi/joustava-yhtalonratkaisu/>
- Kaakinen, M. & Ellonen, N. (n.d.). Regressioanalyysi. Teoksessa *Kvantitatiivisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoaarkisto. Haettu 15.12.2021 osoitteesta <https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus>
- Kananen, J. (2013). *Case-tutkimus opinnäytetyönä*. Jyväskylä: Jyväskylän ammattikorkeakoulu.
- Kapur, M. (2016). Examining productive failure, productive success, unproductive failure, and unproductive success in learning. *Educational Psychologist*, 51(2), 289–299. <https://doi.org/10.1080/00461520.2016.1155457>
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R. & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal*, 49(3), 568–589. <https://doi.org/10.3102/0002831212437853>
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *Mathematics Educator*, 8, 139–151.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.). (2001). *Adding it up*. Washington DC: National Academy Press.

- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press on Demand.
- Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun: matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos.
- Kvantitatiivisen tutkimuksen verkkokäsikirja. (n.d.). Verkkokäsikirja. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoaarkisto. Haettu 14.12.2021 osoitteesta <https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus>
- Kärki, T., McMullen, J., Halme, H., Määttä, S., Lehtinen, E. & Hannula-Sormunen, M. (2021). Pelaamalla kohti joustavaa rationaalilukukäsitettä. *Psykologia*, 6, 567–583.
- Laine, M., Bamberg, J. & Jokinen, P. (2007). *Tapaustutkimuksen taito*. Helsinki: Gaudeamus.
- Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal for Experimental Psychology: General*, 124, 83–97. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83>
- Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi* (väitöskirja, Jyväskylän yliopisto). Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 298. Haettu osoitteesta <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-2732-5>
- Lichtman, M. (2012). *Qualitative Research in Education. A User's Guide*. Los Angeles: SAGE Publications.
- Liu, R., Wang, J., Star, J. R., Zhen, R., Jiang, R., & Fu, X. (2018). Turning potential flexibility into flexible performance: Moderating effect of self-efficacy and use of flexible cognition. *Frontiers in Psychology*, 9, 646. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00646>
- Loehr, A. M., Fazio, L. K. & Rittle-Johnson, B. (2020). The role of recalling previous errors in middle-school children's learning. *British Journal of Educational Psychology*, 1–18. <https://doi.org/10.1111/bjep.12341>.
- LUMA. (2019). Valtakunnallinen luonnontieteiden ja matematiikan esi- ja perusopetuksen kehittämisohjelma 2014-2019. Haettu 16.12.2019 osoitteesta <https://suomi.luma.fi/>
- Lynch, K. & Star, J. R. (2014a). Teachers' views about multiple strategies in middle and high school mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(2), 85–108. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.889501>
- Lynch, K. & Star, J. R. (2014b). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in algebra in Algebra I: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 6–18. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.1.0006>
- Markkanen, S. R. (2019). *Joustava matemaattinen ajattelu ja sen tukeminen opetuksessa* (pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto).
- Marton, F. (1986). Phenomenography – a research approach to investigating different understandings of reality. *Journal of Thought*, 21(3), 28–49.

- Marton, F. (1988). Phenomenography: A Research Approach to Investigating Different Understandings of Reality. Teoksessa R. R. Sherman & R. B. Webb. *Qualitative Research in Education: Focus and Methods* (s. 141–161). London, New York, Philadelphia: The Falmer Press.
- Matteucci, M. C., Corrazza, M. & Santagata, R. (2015). Learning from errors, or not. Analysis of teachers' beliefs about errors and error-handling strategies through questionnaire and video. Teoksessa R. V. Nata (toim.), *Progress in Education*, 37, 1–22. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.
- McLaren, B. M., Adams, D., Durkin, K., Gogvadze, G., Mayer, E., Rittle-Johnson, B.,...,Isotani, S. (2012). To err is human, to explain and correct is divine: A study of interactive erroneous examples with middle school math students. *Proceedings of EC-TEL 2012: Seventh European Conference on Technology Enhanced Learning, LNCS 7563*, 222–235. https://doi.org/10.1007/978-3-642-33263-0_18
- McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N. & Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. *Learning and Instruction*, 49, 178–187. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.02.001>
- McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 47, 172–181. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.007>
- McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., & Siegler, R. S. (2020). Distinguishing adaptive from routine expertise with rational number arithmetic. *Learning and Instruction*, 68, 101347. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101347>
- McNally, D.W. (1974). *Piaget, Education and Teaching*. Edinburgh: New Educational Press.
- Metcalf, J. (2017). Learning from errors. *Annual Review of Psychology*, 68, 465–489.
- Metsämuuronen, J. (2007). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä* (2. painos). Vaajakoski: Gummerus Kirjapaino Oy.
- Moreno, R. (2006). When worked examples don't work: Is cognitive load theory at an impasse? *Learning and Instruction*, 16(2), 170–181. [doi:10.1016/j.learninstruc.2006.02.006](https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.02.006)
- Moser, J. S., Schroder, H. S., Heeter, C., Moran, T. P. & Lee, Y.-H. (2011). Mind your errors: Evidence for a neural mechanism linking growth mind-set to adaptive posterror adjustments. *Psychological Science*, 22(12), 1484–1489. <https://doi.org/10.1177/0956797611419520>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Procedural fluency in mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Retrieved from <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Procedural-Fluency-in-Mathematics/>.
- National Research Council. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school: Expanded edition*. Washington, DC: National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/9853>

- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33–40.
- Newton, K. J., Star, J. R. & Lynch, K. (2010). Understanding the development of flexibility in struggling algebra students. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 282–305. <https://doi.org/10.1080/10986065.2010.482150>
- Nulty, D. D. (2008). The adequacy of response rates to online and paper surveys: What can be done? *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 33(3), 301–314. <https://doi.org/10.1080/02602930701293231>
- Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana* (väitöskirja, Helsingin yliopisto). Kasvatustieteellinen tiedekunta, tutkimuksia 309. Haettu osoitteesta <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-10-5759-5>
- Näveri, L., Ahtee, M., Laine, A., Portaankorva-Koivisto, P., Pehkonen, E., & Hannula, M. S. (2014). Opettajien kysymykset heidän ohjatessaan 3–5 luokkalaisten avoimia ongelmanratkaisutehtäviä. Teoksessa A.-S. Røj-Lindberg, L. Burman, B. Kurtén-Finnäs & K. Linnanmäki (toim), *Spaces for learning: past, present and future: proceedings of the FMSERA 30th annual symposium in Vaasa*, November 6–8, 2013. Reports from the Faculty of Education, 36 (s. 151–164). Vasa: Åbo Akademi.
- O' Dell, S. (2015). *Classroom error climate: Teacher professional development to improve student motivation* (EdD Thesis, University of Central Florida). Haettu osoitteesta <https://stars.library.ucf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1703&context=etd>
- Olivier, A. (1992). Handling pupils' misconceptions. Teoksessa M. Moodley, R. A. Njisani & N. Presmeg (toim.), *Mathematics education for pre-service and in-service* (s. 193–209). Pietermaritzburg, South Africa: Shuter & Shooter.
- Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. *Opetushallitus, määräykset ja ohjeet 2014*, 96. Tampere: Juvenes Print – Suomen yliopistopaino Oy.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Partanen, A.-M. (2011). *Challenging the school mathematics culture: An investigative small group approach: ethnographic teacher research on social and sociomathematical norms* (väitöskirja, Lapin yliopisto). Acta electronica Universitatis Lapponiensis. Haettu osoitteesta <http://urn.fi/URN:NBN:fi:ula-201110131184>
- Pehkonen, E. (1998). On the concept "mathematical belief". Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The state-of-art in mathematics-related belief research: Results of the MAVI activities 195* (s. 37–72). Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Pehkonen, E. (1999). Open-ended problems: A method for an educational change. Teoksessa *Pan-Hellenic Conference With International Participation Didactics Of Mathematics & Informatics In Education*, 64.
- Pehkonen, E. (2009). Use of the Dionné tri-division to reveal teacher students' beliefs in mathematics. Teoksessa F. Furinghetti & F. Morselli (toim.), *Proceedings of the conference MAVI-15: Ongoing research on beliefs in mathematics education* (s. 47–57). Genova, Italy: University of Genova.

- Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (s. 11–28). Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Peltola T. (2007). Empirian ja teorian vuoropuhelu. Teoksessa M. Laine, J. Bamberg & P. Jokinen (toim.), *Tapaustutkimuksen taito* (s. 111–129). Helsinki: Gaudeamus.
- Peng, A. & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics*, 29(3), 22–25.
- Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175–189. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>
- Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561–574. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561>
- Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101, 529–544. <https://doi.org/10.1037/a0014224>
- Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 836–852. <https://doi.org/10.1037/a0016026>
- Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, 82, 436–455. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037>
- Rybowiak, V., Garst, H., Frese, M. & Batinic, B. (1999). Error Orientation Questionnaire (EOQ): reliability, validity, and different language equivalence. *Journal of Organizational Behavior*, 20(4), 527–547.
- Sahlberg, P. (2010). The secret to Finland’s success: Educating teachers. *Stanford Center for Opportunity Policy in Education*, 2, 1–8.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491–508. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.004>
- Santagata, R. & Bray, W. (2015). Professional development processes that promote teacher change: The case of a video-based program focused on leveraging students’ mathematical errors. *Professional Development in Education*, 5257, 1–22. <https://doi.org/10.1080/19415257.2015.1082076>
- Sawyer, R. K. (toim.). (2014). *The Cambridge handbook of the learning sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schleppenbach, M., Flevaris, L. M., Sims, L. M. & Perry, M. (2007). Teachers’ responses to student mistakes in chinese and U.S. mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, 108(2), 131–147. <https://doi.org/10.1086/525551>

- Schneider, M., Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, *47*, 1525–1538.
<https://doi.org/10.1037/a0024997>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (toim.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334–370). New York: MacMillan.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Los Angeles: Sage Publications.
- Siegler, R. S. (2002). Microgenetic studies of self-explanations. Teoksessa N. Granott & J. Parziale (toim.), *Microdevelopment: Transition processes in development and learning* (s. 31–58). New York: Cambridge University Press.
- Silver, E. A., Ghouseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. & Strawhun, B. T. F. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3–4), 287–301.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.009>
- Smith III, J. P., DiSessa, A. A. & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, *3*(2), 115–163. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302_1
- Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 49–70. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5>
- Speer, N. M. (2008). Connecting beliefs and practices: A fine-grained analysis of a college mathematics teacher's collections of beliefs and their relationship to his instructional practices. *Cognition and Instruction*, *26*(2), 218–267.
<https://doi.org/10.1080/07370000801980944>
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. London: Sage Publications.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411. <https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2>
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 132–135.
- Star, J. R. & Kokka, K. (2013). Using strategic interruptions to effectively integrate whole class and small group instruction in mathematics. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 1–20.
- Star, J. R. & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, *41*, 557–567. <https://doi.org/10.1007/s11858-009>
- Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B. & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *41*, 198–208.
<https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.001>

- Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K. & Gogolen, C. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, 40, 41–54. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.05.005-0185-5>
- Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18, 565–579. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018>
- Star, J. R., Rittle-Johnson, B. & Durkin, K. (2016). Comparison and explanation of multiple strategies: One example of a small step forward for improving mathematics education. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, 3(2), 151–159 <https://doi.org/10.1177/2372732216655543>
- Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31(3), 280–300.
- Star, J. R., Tuomela, D., Prieto, N. J., Hästö, P., Palkki, R., Abánades, M. Á., ... & Liu, R. D. (2022). Exploring students' procedural flexibility in three countries. *International Journal of STEM Education*, 9(1), 1–18.
- Stark, R., Kopp, V. & Fischer, M. R. (2011). Case-based learning with worked examples in complex domains: Two experimental studies in undergraduate medical education. *Learning and instruction*, 21(1), 22–33.
- Steuer, G. & Dresel, M. (2015). A constructive error climate as an element of effective learning environments. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 57(2), 262–275.
- Steuer, G., Rosentritt-Brunn, G. & Dresel, M. (2013). Dealing with errors in mathematics classrooms: Structure and relevance of perceived error climate. *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), 196–210. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.03.002>
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M. & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, 17(2), 213–226.
- Syrjälä, L., Ahonen, S., Syrjäläinen, E. & Saari, S. (1994). *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*. Kirjayhtymä Oy: Helsinki.
- Sweller, J. (2011). Cognitive Load Theory. *The Psychology of Learning and Cognition in Education*, 55, 37–76. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-387691-1.00011-9>
- Tikkanen, P. (2008). *"Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin": matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana* (väitöskirja, Jyväskylä). Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 337. Haettu osoitteesta <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18042>
- Tobin, K. (1986). Effects of Teacher Wait Time on Discourse Characteristics in Mathematics and Language Arts Classes. *American Educational Research Journal*, 23, 191–200.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). Development of children's strategy competencies in the number domain from 20 up to 100. *Cognition and Instruction*, 24, 439–465. https://doi.org/10.1207/s1532690xc2404_2
- Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, 33, 56–68. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.003>

- Tulis, M., Steuer, G. & Dresel, M. (2017). Positive beliefs about errors as an important element of adaptive individual dealing with errors during academic learning. *Educational Psychology, 34*(10), 1–20. <https://doi.org/10.1080/01443410.2017.1384536>
- Tuomi, J. & Sarajarvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. (Verkkokirja). (Uud.p.). Haettu osoitteesta <https://www.ellibslibrary.com>
- Tutkimuseettinen neuvottelukunta (2012). *Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsittely Suomessa*. Helsinki. Tutkimuseettinen neuvottelukunta. Haettu osoitteesta https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf
- Törner, G. (1998). Mathematical Beliefs and Their Impact on Teaching and Learning of Mathematics. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research – Results of the MAVI activities* (s. 73–97). Helsingin yliopisto: Opettajankoulutuslaitos.
- Valtonen, A. (2005). Ryhmähaastattelut – millainen metodi? Teoksessa J. Ruusuvoori (toim.), *Haastattelu: tutkimus, tilanteet ja vuorovaikutus* (s. 223–241). Tampere: Vastapaino.
- Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 15*, 154–164. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797747>
- Veloo, A., Krishnasamy, H. N. & Wan Abdullah, W. S. (2015). Types of student errors in mathematical symbols, graphs and problem-solving. *Asian Social Science, 11*(15), 324–334. <https://doi.org/10.5539/ass.v11n15p324>
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. Teoksessa F. Lester (toim.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 557–628). Charlotte: Information Age Publishing Inc.
- Wischgoll, A., Pauli, C. & Reusser, K. (2015). Scaffolding – How can contingency lead to successful learning when dealing with errors? *ZDM – Mathematics Education, 47*(7), 1147–1159. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0714-3>
- Xu, L., Liu, R. De, Star, J. R., Wang, J., Liu, Y. & Zhen, R. (2017). Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving. *Frontiers in Psychology, 8*, 1–13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368>
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477. <https://doi.org/10.2307/749877>
- Yakes, C. & Star, J. R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 175–191. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9131-2>
- Yin, R. K. (2014). *Case study. Research and methods*. Los Angeles: SAGE.

Osajulkaisut

- I Hästö, P. & Palkki, R. (2019). Finnish students' flexibility and its relation to speed and accuracy in equation solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24(3–4), 42–58.
- II Palkki, R. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 6(1), 105–128. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.6.1.327>
- III Palkki, R. & Hästö, P. (2018). Mathematics teachers' reasons to use (or not) intentional errors. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16(2), 263–282. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2018.0453>
- IV Palkki, R. (2016). Virheellinen esimerkki matematiikan luokkahuonekeskustelussa. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö. (toim.), *Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 2015* (s. 111–121). Haettu osoitteesta http://www.protsv.fi/mlseura/julkaisut/MALU2015_Final.pdf

Uudelleenjulkaistu NCM:n luvalla (Artikkeli I © 2019 NCM), University of Debrecen:n luvalla (Artikkeli III © 2018 University of Debrecen) ja Creative Commonsin CC BY 4.0 lisenssin¹ alaisena (Artikkelit II ja IV © 2018, 2016 Palkki).

Alkuperäisartikkelit eivät sisälly elektroniseen versioon.

¹ <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ACTA UNIVERSITATIS OULUENSIS
SERIES A SCIENTIAE RERUM NATURALIUM

755. Räikkönen, Jannikke (2021) Bone pathology in small isolated grey wolf (*Canis lupus*) populations
756. Heino, Matti (2021) Challenging DNA samples are valuable sources for genetic information of populations and individuals
757. Kujala, Valtteri (2021) Guidelines for building a combined e-commerce and ERP platform in micro-enterprises
758. Borshagovski, Anna-Maria (2021) Effects of social and visual environments on female sexual signaling
759. Vainionpää, Fanny (2021) Girls' choices of IT careers : a nexus analytic inquiry
760. Pyy, Johanna (2021) Forest management optimization according to nonlinear partial differential equation (PDE) and gradient based optimization algorithm
761. Mendes, Fabiana (2021) Insights from personality and decision-making in software engineering context
762. Karampela, Maria (2021) Recommendations to enable and sustain personal health data access and sharing : an empirical approach
763. Lämsä, Juho (2021) Behavioural mechanisms underlying food-deceptive pollination and neonicotinoid exposure of bumblebees
764. Mian, Salman Qayyum (2021) The social web as an ecosystem of networked improvement communities (NICS) : an interplay of user engagement, technology improvement, and the business opportunities as enablers
765. Kuutila, Miikka (2021) Time pressure and well-being in software engineering : evidence from software repositories, experience sampling, and prior literature
766. Halttu, Kirsi (2021) Changing behaviours via self-tracking : exploring the effect of psychological differences on system evaluations
767. Banijamali, Ahmad (2021) Software architectures of the convergence of automotive systems and cloud platforms
768. Autio, Uula (2021) Development and application of the magnetotelluric method to study the crustal structure of central Finnish Lapland
769. Trivedi, Priyanka (2021) Cuticular wax of Nordic berries : focus on composition, biosynthesis, and the effect of environmental factors
770. Markkola, Juha (2022) Ecology and conservation of the lesser white-fronted goose *Anser erythropus*

Book orders:
Virtual book store
<http://verkkokauppa.juvenesprint.fi>

S E R I E S E D I T O R S

A
SCIENTIAE RERUM NATURALIUM
University Lecturer Tuomo Glumoff

B
HUMANIORA
University Lecturer Santeri Palviainen

C
TECHNICA
Postdoctoral researcher Jani Peräntie

D
MEDICA
University Lecturer Anne Tuomisto

E
SCIENTIAE RERUM SOCIALIUM
University Lecturer Veli-Matti Ulvinen

E
SCRIPTA ACADEMICA
Planning Director Pertti Tikkanen

G
OECONOMICA
Professor Jari Juga

H
ARCHITECTONICA
Associate Professor (tenure) Anu Soikkeli

EDITOR IN CHIEF
University Lecturer Santeri Palviainen

PUBLICATIONS EDITOR
Publications Editor Kirsti Nurkkala



ISBN 978-952-62-3337-6 (Paperback)
ISBN 978-952-62-3338-3 (PDF)
ISSN 0355-3191 (Print)
ISSN 1796-220X (Online)