OULUN YLIOPISTO

Säätötekniikan laboratorio
Infotech Oulu
ja
Prosessitekniikan osasto

Eräitä optimointitehtäviä

Juha Jaako

Raportti B No 10, Syyskuu 1999

Sisällysluettelo

ISBN 951-42-5352-3 ISBN 951-42-7522-5 (PDF)
ISSN 1238-9404

Johdanto

Vuonna 1997 kirjoitin Oulun yliopiston prosessitekniikan osastossa olevaan optimointikurssiin (47434S Prosessien optimointi = ProsOpt) harjoitusmonisteen (Jaako 1997). Kurssi ProsOpt antaa perustiedot teollisuusprosessien optimointiin käytettävistä menetelmistä ja niiden soveltamisesta. Kuluneen kolmen vuoden (1997-1999) aikana on kurssimateriaalia syntynyt lisää ja näin syntynyt materiaali on koottu täksi kirjaksi.

Laskujen yhteydessä ei ole käyty läpi menetelmien perusteita, jotka ovat lähdeluettelon kirjoissa.

Oulussa 03/09/1999 Juha Jaako

1. Yksinkertaisten funktioiden minimointia

(a) Etsi funktion

$$f(x,y) = 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + 3x + 2y \qquad (1)$$

minimi.

Ratkaisu:

Lasketaan osittaisderivaatat ja asetetaan ne nolliksi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2*2(x+y)*(1) + 2(x-y)*(1) + 3 = 4x + 4y + 2x - 2y + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2*2(x+y)*(1) + 2(x-y)*(-1) + 2 = 4x + 4y - 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

josta saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 6x + 2y = -3 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \qquad (3)$$

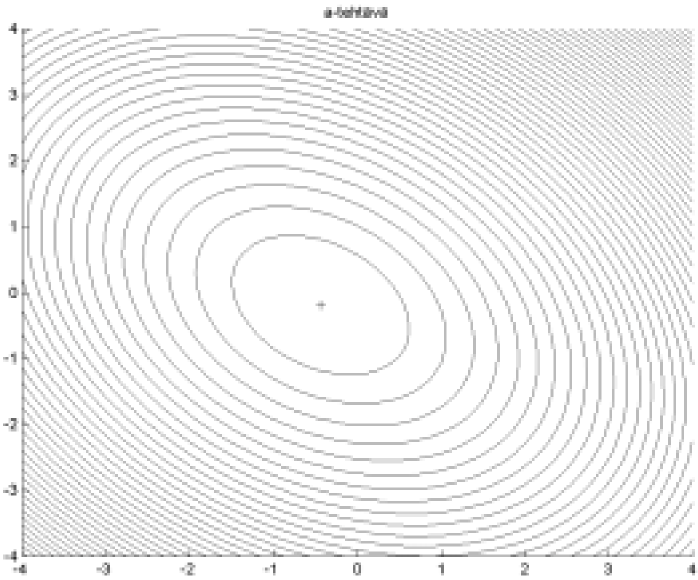
Yhtälöpari voidaan ratkaista Matlabilla seuraavasti

```
» a = [ 6 2 ; 2 6 ] ;
» b = [-3 -2]' ;
» x = a \ b
x =
    -0.4375
    -0.1875
```

Tarkka piste on $\left(-\frac{7}{16}, -\frac{3}{16}\right)$. Funktion arvo minimipisteessä saadaan seuraavasti (Matlabilla)

```
» 2*(x(1)+x(2))^2+(x(1)-x(2))^2+3*x(1)+2*x(2)
ans =   -0.8438
```

Ks. seuraavaa kuvaa.



Kuva 1. Funktion $f(x, y) = 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + 3x + 2y$ tasa-arvokäyriä.

(b) Etsi funktion

$$f(x, y) = 2\left(x^2 + y\right)^2 + (x-y)^2 + 3x + 2y \tag{4}$$

minimi. Huomaa, että (4) ei eroa kovinkaan paljon (1):stä, mutta (4):n ratkaisu on paljon vaikeampi.

Ratkaisu:

Lasketaan osittaisderivaatat ja asetetaan ne nolliksi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2 * 2\left(x^2 + y\right) * (2x) + 2(x-y) * (1) + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2 * 2\left(x^2 + y\right) * (1) + 2(x-y) * (-1) + 2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

josta saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 8x^3 + 8xy + 2x - 2y = -3 \\ \quad 4x^2 + 6y - 2x = -2 \end{cases} \tag{6}$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä y ja sijoitetaan se ylempään. Nyt

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \tag{7}$$

ja sijoittamalla

$$8x^3 + 8x\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + 2x - 2\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + 3 = 0 \tag{8}$$

josta edelleen

$$\frac{8}{3}x^3 + \frac{12}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} = 0 \qquad (9)$$

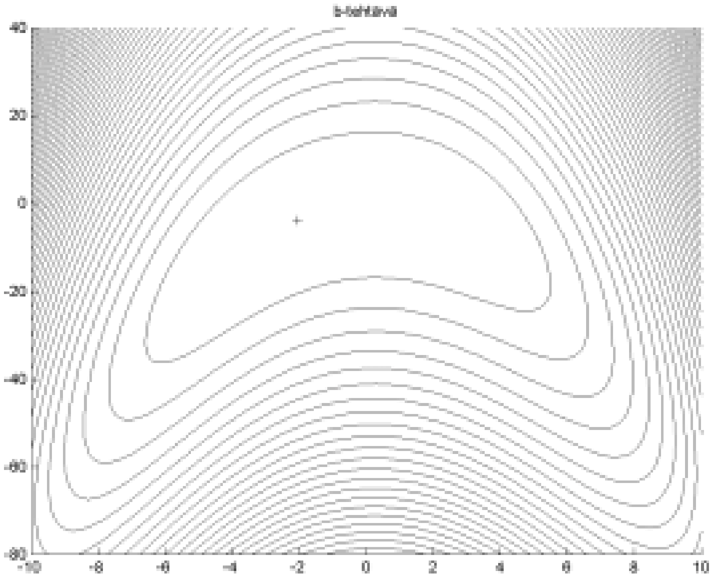
Edellinen yhtälö voidaan ratkaista monella tavalla. Matlabissa on `roots`-funktio, jolla saadaan

```
» roots([ 8/3 12/3 -4/3 11/3])
ans =
  -2.0647
   0.2824 + 0.7657i
   0.2824 - 0.7657i
```

Huomaamme, että ratkaisu sisältää kaksi kompleksijuurta; emme kuitenkaan välitä niistä. Nyt

$$y = -\frac{2}{3}(-2.0647)^2 + \frac{1}{3}(-2.0647) - \frac{1}{3} = -3.8636 \qquad (10)$$

Minimipiste on $(-2.0647, -3.8636)$. Funktion arvo minimipisteessä on -10.3662. Seuraavassa kuvassa on piirrettynä funktion tasa-arvokäyrät ja minimi (optimi) merkitty +:lla.



Kuva 2. Funktion $f(x, y) = 2(x^2 + y)^2 + (x - y)^2 + 3x + 2y$ tasa-arvokäyriä.

Ongelma $\frac{8}{3}x^3 + \frac{12}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} = 0$ voidaan ratkaista myös Newtonin iteraatiokaavan avulla

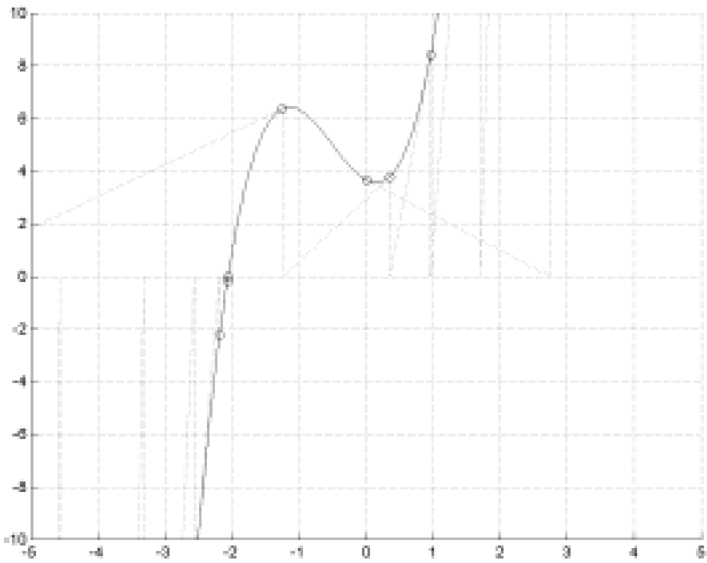
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (11)$$

Jos haun alkupisteenä on origo, niin voidaan koodata seuraavanlainen MATLAB-koodi.

```
%itu398.m (c) Juha Jaako 10.11.1998
% Ratkaisumenetelma: Newton

hold on ;

% Kuvaaja.
lims = [-5 5 -10 10] ;
fplot ('(8/3)*x^3+(12/3)*x^2-(4/3)*x+(11/3)', lims, 'k-') ;
grid ;

% Haku.
disp ('     x         f          df') ;
x = 0 ;
a = 8/3 ; b = 12/3 ; c = 4/3 ; d = 11/3 ;
fuusi = a*x^3 + b*x^2 - c*x + d ;
for i = 1 : 15 ,            % Lasketaan 10 kierrosta.
  xold = x ;
  f = fuusi ;
  plot (x, f, 'ko') ;
  df = 3*a*x^2 + 2*b*x - c ;
  str = sprintf ('%7.2f\t%7.2f\t%7.2f', x, f, df) ;
  disp (str) ;
  x = x - (f/df) ;
  fuusi =  a*x^3 + b*x^2 - c*x + d ;
  plot ([xold x x], [f 0 fuusi], 'k:') ;
end

hold off ;
print -djpeg100 c:\temp\itu398 ;
```

Ohjelma tulostaa seuraavan tekstin ja kuvan

```
» itu398
      x          f           df
    0.00       3.67       -1.33
    2.75      85.71       81.17
    1.69      25.85       35.18
    0.96       8.42       13.70
    0.34       3.79        2.37
   -1.25       6.37        1.21
   -6.51    -554.33      285.79
   -4.57    -161.48      129.32
   -3.32     -45.60       60.44
   -2.57     -11.71       30.90
   -2.19      -2.23       19.51
   -2.08      -0.17       16.52
   -2.06       0.00       16.26
   -2.06       0.00       16.25
   -2.06       0.00       16.25
```



Kuva 3. Funktion nollakohdan haku Newtonin menetelmällä.

Kuten huomaamme, b-tehtävän ratkaisu esitetyillä tavoilla on aikamoista tuhertamista. Käytännössä b-tehtävän tyyppiset ongelmat ratkaistaan muilla menetelmillä.

2. Fibonacci-haku

Hae maksimi funktiolle

$$y(x) = -3x^3 + 21x + 30 \tag{1}$$

välillä $-1 \le x \le 5$ Fibonacci-haun avulla. Tarkkuusvaatimus on 8 %. (vrt. Jaako 1997, 23). Hakuväli on $-1 \le x \le 5$ joten a = -1, b = 5 ja L_0 = 6. Tarkkuusvaatimuksen avulla saadaan

$$F_n = \frac{1}{L_n} = \frac{1}{0.08} = 12½ \tag{2}$$

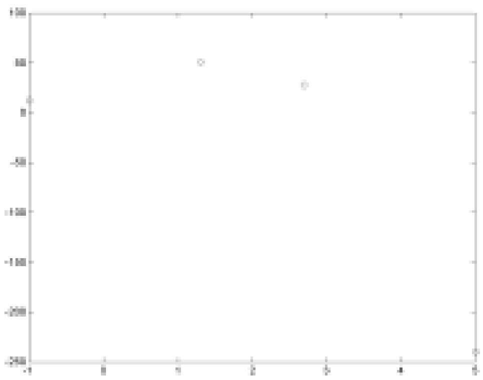
Fibonacci-lukujen taulukosta saadaan (ensimmäinen Fibonacci-luku, joka on suurempi kuin 12½)

$$F_6 = 13 \tag{3}$$

<u>1. Kierros</u> $\quad L_2^* = \frac{F_4}{F_6} L_0 = \frac{5}{13} * 6 = \frac{30}{13} = 2\frac{4}{13} \approx 2.3077$

$$\begin{cases} x_1 = a + L_2^* = -1 + \frac{30}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \\ x_2 = b - L_2^* = 5 - \frac{30}{13} = \frac{35}{13} \approx 2.6923 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(-1) = 12 \\ y(x_1 = 1.3077) = 50.7528 \\ y(x_2 = 2.6923) = 27.9927 \\ y(5) = -240 \end{cases} \tag{4}$$

Hylätään väli $\frac{35}{13} < x \le 5$ (miksi?[1]). Uusi hakuväli on $-1 \le x \le \left(\frac{35}{13} = 2.6923\right)$.[2]



<u>2. Kierros</u> $\quad L_3^* = \frac{F_3}{F_6} L_0 = \frac{3}{13} * 6 = \frac{18}{13} = 1\frac{5}{13} \approx 1.3846$

---

[1] Unimodaalisuus (Leiviskä & Jaako 1998, 17).

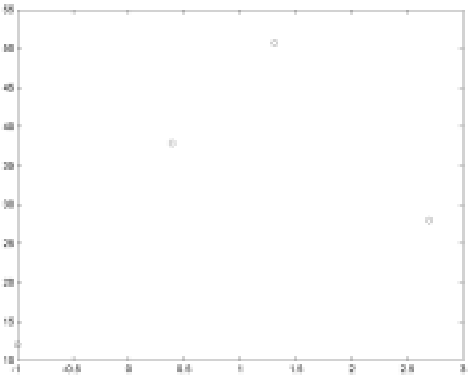
[2] Kuva piirretty seuraavin komennoin.

```
% nee.m
plot(0.8462, 45.9518, 'ko', 1.3077, 50.7528, 'ko', ...
     1.7692, 50.5398, 'ko', 1.5275, 51.3854, 'k+');
print -djpeg100 c:\temp\nee;
```

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{18}{13} = \frac{5}{13} \approx 0.3846 \\ x_2 = \frac{35}{13} - \frac{18}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(-1) = 12 \\ y(x_1 = 0.3846) = 37.9062 \\ y(x_2 = 1.3077) = 50.7528 \\ y\left(\frac{35}{13} = 2.6923\right) = 27.9927 \end{cases} \tag{5}$$

Hylätään väli $-1 \le x < \left(\frac{5}{13} = 0.3846\right)$.

Uusi hakuväli on $\left(\frac{5}{13} = 0.3846\right) \le x \le \left(\frac{35}{13} = 2.6923\right)$.

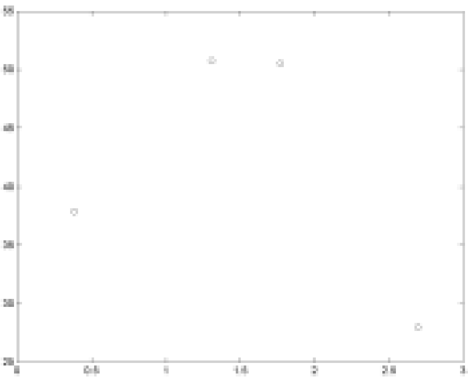


<u>3. Kierros</u> $\qquad L_4^* = \dfrac{F_2}{F_6} L_0 = \frac{2}{13} * 6 = \frac{12}{13} \approx 0.9231$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \\ x_2 = \frac{35}{13} - \frac{12}{13} = \frac{23}{13} \approx 1.7692 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\left(\frac{5}{13} = 0.3846\right) = 37.9062 \\ y(x_1 = 1.3077) = 50.7528 \\ y(x_2 = 1.7692) = 50.5398 \\ y\left(\frac{35}{13} = 2.6923\right) = 27.9927 \end{cases} \tag{6}$$

Hylätään väli $\left(\frac{23}{13} = 1.7692\right) < x \le \left(\frac{35}{13} = 2.6923\right)$.

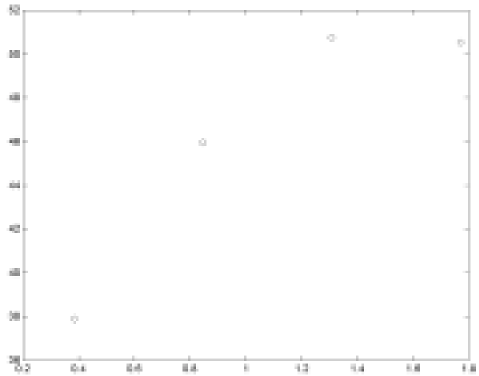
Uusi hakuväli on $\left(\frac{5}{13} = 0.3846\right) \le x \le \left(\frac{23}{13} = 1.7692\right)$.



4. Kierros $$L_5^* = \frac{F_1}{F_6} L_0 = \frac{1}{13} * 6 = \frac{6}{13} \approx 0.4615$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{13} + \frac{6}{13} = \frac{11}{13} \approx 0.8462 \\ x_2 = \frac{23}{13} - \frac{6}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\left(\frac{5}{13} = 0.3846\right) = 37.9062 \\ y(x_1 = 0.8462) = 45.9518 \\ y(x_2 = 1.3077) = 50.7528 \\ y\left(\frac{23}{13} = 1.7692\right) = 50.5398 \end{cases} \tag{7}$$

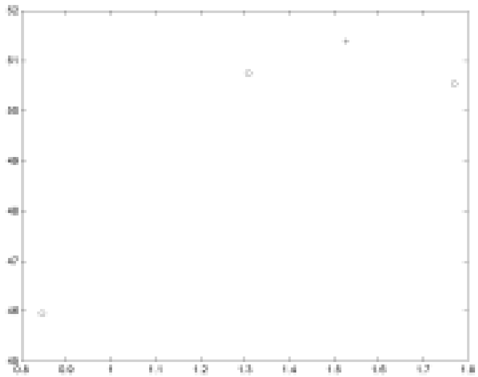
Hylätään väli $\left(\frac{5}{13} = 0.3846\right) \le x < \left(\frac{11}{13} = 0.8462\right)$.
Uusi hakuväli on $\left(\frac{11}{13} = 0.8462\right) \le x \le \left(\frac{23}{13} = 1.7692\right)$.



5. Kierros $$L_6^* = \frac{F_0}{F_6} L_0 = \frac{1}{13} * 6 = \frac{6}{13} \approx 0.4615$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{13} + \frac{6}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \\ x_2 = \frac{23}{13} - \frac{6}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.3077 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\left(\frac{11}{13} = 0.8462\right) = 45.9518 \\ y(x_1 = 1.3077) = 50.7528 \\ y(x_2 = 1.3077) = 50.7528 \\ y\left(\frac{23}{13} = 1.7692\right) = 50.5398 \end{cases}$$

Hylätään väli $\left(\frac{11}{13} = 0.8462\right) \le x < \left(\frac{17}{13} = 1.3077\right)$.
Maksimi on välillä $\left(\frac{17}{13} = 1.3077\right) \le x \le \left(\frac{23}{13} = 1.7692\right)$.



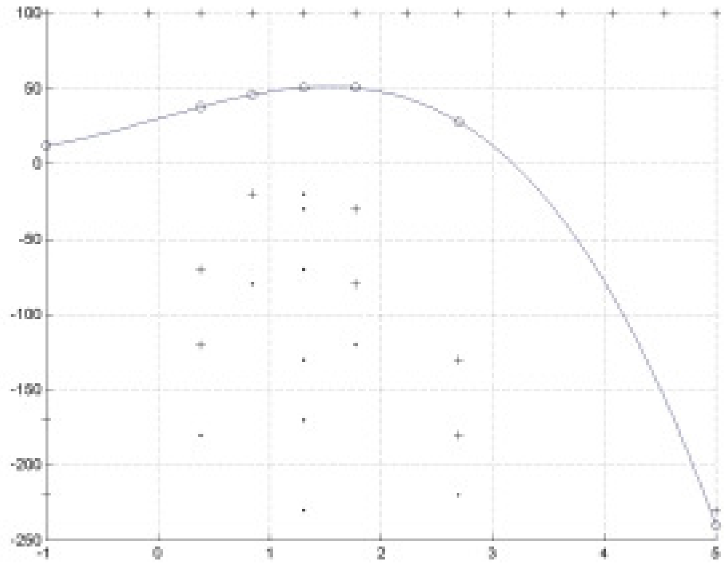
Lasketaan tarkistuksen vuoksi analyyttinen ratkaisu.

$$y'(x) = -9x^2 + 21 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\tfrac{21}{9}} = \pm\sqrt{\tfrac{7}{3}} \approx \begin{cases} +1.5275 \\ -1.5275 \end{cases}$$

Arvo $+1.5275$ on annetulla välillä. Seuraavaan taulukko on laskettu Excelillä. Taulukosta käyvät ilmi hakupisteet, funktion arvot hakupisteissä sekä hakuväli.

x	y	1. Kierros	2. Kierros	3. Kierros	4. Kierros	5. Kierros	Vastaus
-1.0000	12.0000	12.0000	12.0000				
-0.5385	19.1607						
-0.0769	28.3860						
0.3846	37.9062		37.9062	37.9062	37.9062		
0.8462	45.9518				45.9518	45.9518	
1.3077	50.7528	50.7528	50.7528	50.7528	50.7528	50.7528	50.75284479
1.7692	50.5398			50.5398	50.5398	50.5398	50.53982704
2.2308	43.5430						
2.6923	27.9927	27.9927	27.9927	27.9927			
3.1538	2.1193						
3.6154	-35.8471						
4.0769	-87.6759						
4.5385	-155.1370						
5.0000	-240.0000	-240.0000					

Seuraavassa on kuva hausta.



Kuva 4. Fibonacci-haku ja pienenevä hakuväli.

3. Jyrkimmän laskun menetelmä

Hae minimi funktiolle

$$f(x, y) = 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + 3x + 2y \qquad (1)$$

jyrkimmän laskun menetelmällä. Haun aloituspiste on (0, 0) ja askelpituus 0.125. Laske neljä kierrosta.

Lasketaan gradienttivektori

$$G = \begin{bmatrix} 6x+2y+3 \\ 2x+6y+2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

päivityskaavaksi saadaan

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} 6x_i + 2y_i + 3 \\ 2x_i + 6y_i + 2 \end{bmatrix} \text{ eli } \overline{a}_{i+1} = \overline{a}_i - h\overline{G}_i \qquad (3)$$

1. kierros

$$f(0,0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i = 0 \\ y_i = 0 \end{bmatrix} - 0.125 \begin{bmatrix} 6*0+2*0+3=3 \\ 2*0+6*0+2=2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.125*3 \\ -0.125*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.2500 \end{bmatrix}$$

$$f(-0.3750, -0.2500) = -0.8281$$

2. kierros

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.2500 \end{bmatrix} - 0.125 \begin{bmatrix} +0.2500 \\ -0.2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4062 \\ -0.2188 \end{bmatrix}$$

$$f(-0.4062, -0.2188) = -0.8398$$

3. kierros

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4062 \\ -0.2188 \end{bmatrix} - 0.125 \begin{bmatrix} +0.12500 \\ -0.1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4219 \\ -0.2031 \end{bmatrix}$$

$$f(-0.4219, -0.2031) = -0.8428$$

4. kierros

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4219 \\ -0.2031 \end{bmatrix} - 0.125 \begin{bmatrix} +0.0625 \\ -0.0625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4297 \\ -0.1953 \end{bmatrix}$$

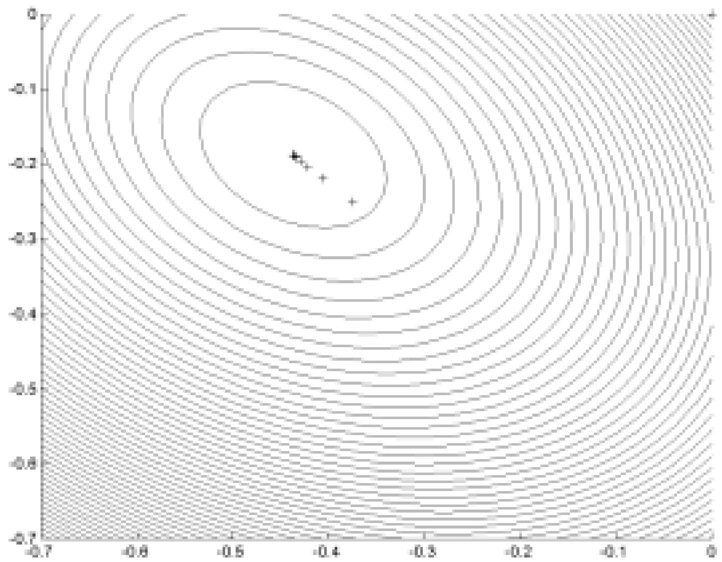
$$f(-0.4297, -0.1953) = -0.8435$$

jne.

Miten ja millä ehdoin haku lopetetaan? Seuraavassa on Matlab-koodin avulla laskettu ratkaisu.

» itu3

n	x	y	grad(1)	grad(2)	f(x,y)
1	0.0000	0.0000	3.0000	2.0000	0.0000
2	-0.3750	-0.2500	0.2500	-0.2500	-0.8281
3	-0.4062	-0.2188	0.1250	-0.1250	-0.8398
4	-0.4219	-0.2031	0.0625	-0.0625	-0.8428
5	-0.4297	-0.1953	0.0312	-0.0312	-0.8435
6	-0.4336	-0.1914	0.0156	-0.0156	-0.8437
7	-0.4355	-0.1895	0.0078	-0.0078	-0.8437
8	-0.4365	-0.1885	0.0039	-0.0039	-0.8437
9	-0.4370	-0.1880	0.0020	-0.0020	-0.8437
10	-0.4373	-0.1877	0.0010	-0.0010	-0.8437



Kuva 5. Funktion $f(x,y) = 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + 3x + 2y$ minimin haku jyrkimmän laskun menetelmällä.

```
% Etsitään funktion 2(x+y)^2+(x-y)^2+3x+2y minimi jyrkimman laskun
% menetelmällä.
% Käytetään vakioista askelpituutta.
%_______itu3.m

clear all ;
hold on ;

%_Piirrä kuva.
[a,b] = meshgrid (-0.7 : 0.02 : 0 , -0.7 : 0.02 : 0) ;
f = 2.*(a+b).^2 + (a-b).^2 + 3.*a + 2.*b ;
minimi = min (min (f)) ;
maksimi = max (max (f)) ;
v = minimi : (maksimi-minimi)/50 : maksimi ;
contour (a, b, f, v, 'k-') ;
```

```
% Otsikkorivi.
disp ('  n     x          y          grad(1)   grad(2)   f(x,y)') ;

% Haetaan minimi.
x = [ 0 ; 0 ] ;
farvo = 2*(x(1)+x(2))^2 + (x(1)-x(2))^2 + 3*x(1) + 2*x(2) ;
plot (x(1), x(2), 'k+') ;
a = x(1) ; b = x(2) ;
G = [ 6*a + 2*b + 3 ; ...
      2*a + 6*b + 2 ] ;
it = 0 ;
str = sprintf ( '%3d%10.4f%10.4f%10.4f%10.4f%10.4f', ...
                it, x(1), x(2), G(1), G(2), farvo) ;
disp (str) ;
askel = 0.125 ;
while (max (abs (G)) > 1e-3 ) ,

  it = it + 1 ;
  x = x - askel*G ;
  a = x(1) ; b = x(2) ;
  G = [ 6*a + 2*b + 3 ; 2*a + 6*b + 2 ] ;
  plot (a, b, 'k+') ;
  farvo = 2*(a+b)^2 + (a-b)^2 + 3*a + 2*b ;
  str = sprintf ( '%3d%10.4f%10.4f%10.4f%10.4f%10.4f', ...
                  it, x(1), x(2), G(1), G(2), farvo) ;
  disp (str) ;

end
hold off ;
print -djpeg100 c:\temp\e ;
```

4. Lagrangen kertojamenetelmä - pyöreä siilo

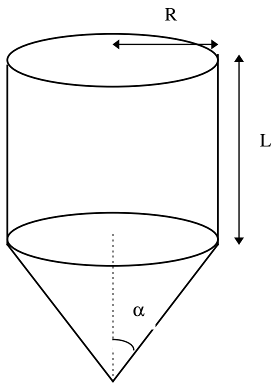
Minimoi

$$A(R,L,\alpha)=2\pi RL+\frac{\pi R^2}{\sin\alpha} \quad \textit{siilo ilman kantta} \text{ (kuva 6)} \tag{1}$$

Rajoituksena

$$\pi R^2 L+\frac{\pi R^3}{3\tan\alpha}-10=0 \tag{2}$$

Lagrangen kertojamenetelmällä (ks. Jaako 1997, 82)



Kuva 6. Pyöreä siilo

Ratkaisu:

Muodostetaan modifioitu kohdefunktio

$$\min\left[F(R,L,\alpha,\lambda)=2\pi RL+\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}+\lambda\left(\pi R^2 L+\frac{\pi R^3}{3\tan\alpha}-10\right)\right] \tag{3.1}$$

$$\min\left[F(R,L,\alpha,\lambda)=2\pi RL+\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}+\pi\lambda R^2 L+\frac{\pi\lambda R^3}{3\tan\alpha}-10\lambda\right] \tag{3.2}$$

Etsitään minimi derivaattojen nollakohtien avulla

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial R} = 2\pi L + \dfrac{2\pi R}{\sin\alpha} + 2\pi\lambda RL + \dfrac{\pi\lambda R^2}{\tan\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} = 2\pi R + \pi\lambda R^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -\dfrac{\pi R^2(\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\pi\lambda R^3}{3\sin^2\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \pi R^2 L + \dfrac{\pi R^3}{3\tan\alpha} - 10 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Ryhmitellään yhtälöitä

$$\begin{cases} \pi\left(2L + \dfrac{2R}{\sin\alpha} + 2\lambda RL + \dfrac{\lambda R^2}{\tan\alpha}\right) = 0 \\ \pi R(2 + \lambda R) = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{2}{R} \\ -\dfrac{\pi R^2}{\sin^2\alpha}\left(\cos\alpha + \dfrac{\lambda R}{3}\right) = 0 \\ \pi R^2\left(L + \dfrac{R}{3\tan\alpha}\right) = 10 \end{cases} \tag{5}$$

Kuten huomataan, saadaan toisesta yhtälöstä $\lambda = -\dfrac{2}{R}$. Sijoitetaan tämä muihin yhtälöihin, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \pi\left(\dfrac{2R}{\sin\alpha} - \dfrac{2R}{\tan\alpha} - 2L\right) = 0 \\ -\dfrac{\pi R^2}{\sin^2\alpha}\left(\cos\alpha - \dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48.19^\circ \\ \pi R^2\left(L + \dfrac{R}{3\tan\alpha}\right) = 10 \end{cases} \tag{6}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\frac{2R}{\sin\alpha} - \frac{2R}{\tan\alpha} = 2L \Rightarrow L = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha}\right) \tag{7}$$

Sijoitetaan *L* viimeiseen yhtälöön

$$\pi R^3\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{3\tan\alpha}\right) = 10 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{\frac{10}{\pi}}{\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{2}{3\tan\alpha}\right)}} = 1.622416 \tag{8}$$

$$\lambda = -\frac{2}{R} = -1.23273 \Rightarrow L = 0.725566 \tag{9}$$

Nyt saadaan siilon mitoiksi

$$\begin{aligned} &R = 1.62 \quad ; \quad L = 0.73 \quad ; \quad \alpha = 48.2^\circ \\ &\lambda = -1.23 \quad ; \quad V = 10\, m^3 \quad ; \quad A = 18.49\, m^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Siilo kannen kera

Seuraavaksi voidaan ratkaista tehtävä 20 (Jaako 1997, 82) Lagrangen kertojamenetelmällä. *Siilo kannen kera* -tehtävä saa seuraavan muodon

Minimoi

$$A(R, L, \alpha) = \pi R^2 + 2\pi RL + \frac{\pi R^2}{\sin\alpha} \quad \textit{siilo kannen kera} \tag{11}$$

Rajoituksena

$$\pi R^2 L + \frac{\pi R^3}{3\tan\alpha} - 10 = 0 \tag{12}$$

Modifioiduksi kohdefunktioksi saadaan nyt

$$\min\left[F(R, L, \alpha, \lambda) = \pi R^2 + 2\pi RL + \frac{\pi R^2}{\sin\alpha} + \pi\lambda R^2 L + \frac{\pi\lambda R^3}{3\tan\alpha} - 10\lambda \right] \tag{13}$$

Pienen pähkäilyn jälkeen huomataan, että vain ensimmäinen osittaiderivaatta muuttuu; eli saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial R} = 2\pi R + 2\pi L + \frac{2\pi R}{\sin\alpha} + 2\pi\lambda RL + \frac{\pi\lambda R^2}{\tan\alpha} = 0 \tag{14}$$

Koska muut osittaisdarivaatat eivät muutu, saadaan suoraan tehtävän alkupuolen perusteella

$$\lambda = -\frac{2}{R} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{2}{3} \tag{15}$$

Nyt saadaan

$$L = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha} + 1 \right) \tag{16}$$

Ja edelleen

$$R = \sqrt[3]{\frac{\frac{10}{\pi}}{\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{2}{3\tan\alpha} + 1 \right)}} = 1.221768 \tag{17}$$

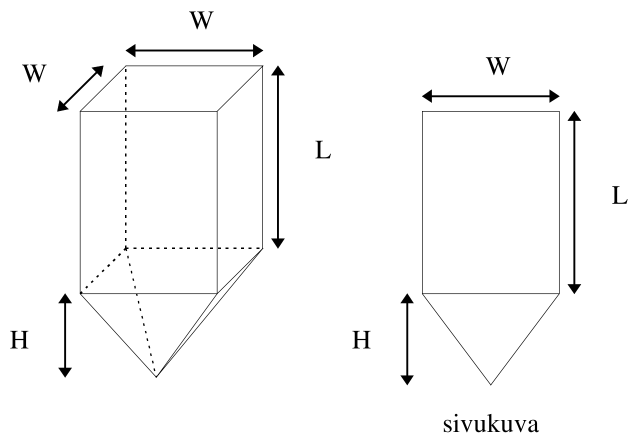
Nyt saadaan

$$\begin{aligned} &R = 1.22 \quad ; \quad L = 1.77 \quad ; \quad \alpha = 48.2 \\ &\lambda = -1.64 \quad ; \quad V = 10\, m^3 \quad ; \quad A = 24.55\, m^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Vertaa laskettuja arvoja tehtävän 20 (Jaako 1997, 84) lopussa oleviin arvoihin.

5. Kantikas siilo

Halutaan mitoittaa kuvan 7 muotoinen siilo, jonka tilavuus on 10 m^3. Siiloon halutaan käyttää mahdollisimman vähän peltiä. Muodosta optimointia varten kohdefunktio ja rajoitukset sekä ratkaise tehtävä.



Kuva 7. Kantikas siilo

Halutaan käyttää mahdollisimman vähän peltiä = siilon pinta-ala on minimoitava. Muodostetaan pinta-alalle lauseke (kohdefunktio)

$$A(W,L,H) = \underbrace{W^2}_{\text{kansi}} + \underbrace{4WL}_{\text{sivut}} + \underbrace{2W\sqrt{\frac{W^2}{4} + H^2}}_{\text{alaosa}} \tag{1}$$

Siilon tilavuudelle saadaan lauseke

$$V(W,L,H) = \underbrace{LW^2}_{\text{yläosa}} + \underbrace{\frac{1}{3}W^2 H}_{\text{alaosa}} \tag{2}$$

Yhtälöä (2) voidaan käyttää hyväksi seuraavasti. Nyt tiedämme, että siilon tilavuus on 10 m^3, eli saadaan rajoitus

$$V(W,L,H) = LW^2 + \frac{1}{3}W^2 H = 10 \tag{3}$$

josta voidaan ratkaista *L*

$$L = \frac{10}{W^2} - \frac{1}{3}H \tag{4}$$

Kun nyt sijoitetaan (4) yhtälöön (1) saadaan

$$A(W,H) = W^2 + 4W\left(\frac{10}{W^2} - \frac{H}{3}\right) + 2W\sqrt{\frac{W^2}{4} + H^2} \tag{5}$$

Ratkaisu ongelmaamme saadaan minimoimalla (5) eli

$$\min\left\{ A(W,H) = W^2 + \frac{40}{W} - \frac{4WH}{3} + 2W\sqrt{\frac{W^2}{4} + H^2} \right\} \tag{6}$$

Yhtälöistä (1) & (3) muodostuva systeemi voidaan ratkaista esim. Lagrangen kertoja-menetelmällä (miten?). Tässä kuitenkin yritetään ratkaisua osoittaisderivaattojen nolla-kohdista. Lasketaan osittaisderivaatat ja asetetaan ne nolliksi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial W} = 2W - \dfrac{40}{W^2} - \dfrac{4H}{3} + \dfrac{W^2 + 2H^2}{\sqrt{\frac{1}{4}W^2 + H^2}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial H} = -\dfrac{4W}{3} + \dfrac{2WH}{\sqrt{\frac{1}{4}W^2 + H^2}} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Pienen yrittämisen jälkeen huomaamme, että (7) ei ratkea kovin helposti. Yksi mahdollisuus ratkaista (7) on kokeilu esim. Excel-taulukkolaskentaohjelmalla, josta on esimerkki seuraavalla sivulla. Sivun yläosassa on laskettu pinta-alan arvoja siten, että W on saanut arvoja välillä 0.5 → 8.5 ja H arvoja 0.5 → 9.5; askelvälinä on ollut yksi. Minimi tällä tarkkuudella on 27.0128 ja pisteenä (2.5, 1.5). Seuraavaan taulukkoon on laskettu pinta-alan arvoja seuraavasti: W : 1.5 → 3.1 ja H : 0.5 → 2.75. Nyt minimi on pisteessä (2.3, 1.0) ja minimin arvona 26.6250. Kahdessa alimmassa taulukossa on hakua edelleen tarkennettu ja vastaukseksi on saatu (2.25, 1.01) arvolla 26.6137.

	W								
H	0.500000	1.500000	2.500000	3.500000	4.500000	5.500000	6.500000	7.500000	8.500000
0.500000	80.475684	30.620830	27.314789	34.085430	46.882864	64.601995	86.817589	113.331131	144.037497
1.500000	80.770691	30.947820	**27.012812**	32.812774	44.476360	60.980129	81.936765	107.166437	136.573847
2.500000	81.095802	31.746897	27.892092	33.373377	44.409543	60.071083	80.041143	104.187420	132.445651
3.500000	81.425584	32.655032	29.165919	34.737071	45.586352	60.818419	80.161676	103.526900	130.885757
4.500000	81.756939	33.602882	30.601927	36.476685	47.419265	62.534041	81.565557	104.448642	131.180939
5.500000	82.089012	34.569369	32.117952	38.413792	49.620778	64.830450	83.787240	106.434786	132.784779
6.500000	82.421473	35.546045	33.678839	40.465430	52.044563	67.491829	86.544385	109.145816	135.313125
7.500000	82.754166	36.528887	35.267266	42.588798	54.610958	70.393726	89.664434	112.362157	138.503869
8.500000	83.087009	37.515739	36.873767	44.759847	57.273663	73.461020	93.038965	115.940115	142.178460
9.500000	83.419956	38.505344	38.492753	46.964115	60.004198	76.646283	96.597569	119.783570	146.213811

27.012812

	W								
H	1.500000	1.700000	1.900000	2.100000	2.300000	2.500000	2.700000	2.900000	3.100000
0.500000	30.620830	28.639003	27.475438	26.942094	26.916342	27.314789	28.078752	29.165730	30.544188
0.750000	30.598647	28.573578	27.362045	26.777084	26.696888	27.038690	27.744275	28.771504	30.089115
1.000000	30.666667	28.615043	27.370682	26.747619	**26.624923**	26.920572	27.576976	28.552507	29.816330
1.250000	30.789881	28.725592	27.462086	26.814047	26.661203	26.922168	27.539934	28.473400	29.692190
1.500000	30.947820	28.881331	27.609638	26.947749	26.775791	27.012812	27.602250	28.503438	29.686412
1.750000	31.128496	29.067471	27.795975	27.129118	26.947218	27.169573	27.739914	28.617886	29.773843
2.000000	31.324669	29.274725	28.009769	27.344879	27.160421	27.375810	27.934938	28.797649	29.934519
2.250000	31.531791	29.497101	28.243504	27.585975	27.404841	27.619538	28.174028	29.028264	30.152960
2.500000	31.746897	29.730612	28.492078	27.846126	27.672999	27.892092	28.447373	29.298838	30.417274
2.750000	31.967982	29.972528	28.751941	28.120895	27.959521	28.187141	28.747686	29.601148	30.718340

26.624923

H \ W	2.100000	2.150000	2.200000	2.250000	2.300000	2.350000	2.400000	2.450000	2.500000
0.750000	26.777084	26.713474	26.679770	26.674646	26.696888	26.745389	26.819133	26.917186	27.038690
0.800000	26.761778	26.695858	26.659799	26.652275	26.672077	26.718098	26.789325	26.884826	27.003744
0.850000	26.751507	26.683407	26.645118	26.635318	26.652799	26.696456	26.765278	26.858336	26.974775
0.900000	26.745932	26.675783	26.635393	26.623441	26.638722	26.680134	26.746667	26.837393	26.951461
0.950000	26.744736	26.672670	26.630306	26.616327	26.629531	26.668816	26.733176	26.821685	26.933493
1.000000	26.747619	26.673765	26.629555	$\boxed{26.613675}$	26.624923	26.662202	26.724506	26.810913	26.920572
1.050000	26.754301	26.678787	26.632857	26.615199	26.624614	26.660006	26.720372	26.804790	26.912414
1.100000	26.764520	26.687471	26.639945	26.620631	26.628333	26.661957	26.720501	26.803045	26.908746
1.150000	26.778032	26.699571	26.650570	26.629721	26.635827	26.667799	26.724636	26.805421	26.909311
1.200000	26.794611	26.714857	26.664499	26.642231	26.646859	26.677293	26.732537	26.811673	26.913862

26.613675

H \ W	2.200000	2.210000	2.220000	2.230000	2.240000	2.250000	2.260000	2.270000	2.280000
0.950000	26.630306	26.625279	26.621378	26.618592	26.616911	26.616327	26.616830	26.618411	26.621060
0.960000	26.629818	26.624715	26.620735	26.617871	26.616112	26.615449	26.615873	26.617373	26.619943
0.970000	26.629502	26.624322	26.620266	26.617325	26.615488	26.614747	26.615092	26.616514	26.619004
0.980000	26.629354	26.624099	26.619967	26.616950	26.615037	26.614219	26.614487	26.615831	26.618243
0.990000	26.629372	26.624043	26.619837	26.616745	26.614756	26.613862	26.614054	26.615321	26.617656
1.000000	26.629555	26.624153	26.619873	26.616707	26.614644	26.613675	26.613791	26.614982	26.617241
1.010000	26.629900	26.624425	26.620073	26.616834	26.614697	$\boxed{26.613654}$	26.613696	26.614812	26.616996
1.020000	26.630405	26.624859	26.620435	26.617124	26.614914	26.613799	26.613767	26.614810	26.616918
1.030000	26.631067	26.625451	26.620957	26.617574	26.615293	26.614106	26.614001	26.614971	26.617007
1.040000	26.631885	26.626200	26.621636	26.618183	26.615832	26.614573	26.614397	26.615295	26.617258

	V =	10.000000
26.613654	L =	1.638642
	A =	26.613654

Ongelman tarkka ratkaisu on (laskettu Matlabilla).

```
W =    2.2545 m
H =    1.0082 m
L =    1.6314 m
A =   26.6135 m^2
V =    10 m^3
```

Ratkaisussa on käytetty jyrkimmän laskun menetelmää.

6. Yksivaihemenetelmä - esimerkki 1

Ratkaise

$$\max(z = 8x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 20x_4) \tag{1}$$

Rajoitukset

$$\begin{cases} 12x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4 \leq 18 \end{cases} \quad ; \quad x_i \geq 0 \tag{2}$$

Ratkaisu:

Ratkaisu tapahtuu Simplex-algoritmilla ja yksivaihemenetelmällä (ks. Liite 1). Nyt n = 4 (muuttujien lukumäärä kohdefunktiossa) ja m = 2 (rajoitusyhtälöiden lukumäärä). Seuraavaan taulukkoon on laskettu Excel-taulukkolaskentaohjelmalla arvot.

Saadaan perustaulukko

taulukko 1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ratkaisu	jako
z	-8	-10	-18	-20	0	0	0	
x_5	12	8	6	4	1	0	12	3
x_6	3	6	12	24	0	1	18	3/4

Saadaan i=4 ja j=2. Soveltamalla algoritmia saadaan

taulukko 2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ratkaisu	jako
z	-5 1/2	-5	-8	0	0	5/6	15	
x_5	11 1/2	7	4	0	1	- 1/6	9	2 1/4
x_4	1/8	1/4	1/2	1	0	1/24	3/4	1 1/2

Nyt i=3 ja j=2. Saadaan

taulukko 3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ratkaisu	jako
z	-3 1/2	-1	0	16	0	1 1/2	27	
x_5	10 1/2	5	0	-8	1	- 1/2	3	2/7
x_3	1/4	1/2	1	2	0	1/12	1 1/2	6

Nyt i=1 ja j=1. Saadaan

taulukko 4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ratkaisu
z	0	2/3	0	13 1/3	1/3	1 1/3	28
x_1	1	10/21	0	- 16/21	2/21	- 1/21	2/7
x_3	0	8/21	1	2 4/21	- 1/42	2/21	1 3/7

Sama desimaalilukuina

taulukko 4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ratkaisu	jako
z	0.0000	0.6667	0.0000	13.3333	0.3333	1.3333	28.0000	
x_1	1.0000	0.4762	0.0000	-0.7619	0.0952	-0.0476	0.2857	
x_3	0.0000	0.3810	1.0000	2.1905	-0.0238	0.0952	1.4286	

Nyt z-rivillä on pelkästään positiivisia alkioita, joten ratkaisu on saavutettu. Ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7} \approx 0.2857 \\ x_3 = 1\dfrac{3}{7} \approx 1.4286 \quad \text{muut } x_i\text{:t nollia} \\ z = 28 \end{cases} \tag{3}$$

Seuraavalla sivulla on esitetty eräs toinen esimerkki (vuodelta 1997).

7. Yksivaihemenetelmä - esimerkki 2

Ratkaise

$$\max\{z = 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4\} \tag{1}$$

rajoitukset

$$\begin{cases} 12x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4 \le 180 \end{cases} \quad ; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \tag{2}$$

Ratkaistaan ongelma SIMPLEX-algoritmin avulla. Muodostetaan perustaulukko (1).

TAULUKKO 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	-10	-10	-20	-20	0	0	0	
x_5	12	8	6	4	1	0	120	20
x_6	3	6	12	24	0	1	180	15

n = 4 (muuttujien määrä kohdefunktiossa) ja m = 2 (rajoitusyhtälöiden lukumäärä)

❶ Kierros - Ratkaisu on nyt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 120$; $x_6 = 180$; $z = 0$.

Nyt kohdefunktiossa on kaksi samansuuruista arvoa (-20). Nyt voidaan valita jompikumpi arvo; tässä valitaan ensimmäinen eli i = 3. Jako-sarakkeen avulla saadaan, että j = 2. Kantaan tulee $x_i = x_3$ ja kannasta poistuu $x_{n+j} = x_{4+2} = x_6$. Nyt voidaan kirjoittaa uusi taulukko, jossa x_3-rivi saadaan taulukon 1 x_6-rivistä jakamalla kaikki alkiot luvulla 12 (lukuun ottamatta jako-saraketta), joka on ns. pivot-alkio. Muut rivit lasketaan algoritmin mukaan.

TAULUKKO 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	-5	0	0	20	0	1 2/3	300	
x_5	10 ½	5	0	-8	1	-1/2	30	2 6/7
x_3	1/4	½	1	2	0	1/12	15	60

❷ Kierros - Ratkaisu on nyt $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0$; $x_5 = 30$; $x_3 = 15$; $z = 300$.

Nyt i = 1 ja j = 1 eli pivot-alkio on 10 ½. Kantaan tulee $x_i = x_1$ ja kannasta poistuu $x_{n+j} = x_{4+1} = x_5$. Saadaan taulukko 3.

TAULUKKO 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	2 8/21	0	16 4/21	10/21	1 3/7	314 2/7	
x_1	1	10/21	0	-16/21	2/21	-1/21	2 6/7	
x_3	0	8/21	1	2 4/21	-1/42	2/21	14 2/7	

Nyt z-rivillä on pelkästään positiivisia alkioita, joten ratkaisu on saavutettu. Ratkaisu on nyt $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$; $x_1 = 2.8571$; $x_3 = 14.2857$; $z = 314.2857$.

(Taulukko 3 desimaalilukuina

TAULUKKO 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	2.3810	0	16.1905	0.4762	1.4286	314.2857	
x_1	1	0.4762	0	-0.7619	0.0952	-0.0476	2.8571	
x_3	0	0.3810	1	2.1905	-0.0238	0.0952	14.2857	

)

Eräitä huomioita:

- Simplex-algoritmi ei ole vaikea vaan työläs eli algoritmin oppiminen edellyttää parin tehtävän laskemista huolellisesti.
- Ratkaisuun kuuluvat muuttujat luetaan ensimmäisestä sarakkeesta; ratkaisun arvo ratkaisu-sarakkeesta.
- Rajoitusten avulla voidaan päätellä se, montako muuttujaa saa nollasta eroavia arvoja. Tässä tapauksessa rajoitusyhtälöitä on kaksi, joten ainoastaan kahdella muuttujalla voi olla nollasta eroava arvo.
- Jos jako-sarakkeeseen ilmaantuu negatiivisia arvoja, ne jätetään tarkastelussa huomioon ottamatta.
- Jos i:tä tai j:tä etsittäessä tulee vastaan kaksi samaa arvoa (niinkuin tässä esimerkissä kävi) voidaan valita jompikumpi arvoista. Seuraavassa on esitetty laskun kulku, jos taulukossa 1 olisi valittu jälkimmäinen -20.

Taulukko 1	x1	x2	x3	x4	x5	x6	ratkaisu	jako
z	-10	-10	-20	-20	0	0	0	
x5	12	8	6	4	1	0	120	30
x6	3	6	12	24	0	1	180	7 ½

taulukko 2	x1	x2	x3	x4	x5	x6	ratkaisu	jako
z	-7 1/2	-5	-10	0	0	5/6	150	
x5	11 1/2	7	4	0	1	- 1/6	90	22 ½
x4	1/8	1/4	1/2	1	0	1/24	7 1/2	15

taulukko 3	x1	x2	x3	x4	x5	x6	ratkaisu	jako
z	-5	0	0	20	0	1 2/3	300	
x5	10 1/2	5	0	-8	1	- 1/2	30	2 6/7
x3	1/4	1/2	1	2	0	1/12	15	60

taulukko 4	x1	x2	x3	x4	x5	x6	ratkaisu	jako
z	0	2 8/21	0	16 4/21	10/21	1 3/7	314 2/7	
x1	1	10/21	0	- 16/21	2/21	- 1/21	2 6/7	
x3	0	8/21	1	2 4/21	- 1/42	2/21	14 2/7	

Kuten nähdään, mitään kamalaa ei tapahtunut; pitipähän laskea yksi ylimääräinen kierros. Huomaa, että ensimmäisen kierroksen jälkeen x_4 menee kantaan tullakseen sieltä välittömästi pois seuraavalla kierroksella.

8. Kaksivaihemenetelmä - esimerkki

Ratkaise kaksivaihemenetelmällä (Liite 2)

$$\max\{z = 3x_1 + 5x_2\} \tag{1}$$

rajoitukset ovat

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 14 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases} ;\ x_1, x_2 \geq 0 \tag{2}$$

Ratkaistaan ongelma SIMPLEX-algoritmin avulla. Lisäämällä SLACK-muuttujat ja apu-muuttujat saadaan rajoitukset muotoon.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 14 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + x_8 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 20 \end{cases} \tag{3}$$

Vaihe 1

Optimoitavaksi kohdefunktioksi saadaan

$$\max\{z' = -x_7 - x_8\} \tag{4}$$

Muodostetaan perustaulukko (Taulukko 1).

TAULUKKO 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Ratkaisu	Jako
z	-3	-5	0	0	0	0	0	0	0	
z'	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
x_7	1	3	-1	0	0	0	1	0	14	
x_8	2	-1	0	-1	0	0	0	1	2	
x_5	1	-4	0	0	1	0	0	0	2	
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	20	

Ratkaisu on nyt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_7 = 14$; $x_8 = 2$; $x_5 = 2$; $x_6 = 20$; $z' = 0$. Kohdefunktiossa ei saa olla kannassa olevia muuttujia. x_7 ja x_8 saadaan kohde-funktiosta vähentämällä x_7-ja x_8-rivit z'-rivistä. Saadaan taulukko 2.

TAULUKKO 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Ratkaisu	Jako
z	-3	-5	0	0	0	0	0	0	0	
z'	-3	-2	1	1	0	0	0	0	-16	
x_7	1	3	-1	0	0	0	1	0	14	14
x_8	2	-1	0	-1	0	0	0	1	2	1
x_5	1	-4	0	0	1	0	0	0	2	2
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	20	20

Ratkaisu on nyt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_7 = 14$; $x_1 = 2$; $x_5 = 2$; $x_6 = 20$; $z' = -16$. Kantaan siirtyy x_1 (suurin neg. kohdefunktiossa) ja kannasta poistuu x_8 (pienin positiivinen jako-sarakkeessa). Laskemalla saadaan taulukko 3.

TAULUKKO 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Ratkaisu	Jako
z	0	-6½	0	-1½	0	0	0	1½	3	
z'	0	-3½	1	-½	0	0	0	1½	-13	
x_7	0	3½	-1	½	0	0	1	-½	13	3 5/7
x_1	1	-½	0	-½	0	0	0	½	1	-
x_5	0	-3½	0	½	1	0	0	-½	1	-
x_6	0	1½	0	½	0	1	0	-½	19	12 2/3

Ratkaisu on nyt $x_8 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_7 = 13$; $x_1 = 1$; $x_5 = 1$; $x_6 = 19$; $z' = -13$. Kantaan siirtyy x_2 (suurin neg. kohdefunktiossa) ja kannasta poistuu x_7 (Jos jako sarakkeeseen tulee negatiivisia arvoja, niitä ei tarkastella). Laskemalla saadaan taulukko 4.

TAULUKKO 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Ratkaisu	Jako
z	0	0	-1 6/7	-4/7	0	0	1 6/7	4/7	27 1/7	
z'	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
x_2	0	1	-2/7	1/7	0	0	2/7	-1/7	3 5/7	
x_1	1	0	-1/7	-3/7	0	0	1/7	3/7	2 6/7	
x_5	0	0	-1	1	1	0	1	-1	14	
x_6	0	0	3/7	2/7	0	1	-3/7	-2/7	13 3/7	

Ratkaisu on nyt $x_8 = x_7 = x_3 = x_4 = 0$; $x_2 = 3\ 5/7$; $x_1 = 2\ 6/7$; $x_5 = 14$; $x_6 = 13\ 3/7$; $z' = 0$. Koska kohdefunktion kaikki kertoimet ovat $\geq$ 0ja $z' = 0$, niin z':n optimi on saavutettu. Nyt poistetaan z'-rivi ja x_8- ja x_7-sarakkeet ja saadaan taulukko 5. Siirrytään vaiheeseen 2.

Vaihe 2

TAULUKKO 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	0	-1 6/7	-4/7	0	0	27 1/7	
x_2	0	1	-2/7	1/7	0	0	3 5/7	-
x_1	1	0	-1/7	-3/7	0	0	2 6/7	-
x_5	0	0	-1	1	1	0	14	-
x_6	0	0	3/7	2/7	0	1	13 3/7	31 1/3

Kantaan siirtyy x_3 ja kannasta poistuu x_6. Saadaan taulukko 6.

TAULUKKO 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	0	0	2/3	0	4 1/3	85 1/3	
x_2	0	1	0	1/3	0	2/3	12 2/3	
x_1	1	0	0	-1/3	0	1/3	7 1/3	
x_5	0	0	0	1 2/3	1	2 1/3	45 1/3	
x_3	0	0	1	2/3	0	2 1/3	31 1/3	

Koska kohdefunktion kaikki kertoimet ovat ≥ 0, niin ratkaisu on saavutettu. Ratkaisu on $x_4 = x_6 = 0$; $x_2 = 12\ 2/3$; $x_1 = 7\ 1/3$; $x_5 = 45\ 1/3$; $x_3 = 31\ 1/3$; $z = 85\ 1/3$ eli optimi on pisteessä

$x_1 = 7\ 1/3$
$x_2 = 12\ 2/3$
$z = 85\ 1/3$

Huom: Laskennassa huomioon otettavia asioita

Miten lasketaan taulukoiden alkiot? Tarkastellaan taulukoita 5 ja 6. Taulukossa 5 on ns. Pivot-alkio, joka on x_3-sarakkeen ja x_6-rivin leikkauspisteessä (3/7). Taulukon 6 x_3-rivi saadaan jakamalla taulukon 5 x_6-rivi pivot alkiolla

TAULUKKO 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z								
x_2								
x_1								
x_5								
x_3	0:3/7 = 0	0:3/7 = 0	3/7:3/7 = 1	2/7:3/7 = 2/3	0:3/7 = 0	1:3/7 = 7/3	94/7:3/7 = 94/3	

Taulukon muut elementit saadaan seuraavan kaavan avulla:

$$\begin{pmatrix}\text{uusi}\\ \text{elementti}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{vanha}\\ \text{arvo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Pivot - rivin elementti}\\ \text{ko. sarakkeella}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Pivot} - \text{sarakkeen arvo ko. rivillä}\\ \text{(otetaan laskettavasta taulukosta)}\end{pmatrix}$$

TAULUKKO 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	0	-13/7	-4/7	0	0	190/7	
x_2	0	1	-2/7	1/7	0	0	26/7	-
x_1	1	0	-1/7	-3/7	0	0	20/7	-
x_5	0	0	-1	1	1	0	14	-
x_6	0	0	3/7	2/7	0	1	94/7	94/3

TAULUKKO 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Ratkaisu	Jako
z	0	0	0	2/3	0	13/3	256/3	
x_2	0	1	0	1/3	0	2/3	38/3	
x_1	1	0	0	-1/3	0	1/3	22/3	
x_5	0	0	0	5/3	1	7/3	136/3	
x_3	0	0	1	2/3	0	7/3	94/3	

merkintä: (rivi, sarake, taulukko (= t) x)

Lasketaan z-rivi.

(z, x_1, t 6) = (z, x_1, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_1, t 6)
= 0 - (-13/7) * (0) = 0
(z, x_2, t 6) = (z, x_2, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_2, t 6)
= 0 - (-13/7) * (0) = 0
(z, x_3, t 6) = (z, x_3, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_3, t 6)
= (-13/7) - (-13/7) * (1) = 0
(z, x_4, t 6) = (z, x_4, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_4, t 6)
= (-4/7) - (-13/7) * (2/3) = 2/3
(z, x_5, t 6) = (z, x_5, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_5, t 6)
= 0 - (-13/7) * (0) = 0
(z, x_6, t 6) = (z, x_6, t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, x_5, t 6)
= 0 - (-13/7) * (7/3) = 13/3

(z, Ratk., t 6) = (z, Ratk., t 5) - (z, x_3, t 5) * (x_3, Ratk., t 6)
= (190/7) - (-13/7) * (94/3) = 256/3

sama matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{13}{3} \\ \frac{256}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{190}{7} \end{pmatrix} - \left(-\frac{13}{7}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{94}{3} \end{pmatrix}$$

Lasketaan x_2-rivi.

(x_2, x_1, t 6) = (x_2, x_1, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_1, t 6)
= 0 - (-2/7) * (0) = 0
(x_2, x_2, t 6) = (x_2, x_2, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_2, t 6)
= 1 - (-2/7) * (0) = 1
(x_2, x_3, t 6) = (x_2, x_3, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_3, t 6)
= (-2/7) - (-2/7) * (1) = 0
(x_2, x_4, t 6) = (x_2, x_4, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_4, t 6)
= (1/7) - (-2/7) * (2/3) = 1/3
(x_2, x_5, t 6) = (x_2, x_5, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_5, t 6)
= 0 - (-2/7) * (0) = 0
(x_2, x_6, t 6) = (x_2, x_6, t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, x_5, t 6)
= 0 - (-2/7) * (7/3) = 2/3

(x_2, Ratk., t 6) = (x_2, Ratk., t 5) - (x_2, x_3, t 5) * (x_3, Ratk., t 6)
= (26/7) - (-2/7) * (94/3) = 38/3

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{26}{7} \end{pmatrix} - \left(-\frac{2}{7}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{94}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Lasketaan x_1-rivi.</u>

$(x_1,\ x_1,\ t\ 6) = (x_1,\ x_1,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_1,\ t\ 6)$

$= 1 - (-1/7) * (0) = 1$

$(x_1,\ x_2,\ t\ 6) = (x_1,\ x_2,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_2,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1/7) * (0) = 0$

$(x_1,\ x_3,\ t\ 6) = (x_1,\ x_3,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_3,\ t\ 6)$

$= (-1/7) - (-1/7) * (1) = 0$

$(x_1,\ x_4,\ t\ 6) = (x_1,\ x_4,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_4,\ t\ 6)$

$= (-3/7) - (-1/7) * (2/3) = -1/3$

$(x_1,\ x_5,\ t\ 6) = (x_1,\ x_5,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_5,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1/7) * (0) = 0$

$(x_1,\ x_6,\ t\ 6) = (x_1,\ x_6,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_5,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1/7) * (7/3) = 1/3$

$(x_1,\ Ratk.,\ t\ 6) = (x_1,\ Ratk.,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ Ratk.,\ t\ 6)$

$= (20/7) - (-1/7) * (94/3) = 22/3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/7 \\ -3/7 \\ 0 \\ 0 \\ 20/7 \end{pmatrix} - \left(-1/7\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \\ 7/3 \\ 94/3 \end{pmatrix}$$

<u>Lasketaan x_5-rivi.</u>

$(x_5,\ x_1,\ t\ 6) = (x_5,\ x_1,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_1,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1) * (0) = 0$

$(x_5,\ x_2,\ t\ 6) = (x_5,\ x_2,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_2,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1) * (0) = 0$

$(x_5,\ x_3,\ t\ 6) = (x_5,\ x_3,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_3,\ t\ 6)$

$= (-1) - (-1) * (1) = 0$

$(x_5,\ x_4,\ t\ 6) = (x_5,\ x_4,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_4,\ t\ 6)$

$= (1) - (-1) * (2/3) = 5/3$

$(x_5,\ x_5,\ t\ 6) = (x_5,\ x_5,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_5,\ t\ 6)$

$= 1 - (-1) * (0) = 1$

$(x_5,\ x_6,\ t\ 6) = (x_5,\ x_6,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ x_5,\ t\ 6)$

$= 0 - (-1) * (7/3) = 7/3$

$(x_5,\ Ratk.,\ t\ 6) = (x_5,\ Ratk.,\ t\ 5) - (x_1,\ x_3,\ t\ 5) * (x_3,\ Ratk.,\ t\ 6)$

$= (14) - (-1) * (94/3) = 136/3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5/3 \\ 1 \\ 7/3 \\ 136/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} - \left(-1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \\ 7/3 \\ 94/3 \end{pmatrix}$$

Yksinkertaista, eikö totta.

9. Lähdeluettelo

1. Edgar T F & Himmelblau D M (1988) *Optimization of Chemical Processes*. McGraw-Hill, New York. 651 s. ISBN 0-07-018991-9.
2. Jaako J (1997) *Laskuharjoitusmoniste kurssiin 47434S Prosessien optimointi*. Prosessitekniikan osasto, Oulun yliopisto, Oulu. 117 s. ISBN 951-42-4662-4.
3. James G, Burley D, Dyke P, Searl J, Steele N & Wright J (1993) *Advanced Modern Engineering Mathematics*. Addison-Wesley, Wokingham, UK. 901 s. ISBN 0-201-56519-6.
4. Leiviskä K & Jaako J (1998) *Kokeiluluentomoniste kurssiin 47434S Prosessien optimointi*. Prosessitekniikan osasto, Oulun yliopisto, Oulu. 91 s. Internet-julkaisu, saatavissa osoitteesta http://ntsat.oulu.fi/optimointi/ps4_lm.pdf
5. Ray W H & Szekely J (1973) *Process Optimization*. John Wiley & Sons, New York.
6. Reklaitis G V, Ravindran A & Ragsdell K M (1983) *Engineering Optimization - Methods and Applications*. John Wiley & Sons, New York. 684 s. ISBN 0-471-05579-4.

Liite 1 - Simplex algoritmi - yksivaihemenetelmä

Simplex-algoritmin esitystapoja on useita. Mielestäni selkein on kirjassa *Advanced Modern Engineering Mathematics* (James *et al.* 1993, 717-719):

* * *

Simplex algorithm : general theory

We can now generalize the problem to the standard form of finding the maximum of the objective function

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{L.1}$$

subject to the constraints

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \le & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \le & b_m \end{array}\right\} \tag{L.2}$$

by the simplex algorithm, where the $b_1, b_2, \ldots, b_m$ are all positive. By introducing the slack variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \ge 0$ we convert (L.2) into the standard tableau

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	Solution
z	$-c_1$	$-c_1$	$\cdots$	$-c_1$	0	0	$\cdots$	0	0
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m

Any subsequent tableau takes this general form, with an $m \times n$ unit matrix in the basic variables columns. As noted in the previous example (James *et al.* 1993, 713-717), the basic variables change, so the left-hand column will have m entries, which can be any of the variables, $x_1, \ldots, x_{m+n}$, and the unit-matrix columns are usually not in the above neat form but are permuted.

The five basic steps in the algorithm follow quite generally:

Step 1	Choose the most negative value in the z row, say $-c_i$. If all the entries are positive then the maximum has been achieved.	(Identify column i)
Step 2	Evaluate $b_1/a_{1i}, b_2/a_{2i}, \dots, b_m/a_{mi}$ for all *positive* a_{ki}. Select the minimum of these numbers, say b_j/a_{ji}.	(Identify row j)
Step 3	Replace x_{n+j} by x_i in the basic variables in the left-hand column.	(Change the basis)
Step 4	In row j replace a_{jk} by a_{jk}/a_{ji} for $k = 1, \dots, n+m+1$. (Note that the first row and the final column are treated as part of the tableau for computation purposes, $-c_p = a_{0p}, b_q = a_{q(n+m+1)}$).	(Make pivot = 1)
Step 5	In all other rows, $l \neq j$, replace a_{lk} by $a_{lk} - a_{li}a_{jk}$ for all $k = 1, \dots, m+n+1$ and for each row $l = 0, \dots, m$ $(l \neq j)$.	(Gaussian elimination)

The algorithm is then repeated until at Step 1 the maximum is achieved.

Liite 2 - Simplex algoritmi - kaksivaihemenetelmä

Kirjassa *Advanced Modern Engineering Mathematics* (James *et al.* 1993) on kaksivaihemenetelmä esitetty sivuilla 725-733.

* * *

Simplex algorithm : two-phase method

The previous section (Liite 1) only dealt with '≤' constraints and did not consider '≥' constraints. These prove to be much more troublesome, since there is no obvious initial feasible solution, and Phase 1 of the two-phase method is solely concerned with getting such a solution. Once this has been obtained, we then move to Phase 2. This is the standard simplex method, starting from the solution just obtained from Phase 1.

The general two-phase strategy is then as follows:

Phase 1

(a) Introduce slack and surplus variables.

(b) Introduce artificial variables alongside the surplus variables, say $x_p, \ldots, x_q$.

(c) Write the articial cost function

$$z' = -x_p - x_{p+1} - \ldots - x_q \tag{L.2}$$

(d) Subtract rows $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_q$ from the cost function z' to ensure there are zeros in the entries in the z' row corresponding to the basic variables.

(e) Use the standard simplex method to maximize z' (keeping the z row as an extra row) until $z' = 0$ and

$$x_p = x_{p+1} = \ldots = x_q = 0 \tag{L.3}$$

Phase 2

(a) Eliminate the z' row and artificial columns $x_p, \ldots, x_q$.

(b) Use standard simplex method to maximize the objective function z.

There are other approaches to obtaining an initial feasible basic solution, but Phase 1 of the two-phase method gives an efficient way of obtaining a starting point. Geometrically, it uses the simplex method to search the non-feasible vertices until it is driven to a vertex in the feasible region (ks. Jaako 1997, 91).

Liite 3 - Matlab Optimization Toolbox

Seuraavassa on esitetty esimerkkien avulla miten MATLAB Optimization Toolboxin (MOT) rutiineja käytetään esimerkkitapauksissa. Kustakin funktiosta on lyhyt kuvaus, jonka jälkeen on esimerkki esitetty. MOT sisältää seuraavat funktiot:

- attgoal - multiobjective goal attainment
- conls - constrained linear least squares
- constr - constrained non-linear minimization
- curvefit - non-linear curve fitting
- fmin - scalar non-linear minimization
- fminu - unconstrained non-linear minimization
- fmins - unconstrained non-linear minimization
- fsolve - nonlinear eqution solving
- fzero - scalar nonlinear equation solver
- leastsq - nonlinear least squares
- lp - linear programming
- minimax - minimax optimization
- nnls - non-negative linear least squares
- qp - quadratic programming
- seminf - semi-infinite minimization

Lähde: Branch M A & Grace A, MATLAB Optimization Toolbox. User's Guide Version 1.5.

constr (s. 3-19)[3]

Funktion avulla voidaan löytää epälineaarisen monimuuttujaisen funktion minimi, kun ratkaisulle on asetettu rajoituksia.

Ratkaise

$$\min\left[f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 x_2 x_3\right]$$

rajoituksena

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72 \end{cases}$$

Kirjoitetaan m-tiedosto

```
function [f,g] = fun (x)
f = -x(1)*x(2)*x(3) ;
% Laske rajoitukset.
g(1) = -x(1) - 2*x(2) - 2*x(3) ;
g(2) = x(1) + 2*x(2) + 2*x(3) - 72 ;
```

[3] Sivunumero viittaa User's Guiden sivulle.

Optimointi tehdään seuraavin komennoin, kun aloituspiste on [10 10 10].

```
x0 = [ 10 , 10 , 10 ] ;            % Alkuarvaus.
x = constr ('fun', x0)             % Kutsutaan optimoijaa.
```

Vastaukseksi saadaan

```
X =
24.0000   12.0000   12.0000
```

curvefit (s. 3-25)

Ratkaisee epälineaarisen käyränsovitusongelman (sama kuin tehtävässä h esitetty ongelma) pienimmän neliösumman menetelmällä.

Oletetaan, että data on valmiina vektoreina xdata ja ydata; xdata ja ydata ovat olemassa ja molemmat vektorit ovat saman mittaisia. Data halutaan sovittaa malliin

$$ydata(i) = x(1) + x(2)\exp[xdata(i) - x(3)]$$

eli halutaan minimoida neliösumma

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[F(x, xdata_i) - ydata_i\right]^2\right\}$$

jossa

$$F(x, xdata) = x(1) + x(2)\exp[xdata(i) - x(3)]$$

haun alkupisteenä käytetään pistettä [0.3 0.4 0.1]. Kirjoitetaan m-tiedosto

```
function f = fun (x, xdata)
f = x(1) + x(2)*exp(xdata + x(3)) ;     % Huom f on vektori.
```

Optimointi tehdään seuraavin komennoin.

```
x0 = [ 0.3 0.4 0.1 ] ;                      % Alkuarvaus.
x = curvefit ('fun', x0, xdata, ydata)      % Kutsutaan optimoijaa.
```

Ks. myös funktio leastsq (s. 3-50).

fmin (s. 3-30)

Etsii yhden muuttujan funktion minimin annetulta välitä; kaavamuodossa

$\min[f(x)]$ siten, että $x_1 < x < x_2$

Sinifunktion minimi valillä [0, 2π] saadaan seuraavasti

```
a = fmin ('sin', 0, 2*pi)
a = 4.7124
```

Etsitään edelleen funktion $f(x) = (x-3)^2 - 1$ minimi välillä [0, 5]. Kirjoitetaan m-tiedosto

```
function f = fun (x)
f = (x-3).^2 - 1 ;
```

Optimi haetaan käskyllä

```
a = fmin ('fun', 0, 5)
```

Vastaukseksi saadaan

```
a = 3
```

fmins, fminu (s. 3-34)

Etsii monimuuttujaisen funktion minimin rajoittamattomassa tapauksessa.

Ratkaistaan

$$\min\left[f(x_1,x_2)=100\left(x_2-x_1^2\right)^2+(1-x_1)^2\right]$$

Haun aloituspisteenä on [-1.2 1]. Kirjoitetaan m-tiedosto

```
function f = fun (x)
f = 100*(x(2)-x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2 ;
```

Optimi haetaan käskyin

```
x = [ -1, 1 ]
x = fminu ('fun', x)
```

Kun 132 kierrosta on laskettu, saadaan vastaukseksi

```
x = 1.0000   1.0000
```

Molemmilla funktioilla (fmins ja fminu) on sama kutsusyntaksi. Funktiot eroavat kuitenkin toisistaan toiminnaltaan; fmins-funktiossa optimointimenetelmänä on Nelder-Meadin menetelmä (Luentomoniste s. 33) ja fminu-funktiossa DFP-menetelmä (Laskuharjoitusmoniste s. 65)

fsolve (s. 3-41)

Ratkaisee epälineaarisen yhtälöryhmän.

Etsitään seuraavan yhtälöryhmän nollakohdat

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-\exp(-x_1)=0 \\ -x_1+2x_2-\exp(-x_2)=0 \end{cases}$$

Haun alkupisteenä on [-5 -5]. Kirjoitetaan m-tiedosto.

```
function f = fun (x)
f = [ 2*x(1) -   x(2) - exp(-x(1))  ;
       -x(1) + 2*x(2) - exp(-x(2)) ] ;
```

Optimointi suoritetaan seuraavin komennoin

```
x0 = -5*ones (2,1) ;                 % Alkupiste.
options = foptions ;                 % Optimoinnin parametrit.
x = fsolve ('fun', x0, options)      % Kutsutaan optimoijaa.
```

Vastaukseksi saadaan

```
x = 0.5671   0.5671
```

lp (s. 3-55)

Ratkaisee lineaarisen ohjelmoinnin ongelman

$\min\left(c^T x\right)$ siten, että $Ax \le b$

jossa *c* ja *b* ovat vektoreita ja *A* on matriisi.

Ratkaistaan ongelma

$$\min\left[f\left(x_1, x_2, x_3\right) = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3\right]$$

rajoituksina

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 42 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 30 \end{cases} \qquad x_i \ge 0$$

Syötetään matriisit

```
c = [ -5, -4, -6 ] ;
a = [  1  -1   1
       3   2   4
       3   2   0 ] ;
b = [ 20 ; 42 ; 30 ] ;
```

Kutsutaan lineaarisen ohjelmoinnin rutiinia

```
[x, lambda] = lp (c, a, b, zeros (3,1))
```

Ja ratkaisuksi saadaan

```
x = 0.0000   15.0000   3.0000
```

ISBN 951-42-5352-3
ISSN 1238-9404
Oulun yliopisto
Säätötekniikan laboratorio - Sarja B
Toimittaja: Leena Yliniemi

1. Yliniemi L & Koskinen J, Rumpukuivaimen sumea säätö. Joulukuu 1995. 17 s. 6 liitettä. ISBN 951-42-4301-3.
2. Leiviskä K, Rauma T, Ahola T, Juuso E, Myllyneva J & Alahuhta P, Sumea mallintaminen, viritys ja säätö. Tammikuu 1996. 44 s. 951-42-4348-X.
3. Altavilla M, Koskinen J & Yliniemi L, Rumpukuivaimen säätö neuroverkolla. Tammikuu 1996. 12 s. ISBN 951-42-4373-0.
4. Myllyneva J, Leiviskä K, Heikkinen M, Kortelainen J & Komulainen K, Sumean säädön käyttömahdollisuudet hiertämön ohjauksessa. Huhtikuu 1997. 52 s. ISBN 951-42-4647-0.
5. Leiviskä K & Heikkinen M, TMP-prosessin mallintaminen ja mallipohjainen säätö. Huhtikuu 1997. 68 s. ISBN 951-42-4646-2.
6. Jaako J, Nopeusyhtälön parametrien sovittaminen. Huhtikuu 1998. 25 s. ISBN 951-42-4961-5.
7. Myllyneva J, Kortelainen J, Latva-Käyrä K, Nystedt H & Leiviskä K, Hiertämön laatusaadöt. Syyskuu 1998. ISBN 951-42-5023-0.
8. Lähteenmäki M & Leiviskä K, Tilastollinen prosessinohjaus: perusteet ja menetelmät. Lokakuu 1998. ISBN 951-42-5064-8.
9. Tervahartiala P & Leiviskä K, Tilastollinen prosessinohjaus: ohjelmistovertailu. Elokuu 1999. ISBN 951-42-5343-4.
10. Jaako J, Eräitä optimointitehtäviä. Syyskuu 1999. 39 s. ISBN 951-42-5352-3.
11. Jaako J, Yksinkertaisia prosessimalleja. Syyskuu 1999. 73 s. ISBN 951-42-5353-1.
12. Jaako J, MATLAB-ohjelman käyttö eräissä prosessiteknisissä laskuissa. Syyskuu 1999. 61 s. ISBN 951-42-5354-X.

Oulun yliopistopaino
Oulu 1999