Verkkojen reunaväritykset

LuK-tutkielma
Tuomas Salo
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2022

Sisällys

Johdanto **2**

1 Verkkoteorian perusteita **2**
1.1 Verkon määritelmä 2
1.2 Verkkoihin liittyviä käsitteitä 5
1.3 Erilaisia verkkoja 7

2 Verkkojen reunaväritykset **8**
2.1 Peruskäsitteitä 8
2.2 Reunakromaattinen luku ja sen määrittäminen 9
2.3 Lukujärjestysongelma 15

Lähdeluettelo **25**

Johdanto

Tämän tutkielman aiheena ovat verkkoteorian alle kuuluvat verkkojen reunaväritykset. Ensimmäisessä luvussa pohjustetaan tätä varsinaista aihetta tutustumalla reunaväritysten käsittelyn kannalta olennaisimpiin verkkoteorian peruskäsitteisiin ja toisessa luvussa tarkastellaan itse reunavärityksiä. Toisen luvun aikana käsitellään reunaväritykisiin liittyviä keskeisiä määritelmiä ja tuloksia sekä sovelluskohteena lukujärjestysongelmaa. Tutkielman lukijan on hyvä omata tietämystä yliopistotason matemaattisista merkinnöistä ja käsitteistä, mutta esitietoja verkkoteoriasta ei vaadita.

Tutkielman päälähteenä toimii [1]. Esimerkit ovat itse tehtyjä, ja todistuksia on tarvittaessa muokattu hieman sekä kirjoitettu yksityiskohtaisemmin kuin lähteessä.

1 Verkkoteorian perusteita

1.1 Verkon määritelmä

Määritellään ensin verkkoteorian kaikista keskeisin käsite: verkko.

Määritelmä 1.1. *Verkko* (graph) G on järjestetty kolmikko

$$(V(G), E(G), \psi_G),$$

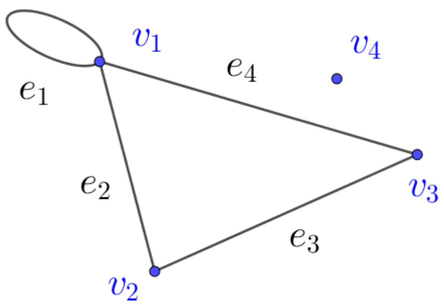
missä $V(G)$ on epätyhjä *kärkipisteiden* (vertices) joukko, $E(G)$ joukosta $V(G)$ erillinen *reunojen* (edges) joukko ja ψ_G *esiintyvyysfunktio* (incidence function), joka liittää jokaisen reunan kahden kärkipisteen muodostamaan järjestäytymättömään pariin.

Huomautus 1.2. Verkko koostuu käytännössä joukosta pisteitä (käytetään jatkossa termiä piste kärkipisteen synonyymina), joita reunat liittävät esiintyvyysfunktion määräämällä tavalla. Lisäksi on huomioitavaa, että verkossa voi olla pisteitä, joihin ei liity ollenkaan reunoja ja reunojen joukko voi olla jopa tyhjä. Reunan (edge) molemmat päät voivat olla myös liittyneet samaan kärkipisteeseen (vertex) eli määritelmässä esiintyvät kaksi kärkipistettä voivat olla samat. Yleisessä tapauksessa tai jos on selvää, mistä verkosta on kyse, voidaan kärkipisteiden ja reunojen joukkoja merkitä lyhyemmin V ja E.

Verkot voidaan esittää graafisesti, ja käsite saakin englanninkielisen nimensä graph juuri tästä hyödyllisestä ominaisuudesta. Kirjassa [1] ja tässä tutkielmassa G on yleinen merkintä verkolle.

Esimerkki 1.3. Kuvan 1 verkolle kärkipisteiden joukko $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ja reunojen joukko $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Verkon esiintyvyysfunktio määritellään seuraavasti:

$$\psi_G(e_1) = v_1v_1,\ \psi_G(e_2) = v_1v_2,\ \psi_G(e_3) = v_2v_3,\ \psi_G(e_4) = v_3v_1.$$



Kuva 1: Verkko G

Käydään seuraavaksi läpi kaksi verkkojen käsittelyn kannalta erittäin tärkeää määritelmää.

Määritelmä 1.4. Verkot G ja H ovat *identtiset* (identical) eli $G = H$, jos $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ ja $\psi_G = \psi_H$.

Määritelmä 1.5. Verkot G ja H ovat *isomorfiset* (isomorphic) eli rakenneyhtäläiset (merkitään $G \cong H$), jos on olemassa bijektiiviset kuvaukset $\theta : V(G) \to V(H)$ ja $\phi : E(G) \to E(H)$ siten, että kaikille $e \in E(G)$ pätee $\psi_G(e) = uv$ jos ja vain jos $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. Tällöin sanotaan, että pari (θ, ϕ) on *isomorfismi* (isomorphism) verkkojen G ja H välillä.

Esimerkki 1.6. Kuvien 1 ja 2a verkot ovat identtiset. Kuvien 1 ja 2b verkot taas ovat isomorfiset. Osoitetaan tämä isomorfisuus löytämällä sopiva isomorfismi.

Määritellään funktio $\theta : V(G) \to V(H)$

$$\theta(v_1) = v,\ \theta(v_2) = w,\ \theta(v_3) = x \text{ ja } \theta(v_4) = y,$$

ja funktio $\phi : E(G) \to E(H)$

$$\phi(e_1) = a,\ \phi(e_2) = b,\ \phi(e_3) = c \text{ ja } \phi(e_4) = d.$$

Funktiot θ ja ϕ ovat selvästi bijektioita, sillä kummankin funktion tapauksessa jokaiseksi maalijoukon alkioksi kuvautuu täsmälleen yksi lähtöjoukon alkio. Osoitetaan vielä, että kaikille $e \in E(G)$ pätee $\psi_G(e) = tu$ $(t, u \in V(G))$ jos ja vain jos $\psi_H(\phi(e)) = \theta(t)\theta(u)$.
" $\Rightarrow$ ": Verkon G esiintyvyysfunktio on määritelty esimerkissä 1.3 ja verkon H esiintyvyysfunktion arvot voidaan päätellä kuvasta 2b. Nyt siis

$$\begin{aligned}
&\psi_H(\phi(e_1)) = \psi_H(a) = vv = \theta(v_1)\theta(v_1),\\
&\psi_H(\phi(e_2)) = \psi_H(b) = vw = \theta(v_1)\theta(v_2),\\
&\psi_H(\phi(e_3)) = \psi_H(c) = wx = \theta(v_2)\theta(v_3) \text{ ja}\\
&\psi_H(\phi(e_4)) = \psi_H(d) = xv = \theta(v_3)\theta(v_1).
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ": Koska funktiot θ ja ϕ ovat bijektioita, on niillä olemassa käänteisfunktiot θ^{-1} ja ϕ^{-1}, joille $\theta^{-1} : V(H) \to V(G)$

$$\theta^{-1}(v) = v_1,\ \theta^{-1}(w) = v_2,\ \theta^{-1}(x) = v_3 \text{ ja } \theta^{-1}(y) = v_4,$$

ja $\phi : E(H) \to E(G)$

$$\phi^{-1}(a) = e_1,\ \phi^{-1}(b) = e_2,\ \phi^{-1}(c) = e_3 \text{ ja } \phi^{-1}(d) = e_4.$$

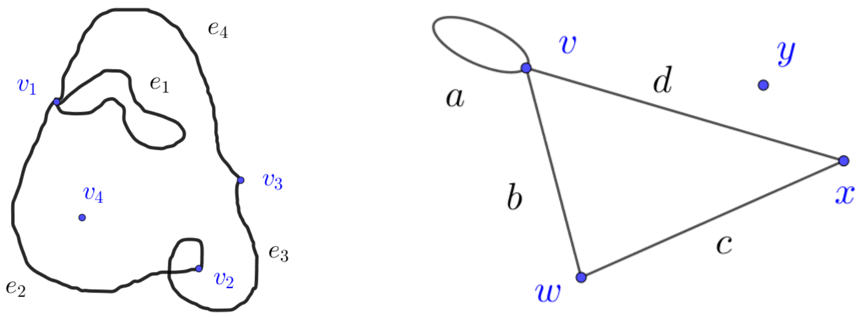
Nyt oletuksen $\psi_H(\phi(e)) = \theta(t)\theta(u)$ kaikille $e \in E(G)$ ja verkon H esiintyvyysfunktion nojalla

$$\begin{aligned}
&\psi_G(e_1) = \psi_G(\phi^{-1}(a)) = \theta^{-1}(v)\theta^{-1}(v) = v_1v_1,\\
&\psi_G(e_2) = \psi_G(\phi^{-1}(b)) = \theta^{-1}(v)\theta^{-1}(w) = v_1v_2,\\
&\psi_G(e_3) = \psi_G(\phi^{-1}(c)) = \theta^{-1}(w)\theta^{-1}(x) = v_2v_3 \text{ ja}\\
&\psi_G(e_4) = \psi_G(\phi^{-1}(d)) = \theta^{-1}(x)\theta^{-1}(y) = v_3v_1.
\end{aligned}$$

□

Jokainen verkko voidaan piirtää äärettömän monella eri tavalla eli erilaisia graafisia esityksiä on äärettömän monta, sillä reunojen muodoilla tai kärkipisteiden sijainnilla ei ole merkitystä, vaan ainoastaan sillä, että reunat liittävät kärkipisteet esiintyvyysfunktion mukaisesti. Usein jostain tietystä graafisesta esityksestä puhutaan kuin se olisi itse tarkasteltava verkko.

Vastaavasti rakenneyhtäläiset verkot samaistetaan usein keskenään eikä kärkipisteitä ja reunoja nimetä erikseen, jos ollaan kiinnostuneita vain verkon rakenteellisista ominaisuuksista. Nimettömistä kärkipisteistä ja reunoista koostuvan verkon voidaan ajatella edustavan rakenneyhtäläisten verkkojen ekvivalenssiluokkaa.



(a) Verkko G' (b) Verkko H

Kuva 2

1.2 Verkkoihin liittyviä käsitteitä

Tässä luvussa esitellään eräitä verkkoihin yleisesti liittyviä keskeisiä käsitteitä. Aloitetaan reunojen ja kärkipisteiden ominaisuuksista.

Määritelmä 1.7. *Silmukka* (loop) on reuna, jonka molemmat päätepisteet ovat samat.

Määritelmä 1.8. *Linkki* (link) on reuna, jonka molemmat päätepisteet ovat erit.

Verkon kaikki reunat ovat joko silmukoita tai linkkejä.

Määritelmä 1.9. Kärkipisteet ovat *vierekkäisiä* (adjacent), jos niitä liittää yhteinen reuna. Vastaavasti reunat ovat vierekkäisiä, jos niitä liittää yhteinen kärkipiste.

Määritellään seuraavaksi tämän tutkielman varsinaisen aiheen eli verkkojen reunaväritysten kannalta erittäin tärkeä käsite, aste, jonka merkitys tullaan huomaamaan luvusta 2.2 eteenpäin.

Määritelmä 1.10. Verkon G kärkipisteen v *aste* (degree) $d_G(v)$ (tai pelkästään $d(v)$ yleisessä/tietyn tunnetun verkon tapauksessa) on kyseiseen kärkipisteeseen liittyneiden reunojen lukumäärä silmukan vastatessa kahta reunaa. Suurinta kaikista verkon G kärkipisteiden asteista merkitään ΔG ja pienintä δG (yleisessä/tietyn tunnetun verkon tapauksessa vastaavasti Δ ja δ).

Verkon G kärkipisteiden lukumäärää merkitään $\nu(G)$ (yleisessä/tietyn tunnetun verkon tapauksessa vaihtoehtoisesti ν) ja reunojen lukumäärää $\varepsilon(G)$ (tai ε).

Lause 1.11. *Verkon G kaikkien kärkipisteiden asteiden summa on 2ε eli*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon.$$

Todistus. Tarkastellaan verkon G *esiintyvyysmatriisia* (incidence matrix)

$$\mathbf{M}(G) = [m_{ij}],$$

joka on $\nu \times \varepsilon$ -matriisi, missä m_{ij} on kärkipisteen v_i ja reunan e_j yhteenliittymisten lukumäärä (0, 1 tai 2). Kärkipistettä v vastaavalla rivillä kaikkien alkioiden summa on $d_G(v)$ (rivi kertoo, kuinka monta kertaa kukin reuna on liittynyt pisteeseen v), jolloin verkon kaikkien kärkipisteiden asteiden summa $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ on kaikkien matriisin $\mathbf{M}$ alkioiden summa. Toisaalta tämä summa on 2ε, sillä esiintyvysmatriisissa on ε saraketta ja jokaisen sarakkeen alkioiden summa on 2 (sarake vastaa reunaa, jolla on aina 2 päätepistettä). $\square$

Esimerkki 1.12. Kuvan 1 verkon G reuna e_1 on silmukka ja reunat e_2, e_3 sekä e_4 ovat linkkejä. Esimerkiksi kärkipisteet v_1 ja v_2 sekä reunat e_2 ja e_3 ovat vierekkäisiä. Lisäksi $\nu(G) = \varepsilon(G) = 4$, $d_G(v_1) = 4$, $d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$, $d_G(v_4) = 0$, $\Delta G = 4$ ja $\delta G = 0$.

Seuraavat, toistensa päälle rakentuvat käsitteet luovat pohjan verkkojen väritykseen liittyville todistuksille.

Määritelmä 1.13. *Kävely* (walk) verkossa G on äärellinen, epätyhjä jono $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$, jonka jäsenet ovat vuorotellen kärkipisteitä ja reunoja siten, että jokaiselle $1 \leq i \leq k$, reunan e_i päät ovat v_{i-1} ja v_i eli reuna e_i liittää kärkipisteet v_{i-1} ja v_i. Tällöin sanotaan, että W on kävely alkupisteestä v_0 päätepisteeseen v_k tai (v_0, v_k)-kävely. Pisteitä $v_1, v_2, \dots v_{k-1}$ kutsutaan *sisäpisteiksi* (internal vertices), ja kokonaisluku k on kävelyn *pituus* (length).

Määritelmä 1.14. Kävely on *suljettu* (closed), jos sen pituus on positiivinen ja alku- sekä päätepisteet samat.

Määritelmä 1.15. Jos kävelyn W reunat $e_1, e_2, \dots e_k$ ovat erilliset, kutsutaan kävelyä W *poluksi* (trail).

Määritelmä 1.16. Suljettu polku, jonka alkupiste ja sisäpisteet ovat erillisiä, on *kierto* (cycle). Kiertoa, jonka pituus on k kutsutaan k-kierroksi; kierto on *pariton* (odd), jos k on pariton ja *parillinen* (even), jos k on parillinen.

Määritelmä 1.17. Jos polun W kärkipisteet $v_0, v_1, \dots v_k$ ovat erilliset, kutsutaan polkua W *reitiksi* (path).

Määritelmä 1.18. Kaksi verkon G kärkipistettä u ja v ovat *yhdistettyjä* (connected), jos verkossa on olemassa (u,v)-reitti.

Määritelmä 1.19. Verkko H on verkon G *aliverkko* (subgraph) eli $H \subseteq G$, jos $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ ja ψ_H on funktion ψ_G rajoittuma joukolle $E(H)$.

Määritelmä 1.20. Jos V' on joukon $V(G)$ epätyhjä osajoukko, niin verkon G aliverkkoa, jonka kärkipisteiden joukko on V' ja jonka reunojen joukko koostuu niistä verkon G reunoista, joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa V', kutsutaan verkon G joukon V' *indusoimaksi* (induced) aliverkoksi ja merkitään $G[V']$. Sanotaan, että kyseessä on verkon G *indusoitu aliverkko* (induced subgraph).

Verkon G kärkipisteiden joukko V voidaan jakaa epätyhjiin osajoukkoihin $V_1, V_2, \ldots V_\omega$, missä kärkipisteet u ja v ovat yhdistettyjä jos ja vain jos ne kuuluvat samaan joukkoon V_i.

Määritelmä 1.21. Verkon G aliverkkoja $G[V_1], G[V_2], \ldots G[V_\omega]$ kutsutaan verkon G. *komponenteiksi.*

Määritelmä 1.22. Verkko on *yhdistetty* (connected), jos se sisältää vain yhden komponentin. Muuten verkko on *irrallinen* (disconnected).

Yhdistetyn verkon kaikki kärkipisteet ovat siis keskenään yhdistettyjä.

1.3 Erilaisia verkkoja

Ennen verkkojen reunaväritykseen siirtymistä on tärkeää määritellä erilaisia verkkoja. Jatkossa tullaan tarkastelemaan erityisesti silmukattomia sekä kaksijakoisia verkkoja.

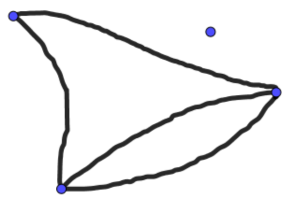
Määritelmä 1.23. Verkko on *äärellinen* (finite), jos sekä sen kärkipisteiden että reunojen joukot ovat äärellisiä.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan pelkästään äärellisiä verkkoja.

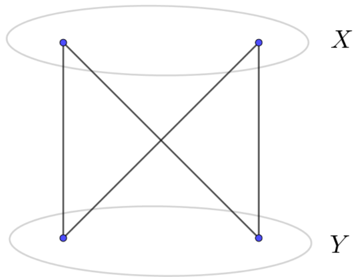
Määritelmä 1.24. *Triviaali* (trivial) verkko sisältää ainoastaan yhden kärkipisteen (kaikki muut verkot ovat *epätriviaaleja* (nontrivial)).

Määritelmä 1.25. *Tyhjä* (empty) verkko ei sisällä ollenkaan reunoja eli $E(G) = \emptyset$.

Huomautus 1.26. Verkko sisältää kuitenkin aina vähintään yhden kärkipisteen, jolloin aina $V(G) \neq \emptyset$.



(a) Verkko J



(b) Verkko K

Kuva 3

Määritelmä 1.27. Verkko on *silmukaton* (loopless), jos se ei sisällä yhtään silmukkaa.

Määritelmä 1.28. Verkko on *yksinkertainen* (simple), jos se on silmukaton eikä ole olemassa kahta reunaa, jotka liittäisivät samoja kärkipisteitä.

Toisin sanoen verkko on yksinkertainen, jos se on silmukaton ja kaikkia kärkipistepareja liittää enintään yksi reuna.

Määritelmä 1.29. Verkko on *kaksijakoinen* (bipartite), jos sen kärkipisteet voidaan jakaa kahteen joukkoon X ja Y siten, että jokaisella reunalla on yksi pää joukossa X ja toinen pää joukossa Y.

Lause 1.30. *Verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos se ei sisällä paritonta kiertoa.*

Todistus. Sivuutetaan tässä yhteydessä todistuksen pituuden vuoksi. Katso [1, Theorem 1.2]. □

Esimerkki 1.31. Kuvien 3a ja 3b verkot J ja K ovat molemmat äärellisiä, epätriviaaleja, epätyhjiä sekä silmukattomia. Lisäksi verkko K on yksinkertainen ja kaksijakoinen jaolla (X, Y). Verkko J taas ei ole yksinkertainen, sillä on olemassa kaksi kärkipistettä, joita liittää kaksi reunaa, eikä myöskään kaksijakoinen, sillä se sisältää parittoman kierron (lause 1.30).

2 Verkkojen reunaväritykset

2.1 Peruskäsitteitä

Määritellään ensin, mitä reunaväritys ylipäätään tarkoittaa.

Määritelmä 2.1. Kun silmukattoman verkon G jokaiselle reunalle määrätään yksi väreistä $1, 2, \ldots k$, saadaan aikaan verkon G *k-reunaväritys* (k-edge colouring) $\mathcal{C}$.

Vastaava voidaan tehdä minkä tahansa verkon kärkipisteille, jolloin puhutaan verkon *k-kärkipistevärityksestä* (k-vertex colouring). Tässä tutkielmassa värityksellä tarkoitetaan kuitenkin reunaväritystä, ellei toisin täsmennetä.

Huomautus 2.2. Väritys voidaan ajatella joukon E jakona $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$, jossa jokainen osajoukko E_i, $i = 1, 2, \ldots k$ koostuu kaikista niistä reunoista, jotka on väritetty värillä i. Huomioitavaa on, että joukko E_i voi myös olla tyhjä eli kaikkia käytössä olevia värejä ei ole pakko käyttää.

Verkon graafisessa esityksessä värityksen voi ajatella konkreettisesti eli valita kirjaimellisesti k kappaletta värejä ja värittää kaikki joukon E_i reunat samalla värillä.

Määritelmä 2.3. Väritys on *aito* (proper), jos kaikki vierekkäiset reunat ovat keskenään erivärisiä.

Määritelmä 2.4. Verkko on *k-reunaväritettävä* (k-edge-colourable), jos sillä on olemassa aito k-reunaväritys.

Huomautus 2.5. Termi *k-reunaväritys* ei pidä sisällään oletusta värityksen aitoudesta, mutta termi *k-reunaväritettävä* pitää.

Esimerkiksi jokainen silmukaton verkko on ε-reunaväritettävä, sillä valitsemalla jokaiselle reunalle (yhteensä ε kappaletta) oma värinsä, ovat erityisesti kaikki vierekkäiset reunat eri värisiä ja tällöin kyseessä on aito väritys. Lisäksi, jos verkko on k-reunaväritettävä, niin se on myös l-reunaväritettävä kaikille kokonaisluvuille $l > k$, sillä kaikkia värejä ei ole pakko käyttää väritykseen (huomautukseen 2.2 pohjautuen voidaan esimerkiksi sanoa, että $E_i = \emptyset$, kun $k < i \leq l$).

2.2 Reunakromaattinen luku ja sen määrittäminen

Määritellään seuraavaksi kenties kaikista olennaisin käsite väritysten ja niiden sovellusten kannalta.

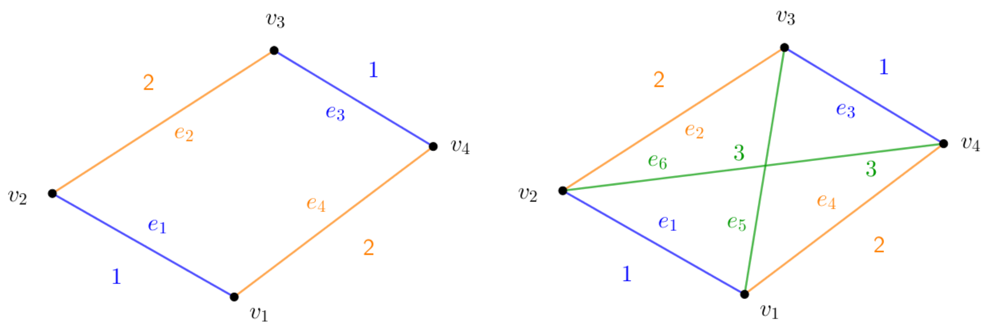
Määritelmä 2.6. Verkon G *reunakromaattinen luku* (edge chromatic number) $\chi'(G)$ (tai χ' yleisessä/tietyn tunnetun verkon tapauksessa) on pienin k, jolle verkko on k-reunaväritettävä. Jos $\chi'(G) = k$, sanotaan, että verkko on *k-reunakromaattinen* (k-edge-chromatic).

Reunakromaattisen luvun eli aitoon väritykseen vaadittavien värien minimilukumäärän määritys erilaisille verkoille on kenties verkkojen värityksen keskeisin ongelma.

Esimerkki 2.7. Kuvassa 4a on yksi mahdollinen verkon L 2-reunaväritys. Väritys on aito, sillä kaikki vierekkäiset reunat on väritetty eri väreillä. Tällöin siis L on 2-reunaväritettävä.

Itse asiassa $\chi'(L) = 2$, joten verkko on 2-reunakromaattinen. Tämä voidaan todeta seuraavasti: Väritetään ensin reuna e_1 värillä 1 (sininen). Tällöin aitouden pysymiseksi on viereiset reunat e_2 ja e_4 väritettävä jollain toisella värillä eli tässä tapauksessa värillä 2 (oranssi). Jäljelle jäävä reuna e_3 ei ole vierekkäinen reunan e_1 kanssa, jolloin myös se voidaan värittää värillä 1.

Muodostetaan verkko L' lisäämällä verkkoon L reunat e_5 ja e_6 siten, että $\psi_{L'}(e_5) = v_1v_3$ ja $\psi_{L'}(e_6) = v_2v_4$ (kuva 4b). Tällöin havaitaan, että jokaisen kärkipisteen aste on 3 eli jokaiseen kärkipisteeseen on liittynyt 3 reunaa, joiden on oltava aitouden säilymiseksi erivärisiä. Verkko L' ei siis ole 2-reunakromaattinen ja aitoon väritykseen tarvitaan lisäksi ainakin väri 3 (vihreä). Koska kuvassa 4b näkyvä 3 värin väritys on aito (huomaa, että reunojen e_5 ja e_6 leikkauspisteessä ei ole kärkipistettä), on $\chi'(L') = 3$ eli verkko L' on 3-reunakromaattinen.



(a) Verkko L (b) Verkko L'

Kuva 4

Kromaattisen luvun määrittäminen [kärkipisteväritykissä] on yleisesti vaikeaa. Pienille tai tunnetuille verkoille se voi olla melko helppoa, mutta mahdollisuuksien määrä suurilla verkoilla tekee kromaattisten lukujen arvioinnista vaikeaa. Siksi usein nojataankin rajoihin, jotta saadaan jonkinlainen idea kromaattisesta luvusta. [2]

Reuna- ja kärkipistevääritykset ovat luonteeltaan hyvin samankaltaisia, joten edellä mainittu pätee uskoakseni myös reunaväritykselle. Ensimmäinen raja reunakromaattiselle luvulle saadaan yleistämällä esimerkissä 2.7 esiin otettua asteiden ja värien määrän yhteyttä: Missä tahansa aidossa värityksessä vierekkäisten reunojen on oltava erivärisiä. Värejä on siis oltava vähintään yhtä monta kuin yhteen kärkipisteeseen liittyneitä reunoja on enintään. Tämä alaraja voidaan ilmaista muodossa

$$\chi' \geq \Delta, \tag{1}$$

missä Δ on määritelmän 1.10 mukaisesti suurin kaikista käsiteltävän verkon kärkipisteiden asteista.

Kaksijakoisille verkoille saadaan tiukempi tulos $\chi' = \Delta$, ja seuraava lemma toimii pohjana tämän tuloksen todistukselle. Määritellään ennen varsinaista lemmaa muutama tarpeellinen käsite sekä yksi lause.

Määritelmä 2.8. Väri i *esiintyy* (is represented) kärkipisteessä v, jos jonkin tähän kärkipisteeseen liittyneen reunan väri on i.

Määritelmä 2.9. Polkua, joka sisältää verkon G jokaisen reunan, kutsutaan verkon G *Eulerin poluksi* (Euler trail).

Määritelmä 2.10. Verkon G *kierros* (tour) on suljettu kävely, joka pitää sisällään verkon G jokaisen reunan vähintään kerran.

Määritelmä 2.11. *Eulerin kierros* (Euler tour) on kierros, joka sisältää verkon G jokaisen reunan täsmälleen kerran. Eulerin kierros on siis suljettu Eulerin polku.

Määritelmä 2.12. Verkko on *eulerinen*, jos se sisältää Eulerin kierroksen.

Lause 2.13. *Epätyhjä yhdistetty verkko on eulerinen jos ja vain jos sillä ei ole parittoman asteen omaavia kärkipisteitä.*

Todistus. Sivuutetaan tässä yhteydessä todistuksen pituuden ja aiheen vuoksi (liittyy enemmän Eulerin kierroksiin kuin verkkojen reunaväritykseen). Katso [1, Theorem 4.1.]. □

Lemma 2.14. *Olkoon G yhdistetty verkko, joka ei ole pariton kierto. Tällöin verkolla G on olemassa 2-reunaväritys, jossa molemmat värit esiintyvät jokaisessa kärkipisteessä, jonka aste on vähintään 2.*

Todistus. Käsitellään todistus useammassa osassa.

1. Jos verkko G on triviaali eli sisältää ainoastaan yhden kärkipisteen, ei siinä ole ollenkaan reunoja. Triviaali verkko on yhdistetty, sillä se koostuu ainoastaan yhdestä komponentista eikä kyseessä ole pariton kierto,

sillä tulkittaessa triviaali verkko poluksi sen pituus on 0 (kierron eli suljetun polun eräänä ehtona on positiivinen pituus). Triviaali verkko toteuttaa siis lemman ehdot ja lemma on tosi triviaalille verkolle, sillä väreille 1 ja 2 voidaan määrittää 2-reunaväritys (E_1, E_2), jossa huomautuksen 2.2 merkintöjä käyttäen $E_1 = E_2 = \emptyset$, ja triviaalin verkon ainoan kärkipisteen aste $d_G = 0$.

2. Jos verkko G on epätriviaali, voidaan käsitellä kahta tapausta:

   a) Oletetaan ensin, että G on eulerinen. Jos G on parillinen kierto, sisältää se parillisen määrän reunoja. Tällöin vierekkäiset reunat voidaan värittää eri väreillä, jolloin saadaan lauseen ehdot täyttävät aito 2-reunaväritys. Jos G ei ole parillinen kierto, on sillä lauseen 2.13 nojalla vähintään astetta 4 oleva kärkipiste v_0 (epätyhjän, yhdistetyn ja eulerisen verkon jokaisen kärkipisteen aste on parillinen sekä vähintään 2 ja jos jokaisen kärkipisteen aste olisi 2, kyseessä olisi parillinen kierto). Olkoon $v_0 e_1 v_1 \ldots e_\varepsilon v_0$ Eulerin kierros verkossa G ja asetetaan

   $$E_1 = \{e_i \mid i \text{ on pariton}\} \text{ ja } E_2 = \{e_i \mid i \text{ on parillinen}\}. \qquad (2)$$

   Tällöin värityksellä (E_1, E_2) on vaadittava ominaisuus, sillä jokainen verkon G piste on osa kierrosta $v_0 e_1 v_1 \ldots e_\varepsilon v_0$ eli liittää kaksi peräkkäistä (ja täten eriväristä, sillä reunojen värit vuorottelevat) reunaa.

   b) Jos G ei ole eulerinen, muodostetaan uusi verkko G^* lisäämällä kärkipiste v_0 ja liittämällä se uudella reunalla jokaiseen parittoman asteen omaavaan verkon G kärkipisteeseen. Tällöin kaikkien verkon G kärkipisteiden asteet ovat parillisia verkossa G^* ja myös kärkipisteen v_0 aste on parillinen, sillä verkon kärkipisteiden asteiden summa on lauseen 1.11 nojalla aina parillinen 2ε, jolloin myös parittoman asteen omaavia kärkipisteitä on oltava parillinen määrä. Tällöin G^* on epätyhjä yhdistetty verkko, jonka jokaisen kärkipisteen aste on parillinen, joten lauseen 2.13 nojalla verkko G^* on eulerinen. Olkoon $v_0 e_1 v_1 \ldots e_{\varepsilon^*} v_0$ verkon G^* Eulerin kierto ja määritellään E_1 ja E_2 vastaavasti kuin rivillä (2). Tällöin 2-reunavärityksellä $(E_1 \cap E, E_2 \cap E)$ on lemman vaatima ominaisuus: Jokainen verkon G kärkipiste v_i on osa kierrosta $v_0 e_1 v_1 \ldots e_{\varepsilon^*} v_0$ eli liittää yhteen kaksi peräkkäistä ja siten eriväristä reunaa verkossa G^*. Jos lisäksi $d_G(v_i) \geq 2$, liittää kyseinen kärkipiste yhteen kaksi peräkkäistä joukon E eli verkon G reunaa jossain vaiheessa kierrosta (koska jokaisesta kärkipisteestä lähtee enintään 1 reuna verkon G ulkopuolelle pisteeseen v_0) ja tällöin peräkkäisten reunojen ollessa erivärisiä toteutuu vaadittava ominaisuus.

$\square$

Jos tarkastelussa on verkon G k-reunaväritys $\mathcal{C}$, käytetään merkintää $c(v)$ kuvaamaan niiden toisistaan eroavien värien lukumäärää, jotka esiintyvät kärkipisteessä v. Koska kärkipisteeseen liittyneiden reunojen lukumäärä silmukattomassa verkossa on kärkipisteen aste $d(v)$, niin

$$c(v) \leq d(v). \tag{3}$$

Edelleen $\mathcal{C}$ on aito k-reunaväritys jos ja vain jos yhtäsuuruus epäyhtälössä (3) pätee kaikille verkon G kärkipisteille v.

Määritelmä 2.15. Verkon G k-reunaväritystä $\mathcal{C}'$ kutsutaan *parannukseksi* värityksestä $\mathcal{C}$, jos

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v),$$

missä $c'(v)$ on niiden toisistaan eroavien värien lukumäärä värityksessä $\mathcal{C}'$, jotka esiintyvät pisteessä v. *Optimaalinen* (optimal) k-reunaväritys on sellainen, jota ei voida parantaa eli jolle ei ole olemassa parannusta.

Seuraava lemma hyödyntää todistuksessaan lemmaa 2.14 ja on seuraava askel kohti kaksijakoisten verkkojen tuloksen $\chi' = \Delta$ todistamista. Määritellään vielä yksi tärkeä käsite tätä varten (hyvin läheinen määritelmän 1.20 kanssa).

Määritelmä 2.16. Jos E' on epätyhjä joukon $E(G)$ osajoukko, niin verkon G aliverkkoa, jonka kärkipisteiden joukko koostuu joukon E' reunojen päätepisteistä ja jonka reunojen joukko on E', kutsutaan verkon G joukon E' indusoimaksi aliverkoksi ja merkitään $G[E']$. Kyseessä on verkon G *reunaindusoitu aliverkko* (edge-induced subgraph).

Lemma 2.17. *Olkoon $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$ verkon G optimaalinen k-reunaväritys. Jos on olemassa verkon G kärkipiste u ja värit i sekä j siten, että i ei esiinny pisteessä u ja j esiintyy pisteessä u vähintään kahdesti, niin aliverkon $G[E_i \cup E_j]$ pisteen u sisältävä komponentti on pariton kierto.*

Todistus. Olkoon u lemman ehdot täyttävä kärkipiste ja merkitään aliverkon $G[E_i \cup E_j]$ pisteen u sisältävää komponenttia kirjaimella H. Oletetaan vastoin väitettä, että H ei ole pariton kierto. Koska lisäksi määritelmän 1.22

nojalla yksittäinen komponentti H on yhdistetty, niin lemman 2.14 oletukset täyttyvät. Tällöin komponentilla H on olemassa 2-reunaväritys, jossa molemmat värit esiintyvät jokaisessa komponentin H kärkipisteessä, jonka aste on vähintään 2. Värittämällä komponentin H reunat uudelleen väreillä i ja j tämän värityksen mukaisesti saadaan uusi verkon G k-reunaväritys $\mathcal{C}' = (E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$. Väritys todella on uusi, sillä oletuksen nojalla värityksessä $\mathcal{C}$ väri i ei esiinny kärkipisteessä $u \in V(H)$, kun taas värityksessä $\mathcal{C}'$ molemmat värit esiintyvät, sillä pisteen u aste on vähintään 2, koska oletuksen nojalla väri j esiintyy pisteessä u vähintään kahdesti värityksessä $\mathcal{C}$.

Olkoon $c'(v)$ kärkipisteessä $v \in V(G)$ esiintyvien toisistaan eroavien värien lukumäärä värityksessä $\mathcal{C}'$. Tällöin

$$c'(u) = c(u) + 1, \tag{4}$$

sillä nyt myös väri i esiintyy pisteessä u, kuten edellä todettiin. Lisäksi

$$c'(v) \geq c(v) \quad \text{kaikille } v \neq u, \tag{5}$$

sillä aliverkon $G[E_i \cup E_j]$ komponentti H sisältää ainoastaan väreillä i ja j väritettyjä reunoja. Tällöin toisistaan eroavien värien määrä verkon G kärkipisteissä ei voi pienentyä, sillä värityksessä $\mathcal{C}'$ molemmat värit esiintyvät kaikissa komponentin H kärkipisteissä, joiden aste on vähintään 2 ja väritys $\mathcal{C}'$ eroaa värityksestä $\mathcal{C}$ ainoastaan tässä komponentissa.

Yhtälöiden (4) ja (5) nojalla

$$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v),$$

eli väritys $\mathcal{C}'$ on parannus värityksestä $\mathcal{C}$, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $\mathcal{C}$ on optimaalinen k-reunaväritys. Tällöin H on siis pariton kierto. □

Lemman 2.17 avulla voidaan vihdoin osoittaa lause kaksijakoisen verkon reunakromaattiselle luvulle.

Lause 2.18. *Jos verkko G on kaksijakoinen, niin $\chi' = \Delta$.*

Todistus. Todistetaan lause vastaoletuksella $\chi' > \Delta$, sillä sivulla 11 esiintyvän epäyhtälön (1) mukaisesti aina $\chi' \geq \Delta$:
Olkoon G verkko, jolle $\chi' > \Delta$, $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \ldots, E_\Delta)$ on verkon G optimaalinen Δ-reunaväritys ja u verkon G kärkipiste, jolle $c(u) < d_G(u)$. Kärkipiste u on todella olemassa, sillä väritys $\mathcal{C}$ ei voi olla aito (värejä on aidosti vähemmän kuin aitoon väritykseen vaadittava minimimäärä χ') ja se toteuttaa

lemman 2.17 ehdot, sillä $c(u) < d_G(u)$ eli jonkin värin on esiinnyttävä pisteessä u vähintään kahdesti ja toisaalta värien määrä $\Delta \geq d_G(u)$ eli on olemassa väri, joka ei esiinny pisteessä u. Tällöin verkko G sisältää parittoman kierron eikä tällöin lauseen 1.30 nojalla voi olla kaksijakoinen. Ollaan siis saavuttu ristiriitaan, jolloin kaksijakoiselle verkolle $\chi' = \Delta$. □

Määritetään vielä kolmas tärkeä raja reunakromaattiselle luvulle sivulla 11 esiintyvän epäyhtälön (1) ja lauseen 2.18 lisäksi.

Lause 2.19 (Vizingin lause). *Jos G on yksinkertainen verkko, niin $\chi' = \Delta$ tai $\chi' = \Delta + 1$.*

Todistus. Sivuutetaan tässä yhteydessä todistuksen pituuden ja tuloksen roolin vuoksi (lauseen tulosta ei tarvita tutkielmassa). Katso [1, Theorem 6.2.]. □

Yleisempi muoto Vizingin lauseelle koskee silmukattomia verkkoja: jos G on silmukaton verkko, niin $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$, missä μ on suurin määrä reunoja kahden kärkipisteen välillä (yksinkertaisille verkoille $\mu = 1$).

2.3 Lukujärjestysongelma

Eräs verkkojen reunavärityksen sovelluskohde, *lukujärjestysongelma*, kuuluu seuraavasti:

Koulussa on m opettajaa

$$x_1, x_2 \ldots, x_m$$

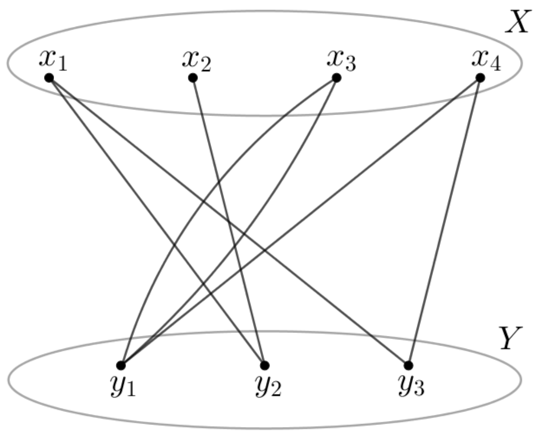
ja n oppilasryhmää eli luokkaa

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Jos opettajan x_i on opetettava luokkaa y_j yhteensä p_{ij} tuntia, niin kuinka monta tuntia lukujärjestyksessä on vähintään oltava?

Ongelma voidaan ratkaista muodostamalla kaksijakoinen verkko jaolla (X, Y), missä joukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ muodostuu kaikista opettajista ($|X| = m$) ja joukko $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ kaikista luokista ($|Y| = n$). Tässä verkossa opetusvelvollisuutta kuvaava tuntimäärä p_{ij} on kärkipisteitä x_i ja y_j liittävien reunojen lukumäärä (esimerkkinä kuva 5)

Tilannetta voidaan kuvata helposti käyttämällä sovituksen käsitettä.



Kuva 5

Määritelmä 2.20. Verkon G reunojen joukon E osajoukko M on *sovitus* (matching), jos kaikki sen alkiot ovat linkkejä eivätkä mitkään kaksi alkiota ole vierekkäisiä verkossa G. Kaksi sovitusta ovat *erillisiä* (disjoint), jos niillä ei ole yhteisiä alkioita.

Jos oletuksena on, että jokainen opettaja voi opettaa enintään yhtä luokkaa tunnissa ja toisaalta jokaista luokkaa voi opettaa enintään yksi opettaja kerrallaan, niin jokainen tutkittavan kaksijakoisen verkon sovitus edustaa yhden tunnin aikana tapahtuvaa opetusta (sovituksessa reunat eivät voi olla vierekkäisiä, joten jokaiseen pisteeseen x_i ja y_j on liittynyt enintään yksi reuna per sovitus) ja toisaalta jokaista mahdollista tietyn tunnin opetusjärjestelyä vastaa jokin sovitus.

Lukujärjestykseen tarvittavien tuntien määrän minimoiminen vastaa siis sovitusten määrän minimoimista siten, että jokainen verkon reuna kuuluu johonkin sovitukseen tai vaihtoehtoisesti aitoon reunaväritykseen vaadittavien värien määrän minimoimista eli reunakromaattisen luvun määrittämistä (määritetään jokaista sovitusta vastaamaan jokin väri). Lauseen 2.18 perusteella kaksijakoiselle verkolle $\chi' = \Delta$. Jos siis p on suurin kaikista opettajien ja luokkien tuntimääristä, niin $\Delta = p$ ja annettujen oletusten valossa kaikkien opetusvelvollisuuksien suorittamiseen riittää p tuntia. Tämä on siis minimimäärä tunteja, joka lukujärjestyksessä on oltava.

Tilanne muuttuu kuitenkin monimutkaisemmaksi, jos lisätään seuraava rajoittava oletus: luokkatilojen rajallinen määrä. Paljonko tunteja lukujärjestyksessä on tällöin vähintään oltava? Entä montako luokkatilaa vähintään/enintään tarvitaan, jos lukujärjestyksessä on p tuntia?

Oletetaan, että pidettävien oppituntien yhteismäärä on

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = l$$

ja nämä oppitunnit on ajoitettu p tuntia sisältävään lukujärjestykseen. Tällöin jokaisen tunnin aikana pidetään keskimäärin l/p oppituntia, joten on selvää, että vähintään $\{l/p\}$ luokkatilaa on oltava käytössä tuntia kohti (tässä merkintä $\{l/p\}$ tarkoittaa pienintä kokonaislukua a, jolle $a \geq l/p$). Lause 2.22 tulee osoittamaan, että l oppituntia voidaan aina järjestää p tuntia sisältävään lukujärjestykseen siten, että jokaisella ajanhetkellä tarvitaan enintään $\{l/p\}$ luokkatilaa. Kyseisen lauseen todistamisessa käytetään seuraavaa lemmaa:

Lemma 2.21. *Olkoot M ja N verkon G erillisiä sovituksia, joille pätee $|M| > |N|$. Tällöin on olemassa erilliset sovitukset M' ja N' siten, että $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$ ja $M' \cup N' = M \cup N$.*

Todistus. Tarkastellaan verkkoa $H = G[M \cup N]$. Koska sovituksen reunat eivät voi olla vierekkäisiä ja sovitukset M sekä N ovat erillisiä (eli eivät sisällä samoja reunoja), on verkon H jokaisen komponentin oltava joko parillinen kierto, jonka reunat ovat vuorotellen sovitusten M ja N reunoja, tai reitti, jonka reunat ovat vuorotellen sovitusten M ja N reunoja.

Koska $|M| > |N|$, niin on olemassa jokin verkon H reittikomponentti P, jonka ensimmäisen ja viimeisen reunan on kuuluttava sovitukseen M. Olkoon $P = v_0 e_1 \dots e_{2n+1} v_{2n+1}$ ja määritellään

$$M' = (M \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}\}) \cup \{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\} \text{ sekä}$$

$$N' = (N \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\}) \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}\}.$$

Käytännössä sovitukset M' ja N' saadaan siis vaihtamalla jokainen reittikomponentin P reuna sovituksesta toiseen ja pitämällä verkon H muut komponentit ennallaan.

Perustellaan vielä, että M' ja N' ovat verkon G erillisiä sovituksia, jotka toteuttavat lemman ehdot: Reittikomponentti P on erillinen kaikista muista verkon H komponenteista, joten sen tarkastelu riittää. Joukot M' ja N' ovat edelleen sovituksia, sillä niiden reunat ovat linkkejä eivätkä joukot sisällä vierekkäisiä reunoja (reittikomponentin P reunat vuorottelevat edelleen sovitusten välillä), sovitukset ovat erillisiä (eli eivät sisällä samoja reunoja) ja $M' \cup N' = M \cup N$, sillä reunojen vaihtaminen ei vaikuta reittikomponentin rakenteeseen. Koska

$$|\{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}\}| = |\{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\}| + 1,$$

niin reunojen vaihtaminen sovitusten välillä muuttaa sovitusten kertalukuja yhdellä eli $|M'| = |M| - 1$ ja $|N'| = |N| + 1$. □

Ennen seuraavaa, tärkeää lausetta, johon viitattiin ennen lemmaa 2.21, mainittakoon vielä, että merkintä $[\varepsilon/p]$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua b, jolle $b \leq \varepsilon/p$.

Lause 2.22. *Jos G on kaksijakoinen verkko ja jos $p \geq \Delta$, niin on olemassa p erillistä verkon G sovitusta $M_1, M_2, \ldots, M_p$ siten, että*

$$E = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p \tag{6}$$

ja jokaiselle $1 \leq i \leq p$

$$[\varepsilon/p] \leq |M_i| \leq \{\varepsilon/p\} \tag{7}$$

(eli kaikkien sovitusten kertaluvut eroavat toisistaan enintään yhdellä).

Todistus. Olkoon G kaksijakoinen verkko, jolloin lauseen 2.18 nojalla sen reunakromaattinen luku on $\chi' = \Delta$. Tällöin verkolla on olemassa aito Δ-reunaväritys ja siten jako sovituksiin $M'_1, M'_2, \ldots, M'_\Delta$, missä jokaista väriä vastaa sovitus (yhteensä Δ sovitusta). Tällöin kaikille $p \geq \Delta$ on olemassa p erillistä sovitusta $M'_1, M'_2, \ldots, M'_p$ ($M'_i = \emptyset$, kun $i > \Delta$) siten, että

$$E = M'_1 \cup M'_2 \cup \ldots \cup M'_p.$$

Toistamalla lemmassa 2.21 esitettyä prosessia aina kahteen edellä mainituista sovituksista kerrallaan, saadaan lopulta jokainen mahdollinen sovituspari ja tällöin myös kaikki sovitukset keskenään kertaluvuiltaan enintään yhden päähän toisistaan ja täten kertalukujen keskiarvosta. Näin aikaansaadut p kappaletta erillisiä sovituksia $M_1, M_2, \ldots, M_p$ toteuttavat lemman 2.21 nojalla ehdon (6) ja lisäksi ehdon (7), sillä kertalukujen keskiarvo on

$$\frac{|M_1| + |M_2| + \ldots + |M_p|}{p} = \frac{\varepsilon}{p}.$$

□

Lauseen 2.22 avulla voidaan lukujärjestysongelma ratkaista myös luokkatilarajoituksen valossa.

Esimerkki 2.23. Hökkelinmeren epänormaalikoulussa on 6 luokkaa, mutta epäonnisten sattumusten sarjan vuoksi vain 5 opettajaa. Opettajien opetusvelvollisuudet maanantaille löytyvät matriisista (taulukko 1), missä paikan ij alkio on se tuntimäärä, mikä opettajan x_i täytyy opettaa luokkaa y_j.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	2	0	0	2	2	1
x_2	0	1	2	1	0	1
x_3	0	1	2	0	0	2
x_4	1	1	0	2	2	1
x_5	1	1	1	0	2	1

Taulukko 1: Opetusvelvollisuusmatriisi.

a) Epänormaalikoulussa jokaisella opettajalla on oma luokkatilansa. Mikä on tällöin minimimäärä tunteja, joka lukujärjestyksessä on oltava? Muodosta eräs tällainen lukujärjestys opettajien näkökulmasta.

b) Rahanahne rehtori haluaa tehdä pientä sivubisnestä vuokraamalla koulun tiloja paikalliselle eläkeläisten matematiikkaklubille. Rehtori väittää seuraavaa: "Jos lukujärjestykseen lisätään vain yksi tunti, saadaan yksi luokkatila vapaaksi koko päivän ajaksi". Onko hän oikeassa? Jos on, niin muodosta uusi lukujärjestys, jossa yhtä aikaa käytössä olevien luokkatilojen enimmäismäärä on pienempi kuin kohdassa a).

c) Rehtori jatkaa: "Jos sitä vielä yhden luokkatilan vuokraisi eteenpäin [kohdassa b) saadusta määrästä] koko maanantaiksi, niin ei kai se lukujärjestyksen tuntimääräkään kasvaisi kuin yhdellä."Onko rehtori oikeassa?

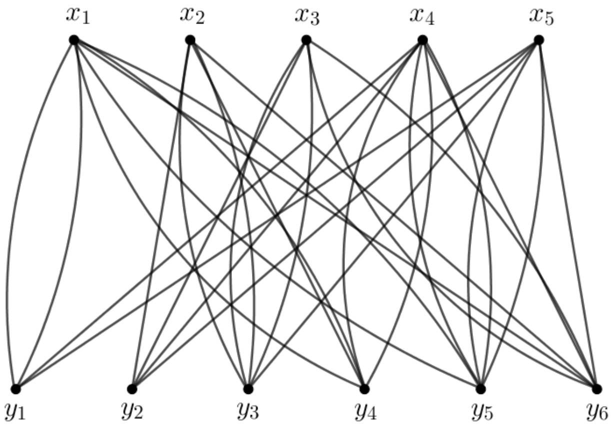
Ratkaisu:

a) Muodostetaan kaksijakoinen verkko jaolla (X, Y), missä opettajien joukko $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, luokkien joukko $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ ja kärkipisteet liittyvät toisiinsa tehtävänannon matriisin kuvaamalla tavalla (kuva 6). Pidettävien oppituntien eli verkon reunojen lukumäärä on $\varepsilon = 30$. Koska jokaisella opettajalla on oma luokkatilansa, ei luokkatilarajoitusta ole. Tällöin lukujärjestyksen tuntien minimimäärä on

$$p = \chi' = \Delta = d(x_1) = d(x_4) = 7.$$

Määritetään verkon eräs aito 7-reunaväritys seuraavasti:

- Lähdetään liikkeelle suurimman asteen omaavasta kärkipisteestä ja väritetään jokainen siihen liittynyt reuna eri värillä. Tässä tapauksessa suurin aste on pisteillä x_1 ja x_4, joista valitaan x_1.

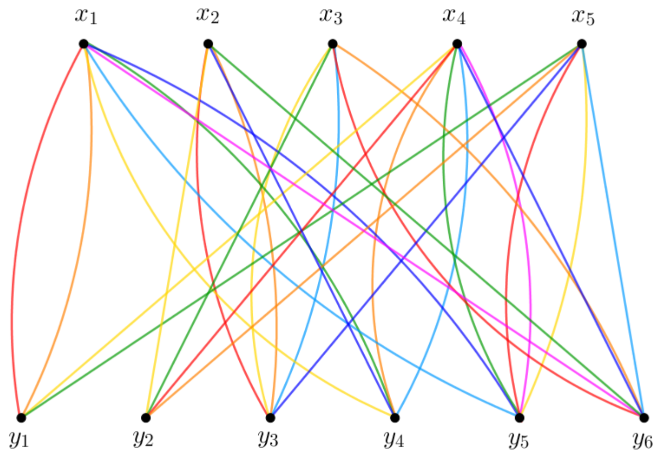


Kuva 6: Kaksijakoinen verkko opetusvelvollisuuksista.

- Väritetään ensin pisteeseen y_1 liittyneet reunat väreillä 1 (punainen) ja 2 (oranssi), sitten pisteeseen y_4 liittyneet reunat väreillä 3 (kulta) ja 4 (vihreä) (pisteisiin y_2 ja y_3 ei ole liittynyt ollenkaan reunoja kärkipisteestä x_4), tämän jälkeen pisteeseen y_5 liittyneet reunat väreillä 5 (vaaleansininen) ja 6 (tummansininen) ja vielä pisteeseen y_6 liittynyt reuna värillä 7 (pinkki).
- Koska suurimman asteen omaava(t) piste(et) ovat joukossa X, jatketaan seuraavaksi toiseksi suurimman asteen omaavaan pisteeseen tässä joukossa (x_4) ja väritetään jälleen siihen liittyneet reunat järjestyksessä $y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4 \to y_5 \to y_6$ käyttäen aina sitä vapaana olevaa eli aitouden säilyttävää väriä, jonka numero on pienin.
- Käydään läpi loputkin joukon X pisteet laskevan asteen mukaisessa järjestyksessä vastaavalla tavalla.
- Jos havaitaan, että ollaan päädytty umpikujaan eikä vapaita värejä ole, kumotaan tarvittava määrä vaiheita ja tehdään toinen valinta heti kun se on mahdollista (valitaan pienimmän vapaan värin sijaan seuraavaksi pienin vapaa väri).

Edellä kuvatulla menetelmällä saadaan aikaan kuvan 7 mukainen väritys $\mathcal{C}_1$, jota vastaa opettajien näkökulmasta kirjoitettu lukujärjestys (taulukko 2).

b) Jos opetusvelvollisuudet eivät muutu eli pidettävien oppituntien yhteismäärä on edelleen $\varepsilon = 30$ ja myös lukujärjestyksen tuntien määrä on



Kuva 7: Väritys $\mathcal{C}_1$

	tunti						
	1	2	3	4	5	6	7
x_1	y_1	y_1	y_4	y_4	y_5	y_5	y_6
x_2	y_3	y_3	y_2	y_6	-	y_4	-
x_3	y_6	y_6	y_3	y_2	y_3	-	-
x_4	y_2	y_4	y_1	y_5	y_4	y_6	y_5
x_5	y_5	y_2	y_5	y_1	y_6	y_3	-

Taulukko 2: Eräs mahdollinen 7 tunnin lukujärjestys.

edelleen $p = 7$, niin lauseen 2.22 nojalla 7 tunnin lukujärjestys voidaan järjestää siten, että jokaisen tunnin aikana tarvitaan joko $[30/7] = 4$ tai $\{30/7\} = 5$ luokkaa.

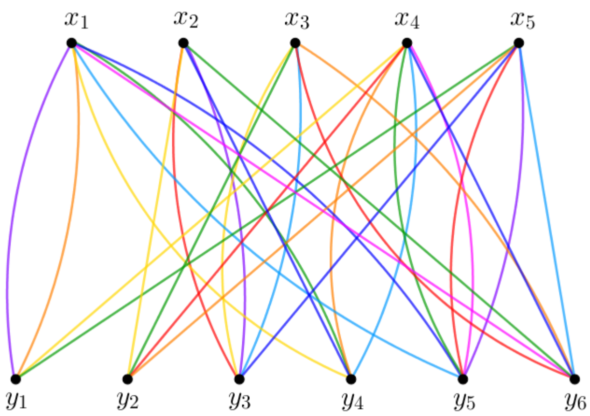
Jos lukujärjestyksen tuntien määrä kasvatetaan arvoon $p = 8$, voidaan lukujärjestys järjestää siten, että jokaisen tunnin aikana tarvitaan joko $[30/8] = 3$ tai $\{30/7\} = 4$ luokkaa. Yksi luokkatila saadaan siis vapaaksi koko päivän ajaksi eli rehtori on oikeassa.

Otetaan mukaan väri 8 (violetti). Tulkitaan värityksen

$$\mathcal{C}_2 = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8),$$

missä $E_8 = \emptyset$, joukot erillisiksi sovituksiksi. Tällöin voidaan soveltaa lemmassa 2.21 esitettyä prosessia aina kahteen sovitukseen kerrallaan eli käytännössä vaihtaa tietyn reittikomponentin reunojen värit päinvastaisiksi. Vaihdetaan ensin reuna x_1y_1 punaisesta violetiksi, reuna

x_2y_3 oranssista violetiksi ja reuna x_5y_5 kultaisesta violetiksi. Tällöin saadaan aikaan väritys $\mathcal{C}_3$ (kuva 8) ja tätä vastaava lukujärjestys (taulukko 3), josta havaitaan, että tunnin 4 (vihreä) aikana tarvitaan vielä 5 luokkatilaa eli $|E_4| = 5$ ja tunnin 7 (pinkki) aikana vain kahta eli $|E_7| = 2$. Aliverkko $G[E_4 \cup E_7]$ koostuu neljästä komponentista (kuva 9a), joista yksi on reitti $y_4x_1y_6x_2$. Vaihtamalla nyt reunat y_4x_1 ja y_6x_2 pinkeiksi ja reuna x_1y_6 vihreäksi saadaan aikaan uudet joukot E_4' ja E_7', joille $|E_4'| = 4$ ja $|E_7'| = 3$ (kuva 9b), väritys $\mathcal{C}_4$ (kuva 10) sekä taulukon 4 mukainen lukujärjestys, jossa tarvitaan enintään neljää luokkatilaa per tunti.

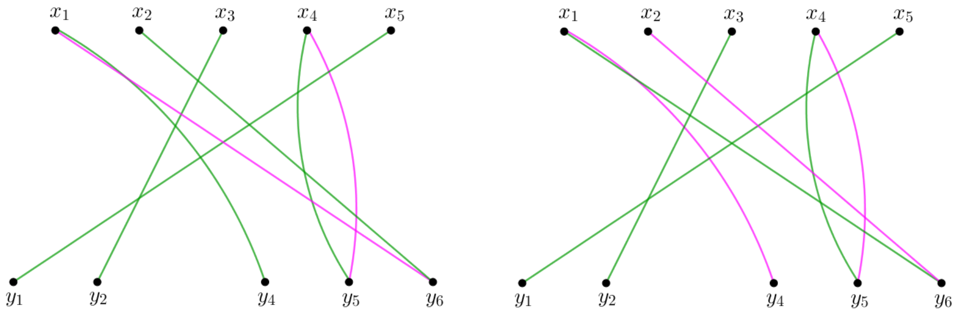


Kuva 8: Väritys $\mathcal{C}_3$

	tunti							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	-	y_1	y_4	y_4	y_5	y_5	y_6	y_1
x_2	y_3	-	y_2	y_6	-	y_4	-	y_3
x_3	y_6	y_6	y_3	y_2	y_3	-	-	-
x_4	y_2	y_4	y_1	y_5	y_4	y_6	y_5	-
x_5	y_5	y_2	-	y_1	y_6	y_3	-	y_5

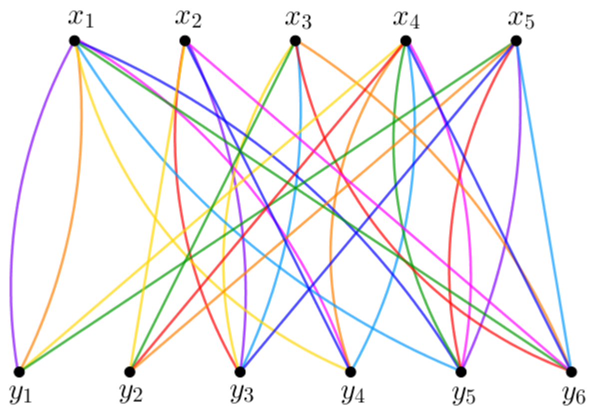
Taulukko 3: Eräs mahdollinen 8 tunnin lukujärjestys.

c) Jos opetusvelvollisuudet pysyvät edelleen samoina eli $\varepsilon = 30$, mutta halutaan, että käytössä on yhtä aikaa enintään $\{\varepsilon/p\} = 3$ luokkatilaa, täytyy lukujärjestyksen tuntimäärän kasvaa. Jos $p = 9$, niin $\{30/9\} = 4$. Jos taas $p = 10$, niin $\{30/10\} = 3$. Siis 10 on pienin määrä tunteja



(a) (b)

Kuva 9



Kuva 10: Väritys $\mathcal{C}_4$

	tunti							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	-	y_1	y_4	y_6	y_5	y_5	y_4	y_1
x_2	y_3	-	y_2	-	-	y_4	y_6	y_3
x_3	y_6	y_6	y_3	y_2	y_3	-	-	-
x_4	y_2	y_4	y_1	y_5	y_4	y_6	y_5	-
x_5	y_5	y_2	-	y_1	y_6	y_3	-	y_5

Taulukko 4: Eräs mahdollinen 8 tunnin lukujärjestys, missä yhtä aikaa käytössä on enintään 4 luokkatilaa.

lukujärjestyksessä, jolloin käytössä on yhtä aikaa enintään 3 luokkatilaa. Rehtori ei tällöin ole oikeassa, sillä lukujärjestyksen tuntimäärän pitäisi kasvaa kahdella yhden luokkatilan vapauttamiseksi.

Huomautus 2.24. Luokkatilojen lukumäärä on ennen kaikkea rajoitus eikä mahdollisuus: Käytettävissä olevien luokkatilojen määrän riittävä pieneneminen kasvattaa lukujärjestykseen vaadittavien tuntien määrää ja toisaalta lukujärjestyksessä olevien tuntien määrän kasvattaminen mahdollistaa käytössä olevien luokkatilojen määrän vähentämisen. Tuntien minimimäärä lukujärjestyksessä ei kuitenkaan voi alittaa arvoa $\chi' = \Delta$ eli yksistään luokkatilojen määrää lisäämällä ei voida vähentää lukujärjestyksen tuntien määrää (tuntien määrän vähentämiseksi täytyisi lisätä opettajien määrää tai muuttaa opetusvelvollisuuksia muulla tavoin).

Käytännössä useimpia lukujärjestysten laatimiseen liittyviä ongelmia monimutkaistavat ehdot, joiden mukaan tiettyjen opettajien ja luokkien on kohdattava tiettyjen tuntien aikana. Myös tätä yleistystä on tutkittu.

Lähdeluettelo

[1] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R.: *Graph Theory with Applications*. THE MACMILLAN PRESS LTD, London & Basingstoke, 1976.

[2] Harris, J. M., Hirst, J. L. & Mossinghoff, M. J.: *Combinatorics and Graph Theory*, Second Edition. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008.