

Kvanttivirheenkorjaus numeerisen minimoinnin avulla

Kari Mäkinen

LuK-tutkielma
Fysiikan koulutusohjelma
Teoreettinen fysiikka
Nano- ja molekyyli­systemien tutkimusyksikkö
Oulun yliopisto
2022

Sisällys

1	Johdanto	2
2	Kvanttimekaaniset perusteet	3
2.1	Tilavektori	3
2.2	Harmoninen värähtelijä	4
2.3	Kubitti	5
2.4	Kvanttivirheenkorjaus	6
3	Numeerinen minimointi	7
3.1	Yksiulotteinen minimointi	7
3.2	Lokaalin minimin rajausta	7
3.3	Kultaiseen leikkaukseen perustuva funktion minimin etsintä	8
3.4	Minimin etsintä ensimmäisten derivaattojen avulla ja moniulotteinen minimointi	10
4	Numeerinen minimointimenetelmä koodisanojen etsintään	10
4.1	Rajaehdot ja minimoitava funktio	10
4.2	Ohjelmointi	12
4.3	Tulokset	12
5	Loppupäätelmät	13

Tiivistelmä

Tutkielmassa luotiin numeerinen ohjelma, jonka avulla pystytään etsimään kvanttivirheenkorjauksen koodisanoja fotonihäviöiden aiheuttamia peräkkäisiä virheitä vastaan. Ohjelma minimoi numeerisesti niiden virheiden todennäköisyyksiä, joita ei voida koodisanoilla tunnistaa tai korjata. Minimointiin käytetään trust-region constrained algorithm -menetelmää.

1 Johdanto

Tutkielman aihe liittyy kvantti-informaatioon. Kvantti-informaatio on uusi tutkimuksen ala, joka yhdistää informaatiotieteen kvanttimekaniikan teoriaan [1]. Siitä puhutaan, kun fyysisesti varastoidun informaation kuvaamiseen täytyy käyttää erityisesti kvanttimekaniikkaa, kuten esimerkiksi atomien tai suprajohteiden tapauksessa.

Kvanttimekaaninen informaatio varastoidaan bittien sijaan kubitteihin, joilla kahden tilan sijaan voi olla ääretön määrä mahdollisia tiloja. Kubitit eivät ole käytännön sovelluksissa täydellisiä. Ne ovat alttiita muistivirheille ja niiden manipulointiin käytettävät kvanttiportit ovat myös alttiita toiminnallisille virheille. Toiminnalliset virheet johtuvat esimerkiksi siitä, että kvanttiporttien hallintalaitteet eivät ole tarpeeksi tarkkoja

Virheitä voidaan yrittää vältellä joko laitteiston tai ohjelmiston kautta. Laitteita voidaan säätää mahdollisimman tarkaksi, mutta käytännössä ideaalista toimintaa ei ole mahdollista saavuttaa. Loput virheiden estämisestä ja korjaamisesta täytyy hoitaa ohjelmiston kautta. Tätä tutkimusalaa kutsutaan kvanttivirheenkorjaukseksi. Tarkasteltaessa niin sanottuja optimoituja bosonisia kvanttivirhekorjauskoodeja [2], fotonihäviöille pystytään johtamaan analyttisesti koodisana kahden peräkkäisen virheen tapaukseen asti. Yli kahden peräkkäisen virheen tapauksessa täytyy siis käyttää numeerisia menetelmiä koodisanojen löytämiseen.

Teoriaosuudessa käydään aluksi lyhyesti läpi olennaisimmat osat kvanttimekaniikan teoriasta virheenkorjauksessa. Seuraavaksi annetaan perusteet numeeriselle minimoinnille. Menetelmäosuudessa käydään läpi perusteet numeeriseen ohjelmaan, jolla etsittiin koodisanoja. Tämän työn tavoitteena oli numeerisesti etsiä koodisanoja, jotka suojaisivat peräkkäisiltä fotonihäviövirheiltä, kuten artikkelissa [2].

2 Kvanttimekaaniset perusteet

Tässä kappaleessa käydään lyhyesti läpi tutkielmaan liittyvää kvanttimekaniikan perusteoriaa sekä kvanttivirheenkorjauksen teoriaa. Kappaleet 2.1-2.3 pohjautuvat luentomateriaaleihin [3–5].

2.1 Tilavektori

Tässä tutkielmassa käytetään tilavektoreita $|\Psi(t)\rangle$ aaltofunktioiden $\Psi(t)$ sijaan. Diracin braket-merkinnässä bra-vektori $\langle\alpha|$ ja ket-vektori $|\alpha\rangle$ ovat vaaka- ja pystyvektoreita

$$\langle\alpha| = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \alpha_3^* \quad \dots \quad \alpha_N^*), \quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

joissa kertoimet α_i ovat kompleksilukuja. Kvanttimekaniikassa fysikaalisen systeemin jokaista mahdollista tilaa kuvaa Hilbertin avaruuden vektori $|\Psi(t)\rangle$. Hilbertin avaruudella tarkoitetaan lineaarista vektoriavaruutta, jossa on määritelty sisätulo. Vektorin $|\Psi(t)\rangle$ kantavektorit on mahdollista valita siten, että ne ovat keskenään ortonormaaleja

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (2)$$

ja vektorit ovat normalisoituja, kun sisätulo

$$\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = 1. \quad (3)$$

Jokaista klassisen fysiikan dynaamista suuretta $Q(x, p)$ vastaa kvanttimekaniikassa hermiittinen operaattori, joka saadaan korvaamalla $\hat{Q}(\hat{x}, \hat{p}) = Q(x \rightarrow \hat{x}, p \rightarrow \hat{p})$. Operaattorit voidaan esittää kantavektorien avulla matriisina

$$\hat{T} = \sum_{m,n=1}^N T_{mn} |m\rangle \langle n|, \quad (4)$$

joissa kertoimet T_{mn} ovat kompleksilukuja. Tutkielman kannalta olennaisimmat operaattorit ovat luomis- ja hävittämisoperaattorit, joiden ominaisuuksia käydään läpi seuraavassa kappaleessa.

2.2 Harmoninen värähtelijä

Harmoninen värähtelijä on tärkeä esimerkki yksiulotteisesta potentiaalista. Klassisesti sillä voidaan kuvata esimerkiksi jouseen kiinnitetyn massan edestakaista liikettä, mutta käytännössä mitä tahansa pieniamplitudista värähtelyä voidaan approksimoida harmonisen värähtelijän potentiaalilla. Harmonisen värähtelijän Hamiltonin operaattori voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

jossa \hat{a}^\dagger ja \hat{a} ovat luomis- ja hävittämisoperaattorit. Tilavektori $|\psi\rangle$ on harmonisen värähtelijän Hamiltonin operaattorin ominaisenergiaa E vastaava ominaistila yhtälön

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (6)$$

mukaan. Ominaisvektorit $|\psi_n\rangle \equiv |n\rangle$, joita yleisesti kutsutaan Fock-tiloiksi, muodostavat ortonormaalin kannan

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}, \quad (7)$$

jossa Hamiltonin operaattorin \hat{H} esitys on diagonaalinen matriisi ja tilat numeroidaan kvanttiluvun $n = 0, 1, 2, \dots$ avulla. Ominaisvektoreille pätee

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (8)$$

missä \sqrt{n} ja $\sqrt{n+1}$ ovat normituskertoimia. Ominaisvektorien avulla saadaan $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, jolloin operaattorilla \hat{a}^\dagger saadaan ominaisvektorista $|\psi\rangle$ ominaisvektori $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$, jonka ominaisarvo on $E + \hbar\omega$. Samoin operaattorin \hat{a} ominaisvektorin $\hat{a}|\psi\rangle$ ominaisarvo on $E - \hbar\omega$. Luomis- ja hävitysoperaattoreita käyttämällä voidaan luoda kaikki harmonisen värähtelijän ominaistilat, kunhan vain yksi tila on tiedossa. Normituskertoimia käyttäen nähdään, että

$$\langle n'|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad \langle n'|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}, \quad (9)$$

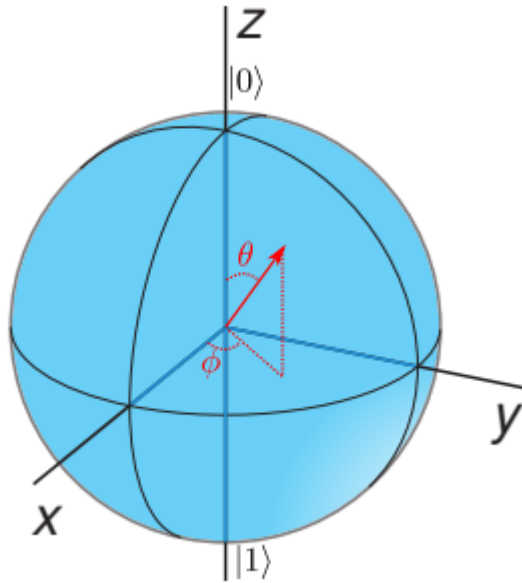
joista saadaan operaattoreiden matriisiesitykset Fock-tilojen kannassa

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Näitä matriiseja tutkimalla nähdään selvästi, että operaattorit \hat{a} ja \hat{a}^\dagger toteuttavat kommutaatiorelaation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (11)$$

jota tarvitaan myöhemmin koodin rajaehtojen johtamisessa.



Kuva 1: Yhtälön (12) tilaa kuvaava Blochin pallo [5], jonka säde on 1.

2.3 Kubitti

Kubitti tai kvanttibitti on kvanttimekaaninen kaksitilasysteemi, joka digitaalisten tilojen 0 ja 1 sijaan voi olla missä tahansa ortogonaalisten kantatilojen $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ lineaarisessa (kompleksisessa) superpositiossa. Se esitetään tilavektorilla

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

jossa $\theta \in [0, \pi]$ ja $\phi \in [0, 2\pi]$ ovat koordinaatteja Blochin pallon, katso kuva 1, pinnalla ja a ja b ovat kompleksilukuja. Mitä tahansa kvanttimekaanista systeemiä, jolla on kaksi tilaa voi käyttää kubitin fyysisessä toteutuksessa. Esimerkiksi spin- $\frac{1}{2}$ hiukkasen orientaatio tai suprajohtavan sähköpiirin tila. Kubitteihin kohdistuvat virheet ja muut kvanttioperaatiot voidaan esittää operaattoritoimituksina kubitin tilaan. Esimerkiksi kubitin kääntö tilasta $|0\rangle$ tilaan $|1\rangle$ toteutetaan operaattorilla

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ kuten}$$

$$\hat{U}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle. \quad (13)$$

2.4 Kvanttinvirheenkorjaus

Tämä kappale pohjautuu artikkeliin [2]. Tietojenkäsittely fyysisissä piireissä ei ole täydellistä ja kvantti-informaatio on alttiimpaa ympäristön aiheuttamille virheille kuin klassiset systeemit, koska kvanttisysteemit ovat yleensä paljon pienempiä. Klassisella bitillä on kaksi tilaa, joten ainoa mahdollinen virhe on tilan muutos $0 \leftrightarrow 1$. Kubitilla on ääretön määrä mahdollisia tiloja, joihin ympäristö voi vaikuttaa monella eri tavalla [1].

Kvanttinvirheenkorjauksen idea on löytää kaksi loogista koodisanaa, kubitti, joka on osa suurta harmonisen oskillaattorin Hilbertin avaruutta. Tässä Hilbertin avaruudessa on 2^N ulottuvuutta, kun fyysisiä kubitteja on N kappaletta. Koodisanojen on oltava vakaita siten, että jos tapahtuu jokin yksittäinen virhe $\hat{E} \in \bar{\mathcal{E}}$, niin kvantti-informaatio säilyy ja mikä tahansa näiden sanojen superpositio voidaan palauttaa. On siis löydettävä koodisanat $|W_\sigma\rangle$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$, jotka toteuttavat kvanttinvirheenkorjauskriteerit, joita kutsutaan myös Knillin-Laflammen ehdoiksi [6]

$$\langle W_\sigma | \hat{E}_l^\dagger \hat{E}_k | W_{\sigma'} \rangle = \alpha_{lk} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (14)$$

kaikille $\hat{E}_{l,k} \in \bar{\mathcal{E}}$ siten, että α_{lk} ovat koodisanoista riippumattomia hermiittisen matriisin alkioita. Arvojen α_{lk} on oltava loogisista koodisanoista riippumattomia, jotta eri virheet ovat erotettavissa toisistaan ja korjattavissa.

Tässä tutkielmassa virheet ovat fotonien häviöitä, joita voidaan kuvata hävitysoperaattoreilla \hat{a} harmonisen oskillaattorin kannassa ja muita virheitä ei oteta huomioon. Tarkoituksena on löytää loogisia koodisanoja numeerisen minimoinnin avulla. Sanojen täytyy suojata L :ltä peräkkäiseltä virheeltä kahden peräkkäisen korjausvaiheen välillä, mutta näitä korjausvaiheita ei käydä läpi tässä tutkielmassa. Erillisten mahdollisten virheiden joukko on siis $\bar{\mathcal{E}}_L = \{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^2, \dots, \hat{a}^L\}$. Esimerkki koodista, joka suojaa virheiltä $\mathcal{E}_1 = \{\hat{I}, \hat{a}\}$

$$|W_\uparrow\rangle = \frac{|0\rangle + |4\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |W_\downarrow\rangle = |2\rangle. \quad (15)$$

Fotonihäviövirhe tuo loogiset koodisanat aliavaruuteen, jossa on pariton fotonilukumäärä ja joka on erillinen loogisten koodisanojen parillisesta aliavaruudesta. Tämän seurauksena yhtälön (14) kvanttinvirheenkorjausmatriisin diagonaalista poikkeavat matriisielementit α_{lk} ovat identtisesti nollia. Jäljelle jäävät diagonaalielementit α_{ll} vaativat, että molemmilla tiloilla on identtinen keskimääräinen fotonilukumäärä. Tässä tapauksessa $\bar{n} = \langle W_\sigma | \hat{n} | W_\sigma \rangle = 2$. Tämä tarkoittaa, että fotonihäviön mahdollisuus on sama molemmissa tiloissa. Jos kvanttillassa $|\Psi\rangle = u |W_\uparrow\rangle + v |W_\downarrow\rangle$ tapahtuu fotonihäviö, niin se muuntuu tilaksi

$$|\Psi_1\rangle = \frac{\hat{a}|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\Psi\rangle}} = u|E_\uparrow^1\rangle + v|E_\downarrow^1\rangle, \text{ missä } |E_\uparrow^1\rangle = |3\rangle \text{ ja } |E_\downarrow^1\rangle = |1\rangle \text{ ovat vir-}$$

hesanoja. Kompleksiluvut u ja v eivät muutu tässä muunnoksessa, joka tarkoittaa että tilan kvantti-informaatio säilyy.

3 Numeerinen minimointi

Tässä kappaleessa käydään läpi yksinkertaisesti, mitä minimointi on yhden muuttujan funktion tapauksessa ja sanotaan lopuksi muutama sana moniulotteisesta minimoinnista. Tutkielmassa käytetty moniulotteinen minimointi on laaja tutkimuksen ala, jonka yksityiskohtiin meneminen olisi turhan työlästä, mutta minimoinnin periaatteet ovat silti samat. Kappale pohjautuu lähteeseen [7].

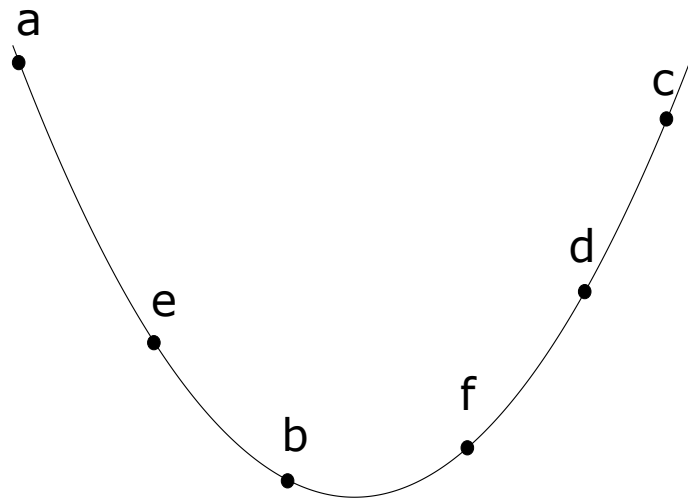
Funktion minimi voi olla lokaali eli pienin arvo jollain rajatulla alueella tai globaali eli pienin arvo minkä funktio voi saada. Globaalien minimien löytäminen on yleisesti erittäin vaikeaa. Siihen käytetään laajalti kahta menetelmää. Etsitään lokaaleja minimejä suurella määrällä eri lähtöarvoja ja otetaan niistä pienin, tai siirrytään jostain lokaalista minimistä pois päin ja katsotaan siirrytäänkö parempaan pisteeseen vai palataanko aina samaan.

3.1 Yksiulotteinen minimointi

Yksiulotteisten funktioiden minimointiin on olemassa kahden tyyppisiä menetelmiä. Perusmenetelmissä käytetään hyväksi vain funktion arvoja ja kehittyneemmissä lisäksi myös funktion derivaatan arvoja. Ensin minimi on rajattava jollekin välille. Tämän jälkeen rajausta jatketaan yhä pienemmille väleille, johon löytyy useita menetelmiä, mutta yksinkertaisin esimerkki on kultaisen leikkauksen etsintä, joka on esitetty kohdassa 3.3.

3.2 Lokaalin minimin rajaus

Funktion minimi on rajattu, kun pisteissä $a < b < c$ funktion arvo $f(b)$ on pienempi kuin $f(a)$ ja $f(c)$. Aloitetaan tekemällä alkuarvaus a ja otetaan askel eteenpäin pisteeseen b . Jos funktion arvo on pienempi pisteessä b kuin pisteessä a ,



Kuva 2: Minimien rajaaminen. Minimiksi aluksi rajattiin pisteillä a, b, c . Seuraava piste d korvasi pisteen c , jolloin uusi raja on pisteet a, b, d . Samalla tavalla piste e korvasi pisteen a ja piste f korvasi pisteen d . Näin minimi on rajattu välille e, b, f .

jatketaan askeleita samaan suuntaan, kunnes funktion arvo kasvaa ja on suurempi kuin pisteessä b . Näin saadaan rajattua lokali minimi pisteillä a, b ja c . Nyt minimin etsintä tapahtuu valitsemalla uusi piste d väliltä (a, b) tai (b, c) . Valitaan esimerkiksi (b, c) . Jos funktion arvo pisteessä d on suurempi kuin pisteessä b , uusi raja on pisteet (a, b, d) . Jos taas $f(d) < f(b)$, uusi raja on (b, d, c) . Uuden rajan keskipiste on aina sen hetkinen minimi. Tällä tavalla jatketaan uusien pisteiden valitsemista, kunnes uloimpien pisteiden etäisyys on välttävän pieni. Välttävän pieni on yleensä kaksi kertaa neliöjuuri koneen liukuluvun tarkkuudesta. Rajaaminen on havainnollistettu kuvassa 2. Tämä on perusidea ja seuraavassa kappaleessa käydään tarkemmin läpi, kuinka uudet pisteet tulisi valita.

3.3 Kultaiseen leikkaukseen perustuva funktion minimin etsintä

Oletetaan, että b on murto-osan w etäisyydellä a :sta a :n ja c :n välissä, jolloin

$$\frac{b-a}{c-a} = w \quad \text{ja} \quad \frac{c-b}{c-a} = 1-w. \quad (16)$$

Oletetaan myös, että seuraava koepiste x on murto-osan z pisteestä b eteenpäin

$$\frac{x-b}{c-a} = z. \quad (17)$$

Jos nyt funktion arvo pisteessä x on suurempi kuin pisteessä b ($f(x) > f(b)$), uusi väli on pituudeltaan $w+z$ edelliseen verrattuna. Jos taas $f(x) < f(b)$, niin pituus on $1-w$ edelliseen verrattuna. Asetetaan nämä yhtäsuuriksi, jolloin hyöty on yhtäsuuri molemmissa tapauksissa ja saadaan

$$z+w = 1-w \quad (18)$$

$$\Rightarrow \frac{x-b}{c-a} + \frac{b-a}{c-a} = \frac{c-a}{c-a} - \frac{b-a}{c-a} \quad (19)$$

$$\Rightarrow b-a = c-x \quad (20)$$

Nähdään, että uusi piste on symmetrinen pistettä b vastaan, eli $|b-a|$ on yhtäsuuri kuin $|x-c|$. Tästä seuraa, että piste x sijaitsee suuremmalla segmentillä, koska z on positiivinen vain jos $w < 1/2$. Jotta z olisi optimaalinen oletetaan, että w valittiin myös optimaaliseksi aikaisemmin samalla menetelmällä. Piste x täytyy siis olla saman murto-osan b :n ja c :n välillä, kuin b oli a :n ja c :n välillä, josta saadaan ehto

$$\frac{z}{1-w} = w. \quad (21)$$

Yhtälöt (18) ja (21) antavat toisen asteen yhtälön

$$w^2 - 3w + 1 = 0, \quad \text{jolloin} \quad w = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38197. \quad (22)$$

Eli optimaalisen rajavälin (a, b, c) keskipisteen b murtoetäisyys toisesta päästä on 0.38197 ja toisesta 0.61803. Nämä murto-osat ovat samat kuin kultaisella leikkauksella, josta menetelmän nimi juontuu.

Tässä menetelmässä siis seuraava kokeilupiste on tripletin (a, b, c) suuremmalla välillä murto-osan 0.38197 keskimmäisestä pisteestä mitattuna. Vaikka aloitettaisiin rajaus pisteillä, joiden välit eivät ole kultaisessa leikkauksessa, niin valittaessa seuraavat pisteet suuremman välin kultaisesta leikkauksesta välit muuttuvat jatkossa itseään toistaviksi kultaisen leikkauksen murto-osiksi. Kultaiseen leikkaukseen perustuva etsintämenetelmä varmistaa, että jokaisen uuden funktion määrittämisen jälkeen minimi on rajattu alueelle, joka on 0.61803-kertainen edellisen rajavälin kokoon verrattuna.

3.4 Minimien etsintä ensimmäisten derivaattojen avulla ja moniulotteinen minimointi

Derivaattojen käyttö funktion rajauksessa voi huomattavasti vähentää laskutoimitusten määrää. Derivaatan etumerkistä rajauskolmikon (a, b, c) keskipisteessä nähdään mihin suuntaan funktio muuttuu eli se määrää kummalta väliltä (a, b) vai (b, c) otetaan seuraava koepiste.

Moniulotteisessa minimoinnissa, eli kun minimoidaan funktiota, jolla on muuttujia enemmän kuin yksi, derivaatan vastine on gradientti, joka on vektorisuure. Nyt vaihtoehtoja minimointiin on kolme. Lasketaan gradientit käyttämällä funktion analyttistä muotoa, lasketaan gradientit käyttämällä differenssimenetelmää tai ei lasketa gradientteja ollenkaan. On myös valittava menetelmien välillä, jotka tarvitsevat tallenustilaa kertalukuihin N^2 tai N verrannollisena, missä N on dimensioiden lukumäärä. Dimensioiden lukumäärän kasvaessa suuriksi N^2 voi olla rajoittava tekijä. Myös itse minimoitava funktio ja kuinka paljon rajaehdot se tarvitsee tai halutaan käyttää, rajoittaa menetelmien valintaa.

4 Numeerinen minimointimenetelmä koodisanojen etsintään

Tässä tutkielmassa käytettiin Trust-Region Constrained Algorithm -menetelmää [8], koska se pystyi laskemaan epälineaarisia funktioita ja ottamaan vastaan tarvittavat rajafunktiot. Sillä etsittiin suuri määrä lokaaleja minimejä satunnaisilla lähtöarvoilla, että päästäisiin mahdollisimman lähelle globaalia minimiä.

4.1 Rajaehdot ja minimoitava funktio

Koodisanat voidaan kirjoittaa muotoon

$$|W_{0/1}\rangle = \sum_{i=0}^n x_{0/1,i} |i\rangle, \quad (23)$$

jossa $x_{0/1,i}$ ovat tuntemattomia muuttujia.

Muuttujille saadaan rajoitusehtoja sekä kvanttitilojen fysikaalisuusehdoista, että Knill-Laflamme -ehdoista [6]. Ensimmäiset rajaehdot siis tulevat koodisanojen ortonormaalisuudesta (7)

$$\begin{aligned}\langle W_0|W_0\rangle &= \sum_{i=0}^n x_{0,i}^2 = 1, & \langle W_1|W_1\rangle &= \sum_{i=0}^n x_{1,i}^2 = 1, \\ \langle W_0|W_1\rangle &= \sum_{i=0}^n x_{0,i}x_{1,i} = 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Muut kvanttivirhekorjausehdoista [6] tulevat rajaehdot ovat muotoa

$$\langle W_0|M_{lk}|W_1\rangle = 0, \quad \langle W_1|M_{lk}|W_0\rangle = 0, \quad (25)$$

$$\langle W_1|M_{lk}|W_1\rangle - \langle W_0|M_{lk}|W_0\rangle = 0. \quad (26)$$

Matriisielementit M_{lk} saadaan alla olevasta $k \times k$ matriisista, johon on merkitty kaikki virhetapaukset, jossa lopputuloksena on jokin määrä fotonien häviöitä \hat{a} . Tyhjällä puoliskolla fotonien määrä kasvaisi ja niitä vastaavat rajaehdot ovat samat kuin matriisin alakolmioissakin.

I	\hat{a}^\dagger	$\hat{a}^{\dagger 2}$	$\hat{a}^{\dagger 3}$	\dots	$\hat{a}^{\dagger k}$	
II						I
$I\hat{a}$	$\hat{a}^\dagger\hat{a}$					\hat{a}
$I\hat{a}^2$	$\hat{a}^\dagger\hat{a}^2$	$\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2$				\hat{a}^2
$I\hat{a}^3$	$\hat{a}^\dagger\hat{a}^3$	$\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^3$	$\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a}^3$			\hat{a}^3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		\vdots
$I\hat{a}^k$	$\hat{a}^\dagger\hat{a}^k$	$\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^k$	$\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a}^k$	\dots	$\hat{a}^{\dagger k}\hat{a}^k$	\hat{a}^k

Taulukko 1: Rajaehdomatriisi.

Nämä rajat muuntuvat relaatioiden (11) avulla helposti ohjelmoitavaan muotoon. Esimerkiksi

$$\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{n}^2 - \hat{n} = (\hat{n} - 1)\hat{n} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\hat{a}^{\dagger 3}\hat{a}^3 &= \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} \\ &= \hat{n}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = (\hat{n} - 2)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = (\hat{n} - 2)(\hat{n} - 1)\hat{n},\end{aligned}\quad (28)$$

missä \hat{n} on lukumääräoperaattori ja tiloihin operoitaessa se tuottaa Fock-tilan luvun n . Nähdään, että operaattorit noudattavat sääntöä $\hat{a}^{\dagger k}\hat{a}^k = \prod_{i=0}^{k-1}(\hat{n} - i)$ ja taulukko 1 voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa taulukko 2.

I	\hat{a}^\dagger	$\hat{a}^{\dagger 2}$	$\hat{a}^{\dagger 3}$	\dots	$\hat{a}^{\dagger k}$	I
I	\hat{a}					\hat{a}
\hat{a}^2	$\hat{n}\hat{a}$	$\hat{n}(\hat{n}-1)$				\hat{a}^2
\hat{a}^3	$\hat{n}\hat{a}^2$	$\hat{n}(\hat{n}-1)\hat{a}$	$\hat{n}(\hat{n}-1)(\hat{n}-2)$			\hat{a}^3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots		\vdots
\hat{a}^k	$\hat{n}\hat{a}^{k-1}$	$\hat{n}(\hat{n}-1)\hat{a}^{k-2}$	$\hat{n}(\hat{n}-1)(\hat{n}-2)\hat{a}^{k-3}$	\dots	$\prod_{i=0}^{k-1}(\hat{n}-i)$	\hat{a}^k

Taulukko 2: Muunnettu rajahtomatriisi.

Minimoitava funktio on taulukossa 2 diagonaalin seuraava osa

$$f(x_i) = \langle W_1 | M_{(k+1)(k+1)} | W_1 \rangle + \langle W_0 | M_{(k+1)(k+1)} | W_0 \rangle. \quad (29)$$

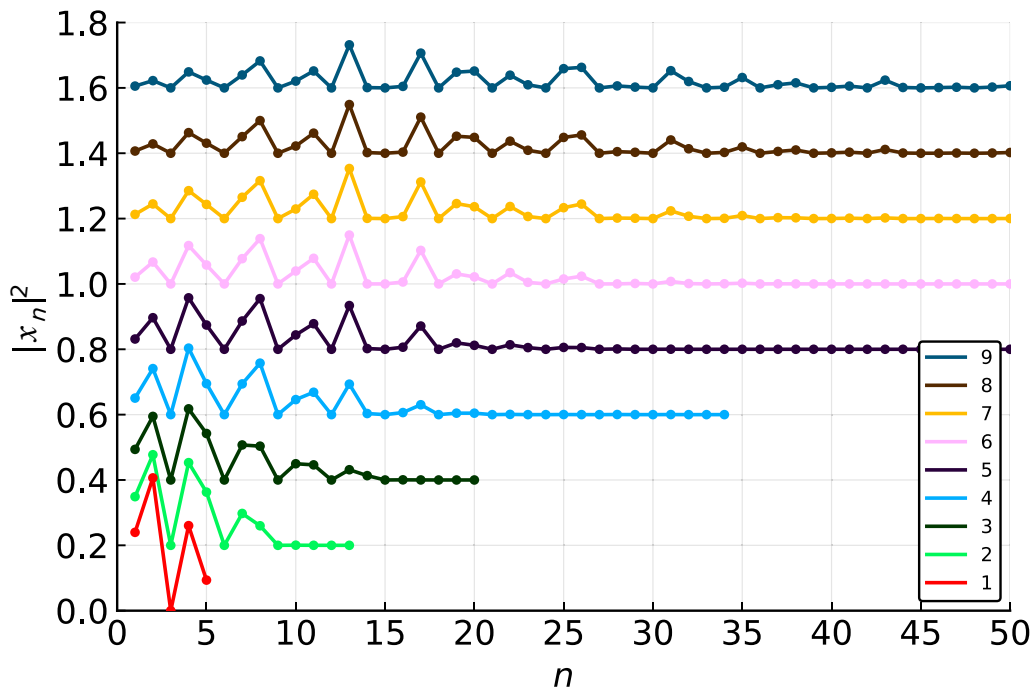
Tiivistäen tehtävänä on numeerisesti minimoida funktio $f(x_i)$ (29) rajoitusehdoilla (24)-(25).

4.2 Ohjelmointi

Ohjelmoinnissa käytettiin Python-ohjelmointikieltä ja sen NumPy- ja SciPy-kirjastoja. Minimointiin käytettiin SciPyn minimize-funktiota metodilla trust-constr (trust-region constrained), johon voi syöttää epälineaarisia raja-funktioita. Minimize-funktio tarvitsee alkuarvauksen arvoista yhtenä listana ja se tuottaa tulokseksi listan arvoja. Molempien koodisanojen arvoja käsiteltiin siis samassa listassa. Rajat lisättiin minimize-funktion NonlinearConstraint-objektiin, joka käyttää myös Jacobin ja Hessen matriiseja. Jacobin matriisit luotiin itse ja minimize-funktio arvioi Hessen matriisit numeerisesti '2-point'-menetelmällä.

4.3 Tulokset

Aluksi käytettiin vain reaaliarvoja $x_{\sigma,i}$ ja niillä saatiin koodisanat yhden ja kahden fotonihäviön tapauksille, mutta ei suuremmille fotonihäviöille. Tämän takia muutettiin alkuarvaukset kompleksiluvuiksi, joiden avulla koodi antoi koodisanoja ainakin yhdeksän fotonihäviön tapauksiin asti, mutta tässä vaiheessa alkuarvauksien pituus alkoi hidastamaan laskentaa niin paljon, että suurempia ei ehditty tarkistaa. Kuvaajassa 3 on esitettyinä todennäköisyyksiä $|x_n|^2$ koodisanan



Kuva 3: Koodisanojen muuttujien suuruus. Värien numerointi tarkoittaa peräkkäisten fotonihäviövirheiden lukumäärää, joita vastaan virhekorjauskoodisanoja on suunniteltu. Kuvassa käyrien $|x_n|^2$ arvot on eroteltu 0.2 yksikön välein, eli kun n kasvaa $|x_n|^2$ alkaa lähestyä nollaa.

Fock-tilan järjestysluvun n suhteen. Nähdään, että suuremmilla virhemäärillä kuvaajat alkavat muistuttaa toisiaan.

5 Loppupäätelmät

Tässä tutkielmassa ensin esiteltiin kvanttimekaniikan perusteet kvanttivirheenkorjaukseen. Seuraavaksi käytiin läpi, mitä minimointi on yleisesti ja lopuksi luotiin ohjelma, joka etsi kvanttivirheenkorjauksen koodisanoja käyttäen numeerista minimointia.

Peräkkäisten virheiden määrän kasvaessa, myös koodisanojen pituus kasvaa niin suureksi, että tällä hetkellä pidemmistä koodisanoista ei vielä ole hyötyä käytännössä. Kuitenkin tekniikan kehittyessä koodisanoja voidaan mahdollisesti toteuttaa

konkreettisesti. Tässä tutkielmassa ei vertailtu numeerisesti minimoimalla saatuja koodisanoja muihin kehitettyihin, kuten esimerkiksi cat-koodeihin [9], joten menetelmän hyödyt ja haitat eivät ole vielä tiedossa.

Tutkielma keskittyi fotonihäviövirheisiin \hat{a} . Menetelmää voi jatkossa käyttää pienellä muokkauksella myös muunlaisia virheitä vastaan. Esimerkiksi fotonien lisäys-virheet \hat{a}^\dagger tai vaihekoherenssin menetys -virheet \hat{n} . \hat{a}^\dagger -virheiden rajaehdot saadaan taulukon 1 tyhjältä puolelta. Toinen jatkokehityssuunta tälle ohjelmalle voisi olla numeerisen koodin optimointi, sillä tällä hetkellä, kun etsitään koodisanoja suuremmille virhemäärille, niin laskuaika kasvaa nopeasti muutamasta tunnista muutamaan päivään. Tutkielmassa käytetty menetelmä oli käynnistää etsintä suurella määrällä satunnaisia alkuarvoja ja valita pienin funktion arvo. Tätä voisi ehkä myös nopeuttaa käyttämällä valistuneita arvauksia, jotta etsintöjen määrää voisi vähentää.

Viitteet

- [1] S. M. Barnett, *Quantum Information, Kappaleet 1, 2 ja 6*, (Oxford University Press, Oxford, 2009)
- [2] M. H. Michael, M. Silveri, R. T. Brierley, V. V. Victor, J. Salmilehto, L. Jiang, S. M. Girvin, *New Class of Quantum Error-Correcting Codes for a Bosonic Mode*, *Phys. Rev. X* **6**, 031006 (2016)
- [3] J. Tuorila, *Kvanttimekaniikka 2 -kurssin luentomateriaali*, (Oulun yliopisto, 2015)
- [4] M. Silveri, E. Thuneberg, *Quantum Devices -kurssin luentomateriaali*, (Oulun yliopisto, 2019)
- [5] M. Silveri, *Quantum Information -kurssin luentomateriaali*, (Oulun yliopisto, 2020)
- [6] E. Knill, R. Laflamme, *Theory of quantum error-correcting codes*, *Phys. Rev. A* **55**, 900 (1997)
- [7] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes, Third Edition, Kappale 10*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007)
- [8] <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html>
- [9] M. Mirrahimi, Z. Leghtas, V. V. Albert, S. Touzard, R. J. Schoelkopf, L. Jiang, M. H. Devoret, *Dynamically protected cat-qubits: a new paradigm for universal quantum computation*, *New J. Phys.* **16**, 045014 (2014)