Kaksoislaskenta

Pro gradu -tutkielma
Airta Ella
2502661
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
kevät 2022

Sisältö

Johdanto

Tämän pro gradu –tutkielman tarkoituksena on esitellä kaksoislaskentaa diskreetin matematiikan näkökulmasta. Lyhyesti määriteltynä kaksoislaskenta tarkoittaa laskutapaa, jossa lasketaan samat joukot kahdella eri tavalla ja lopputulos on yhtäsuuri. Kaksoislaskennan perusajatus tiivistyy hyvin esimerkkiin, jossa äärellinen määrä ihmisiä tapaa juhlissa ja jotkut heistä kättelevät, mutta kukaan ei itseään eikä ketään kahdesti. Tällöin niiden ihmisten määrä, jotka kättelevät parittoman määrän muita ihmisiä, on aina parillinen. Tästä esimerkistä saadaan Kättelylemma, joka todistetaan kappaleessa 2.3.

Tutkielmassa tarkastellaan kaksoislaskennasta kahta mielenkiintoista ongelmaa. Ensimmäisenä tutkitaan kiintopisteen olemassaoloa. Monista kiintopistelauseista paneudutaan Brouwerin kiintopistelauseeseen tasossa ja havannoidaan sen käyttöä muun muassa peliteoriassa. Toinen kiinnostava ongelma on, kuinka suuria tai pieniä joukot voivat olla jollain tietyillä ehdoilla. Tällaisten ongelmien ratkaiseminen antaa lopputuloksena hyödyllisiä ylä- tai alarajoja esimerkiksi erilaisten verkkojen koolle.

Tutkielma pohjautuu teokseen Matousek, Nesetril: *Invitation to discrete mathematics*. Oxford OUP, Oxford, 2008 [4]. Tämä teos on lähteenä ellei toisin mainita. Tutkielman ymmärtämiseksi oletetaan lukijalta perustietoja yliopistotason matematiikasta. Verkkoteoriaa käsittelevä kappale on tiivistetty suoraan kandidaatin työstäni, jossa on sama lähdeteos.

Kaksi ensimmäistä tutkielman kappaletta on kertausta joukoista, relaatioista ja verkkoteoriasta. Näissä kappaleissa tulee tutuksi tutkielmassa käytettävät merkinnät. Kolmannessa ja neljännessä kappaleessa käsitellään kaksoislaskentaa. Kolmas kappale käsittelee aihetta perinpohjaisesti, kun taas neljännessä kappaleessa sovelletaan ja syvennetään aihetta lisää.

1 Joukot, relaatiot ja järjestykset

Matematiikassa voidaan tarkastella joukkoja, joiden alkiot ovat toisia joukkoja. Esimerkiksi määritellään joukko

$$M = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{4\}\},$$

jolla on siis neljä luonnollisia lukuja sisältävää joukkoa alkioinaan, tarkemmin sanottuna neljä osajoukkoa joukosta $\{1,2,3,4\}$. Tällaisia joukkoja esiintyy usein diskreetissä matematiikassa. Jotta vältytään sanomasta "joukkojen joukko", käytetään käsitteitä **joukkojen kokoelma** *(engl. set system)* tai **joukkoperhe** *(engl. family of sets)* tai lyhyemmin **perhe**. Näin ollen voitaisiin sanoa, että M on joukkoperhe joukosta $\{1,2,3,4\}$. Tällaisia joukkoperheitä voidaan merkitä kalligrafisilla isoilla kirjaimilla, kuten $\mathcal{M}$.

Joukkoperhettä, joka sisältäää kaikki mahdolliset osajoukot jostain joukosta X merkitään merkillä 2^X ja kutsutaan joukon X potenssijoukoksi. Toinen merkintä potenssijoukolle on $\mathcal{P}(X)$. Äärellisen joukon X alkioiden lukumäärälle käytetään samaa merkintää kuin itseisarvolle eli $|X|$. Seuraavaksi palautetaan mieleen relaation määritelmä joukossa.

Määritelmä 1.1. R on *joukon X relaatio*, jos jokaiselle joukon X alkioparille (x, y) on määritelty, onko alkio x relaatiossa R alkion y kanssa vai ei. Jos alkio x on relaatiossa R alkion y kanssa, merkitään xRy.

Määritelmä 1.2. Relaatio R joukossa X on

1. *refleksiivinen*, jos xRx kaikilla $x \in X$.
2. *symmetrinen*, jos xRy, niin yRx, kaikilla $x, y \in X$.
3. *antisymmetrinen*, jos xRy ja yRx, niin $x = y$, kaikilla $x, y \in X$.
4. *transitiivinen*, jos xRy ja yRz, niin xRz, kaikilla $x, y, z \in X$.

Määritelmä 1.3. Relaatiota R kutsutaan

1. *ekvivalenssiksi* (tai ekvivalenssirelaatioiksi) joukossa X, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.
2. *järjestykseksi* joukossa X, jos se on refleksiivinen, transitiivinen ja antisymmetrinen.
3. *lineaariseksi järjestykseksi* joukossa X, jos se on järjestys ja kaikilla alkioilla $x, y \in X$ pätee joko xRy tai yRx.

Määritelmä 1.4. Olkoon R ekvivalenssi joukossa X ja $x \in X$.
Merkitään $R[x]$ joukkoa kaikista alkioista $y \in X$, jotka ovat relaatiossa alkion x kanssa eli $R[x] = \{y \in X : xRy\}$. Joukkoa $R[x]$ kutsutaan alkion x määräämäksi *ekvivalenssiluokaksi.*

Propositio 1.5. *Kaikille ekvivalensseille R joukossa X pätee*

(i) $R[x]$ *on epätyhjä kaikilla* $x \in X$*;*

(ii) kaikille $x, y \in X$ *joko* $R[x] = R[y]$ *tai* $R[x] \cap R[y] = \emptyset$*;*

(iii) Jos $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ *ja* $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *kaikilla* $i, j \in I$*, joilla* $i \neq j$*, tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen ekvivalenssirelaatio* R*, että jokaisella* $i \in I$ *on olemassa sellainen* $x \in X$*, että* $A_i = R[x]$ *ja jokaisella* $x \in X$ *on olemassa sellainen* $i \in I$*, että* $R[x] = A_i$*.*

Todistus. Ekvivalenssin määritelmän nojalla:
(i) Joukko $R[x]$ sisältää aina alkion x, koska R on refleksiivinen.
(ii) (a) Olkoon $x, y \in X$. Oletetaan xRy ja osoitetaan, että $R[x] \subseteq R[y]$. Jos $z \in R[x]$, niin symmetrian nojalla zRx ja täten transitiivisuuden nojalla zRy. Näin ollen symmetrian nojalla $z \in R[y]$, joten $R[x] \subseteq R[y]$. Symmetrian nojalla yRx, joten edellä olevan päättelyn nojalla $R[y] \subseteq R[x]$. Näin ollen $R[x] = R[y]$.
(b) Oletetaan, että xRy ei ole totta eli todistetaan, että tällöin $R[x] \cap R[y] = \emptyset$. Vastaoletus: $z \in R[x] \cap R[y]$. Tällöin symmetrian nojalla xRz ja zRy ja transitiivisuuden nojalla xRy, mikä on ristiriita.
(iii) Selvästi xRy jos ja vain jos $\{x, y\} \subseteq R[x]$. □

Propositio 1.5 kuvaa joukon X jakoa ekvivalenssiluokkiin. Ekvivalenssiluokat ovat erillisiä osajoukkoja joukosta X ja niiden yhdiste on koko joukko X. Toisaalta kaikilla joukon X jaoilla on täsmälleen yksi ekvivalenssi joukossa X. Toisin sanoen on olemassa bijektio kuvaus joukon X kaikista ekvivalensseista joukon X kaikkiin osituksiin.

Määritelmä 1.6. Olkoon X joukko ja R sen järjestys. Tällöin pari (X, R) on *järjestetty joukko.*

Järjestyksiä merkitään yleensä merkein $\preceq$ tai $\leq$. Ensimmäinen merkintä on hyödyllinen esimerkiksi, kun halutaan puhua jonkin luonnollisten lukujen joukon järjestyksestä, missä järjestys on muu kuin tavallinen suuruusjärjestys tai kun tarkastellaan mielivaltaista järjestystä jossain yleisessä joukossa.

Jos on olemassa järjestys $\preceq$, niin voidaan määritellä aito suuruusjärjestys $\prec$ seuraavasti: $a \prec b$, jos ja vain, jos $a \preceq b$ ja $a \neq b$. Vastaavasti $a \succ b$, jos ja vain, jos $a \succeq b$ ja $a \neq b$.

1.1 Lineaariset ja osittaiset järjestykset

Kun halutaan korostaa, että puhutaan epälineaarisesta järjestyksestä, voidaan käyttää termiä *osittainen järjestys*. Osittainen järjestys *(engl. partial ordering)* tarkoittaa samaa kuin järjestys, eli se voi olla myös lineaarinen järjestys. Samoin järjestetystä joukosta voidaan käyttää termiä osittain järjestetty joukko *(engl. poset)*.

Esimerkki 1.7. Järjestettyjä joukkoja ovat muun muassa luonnolliset luvut $(\mathbb{N}, \leq)$ ja reaaliluvut $(\mathbb{R}, \leq)$. Näissä järjestys $\leq$ vastaa tavallista lineaarista järjestystä.

Sanojen aakkosjärjestys sanastoissa voidaan muodollisesti tiivistää termiin leksikografinen eli sanastojärjestys. Tarkastellan ensin erityistapausta: Olkoon $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ karteesinen tulo niin, että se muodostaa joukon kaikista järjestetyistä pareista (a_1, a_2), missä $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Määritellään relaatio $\leq_{lex}$ leksikografinen järjestys joukossa X seuraavasti: $(a_1, a_2) \leq_{lex} (b_1, b_2)$ pätee, jos joko $a_1 < b_1$, tai $a_1 = b_1$ ja $a_2 \leq b_2$. Jos $(X_1, \leq_1), (X_2, \leq_2), ..., (X_n, \leq_n)$ ovat mielivaltaisia lineaarisesti järjestettyjä joukkoja, voidaan yleisesti määritellä karteesisen tulon $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ leksikografinen järjestys $\leq_{lex}$ seuraavanlaisesti:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \leq_{lex} (b_1, b_2, ..., b_n)$$

pätee, jos $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ tai jos on olemassa sellainen indeksi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, että $a_j = b_j$ kaikilla $j < i$ ja $a_i < b_i$. Sanojen aakkosjärjestyksen voisi ajatella olevan esimerkki leksikografisesta järjestyksestä. Kuitenkin, mitä tarkemmin sitä tarkastellaan, löydetään erinäisiä ongelmia. Esimerkiksi sanoilla on eri pituuksia, puhumattakaan hienouksista kuten "van Beethoven", joka esiintyy B kirjaimen kohdalla tietosanakirjoissa. Seuraavaksi tarkastellaan epälineaarisia järjestyksiä.

Esimerkki 1.8. Luonnollisille luvuille a ja b merkintä $a|b$ tarkoittaa, että luku a jakaa luvun b. Toisin sanoen on olemassa sellainen luku $c \in \mathbb{N}$, että $b = ac$. Relaatio "$|$" on osittainen järjestys luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$. Osoitetaan tämä näyttämällä, että relaatio "$|$" on 1. refleksiivinen, 2. transitiivinen ja 3. antisymmetrinen.

1. Koska $a = a1$, niin $a|a$ kaikilla $a \in \mathbb{N}$, joten relaatio "$|$" on refleksiivinen.

2. Jos $a|b$ ja $b|c$, niin on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{N}$, että $b = ax$ ja $c = by$, joten $c = axy$ ja näin ollen $a|c$. Täten relaatio "$|$" on transitiivinen.

3. Jos $a|b$ ja $b|a$, niin on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{N}$, että $b = ax$ ja $a = by$. Tällöin $a = axy$ eli $xy = 1$ ja $a = b$. Relaatio "$|$" on siis antisymmetrinen.

Esimerkki 1.9. Olkoon X joukko. Relaatio "$\subset$" *(olla jonkin osajoukko)* määrittää osittaisen järjestyksen kokoelmassa 2^X.

Äärellisten joukkojen järjestykset voidaan piirtää käyttämällä nuolia kuten muissakin relaatioissa. Tavallisesti tällaiset piirustukset sisältävät paljon nuolia. Esimerkiksi 10-alkioiselle lineaarisesti järjestetylle joukolle pitäisi piirtää $10 + 9 + \ldots + 1 = 55$ nuolta ja silmukkaa. Transitiivisuudella voidaan vähentää nuolien määrää: jos tiedetään, että $x \preceq y$ ja $y \preceq z$, niin tällöin myös $x \preceq z$, joten voidaan jättää piirtämättä nuoli $x \to z$. Vastaavasti silmukat voidaan jättää piirtämättä, koska tiedetään, että ne ovat aina olemassa. Äärellisille joukoille kaikki tieto on sisällytetty relaatioon "välitön edeltäjä", joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 1.10. Olkoon $(X, \preceq)$ järjestetty joukko. Alkio $x \in X$ on alkion $y \in X$ *välitön edeltäjä*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $x \prec y$ ja

2. ei ole olemassa sellaista alkiota $t \in X$, että $x \prec t \prec y$.

Merkitään välitöntä edeltäjää merkillä $\lhd$.

Seuraavaksi muotoillaan tarkasti väite, että järjestys $\preceq$ voidaan muodostaa uudelleen relaatiosta $\lhd$.

Propositio 1.11. *Olkoon $(X, \preceq)$ äärellinen joukko ja olkoon relaatio $\lhd$ sitä vastaava välitön edeltäjä. Tällöin kaikille $x, y \in X$ pätee $x \prec y$, jos ja vain jos on olemassa sellaiset $x_1, x_2, ..., x_k \in X$, että $x \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd ... \lhd x_k \lhd y$ (sallitaan myös, että $k = 0$ eli voi olla $x \lhd y$).*

Todistus. "$\Leftarrow$" Jos $x \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd ... \lhd x_k \lhd y$, niin tällöin $x \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_k \preceq y$, koska välitön edeltäjä sisältyy järjestyksen relaatioon $\preceq$ ja relaation $\preceq$ transitiivisuuden nojalla $x \preceq y$.

"$\Rightarrow$" Todistetaan induktiolla.

Väite on seuraava: Olkoot $x, y \in X$, $x \prec y$ ja $n \in \mathbb{N}$. Jos alkioille x ja y on olemassa enintään n kappaleita alkioita $t \in X$, joille pätee, että $x \prec t \prec y$, niin tällöin on olemassa sellaiset $x_1, x_2, ..., x_k \in X$, että $x \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd ... \lhd x_k \lhd y$.

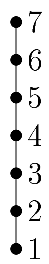
Kun $n = 0$, ei ole olemassa sellaista t, että $x \prec t \prec y$ ja näin ollen $x \lhd y$. Täten väite pätee, kun $n = 0$.

Todistetetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite eli oletetaan, että väite pätee kaikilla n johonkin n_0 asti. Olkoot $x \prec y$ sellaiset, että joukossa $M_{xy} = \{t \in X : x \prec t \prec y\}$ on korkeintaan $n_0 + 1$ alkiota.

Valitaan alkio $u \in M_{xy}$ ja tarkastellaan joukkoja $M_{xu} = \{t \in X : x \prec t \prec u\}$ ja vastaavasti $M_{uy} = \{s \in X : u \prec s \prec y\}$. Relaation $\prec$ transitiivisuuden nojalla seuraa, että $M_{xu} \subset M_{xy}$ ja $M_{uy} \subset M_{xy}$. Molemmilla joukoilla M_{xu} ja M_{uy} on ainakin yksi alkio vähemmän kuin joukolla M_{xy}, koska $u \notin M_{xu}$ ja $u \notin M_{uy}$. Nyt induktio-oletuksen nojalla on olemassa sellaiset alkiot $x_1, ..., x_k$ ja $y_1, ..., y_l$, että $x \lhd x_1 \lhd ... \lhd x_k \lhd u$ ja $u \lhd y_1 \lhd ... \lhd y_l \lhd y$. Kun yhdistetään nämä kaksi "ketjua", saadaan haluttu alkioiden x ja y yhdistävä ketju. □

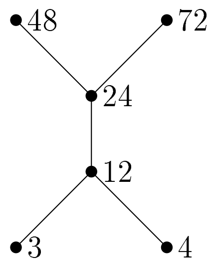
Osittain järjestetyt joukot voidaan piirtää *Hasse diagrammin* avulla. Siinä nuolet piirretään pystysuunnassa niin, että jos $x \prec y$, niin y piirretään ylemmäs kuin x ja nuolen kärjet korvataan pisteillä.

Esimerkki 1.12. Piirretään joukosta $(\{1, 2, \ldots, 7\}, \leq)$ Hasse diagrammi.



Esimerkki 1.13. Piirretään joukosta $(\{3, 4, 12, 24, 48, 72\}, |)$ Hasse diagrammi. Ensin muodostetaan tästä joukosta osittain järjestetty joukko A.

$A = \{(3 \prec 12), (3 \prec 24), (3 \prec 48), (3 \prec 72), (4 \prec 12), (4 \prec 24),$
$(4 \prec 48), (4 \prec 72), (12 \prec 24), (12 \prec 48), (12 \prec 72), (24 \prec 48), (24 \prec 72)\}$



Lause 1.14. *Olkoon $(X, \preceq)$ äärellinen osittain järjestetty joukko. Tällöin joukossa X on olemassa lineaarinen järjestys $\leq$ niin, että ehdosta $x \preceq y$ seuraa $x \leq y$.*

Lauseen 1.14 perusteella jokainen osittainen järjestys voidaan laajentaa lineaariseksi järjestykseksi. Tätä kutsutaan lineaariseksi laajennukseksi. Ennen lauseen 1.14 todistusta, määritellään pari muuta tarvittavaa käsitettä.

Määritelmä 1.15. Olkoon $(X, \preceq)$ järjestetty joukko. Alkiota $a \in X$ kutsutaan joukon $(X, \preceq)$ *minimaaliseksi alkioksi (engl. minimal element)*, jos ei ole olemassa sellaista $x \in X$, että $x < a$. Joukon maksimaalinen alkio *(engl. maximal element)* määritellään vastaavasti. Alkiota $a \in X$ kutsutaan joukon $(X, \preceq)$ *maksimaaliseksi alkioksi*, jos ei ole olemassa sellaista $x \in X$, että $x > a$.

Lause 1.16. *Jokaisella äärellisellä osittain järjestetyllä joukolla $(X, \preceq)$ on ainakin yksi minimaalinen alkio.*

Todistus. Valitaan $x_0 \in X$ mielivaltaisesti. Jos x_0 on joukon X minimaalinen alkio, niin väite on totta. Jos x_0 ei ole minimaalinen alkio joukossa $(X, \preceq)$, niin silloin on olemassa eräs $x_1 \prec x_0$. Jos x_1 on minimaalinen alkio, niin väite on totta. Jos x_1 ei ole minimaalinen, niin tällöin on olemassa jokin $x_2 \prec x_1$ ja niin edelleen. Äärellisen monen toimenpiteen jälkeen päädytään joukon $(X, \preceq)$ minimaaliseen alkioon, muuten joukolla X olisi äärettömän monta eri alkiota $x_0, x_1, x_2, ...$.

□

Huomautus 1.17. Lause 1.16 ei päde äärettömille joukoille. Esimerkiksi kokonaislukujen joukolla $(\mathbb{Z}, \leq)$ ei ole minimaalista alkiota.

Koska lauseen 1.16 todistus voi vaikuttaa epämääräiseltä, todistetaan se toisella hieman yleisemmällä tavalla.

Todistus. Olkoon $(X, \preceq)$ ja valitaan eräs $x \in X$ niin, että joukossa $L_x = \{y : y \preceq x\}$ on pienin mahdollinen määrä alkioita. Jos $|L_x| = 1$ niin väite on totta, koska x on välttämättä minimaalinen alkio: $L_x = \{x\}$. Todistetaan, että $|L_x| > 1$ on mahdoton. Tässä tapauksessa olisi olemassa $y \in L_x, y \neq x$ ja tällöin $|L_y| < |L_x|$, mikä on ristiriidassa alkion x valinnan kanssa. □

Seuraavaksi todistetaan lause 1.14 eli lineaarisen laajennuksen olemassaolo.

Todistus. Edetään induktiolla joukon X alkioiden lukumäärän suhteen. Jos $|X| = 1$ ei ole mitään todistettavaa, koska tällöin joukossa X on tasan yksi järjestys ja se on lineaarinen.

Tehdään induktio-oletus: jos $|X| = n$, niin joukolla $(X, \preceq)$ olemassa lineaarinen laajennus. Näin ollen tarkastellaan järjestettyä joukkoa $(X, \preceq)$, jolla $|X| = n + 1$. Olkoon $x_0 \in X$ joukon $(X, \preceq)$ minimaalinen alkio. Asetetaan $X' = X \setminus \{x_0\}$ ja olkoon $\preceq'$ relaatio $\preceq$ joukossa X'. Tiedetään, että $(X', \preceq')$

on järjestetty joukko ja siten induktio-oletuksen nojalla joukossa X' on olemassa lineaarinen järjestys $\leq'$ niin, että ehdosta $x \preceq' y$ seuraa $x \leq' y$ kaikilla $x, y \in X'$. Määritetään relaatio $\leq$ joukolle X seuraavasti:

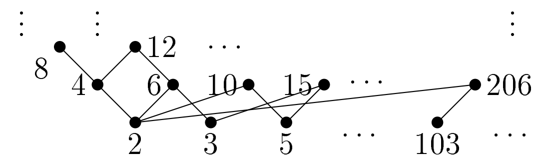
$$\begin{aligned} x_0 &\leq y && \text{kaikilla } y \in X, \\ x &\leq y && \text{aina kun } x \leq' y. \end{aligned}$$

Selvästi ehdosta $x \preceq y$ seuraa $x \leq y$. Relaatio $\leq$ on siis lineaarinen järjestys joukossa X. □

Huomautus 1.18. Minimaalisen alkion käsitettä ei pidä sekoittaa minimiin eli pienimmän alkion käsitteeseen.

Määritelmä 1.19. Olkoon $(X, \preceq)$ järjestetty joukko. Alkiota $a \in X$ kutsutaan joukon $(X, \preceq)$ pienimmäksi alkioiksi eli *minimiksi*, jos kaikilla $x \in X$ pätee $a \preceq x$. Toisaalta alkiota a kutsutaan joukon $(X, \preceq)$ suurimmaksi alkioksi eli *maksimiksi*, jos kaikilla $x \in X$ pätee $x \preceq a$.

Pienin alkio on selvästi myös minimaalinen alkio, mutta minimaalisen alkion ei tarvitse olla aina joukon minimi. Esimerkisi luonnollisten lukujen joukossa, joka on järjestetty jaollisuuden mukaan, $(\mathbb{N}, |)$ luku 1 on sekä minimi, että minimaalinen alkio. Kun taas esimerkiksi joukolla $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$, jossa ovat kaikki luonnolliset luvut suurempia kuin luku 1 ja joukko on järjestetty jaollisuuden mukaan, ei ole pienintä alkioita, mutta äärettömän monta minimaalista alkiota. Havainnollistetaan tätä Hasse diagrammilla.



Kuten kuvasta nähdään, alkuluvut ovat joukon $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ minimaalisia alkioita. Minimiä ei kuitenkaan ole, koska joukko on järjestetty jaollisuuden mukaan ja 1 ei kuulu joukkoon.

1.2 Joukon koko ja riippumattomuus

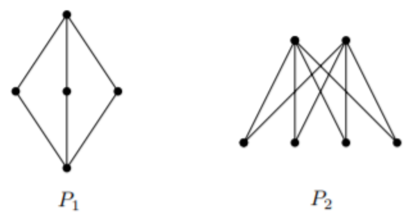
Määritellään joukko P seuraavia määritelmiä varten. Olkoon $(X, \preceq)$ järjestetty äärellinen joukko ja merkitään sitä kirjaimella P.

Määritelmä 1.20. Joukkoa $A \subseteq X$ kutsutaan *riippumattomaksi* joukossa P, jos $x \preceq y$ ei päde koskaan kahdelle eri alkiolle $x, y \in A$.

Riippumatonta joukkoa kutsutaan myös *antiketjuksi*. Toisin sanoen kahta alkiota x ja y on mahdoton verrata, jos kumpikaan $x \preceq y$ ja $y \preceq x$ relaatioista ei päde. Siispä joukko on riippumaton, jos kaikki sen kaksi eri alkiota ovat vertailukelvottomia.

Merkitään $\alpha(P)$ riippumattoman joukon maksimikokoa joukossa P eli $\alpha(P) = \max\{|A| : A \quad \text{riippumaton joukossa } P\}$.

Esimerkki 1.21. Järjestetyille joukoille P_1 ja P_2



on $\alpha(P_1) = 3$ ja $\alpha(P_2) = 4$.

Huomio 1.22. *Kaikkien minimaalisten alkioiden joukko joukossa P on riippumaton.*

Määritelmä 1.23. Joukkoa $A \subseteq X$ kutsutaan *ketjuksi* joukossa P, jos kaikilla $x, y \in A$, x ja y ovat vertailtavissa joukossa P.

Vastaavasti joukon A alkiot muodostavat lineaarisesti järjestetyn osajoukon joukosta P. Olkoon $\omega(P)$ maksimimäärä ketjun alkioista joukossa P. Järjestetyille joukoille P_1 ja P_2 esimerkissä 1.21 pätee $\omega(P_1) = 3$ ja $\omega(P_2) = 2$.

Ylläolevat esimerkit näyttävät, että lukua $\alpha(P)$ voidaan pitää järjestetyn joukon P abstraktina leveytenä ja lukua $\omega(P)$ vastaavasti abstraktina korkeutena.

2 Verkkoteoriaa

Seuraavaksi palautetaan mieleen verkkoteorian perustietoja. Kaikki tutkielmassa käsiteltävät verkot ovat äärellisiä ja suuntaamattomia.

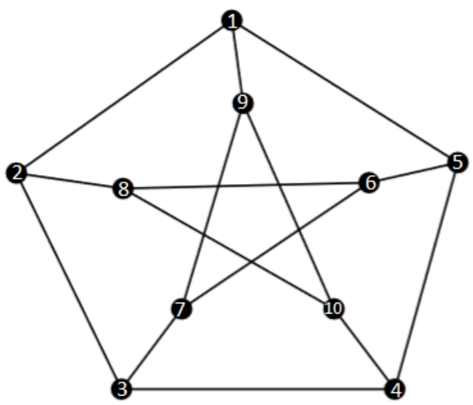
2.1 Verkon määritelmiä ja merkintöjä

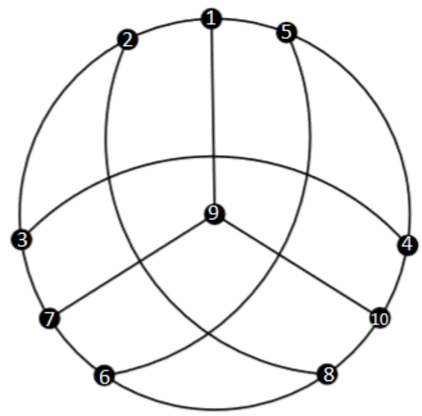
Määritelmä 2.1. *Verkko (engl. graph)* G on järjestetty pari (V, E), missä V on jokin (äärellinen) joukko ja E on joukko kaksi-alkioisia osajoukkoja joukosta V. Joukon V alkioita kutsutaan *solmuiksi (engl. vertex)* ja joukon E alkioita *kaariksi (engl. edges)*. Kun viitataan tunnetun verkon G solmuihin, merkitään $V(G)$. Vastaavasti käytetään merkintää $E(G)$ joukon G kaarista.
Merkintää $\binom{V}{2}$ voidaan käyttää kaikille joukon V osajoukoille, jotka ovat muotoa $\{a, b\}$, missä $a \neq b$ ja $a, b \in V$. Tällaisia joukkoja kutsutaan *kaksioiksi*. Lyhyesti voidaan sanoa, että verkko on pari (V, E), missä $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Määritelmä 2.2. Jos $\{u, v\}$ on jokin verkon G kaari, sanotaan, että solmut u ja v ovat *vierekkäiset* joukossa G tai u on solmun v *naapuri*. Vastaavasti v on solmun u naapuri.

Määritelmä 2.3. Kahta verkkoa $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ sanotaan *isomorfisiksi*, jos on olemassa sellainen bijektio $f : V \to V'$, että $\{x, y\} \in E$, jos ja vain jos $\{f(x), f(y)\} \in E'$ kaikilla $x, y \in V, x \neq y$. Tätä bijektiota f sanotaan verkkojen G ja G' väliseksi isomorfismiksi. Merkitään $G \cong G'$.

Esimerkki 2.4. Verkko $G = (V, E)$ ja verkko $G' = (V', E')$





ovat isomorfiset, sillä

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = V'$$

ja

$$E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{4, 5\},$$
$$\{4, 10\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\big\} = E'$$

Määritelmä 2.5 (Täydellinen verkko)**.** Verkkoa, jonka jokaisesta solmusta on kaari verkon jokaiseen muuhun solmuun, kutsutaan *täydelliseksi verkoksi.* Merkitään K_n, jossa n on solmujen lukumäärä. Solmut ja kaaret merkitään seuraavasti :

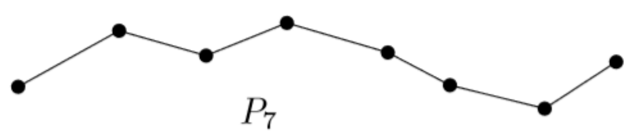
$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \binom{V}{2}.$$

Määritelmä 2.6 (Polku)**.** Verkon $G = (V, E)$ *poluksi* sanotaan jonoa $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, missä $v_0, v_1, \ldots, v_t$ ovat verkon G eri solmuja ja kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t$ on olemassa kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. Polku on kuin matkaloki, jossa reittiä kuljetaan pisteestä pisteeseen poikkeamatta reitiltä tai siihen palaamatta ja käydyt solmut ja kaaret tallennetaan jonoon kerran. Polkua P, jolla on n solmua merkitään P_n.

Polun pituudeksi t sanotaan polun kaarien lukumäärää. Huomaa, että jos polku on yhden solmun mittainen, niin sen pituus $t = 0$.

Esimerkki 2.7. Polku P_n, kun $n = 7$

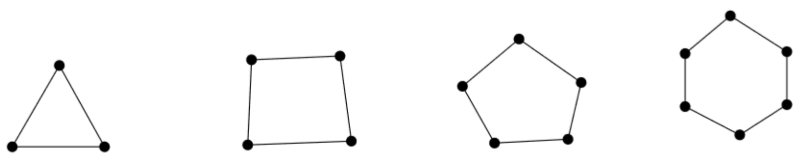
$$V = \{0, 1, \ldots, 7\}, \quad E = \{\{i - 1, i\}\} : i = 1, 2, \ldots, 7\}.$$



Määritelmä 2.8 (Sykli)**.** Verkon G *sykliksi* sanotaan jonoa $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_0)$, missä $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ ovat verkon G eri solmuja ja kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t-1$, on olemassa kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ sekä kaari $e_t = \{v_{t-1}, v_0\} \in E(G)$ ja luku $t \geq 3$. Toisin sanoen ensimmäinen solmu ja viimeinen solmu yhdistyvät. Luku t on myös syklin pituus. Sykliä C, jossa on n solmua merkitään C_n. Jos verkossa ei ole sykliä, se on syklitön.

Esimerkki 2.9. Sykli C_n

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i, i+1\} : i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$



C_3 C_4 C_5 C_6

Määritelmä 2.10. Verkkoa G sanotaan *kaksiosaiseksi*, jos joukko $V(G)$ voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon V_1 ja V_2 niin, että verkon G jokainen kaari yhdistyy joukon V_1 solmusta joukon V_2 solmuun. Matemaattisin symbolein kirjoitettuna: $E(G) \subseteq \{\{v, v'\} : v \in V_1, v' \in V_2\}$. Tällaisia joukkoja V_1 ja V_2 kutsutaan joskus verkon G *luokiksi.*

Esimerkki 2.11. Täydellinen kaksiosainen verkko $K_{n,m}$:

$$V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\},$$

$$E = \{\{u_i, v_j\}\} : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

2.2 Aliverkot, yhtenäisyys ja komponentit

Seuraava määritelmä täsmentää ajatuksen, kuinka verkko voi sisältyä toiseen verkkoon.

Määritelmä 2.12. Olkoon G ja G' verkkoja. Sanotaan, että G on verkon G' *aliverkko*, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) \subseteq E(G')$. Sanotaan, että G on verkon G' *indusoitu aliverkko*, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$.

Toisin sanoen: Verkon G' indusoitu aliverkko saadaan poistamalla joitakin solmuja verkosta G' ja poistamalla kaikki ne kaaret, jotka oli yhdistyneet poistettuihin solmuihin. Aliverkon saadakseen voidaan myös poistaa joitain kaaria, mutta kuitenkin niin, ettei yhtään päätesolmua poisteta.

Määritelmä 2.13. Sanotaan, että verkko G on *yhtenäinen*, jos kaikilla $x, y \in V(G)$ löydetään polku solmusta x solmuun y verkossa G.

Yhtenäisyys voidaan myös määritellä toisellakin tavalla, mitä varten määritellään seuraavat käsitteet.

Määritelmä 2.14. Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Jonoa $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ sanotaan *kävelyksi* verkossa G (laajemmin sanottuna kävelymatka t solmusta v_0 solmuun v_t), missä $v_0, \ldots, v_t$ ovat solmuja, jos on olemassa sellaiset kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ kaikilla $i = 1, \ldots, t$. Kävelyssä jotkin solmut ja kaaret saattavat toistua. Toisin sanoen kävely on matkaloki, jossa on voitu kulkea samasta solmusta tai kaaresta useita kertoja.

Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $V(G)$ asettamalla $x \sim y$ jos ja vain jos on olemassa kävely solmusta x solmuun y verkossa G.

Lause 2.15. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio verkossa G.*

Todistus. Olkoon v mielivaltainen verkon G solmu. Tällöin solmu v muodostaa 0-pituisen kävelyn solmusta v solmuun v verkossa G, joten $v \sim v$. Täten relaatio $\sim$ on refleksiivinen.

Olkoot v ja u verkon G solmuja, joille $v \sim u$. Tällöin verkossa G on olemassa kävely $(v, e, v_1, e_1, \ldots, e_t, u)$ solmusta v solmuun u. Koska tarkastellaan verkkoa, jolle ei ole määritelty suuntaa, niin verkossa G on olemassa myös kävely $(u, e_t, \ldots, e_1, v_1, e, v)$ solmusta u solmuun v, joten myös $u \sim v$. Näin ollen relaatio $\sim$ on symmetrinen.

Olkoot v, u ja z verkon G solmuja, joille pätee $v \sim u$ ja $u \sim z$. Tällöin verkossa G on olemassa kävely $(v, e, v_1, e_1, \ldots, e_t, u)$ solmusta v solmuun u ja kävely $(u, e', \ldots, e'_k, z)$ solmusta u solmuun z. Näin ollen verkossa G on ainakin yksi kävely solmusta v solmuun z solmun u kautta. Siispä $v \sim z$ ja relaatio $\sim$ on transitiivinen.

Koska relaatio $\sim$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, on se ekvivalenssirelaatio.

$\square$

Määritelmä 2.16. Olkoon $V = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \ldots \dot\cup V_k$ solmujoukon V jako relaation $\sim$ määräämiin ekvivalenssiluokkiin. Verkon G aliverkkoja, jotka ovat joukkojen V_i indusoimia, sanotaan verkon G komponenteiksi.

Seuraava huomio liittää komponenttien määritelmän aikaisempaan määritelmään yhtenäisestä verkosta.

Huomio 2.17. *Kaikki komponentit missä tahansa verkossa ovat yhtenäisiä, ja verkko on yhtenäinen, jos ja vain jos sillä on vain yksi komponentti.*

Todistus. Selvästi yhtenäisellä verkolla on vain yksi komponentti, se itse. Toisaalta mitkä tahansa kaksi solmua x, y samassa komponentissa verkossa G voi olla yhdistetty kävelyllä. Minkä tahansa kävelyn solmusta x solmuun y lyhintä mahdollista reittiä on oltava polku. $\square$

Määritelmä 2.18. Verkkoa G sanotaan *k-solmu-yhtenäiseksi*, jos sillä on ainakin $k + 1$ solmua ja se pysyy yhtenäisenä, vaikka siitä poistettaisiin $k - 1$ solmua. Verkkoa G kutsutaan *k-kaari-yhtenäiseksi*, jos siitä poistamalla $k - 1$ kaarta saadaan yhä yhtenäinen verkko. Verkon G *solmuyhtenäisyys* on maksimi k, kun verkko on k-solmu-yhtenäinen, vastaavasti määräytyy *kaariyhtenäisyys*.

Esimerkki 2.19. Verkkoa G sanotaan *kahdesti yhtenäiseksi*, jos sillä on vähintään kolme solmua ja poistamalla minkä tahansa solmuista päädymme edelleen yhtenäiseen verkkoon.

Määritelmä 2.20. (Joitain verkkojen laskutoimituksia)**.**
Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Määritellään erilaisia uusia verkkoja, jotka on saatu verkosta G:

1. (*Kaaren poisto*) $G - e = (V, E \backslash \{e\})$, missä $e \in E$ on verkon G kaari.
2. (*Kaaren lisäys*) $G + \bar{e} = (V, E \cup \{\bar{e}\})$, missä $\bar{e} \in \binom{V}{2} \backslash E$ on solmu pari, joka ei ole verkon G alkuperäinen kaari.
3. (*Solmun poisto*) $G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E : v \notin e\})$, missä $v \in V$. (Poistetaan solmu v ja kaikki sen kaaret, joiden päätepiste se oli.)
4. (*Kaaren jakaminen*) $G/e = \Big(V \cup \{z\}, (E \backslash \big\{\{x, y\}\big\}) \cup \big\{\{x, z\}, \{z, y\}\big\}\Big)$, missä $e = \{x, y\} \in E$ on kaari ja $z \notin V$ on uusi solmu. (Piirretään uusi solmu z kaareen $\{x, y\}$.)

   Sanotaan, että verkko G' on verkon G jako, jos verkko G' on isomorfinen verkon kanssa, joka saadaan verkosta G jonkin kaareen jakamisella.

2.3 Verkon pistemäärä

Olkoon G verkko ja olkoon v solmu verkossa G. Kaarien, jotka yhdistyvät solmuun v verkossa G, lukumäärää merkitään symbolilla $\deg_G(v)$. Lukua $\deg_G(v)$ sanotaan solmun v asteeksi verkossa G. Toisin sanoen solmun aste on siis solmuun yhdistyvien kaarien lukumäärä.

Merkitään verkon G solmuja seuraavasti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Jonoa

$$(\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$$

sanotaan verkon *astejonoksi* tai verkon G *pistemääräksi.* Valitsemalla eri numeroinnit solmuihin samassa verkossa saadaan yleensä useita erilaisia numerojonoja, jotka eroavat niiden termien järjestyksellä. Näin ollen ei voida erottaa kahta pistemäärää, jos toinen niistä voidaan saada toisesta uudelleenjärjestämällä numeroiden järjestys. Pistemäärä kirjoitetaan yleensä kasvavassa järjestyksessä niin, että pienin aste tulee ensin.

Esimerkki 2.21. Kahdella seuraavalla verkolla, toinen epäyhtenäinen ja toinen yhtenäinen(sykli), on sama pistemäärä $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$:

Propositio 2.22. *Jokaiselle verkolle $G = (V, E)$ on voimassa*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(V) = 2|E|.$$

Todistus. Solmun v aste on kaarien lukumäärä, jotka ovat yhdistyneet siihen. Jokainen kaari sisältää 2 solmua, joten summaamalla kaikki asteet yhteen saadaan kaarien lukumäärä kaksinkertaisena. $\square$

Seuraus 2.23 (Kättelylemma)**.** *Paritonta astetta olevien solmujen lukumäärä on aina parillinen äärellisessä verkossa.*

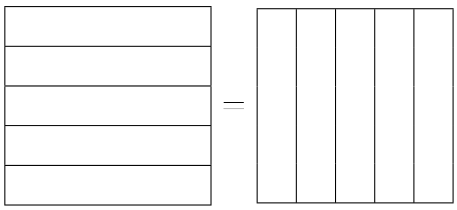
Todistus. Proposition 2.22 nojalla verkon kaikkien asteiden summa on parillinen. Parillista astetta olevien solmujen asteiden summa on aina parillinen. Jotta verkon kaikkien asteiden summa on parillinen, niin myös paritonta astetta olevien solmujen lukumäärän täytyy olla parillinen. $\square$

3 Kaksoislaskenta

Kaksoislaskenta nimensä mukaisesti kiteyttää periaatteen: lasketaan joukon alkiot kahdella eri tavalla ja saadaan samat tulokset [2]. Esimerkiksi kirjanpitäjät laskivat teknologian kehityksen alkuaikoina taulukoita seuraavasti: ensin laskettiin rivit yhteen ja sitten sarakkeet ja lopuksi verrattiin saatuja summia. Jos lasku oli oikein, molempien summat olivat samat. Toisin sanoen, jos A on $n \times m$ matriisi, niin

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Eli kuvana

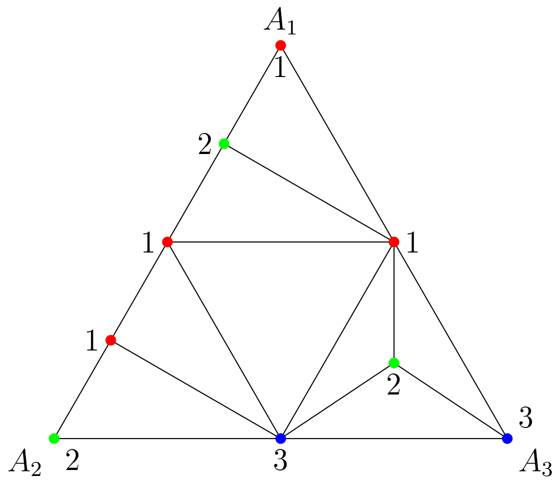


Kaksoislaskentaa voidaan siis toteuttaa eri tavoin. Suurin vaikeus yleensä on, mitä tarkalleen ottaen pitäisi laskea kahdesti.

3.1 Brouwerin kiintopistelause tasossa

Tässä kappaleessa todistetaan Kättelylemman, Spernerin lemman ja Brouwerin kiintopistelauseen yhtäpitävyys. Kättelylemman 2.23 todistus on itse asiassa tyypillistä kaksoislaskentaa, toisin sanoen siinä kaksoislaskettiin solmussa olevien kaarien päät. Kättelylemman väite voidaan myös muotoilla toisin sanoin: jos tiedetään, että verkolla G on ainakin yksi paritonta astetta oleva solmu, niin niitä on oltava ainakin kaksi. Seuraavalla sovelluksella havainnollistetaan tätä.

Piirretään tasoon iso kolmio, jonka kärkisolmut ovat A_1, A_2 ja A_3. Jaetaan kolmio mielivaltaisesti äärelliseen määrään pienempiä kolmioita kuten kuvassa 1:

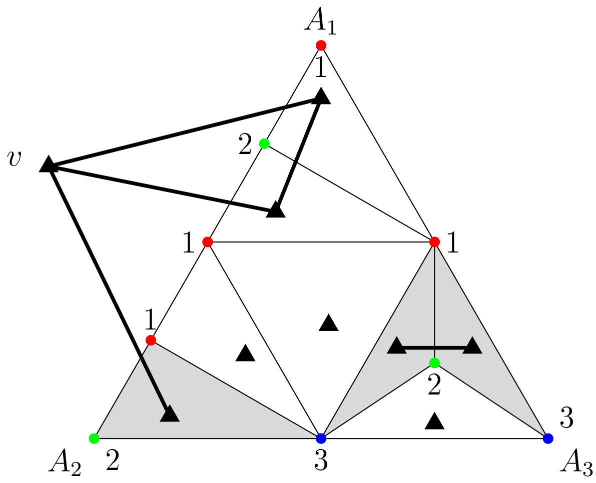


Kuva 1: Mielivaltaisesti kolmioitu kolmio tasossa

Yhdelläkään kolmiolla ei saa olla sellaista solmua, ettei kaarien väliin muodostu kolmiota. Eli kun katsotaan kuvaajaa tasossa, kaikki kolmion sisäpinnat ovat myös kolmioita. Merkitään ison kolmion kärkisolmuja $A_i, i = 1, 2, 3$ ja muita solmuja siten, että solmut kaaren A_iA_j välissä ovat joko merkitty merkin i tai j mukaan. Muuten solmujen nimeäminen on mielivaltaista.

Lemma 3.1. *(Spernerin lemma tasossa)*
Edellä mainitussa tilanteessa on aina olemassa pieni kolmio, jonka solmut on nimetty kaikilla kolmella merkillä $1, 2, 3$.

Todistus. Määritetään verkko G havainnollistamaan tilannetta. Verkon G solmut ovat kolmioiden sisäpinnat ja ison kolmion ulkopinta eli jokaisen kolmion sisällä on yksi verkon G solmu sekä ison kolmion solmu löytyy kolmion ulkopuolelta. Alla olevassa kuvassa 2 verkon G solmut on piirretty pieninä mustina kolmioina niitä vastaavien kolmioiden sisälle ja ulkopuolella oleva solmu on myös merkitty kirjaimella v. Verkon G kahden solmun eli kahden alkuperäisen kolmion sisäpinnan välillä on kaari, jos ne ovat vierekkäiset kolmiot ja niiden yhteisen kaaren päätesolmut ovat merkitty numeroin 1 ja 2. Ison kolmion solmu v yhdistetään kaarella kaikkiin niihin sisäpinnan solmuihin, joiden ulkoreunaa vastaava kaari on solmujen 1 ja 2 välissä.



Kuva 2: Verkko G, Spernerin lemman todistuksen havaintoesimerkki

Pieni kolmio voidaan yhdistää sen naapureihin verkossa G vain, jos pienen kolmion kaaren solmut ovat merkitty numeroin 1 ja 2. Jos kolmion jäljelle jäänyt solmu on merkitty numeroin 1 tai 2, niin kyseinen kolmio on vierekkäin täsmälleen kahden sen naapurin kanssa. Jos jäljelle jäänyt solmu on merkitty numerolla 3, niin tällöin kyseinen kolmio on vierekkäin täsmälleen yhden sen naapurin kanssa. Edellä mainittu tilanne on ainut tapaus, jossa pienen kolmion aste verkossa G on pariton.

Osoitetaan, että ulkopinnan solmun v aste on pariton verkossa G. Tällöin Kättelylemman nojalla on olemassa ainakin yksi toinen solmu, jonka aste on pariton. Nämä paritonta astetta olevat solmut löytyvät väritetyistä kolmioista eli niiden kolmioiden sisältä, joilla on solmut 1,2 ja 3.

Verkon G kaaret voidaan liittää solmuun v vain ison kolmion sivun A_1A_2 kautta. Sovitun merkinnän takia tällä sivulla on ainoastaan solmuja 1 ja 2. Solmun v naapureiden määrä riippuu sivun A_1A_2 solmujen 1 ja 2 järjestyksen muutoksista. Koska järjestys alkaa numerolla 1 ja päättyy numeroon 2, niin järjestyksen muutosten lukumäärän on oltava pariton. Täten solmun v aste on pariton verkossa G. $\square$

Käytetään Spernerin lemmaa osana Brouwerin kiintopistelauseen todistusta. Ennen sitä pohjustetaan kuitenkin, mitä kiintopisteellä tarkoitetaan.

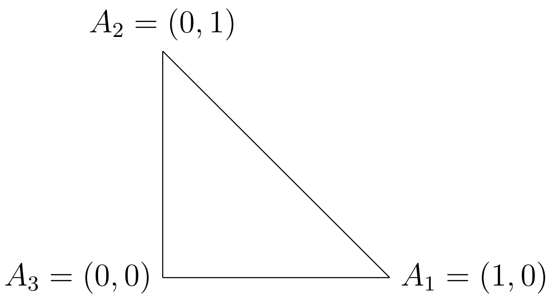
Propositio 3.2. *(yksiulotteinen kiintopistelause)*
Kaikille jatkuville funktioille $f : [0,1] \to [0,1]$ on olemassa piste $x \in [0,1]$ siten, että $f(x) = x$.

Tällaista pistettä x kutsutaan funktion f kiintopisteeksi. Tarkastellaan propositiota 3.2 funktion $g(x) = f(x) - x$ osalta. Funktio g on jatkuva välillä $[0,1]$ ja $g(0) \geq 0$ sekä $g(1) \leq 0$. Intuitiivisesti on selvää, että tällaisen jatkuvan funktion kuvaaja ei voi hyppiä x-akselin yli. Koska funktio g on jatkuva, niin $g = 0$ jossain pisteessä x välillä $[0,1]$, näin ollen funktio leikkaa x-akselin jossain pisteessä x. Tämä on tunnetummin Bolzanon lause. Siis Bolzanon lauseen nojalla $g(x) = 0$ jollain x, toisin sanoen $f(x) - x = 0$, joka on yhtäpitävää $f(x) = x$ kanssa.

Kiintopistelauseissa yleisesti väitetään, että tietyissä olosuhteissa jollain funktiolla f täytyy olla kiintopiste eli on olemassa sellainen x, että $f(x) = x$. Kiintopistolauseet ovat keskeisiä välineitä, kun todistetaan erityyppisten yhtälöiden ratkaisujen olemassaoloa.

Brouwerin kiintopistelauseessa korvataan proposition 3.2 väli kolmiolla tasossa tai tetraedrilla kolmiulotteisessa avaruudessa tai niiden vastineilla n-uloteisissa avaruuksissa. Tässä tutkielmassa osoitetaan Brouwerin kiintopistelause vain tasossa, koska Spernerin lemma 3.1 osoitettiin vain tasossa. Todistus kuuluu suurelta osin analyysiin ja sieltä käytetään ja tuodaan mieleen tarvittavia faktoja ja merkintöjä.

Merkitään Δ kolmioksi tasossa. Yksinkertaisuuden vuoksi valitaan kolmio solmuilla $A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)$ ja $A_3 = (0,0)$:



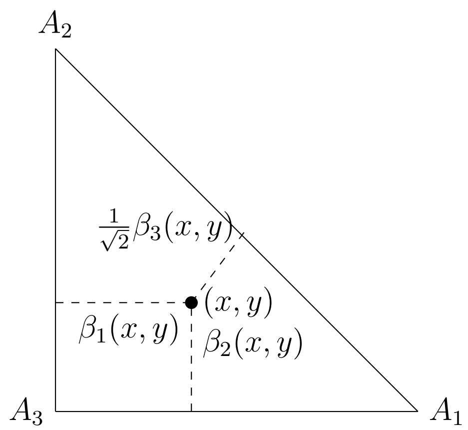
Funktio $f : \Delta \to \Delta$ on *jatkuva* pisteessä $a \in \Delta$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, kun $x \in \Delta$ ja $|x - a| < \delta$. Funktiota kutsutaan jatkuvaksi, jos se on jatkuva kaikissa pisteissä $a \in \Delta$.

Lause 3.3. *(Brouwerin kiintopistelause tasossa)*
Jokaisella jatkuvalla funktiolla $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ on kiintopiste.

Todistus. Määritetään kolmiolle Δ kolme reaaliarvoista apufunktiota β_1, β_2 ja β_3. Kaikille $(x,y) \in \Delta$ asetetaan

$$\beta_1(x,y) = x, \quad \beta_2(x,y) = y, \quad \beta_3(x,y) = 1 - x - y.$$

Havainnollistetaan apufunktioita β_i geometrisesti:



Apufunktioiden pääominaisuudet ovat, että $\beta_i \geq 0$ ja $\beta_1(x, y) + \beta_2(x, y) + \beta_3(x, y) = 1$ kaikilla $(x, y) \in \Delta$.

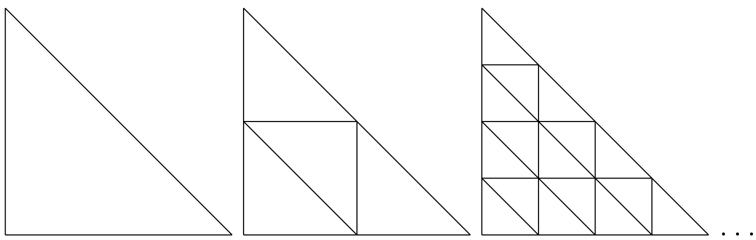
Seuraavaksi määritellään joukot $M_1, M_2, M_3 \subseteq \Delta$:

$$M_i = \{(x, y) \in \Delta : \beta_i(x, y) \geq \beta_i(f(x, y))\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tällöin joukko M_i sisältää ne pisteet, jotka eivät funktion f myötä siirry kauemmas solmun A_i vastakkaisesta sivusta.

Huomataan, että jokainen piste $p \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$ on funktion f kiintopiste. Jos $p \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$, niin tällöin $\beta_i(p) \geq \beta_i(f(p))$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Koska $\sum_i \beta_i(p) = \sum_i \beta_i(f(p)) = 1$, niin $\beta_i(p) = \beta_i(f(p))$ kaikilla i, mikä tarkoittaa, että $p = f(p)$. Nyt tavoitteena on osoittaa, että leikkaus $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ on epätyhjä.

Tarkastellaan kolmion Δ peräkkäisiä kolmiointeja:



Jokaisen kolmioinnin kaikkien kolmioiden kärjet eli solmut nimetään numeroin 1,2 tai 3 niin, että solmu i kuuluu joukkoon M_i ja Spernerin lemman ehdot täyttyvät. Seuraavaksi todistetaan, että tämä on aina järjestettävissä.

Solmulla A_1 on suurin mahdollinen etäisyys sen vastakkaisesta sivusta, joten sen etäisyys ei voi kasvaa funktion f vaikutuksesta. Sen vuoksi $A_1 \in M_1$ ja näin ollen voidaan A_1 merkitä numerolla 1. Solmut A_2 ja A_3 menetellään vastaavasti. Kun piste (x, y) on kaarella A_1A_2, niin tällöin $\beta_1(x, y) + \beta_2(x, y) =$

1, mistä seuraa, että $f(x,y)$ ei voi täyttää molempia ehtoja $\beta_1(f(x,y)) > \beta_1(x,y)$ ja $\beta_2(f(x,y)) > \beta_2(x,y)$. Näin ollen $(x,y) \in M_1 \cup M_2$ ja kaikki sivun A_1A_2 solmut voidaan merkitä vain numeroin 1 ja 2. Kun piste (x,y) on kaarella A_1A_3, niin tällöin $\beta_1(x,y)+\beta_3(x,y) = \beta_1(x,0)+\beta_3(x,0) = x+1-x = 1$. Tällöin $1 = \beta_1(x,0) + \beta_3(x,0) < \beta_1\underbrace{(f(x,0))}_{\in\Delta}+\beta_3\underbrace{(f(x,0))}_{\in\Delta}$ on ristiriita, koska piste ei olisi enää kolmiossa Δ, joten $(x,y) \in M_1 \cup M_3$ ja kaikki tämän kaaren solmut voidaan merkitä vain numeroin 1 ja 3. Vastaavasti kaaren A_2A_3 solmut voidaan merkitä vain numeroin 2 ja 3. Lopulta jokainen kolmion Δ piste kuuluu ainakin yhteen joukkoon M_i, koska piste ei voi siirtyä kauemmas kaikista kolmesta sivusta yhtä aikaa.

Nyt Spernerin lemmasta 3.1 seuraa, että jokaisella peräkkäisellä kolmioinnilla on kolmio solmuin 1, 2 ja 3. Merkitään nyt jonkin tällaisen kolmion kolmioinnin solmuja $a_{j,1}, a_{j,2}$ ja $a_{j,3}$ niin, että $a_{j,i} \in M_i$, kun $i = 1,2,3$. Tarkastellaan ääretöntä pisteiden jonoa $(a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}, ...)$. Valitaan jonosta ääretön suppeneva osajono. Tämä on aina mahdollista, koska jokaisella äärettömällä pistejonolla kolmion sisällä on suppeneva ääretön osajono. Toisin sanoen kolmio on kompakti. Valitaan suppeneva osajono $(a_{j_1,1}, a_{j_2,1}, a_{j_3,1}, ...)$, $j_1 < j_2 < j_3 < ...$ ja merkitään jonon raja-arvoa pisteellä p.

Väitetään, että $p \in M_1$. Joukon M_1 määrittelyn perusteella $\beta_1(a_{j_k,1}) \geq \beta_1(f(a_{j_k,1}))$ kaikilla a_{j_k}. Kun otetaan raja-arvo molemmilta puolilta, saadaan $\beta_1(p) \geq \beta_1(f(p))$, koska raja-arvon ottaminen säilyttää jatkuvien funktioden välillä olevan järjestyksen.

Koska kolmioiden halkaisija peräkkäisissä kolmioinneissa suppenee kohti 0, vastaavat osajonot, esimerkiksi $(a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}, ...)$ ja $(a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3}, ...)$, suppenevat kohti pistettä p. Tästä seuraa, että piste $p \in M_2$ ja $p \in M_3$. Täten piste p on funktion f kiintopiste.

$\square$

Huomautus 3.4. Yleisesti Brouwerin kiintopistelause pätee $f : K \to K$, missä K on rajoitettu, konveksi ja suljettu joukko. Yksityiskohdat sivuutetaan.

3.2 Spernerin lause

Spernerin lause on aivan jotain muuta kuin Spernerin lemma edellisessä kappaleessa. Nyt käsitellään n-alkioista joukkoa X ja joukkoperhettä $\mathcal{M}$ joukon X osajoukoista. Joukkoperhettä $\mathcal{M}$ kutsutaan *riippumattomaksi*, jos se ei sisällä kahta eri joukkoa A, B siten, että $A \subset B$.

Lause 3.5. *(Spernerin lause)*
Jokainen riippumaton joukkoperhe $\mathcal{M}$ sisältää enintään $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ joukkoa.

Itse asiassa Spernerin lause kuvaa osittain järjestettyjä joukkoja. Olkoon 2^X joukkoperhe, joka sisältää kaikki joukon X osajoukot. Relaatio $\subseteq$ "olla jonkin osajoukko" on osittainen järjestys joukossa 2^X. Riippumaton joukkoperhe on täsmälleen se joukko pareja, joiden alkiot ovat vertailukelvottomia osittaisessa järjestyksessä $(2^X, \subseteq)$. Osittain järjestettyä joukkoa, jossa joukon alkiot eivät ole pareittain vertailukelpoisia, kutsutaan yleisesti *antiketjuksi*, kuten määritelmän 1.20 jälkeen todettiin, joten Spernerin lause antaa ylärajan alkioiden lukumäärälle missä tahansa antiketjussa. Ennen kuin todistetaan Spernerin lause, tulisi huomata, että yläraja Spernerin lauseessa on tosiaan paras mahdollinen, koska kaikki joukon X osajoukot kooltaan $\lfloor n/2 \rfloor$ muodostavat riippumattoman joukkoperheen täsmälleen kokoa $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Joukon X osajoukkojen $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ muodostama ketju on jokin joukko $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ niin, että $A_1 \subset A_1 \subset ... \subset A_k$. Toisin sanoen se on lineaarisesti järjestetty osajoukko osittain järjestetystä joukosta $(2^X, \subseteq)$.

Määritelmä 3.6. Maksimaalinen ketju joukossa $(2^X, \subseteq)$ on sellainen ketju, että jos siihen lisätään jokin joukon 2^X alkioista, niin lopputuloksena ei ole enää ketju.

Lemma 3.7. *Kaikilla ketjuilla ja antiketjuilla on enintään yksi yhteinen alkio.*

Todistus. Olkoon $C \subseteq 2^X$ ketju ja olkoon $A \subseteq 2^X$ antiketju. Tällöin $|C \cap A| \leq 1$, koska ketjun C kaikki alkiot ovat keskenään vertailtavissa ja antiketjun A kaikki alkiot ovat keskenään vertailukelvottomia. Toisin sanoen ketjulla ja antiketjulla voi olla enintään yksi yhteinen alkio, jotta se täyttää molempien määritelmien ehdot.

□

Todistetaan nyt lause 3.5.

Todistus. Käytetetään lemmaa 3.7 perustana tälle todistukselle. Tarkastellaan nyt maksimaalisia ketjuja joukossa $(2^X, \subseteq)$. Maksimaalinen ketju on ennen kaikkea ketju eli sen alkioiden täytyy olla vertailtavissa ja tässä tapauksessa järjestyksen luo $\subseteq$. Maksimaalinen ketju sisältää yhden osajoukon joukon X kustakin mahdollisesta koosta, jos näin ei olisi, voisi siihen lisätä alkioita, jolloin se ei olisi enää maksimaalinen. Maksimaalinen ketju joukossa $(2^X, \subseteq)$ on muotoa:

$$\emptyset \subset \{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset ... \subset \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}, \tag{1}$$

missä $x_1, x_2, ..., x_n$ ovat kaikki joukon X alkiot kirjoitettuna jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Kaikki maksimaaliset ketjut näin ollen saavat aikaan lineaarisen järjestyksen joukon X alkioista ja toisaalta jokainen lineaarinen järjestys tuottaa täsmälleen yhden maksimaalisen ketjun. Tästä saadaan tuloksena, että maksimaalisten ketjujen lukumäärä on yhtä suuri kuin joukon X permutaatioden lukumäärä $n!$.

Olkoon $\mathcal{M}$ antiketju (riippumaton joukkoperhe). Muodostetaan kaikki järjestetyt parit $(\mathcal{R}, M)$, missä $M \in \mathcal{M}$ on joukko ja $\mathcal{R}$ on maksimaalinen ketju, joka sisältää joukon M. Lasketaan tällaiset parit kahdella tavalla.

Yllä olevan havainnon perusteella kaikki ketjut sisältävät enintään yhden $M \in \mathcal{M}$, koska $\mathcal{M}$ on antiketju, joten parien $(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ lukumäärä on vähemmän tai yhtä suuri kuin maksimaalisten ketjujen lukumäärä, joka on $n!$. Toisaalta voidaan tarkastella joukkoa $M \in \mathcal{M}$ ja kysyä kuinka monta maksimaalista ketjua sisältää sen. Maksimaalinen ketju muotoa (1) sisältää joukon M jos ja vain jos $\{x_1, x_2, ..., x_k\} = M$, missä $k = |M|$.

Näin ollen kysytään, kuinka monta joukon X lineaarista järjestystä on sellaista, että ensimmäiset k alkiota ovat vain joukon M alkioita. Joka tapauksessa joukon M alkiot voidaan järjestää $k!$ tavalla, jolloin määritetään ensimmäiset k kappaletta joukkoja ketjussa. Alkiot, jotka eivät kuuluu joukkoon M, voidaan järjestää $(n-k)!$ tavalla, mikä määrittää loput ketjusta. Kaiken kaikkiaan M sisältyy $k!(n-k)!$ maksimaaliseen ketjuun. Siksi järjestettyjen parien $(\mathcal{R}, M)$ määrä on yhtä suuri kuin

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!(n - |M|)!,$$

kun taas ensimmäisen laskutavan mukaan se on enintään $n!$. Jaetaan saatu lauseke luvulla $n!$, saadaan

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{|M|!(n - |M|)!}{n!} = \sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \leq 1. \tag{2}$$

Käytetään tietoa, että $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ on vähintään yhtä suuri kuin mikä tahansa binomikerroin muotoa $\binom{n}{k}$, $\quad k = 0, 1..., n$. Siksi

$$1 \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \geq |\mathcal{M}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}},$$

ja näin ollen

$$|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

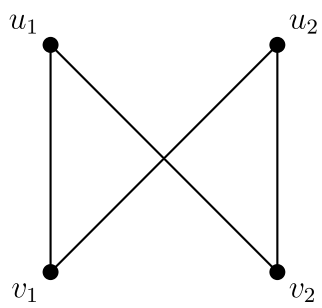
□

Kohdassa (2) saatua epäyhtälöa kutsutaan tunnetummin LYM epäyhtälöksi *(engl. LYM inequality)*, sen löytäjien Lubell [3], Meŝhalkin[5] ja Yamamoto [6] mukaan. Kappaleessa 4.2 tarkastellaan vielä toista erilaista todistusta Spernerin lauseelle.

3.3 Syklin C_4 ongelma

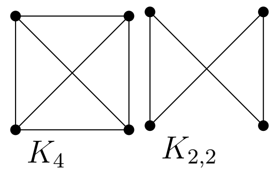
Tarkastellaan verkkoa G, jolla on n solmua. Mitä voidaan sanoa sen kaarien lukumäärästä? Vastaus saadaan suoraan verkon määritelmästä. Kaarien lukumäärä voi olla siis mikä tahansa kokonaisluku nollan ja $\binom{n}{2}$ väliltä. Suurin mahdollinen kaarien lukumäärä n-solmuisessa verkossa on näin ollen $\binom{n}{2}$ ja kaikki tällaiset verkot ovat isomorfisia täydellisen verkon K_n kanssa.

Palautetaan mieleen täydellinen kaksiosainen verkko $K_{n,m}$, jota tarkasteltiin aikaisemmin esimerkissä 2.11. Määritetään nyt $K_{2,2}$. Olkoon $V = \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2\}$ ja $E = \{\{u_1, v_1\}\}, \{u_1, v_2\}, \{u_2, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}$.



Kuva 3: täydellinen kaksiosainen verkko $K_{2,2}$

Tämän kappaleen mielenkiintoinen kysymys on: Mikä on suurin mahdollinen määrä kaaria n-solmuisessa verkossa, jolla ei ole isomorfista aliverkkoa verkon $K_{2,2}$ kanssa? Toisin sanoen montako kaarta voi olla n-solmuisessa verkossa, joka ei sisällä neljän mittaista sykliä? Tarkastellaan indusoimatonta aliverkkoa ja siten esimerkiksi täydellinen verkko K_4 sisältää verkon $K_{2,2}$. Verkko $K_{2,2}$ on siis verkon K_4 aliverkko kuten kuvasta 4 voi nähdä.



Kuva 4: Täydellinen verkko K_4 ja täydellinen kaksiosainen verkko $K_{2,2}$

Verkolla, jolla ei ole kolmion muotoista sykliä, voi olla yhteensä $\lfloor n^2/4 \rfloor$ kaarta [4, Lause 4.7.1], joka on suunnilleen puolet $\binom{n}{2}$ rajoittamattoman n-alkioisen verkon suurimmasta mahdollisesta kaarien lukumäärästä. Verrattuna tähän neljän mittaisen syklin kieltäminen tekee kaarien lukumäärästä paljon pienemmän, niin kuin tullaan todistamaan.

Lause 3.8. *Jos n solmuisella verkolla ei ole isomorfista aliverkkoa verkon $K_{2,2}$ kanssa, niin sillä on enintään $\frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$ kaarta.*

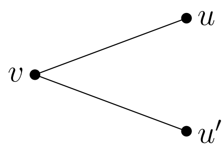
Ennen kuin todistamme lauseen 3.8 palautetaan mieleen analyysista yleisemmin tunnettu Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

Propositio 3.9. *(Cauchy-Schwarz epäyhtälö) Kaikille mielivaltaisille reaaliluvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pätee*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Siirrytään nyt lauseen 3.8 todistukseen.

Todistus. Merkitään verkon G kaikkia solmuja $V = V(G)$. Määritellään joukko M, joka sisältää kaikki parit muotoa $(\{u, u'\}, v)$, missä $v \in V$, $\{u, u'\} \in \binom{V}{2}$ ja v on liitetty kaarella molempiin solmuihin u ja u'. Kaksoislasketaan nyt joukon M koko. Toisin sanoen lasketaan aliverkot, jotka ovat muotoa:



Kiinnitetylle parille $\{u, u'\}$ voi olla olemassa vain yksi solmu $v \in V$, joka on liitettynä molempiin solmuihin u ja u'. Jos on olemassa kaksi tällaista solmua v ja v', niin yhdessä solmujen u ja u' kanssa ne muodostavat isomorfisen aliverkon täydellisen kaksiosaisen verkon $K_{2,2}$ kanssa. Täten $|M| \leq \binom{n}{2}$.

Nyt tarkastellaan montako alkiota kuuluu joukkoon M. Jokainen solmun v naapuripari $\{u, u'\}$ muodostaa yhden alkion joukkoon M. Jos solmun v aste on d eli siihen on liitetty d kappaletta kaaria, niin se muodostaa yhteensä $\binom{d}{2}$ alkiota joukkoon M. Sen takia, jos merkitään joukon V solmujen asteita $d_1, d_2, \ldots, d_n$, saadaan $|M| = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$. Yhdistämällä tämä aikaisempaan arvioon saadaan uudeksi arvioksi

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2}. \tag{3}$$

Toisaalta verkon G kaikkien kaarien lukumäärä on $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$. Voidaan olettaa, että verkolla G ei ole yksittäisiä irrallisia solmuja, joten $d_i \geq 1$ kaikilla i. Tällöin $\binom{d_i}{2} \geq \frac{1}{2}(d_i - 1)^2$ ja siten arviosta (3) saadaan, että

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)^2 \leq n^2.$$

Käytetään nyt Cauchy-Schwarz epäyhtälöä niin, että $x_i = d_i - 1$ ja $y_i = 1$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)^2}\sqrt{n} \leq \sqrt{n^2}\sqrt{n} = n^{3/2},$$

joten

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \leq \frac{1}{2}(n^{3/2} + n).$$

□

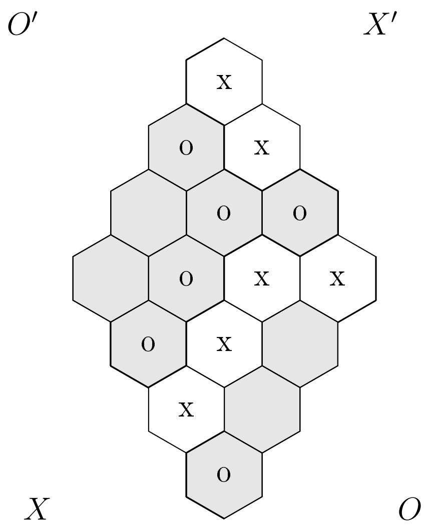
4 Esimerkkejä

Sovelletaan ja syvennetään kaksoislaskennan tärkeitä käsitteitä seuraavissa kappaleissa käsiteltävien esimerkkien avulla.

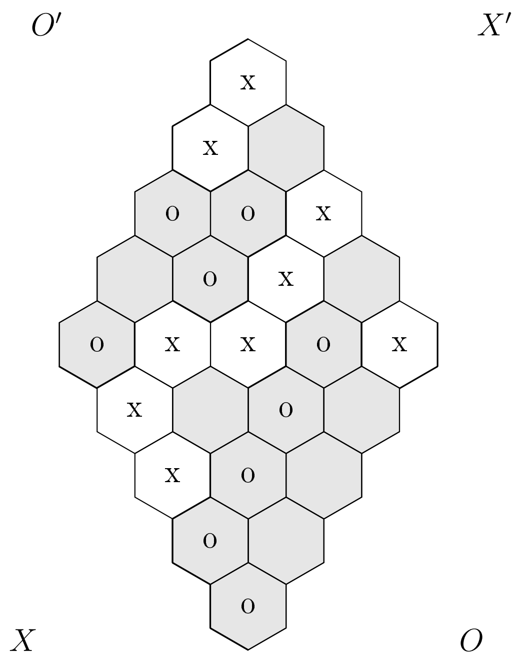
4.1 Hex-lautapeli

Hex-lautapeli kehitettiin 1940-luvulla. Se on kahden hengen strategiapeli, jossa tarkoituksena on liikkua polkua pitkin laudan vastakkaiselle sivulle. Aluksi pelissä valitaan pelaajien sivut eli missä suunnassa pelaajat yrittävät muodostaa voittopolkuaan. Sitten pelaajat laittavat vuorotellen nappulansa pelilaudalle. Normaalisti pelilauta koostuu heksagoneista, joita voi olla esimerkiksi 4×4 tai 11×11. Pelilautaa täytetään pelilaudasta riippuen esimerkiksi piirtämällä X ja O, eri värein tai pelinappuloin. Peli päättyy, kun toinen pelaaja on saanut tehtyä voittopolun omalta sivulta vastakkaiselle sivulle.

Tarkastellaan kuvien 5 ja 6 Hex-pelilautoja. Pelilaudat ovat kooltaan 4×4 ja 5×5. Pelaaja O yrittää muodostaa voittopolun sivulta O' sivulle O ja pelaaja X taas sivulta X' sivulle X. Pelit ovat päättyneet ja molemmat pelit on voittanut X, koska X on onnistuneesti tehnyt polun laudan sivulta X' sivulle X. Hex-lautapeli ei voi päättyä tasapeliin, vaan näiden sääntöjen puitteissa on olemassa aina voittostrategia. Koko kappale 4.1 on tehty David Galen artikkelin [1] pohjalta.



Kuva 5: 4×4 Hex-pelilauta



Kuva 6: 5×5 Hex-pelilauta

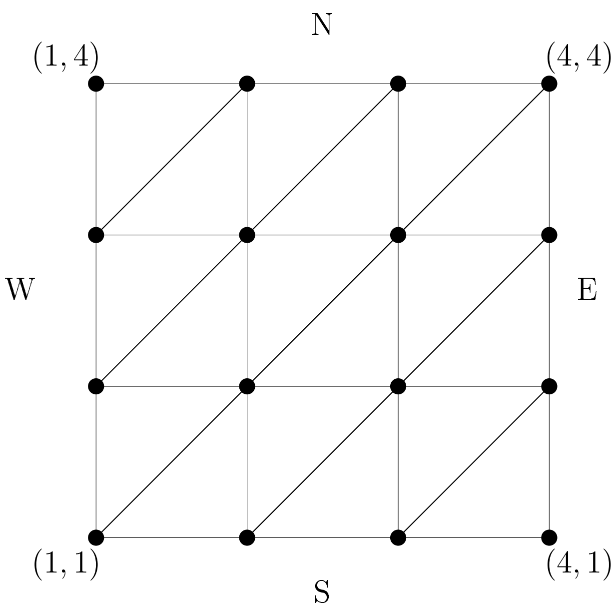
Mielenkiintoista on kuinka Hex-lautapelistä voidaan muodostaa lause, joka on yhtäpitävää Brouwerin kiintopistelauseen 3.3 kanssa. Todistetaan nyt, että Brouwerin kiintopistelause osoittaa Hex-lautapelin olevan deterministinen. Tämän todistamista varten muunnetaan Hex-lautapeli verkoksi, jotta sitä on helpompi käsitellä matemaattisesti.

Merkintä 4.1. *(Hex-lauta)*
Olkoon $(Z^2, <)$ osittain järjestetty joukko, missä $<$ on leksikografinen järjestys. Z^2 määrittää verkon pisteet joukosta $\mathbb{R}^2$. Kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \max x_i$. Hex-lauta on verkko B_k, joka on kokoa k. Verkon B_k solmut koostuu kaikista alkioista z joukossa Z^2, missä $(1,1) \leq z \leq (k,k)$. Solmut z ja z' ovat vierekkäiset verkossa B_k, jos

$$\|z - z'\| = 1 \quad ja \tag{4}$$

$$z \ ja \ z' \quad ovat \quad vertailtavissa. \tag{5}$$

Kuvasta 7 nähdään 4×4 Hex-pelilauta verkkona. Pelilaudan rajaavat kaaret ovat merkattu kompassin mukaan N, S, E, ja W. Verkon ylin solmu vasemmalta on tavallisen Hex- pelilaudan ylin heksagoni ja vastaavasti alin solmu oikealta kuvaa alinta heksagonia. Kaksi muuta kulmaa kuvaa keskimmäisiä heksagoneja (W vasemmanpuoleista ja E oikeanpuoleista). Vaakasuuntaan



Kuva 7: 4×4 Hex-pelilauta verkkona

pelaava pelaaja yrittää tehdä polun kaarelta E kaarelle W ja vastaavasti pystysuuntaan pelaava pelaaja yrittää tehdä polun kaarelta N kaarelle S. Pelilaudalla liikutaan siis kaaria pitkin ja solmut vastaavat alkuperäisen laudan heksagoneja, johon voi oman pelimerkin laittaa.

Lause 4.2. *(Hex-lause) Verkko B_k on kahden aliverkon H ja V peittämä. Toisin sanoen verkon B_k solmut kuuluvat joko aliverkkoon H tai V. Tällöin joko joukko H sisältää polun kaarelta E kaarelle W tai joukko V sisältää polun kaarelta N kaarelle S. Hex-peli ei siis voi päättyä tasapeliin.*

Lauseen 4.2 todistuksessa käytetään vielä seuraavaa algebrallista faktaa.

Lemma 4.3. *Olkoon z^1, z^2, z^3 kolmion Δ kärkisolmut joukossa $\mathbb{R}^2$ ja olkoon $\rho(z^i) = z^i + v^i$, missä v^1, v^2, v^3 ovat annetut vektorit. Määritellään $\hat{\rho}\colon \Delta \to \mathbb{R}^2, \hat{\rho}(x) = \lambda_1(z^1+v^1)+\lambda_2(z^2+v^2)+\lambda_3(z^3+v^3)$, missä $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$ ja $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$. Tällöin funktiolla $\hat{\rho}$ on kiintopiste jos ja vain jos 0 kuuluu vektoreiden v^1, v^2, v^3 virittämään konveksiin kolmioon.*

Todistus. (Brouwer $\to$ Hex) Hex-pelilauta muodostaa kolmioinnin $k \times k$ neliöstä I^2 joukossa $\mathbb{R}^2$. Geometrisesti nähdään, että jokainen neliön I^2 piste voidaan ilmaista yksikäsitteisesti konveksina kombinaationa jostain enintään kolmen solmun joukosta, missä solmut ovat pareittain vierekkäisiä. Nämä kolmen solmun kombinaatiot muodostavat kaaret ja kolmiot verkkoon

B_k, kuten Kuvassa 7. Toisin sanoen, kun tiedetään kolmion kärkipisteet voidaan niiden avulla esittää mikä tahansa kolmion pisteistä. Tiedetään myös, että mikä tahansa kuvaus f verkolta B_k joukkoon $\mathbb{R}^2$ voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi $\hat{f}$ joukossa I_k^2. Eli jokaiselle $x \in I^2$ löytyy esitys $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$, missä $\lambda_i \geq 0$ ja $\sum \lambda_i = 1$. Näin ollen määritellään

$$\hat{f}(x) = \lambda_1 f(z^1) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3). \tag{6}$$

Oletetaan, että verkko B_k on jaettu kahteen joukkoon H ja V. Määritellään vielä neljä muuta joukkoa, jotka sisältävät kaikki verkon solmut. Joukko $\widehat{W}$ sisältää kaikki ne solmut, jotka ovat yhdistettynä W kaareen H-polulla ja joukko $\widehat{E} = H - \widehat{W}$. Joukko $\widehat{S}$ sisältää kaikki ne solmut, jotka ovat yhdistettynä S kaareen V-polulla ja joukko $\widehat{N} = V - \widehat{S}$. Määritelmien nojalla on selvää, että joukkojen $\widehat{W}, \widehat{E}, \widehat{N}, \widehat{S}$ muodostamat aliverkot eivät ole yhtenäisiä. Haetaan ristiriitaa vastaoletuksella, että H-polkua ei ole olemassa E kaarelta W kaarelle eikä V-polkua N kaarelta S kaarelle.

Olkoon e^1 ja e^2 joukon $\mathbb{R}^2$ yksikkövektoreita ja määritetään nyt kuvaus $f : B_k \longrightarrow B_k$:

$$f(z) = \begin{cases} z + e^1 & \forall \quad z \in \widehat{W} \\ z - e^1 & \forall \quad z \in \widehat{E} \\ z + e^2 & \forall \quad z \in \widehat{S} \\ z - e^2 & \forall \quad z \in \widehat{N} \end{cases}$$

Tosiaankin osoitetaan, että $f(z) \in B_k$. Käydään tapaus kerrallaan. Ensimmäinen tapaus $z + e^1 \notin B_k$ vain, jos $z \in E$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa, että voittopolkua H ei ole olemassa. Toisaalta $z - e^1 \notin B_k$ vain jos $z \in W$, mutta tällöin $z \notin \widehat{E}$ vaan $z \in \widehat{W}$. Vastaavasti $z + e^2 \notin B_k$ vain, jos $z \in N$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa, että voittopolkua V ei ole olemassa. Toisaalta $z - e^2 \notin B_k$ vain, jos $z \in S$, mutta tällöin $z \notin \widehat{N}$ vaan $z \in \widehat{S}$.

Laajennetaan funktio f jatkuvaksi funktioksi $\hat{f}$ joukossa I_k^2 kuten yllä (6), jolloin sillä tulisi olla kiintopiste. Seuraavaksi näytetään, että tämä on ristiriita. Käytetään lemmaa 4.3 kuvaukseen $\hat{f}$. Keskeistä on, että $\widehat{W}$ ja $\widehat{E}$ sekä $\widehat{S}$ ja $\widehat{N}$ ovat epäyhtenäisiä. Tämän johdosta, jos tarkastellaan kolmea keskenään vierekkäistä solmua mistä tahansa kolmiosta, ei voi olla niin, että yksi solmuista on siirretty vektorilla e^i ja toinen solmu vektorilla $-e^i$. Tällöin kolmea solmua siirretään vektoreilla, jotka sijaitsevat joukon $\mathbb{R}^2$ samassa neljänneksessä. Jotta kuvauksella $\hat{f}$ olisi kiintopiste pitäisi 0 kuulua tähän solmujen muodostamaan kolmioon eli kantavektoriin, mikä on mahdotonta, koska mitään kolmiota ei siirretä niin, että mennään vastakkaisiin suuntiin. Täten ollaan päädytty kuvaukseen, jolla ei ole kiintopistettä, mikä on ristiriidassa Brouwerin kiintopistelauseen kanssa. □

4.2 Spernerin lauseen toinen todistus

Todistetaan nyt lause 3.5 toisella tavalla, johon tarvitaan seuraavia määritelmiä ja havaintoja.

Määritelmä 4.4. *Symmetrinen ketju* osittain järjestetyssä joukossa 2^X on sellainen jono $X_k \subset X_{k+1} \subset \ldots \subset X_{n-k}$, että $|X_i| = i$ kaikilla $k \leq i \leq n-k$.

Symmetrinen ketju sisältää siis yhden joukon kokoa k, yhden joukon kokoa $k+1$, ..., yhden joukon kokoa $n-k$ ja ei muita joukkoja (jollain luvulla k). Symmetrisiksi ketjuiksi jakaminen on tapa ilmaista joukko 2^X monen erillisen symmetrisen ketjun yhdisteenä.

Esimerkki 4.5. Tapauksessa $n = 3$ ketju, joka koostuu joukoista $\{2\}$ ja $\{2,3\}$, on symmetrinen, koska $\{2\} \subset \{2,3\}$. Myös ketju $\{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ on symmetrinen, koska $\emptyset \subset \{3\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\}$. Kun taas joukkojen $X_1 = \{1\}$, $X_0 = \emptyset$ ja $X_3 = \{1,2,3\}$ muodostama ketju ei ole symmetrinen, koska joukkojen $\{1\}$ ja $\{1,2,3\}$ välistä puuttuu kahden alkion joukko X_2.

Määritellään seuraavaksi sulkurakenne, joka auttaa hahmottamaan symmetrisiä ketjuja.

Määritelmä 4.6. Olkoon $X = \{1, 2, ..., n\}$. Kaikille joukoille $M \subseteq X$ asetetaan jono "$m_1 m_2 ... m_n$", joka koostuu vasemman ja oikean puoleisista suluista seuraavan säännön mukaan

$$m_i = \begin{cases} \text{"("}, & i \in M \\ \text{")"}, & i \notin M. \end{cases}$$

Esimerkki 4.7. Tapauksessa $n = 7$ ja joukko $M = \{2, 6\}$, saadaan jono "$m_1 m_2 ... m_7$" = ")()))()".

Esimerkissä 4.7 tuloksena saatu sulkujen jono on melko yleinen ja siitä huomataan, ettei sulkumerkkien tarvitse olla niin sanotusti oikein. Vasemman ja oikean sulun ei siis tarvitse sopia yhteen. Tuloksesta saadaan kuitenkin sulkujen osittaisia pareja. Suluista muodostetaan osittaisia pareja seuraavalla tavalla: Ensin muodostetaan parit kaikista vierekkäisistä sulkupareista "()" ja sitten sivuutetaan kaikki valmiiksi muodostetut sulkuparit ja muodostetaan jäljellä olevista suluista sulkupareja säännön mukaan.

Esimerkki 4.8. Osittaisten sulkuparien muodostus:

$$) \quad \underbrace{(\ \ )} \quad) \quad) \underbrace{(\ \ )}$$

$$) \quad) \quad) \quad (\quad \underbrace{(\quad \underbrace{(\ \ )}\underbrace{(\ \ )} \quad)}$$

Parien muodostuksen jälkeen osa suluista on saattanut jäädä ilman paria. Säännöstä seuraa, että jäljelle jääneiden sulkujen jonossa on alussa vain sulkevat sulut ja niiden jälkeen vain avaussulkeita. Kahdella sulkujonolla on samat osittaiset parit, jos sulkuparit ovat samat molemmissa jonoissa ja samassa kohtaan.

Esimerkki 4.9. Samat osittaiset sulkuparit: Joukot M_5, M_4 ja M_3 ovat osajoukkoja joukosta $\{1, 2, ..., 11\}$:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
M_5 = \{4,5,6,8,11\}: &) &) &) & (& (& (&) & (&) &) & (\\
M_4 = \{5,6,8,11\}: &) &) &) &) & (& (&) & (&) &) & (\\
M_3 = \{5,6,8\}: &) &) &) &) & (& (&) & (&) &) &)
\end{array}$$

Kaksi jonoa, joilla on samat osittaiset parit, voivat erota toisitaan vain siten, että toisella on joko enemmän parittomia oikeanpuoleisia sulkuja vasemmalla tai enemmän parittomia vasemmapuoleisia sulkuja oikealla. Tästä nähdään, että kahden joukon, joilla on samat osittaiset parit vastaavissa sulkujonoissa, on sisällyttävä toisiinsa eli toinen on toisen osajoukko. Kuten esimerkissä 4.9 $M_3 \subset M_4 \subset M_5$.

Määritetään nyt ekvivalenssi $\sim$ joukolle 2^X.

Määritelmä 4.10. Kahden joukon $M, M' \subseteq X$ välillä on ekvivalenssirelaatio $M \sim M'$, jos joukolla M ja M' on samat osittaiset sulkuparit vastaavissa ketjuissa.

Esimerkin 4.9 joukoille M_5, M_4 ja M_3 pätee $M_5 \sim M_4 \sim M_3$.

Huomautus 4.11. Jos sulkujonossa on k sulkuparia, niin joukon pienin koko on k. Esimerkissä 4.9 on kolme sulkuparia ja pienin joukko on M_3.

Liitetään symmetrinen ketju osaksi sulkurakennetta. Olkoon $\sim [M]$ jokin ekvivalenssiluokka ja osoitetaan, että se koostuu symmetrisistä ketjuista. Oletetaan, että ekvivalenssiluokalla $\sim [M]$ on k sulkuparia. Tällöin täytyy olla myös k kappaletta vastinpareja, jotka ovat kiinnitettyjä. Matemaattisesti muotoiltuna: Olkoon pienin $M_0 = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ ja olkoon sen vastinparit $\widetilde{M} = \{c'_1, c'_2, \ldots, c'_k\}$. Jotta ekvivalenssiluokan joukot M muodostavat symmetrisen ketjun, sulkuparien ja niiden vastinparien tulee pysyä samana kussakin jonossa. (Jos sulkuparit muuttuvat eri jonoissa, jonojen symmetrisyys ei säily.) Esimerkiksi esimerkin 4.9 sulkuparit $\{5,6,8\}$ ja niiden vastinparit $\{7,9,10\}$ ovat kiinnitettyjä. Jonot voivat siis sisältää muita alkioita, siten, ettei uusia sulkupareja synny. Toisin sanoen isompia jonoja saadaan ketjuun avaamalla sulkeita aina oikealta. Esimerkiksi esimerkin 4.9 ketjuun saadaan lisättyä jono avamaalla kolmas sulku vasemmalta katsoen, mikä on oikeimman puoleisin suljettu sulku:

$$M_6 = \{3,4,5,6,8,11\}: \quad) \;\;) \;\; (\;\; (\;\; (\;\; (\;\;) \;\; (\;\;) \;\;) \;\; ($$

Konstruoidaan nyt kaikki joukon M_0 ekvivalentit osajoukot joukosta X siten, että ne muodostavat symmetrisen ketjun. Muodostetaan seuraavaksi symmetrisen ketjun toiseksi pienin osajoukko. Lisätään joukosta $X \setminus M_0 \cup \widetilde{M}$ suurin alkio joukkoon M_0 eli $M_1 = |M_0|+1$ ja $M_0 \subset M_1$. Seuraavaksi lisätään joukon $X \setminus M_1 \cup \widetilde{M}$ toiseksi suurin alkio joukkoon M_1 eli $M_2 = |M_1| + 1 = |M_0| + 2$ ja $M_0 \subset M_1 \subset M_2$. Jatketaan tätä aina siihen asti, että saadaan joukko M_{n-k}, jolle $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-k}$. Näin ollen jokainen ekvivalenssiluokka $\sim [M]$ koostuu symmetrisistä ketjuista.

Siirrytään nyt todistamaan Spernerin lausetta 3.5 näillä työkaluilla.

Todistus. Joukon 2^X kaikilla jaoilla symmetrisiin ketjuihin (jos niitä on olemassa) täytyy muodostua täsmälleen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ symmetristä ketjua, koska jokainen symmetrinen ketju sisältää täsmälleen yhden joukon kokoa $\lfloor n/2 \rfloor$. Kaikilla ketjuilla on enintään yksi yhteinen joukko minkä tahansa riippumattoman joukkoperheen kanssa (lemma 3.7). Näin ollen Spernerin lause on seurausta **väitteestä**:

Kaikille äärellisille joukoille X, joukkoperheellä 2^X on jako symmetrisiin ketjuihin.

Osoitetaan tämä väite. Olkoon $M \subseteq X$ sulkuparijono. Eli M kuuluu ekvivalenssiluokkaan $\sim [M]$. Kuten yllä todettiin tämä muodostaa symmetrisen ketjun, jolloin M on osa yksiselitteistä symmetristä ketjua. Toisin sanoen riitti todistaa, että ekvivalenssiluokka $\sim [M]$ koostuu symmetrisestä ketjusta. Näin ollen ollaan todistettu, että joukkoperheellä 2^X on jako symmetrisiin ketjuihin eli se sisältää enintään $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ joukkoa.

$\square$

4.3 Kiellettyjen aliverkkojen ongelma

Kuten kappaleessa 3.3 huomattiin, on mielenkiintoista tutkia minkä kokoisia verkkoja saadaan aikaan tietyillä ehdoilla. Kiellettyjen aliverkkojen ongelma *(engl. forbidden subgraph problem)* on kokonaisuudessaan osa äärimmäistä kombinatoriikkaa *(engl. extremal combinatorics)*, mikä tutkii kuinka suuri tai pieni jokin joukko äärellisiä alkioita voi olla niin, että se täyttää tietyt ehdot. Joukkojen alkiot voivat olla esimerkiksi verkkoja, vektoreita tai lukuja. Seuraavassa esimerkissä näytetään, että lauseessa 3.8 saatu raja on paras mahdollinen vakiokertoimeen asti. Tässä kappaleessa lähteenä on käytetty Juknan teosta, *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science* [2].

Esimerkki 4.12. (Tiivis C_4-vapaa verkko)
Olkoon p alkuluku ja $V = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}_p$, jossa siis solmut ovat äärellisen kunnan alkioista muodostettuja pareja (a, b) ja $a \neq 0$. Määritellään verkko G siten, että solmuparit (a, b) ja (c, d) on liitetty toisiinsa kaarella jos ja vain jos $ac = b + d$ (kaikki operaatiot modulo p). Kaikilla solmupareilla (a, b) on olemassa $p - 1$ verran ratkaisuja yhtälölle $ax = b + y$. Tämä on helppo nähdä, sillä voidaan valita mikä tahansa $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$(koska $x \equiv r$, missä $r = 1, \ldots, p-1$), niin y on yksikäsitteisesti määritelty. Näin ollen G on $(p-1)$-säännöllinen verkko, jolla on $n = p(p-1)$ solmua, jolloin jotkin kaarista ovat silmukoita. Tällöin verkon G kaarien lukumäärä on $n(p-1)/2 = \Omega(n^{3/2})$. Perustellaan tämä. Koska $2 \leq p$, niin $2p \leq p^2$, jolloin solmujen lukumäärästä saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&n = p(p-1) = p^2 - p \geq \frac{1}{2}p^2 \\
&\Leftrightarrow 2n \geq p^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{n} \geq p \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \geq \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Näin ollen kaarien lukumäärälle saadaan arvio

$$\frac{n(p-1)}{2} = \frac{n \cdot n}{2p} \geq \frac{n^2}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}n^{3/2}.$$

Osoitetaan, että verkko G on C_4-vapaa. Olkoon (a, b) ja (c, d) kaksi mielivaltaisesti valittua solmua. Etsitään yksikäsitteistä ratkaisua (x, y) yhtälöparista

$$\begin{cases} ax = b + y & (1) \\ cx = d + y & (2) \end{cases}$$

Ratkaistaan ensin y yhtälöstä (2), josta saadaan $y = cx - d$. Sijoitetaan saatu y yhtälöön (1) ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} ax &= b + cx - d \\ ax - cx &= b - d \\ (a - c)x &= b - d \\ x &= (b - d)(a - c)^{-1} \quad (a - c \neq 0) \end{aligned}$$

Lasketaan yhtälöt (1) ja (2) yhteen.

$$\begin{aligned} ax + cx &= b + d + 2y \\ 2y &= (a + c)x - b - d \end{aligned}$$

Nyt yhtälöpariksi saadaan

$$\begin{cases} x = (b - d)(a - c)^{-1} \\ 2y = x(a + c) - b - d \end{cases}$$

Yksikäsitteinen ratkaisu saadaan vain kun $a \neq c$. Jos $b = d$, niin $x = 0$. Näin ollen, jos $a \neq c$ ja $b \neq d$, niin solmuilla (a, b) ja (c, d) on tasan yksi yhteinen naapuri. Jos $a = c$ tai $b = d$, niin solmuilla (a, b) ja (c, d) ei ole yhtään yhteistä naapuria.

Lähdeluettelo

[1] D. Gale, *The Game of Hex and Brouwer Fixed-Point Theorem*, Amer. Math. Monthly **86** (1979) 818–827. 28

[2] S. Jukna, *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, 2011. 17, 35

[3] D. Lubell,*A short proof of Sperner's lemma*, J. Combinatorial Theory **1** (1966) 299. 25

[4] J. Matoušek & J. Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, Oxford OUP, Oxford, 2008. 2, 26

[5] L. D. Mešalkin, *A generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set*, (Russian) Teor. Verojatnost. i Primenen **8** (1963) 219–220. 25

[6] K. Yamamoto, *Logarithmic order of free distributive lattice*, J. Math. Soc. Jpn. **6** (1954) 343–353. 25