Todennäköisyyslaskennan laskusäännöt lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Viivi Aaltonen
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2022

Sisällys

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jonka tavoitteena on tuottaa kaikille avointa oppimateriaalia lukion matematiikan kursseille.

Tämä projekti on toteutettu ryhmämuotoisesti viiden yliopisto-opiskelijan sekä kahden opettajan toimesta. Kyseinen oppikirja kattaa lukion pitkän matematiikan vuoden 2019 mukaisen opetussuunnitelman MAA8-moduulin, jonka aiheena on tilastot ja todennäköisyys.

Oppikirja sisältää aiheet: tilastot, regressio ja jakaumat, klassinen ja tilastollinen todennäköisyys, todennäköisyyslaskennan laskusäännöt sekä permutaatiot ja kombinaatiot. Tämä tutkielma käsittelee osiota todennäköisyyslaskennan laskusäännöt.

Oppikirjan yhtenäistämiseksi projektiryhmä on aluksi kokoontunut muutamaan otteeseen. Näillä kerroilla on jaettu kurssin materiaali opiskelijoiden kesken ja kahden yhteisen artikkelin pohjalta jäsennelty oppikirjaa niin, että useasta tekijästä huolimatta se olisi mahdollisimman yhtenevä tavoitteiltaan ja osittain myös tehtävätyypeiltään. Artikkelit, joita oppikirjan tekemisessä on erityisesti hyödynnetty ovat *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*, josta on valittu oppikirjalle kolme tavoitetta ja *Collaborative Learning in Mathematics*, josta on valittu kolme tehtävätyyppiä tätä oppikirjaa varten.

Tämä tutkielma koostuu neljästä osiosta: perusteluosiosta, oppimateriaalista, opettajan oppaasta ja tehtävien vastauksista. Perusteluosiossa perustellaan tieteellisten tutkimusten avulla oppimateriaaliin valitut tehtävät ja miten ne tukevat asetettuja tavoitteita. Oppimateriaali koostuu teoriaosioiden lisäksi erilaisista pohdinta- ja harjoitustehtävistä. Opettajan oppaassa kerrotaan ohjeellinen ajankäyttömalli ja annetaan vinkkejä tehtäviin liittyen, joiden avulla oppimateriaalia on mahdollista eriyttää alas- tai ylöspäin. Lisäksi oppaassa kerrotaan pohdintatehtävien tavoitteet ja ratkaisut haastavampiin tehtäviin. Kaikkien oppimateriaalin tehtävien vastaukset löytyvät tutkielman lopusta.

2 Oppikirjan tavoitteet

Tässä osiossa tarkastellaan oppikirjan tavoitteita, jotka perustuvat pääosin vuoden 2019 Lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Näiden tavoitteiden lisäksi ryhmämme valitsi artikkelista *Habits of Mind* matemaattisen ajattelun tavoitteita ja artikkelista *Collaborative learning in Mathemetics* opetussuunnitelman ja matemaattisen ajattelun tavoitteita tukevia erilaisia tehtävätyyppejä.

2.1 Opetussuunnitelman tavoitteet

Vuoden 2019 Lukion opetussuunnitelman perusteissa on esitelty lukio-opetuksen tavoitteet, jotka on jaettu laaja-alaisiin sekä yleisiin ainekohtaisiin tavoitteisiin [1]. Laaja-alaisiin oppimistavoitteisiin kuuluvat yhteiskunnallinen osaaminen, eettisyys ja ympäristöosaaminen, hyvinvointiosaaminen, globaali- ja kulttuuriosaaminen, vuorovaikutusosaaminen sekä monitieteinen ja luova osaaminen. Näiden tavoitteiden myötä oppilaiden on lukion jälkeen tarkoitus omata hyvä yleissivistys, taito rakentaa kestävää tulevaisuutta sekä omata vahvat jatko-opinto-, työelämä- ja kansainvälisyysvalmiudet. [1]

Lukion matematiikan opetuksen tavoitteena on lisätä oppilaiden kiinnostusta matematiikkaa kohtaan lähtemällä liikkeelle oppilaita kiinnostavista aiheista ja yhdistämällä niihin matematiikkaa [1]. Tässä tutkielmassa osa sanallisista tehtävistä on pyritty valitsemaan lukiolaisten mahdolliset kiinnostuksen kohteet huomioiden.

Muita yleisiä tavoitteita matematiikan opetuksessa ovat vuorovaikutusosaamisen lisääminen ja rohkaiseminen matemaattisen kielen käyttämiseen [1]. Tässä tutkielmassa on tehtäviä, joista osa on tarkoitettu ratkaistavaksi ryhmissä tai pareittain. Lisäksi oppimateriaalin teoriaosiot ja esimerkit on valittu niin, että ne antavat matalan kynnyksen matemaattisen kielen harjoitteluun ja sen omaksumiseen omaan matematiikan tekemiseen. Yleisten tavoitteiden lisäksi opetussuunnitelmassa on lueteltu myös kurssikohtaiset tavoitteet [1]. Tämä oppikirja käsittelee moduulia *Tilastot ja todennäköisyys*, jonka tavoitteena on, että oppilas

- osaa havainnollistaa diskreettiä tilastollista jakaumaa sekä määrittää ja tulkita jakauman tunnuslukuja
- osaa havainnollistaa kahden muuttujan yhteisjakaumaa sekä määrittää korrelaatiokertoimen ja regressiokäyrän
- perehtyy kombinatorisiin menetelmiin
- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja laskusääntöihin
- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja tulkitsemaan sitä
- osaa käyttää ohjelmistoja digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä tilastollisen tiedon esittämisessä

- osaa hyödyntää ohjelmistoja jakaumien havainnollistamisessa, tunnuslukujen määrittämisessä sekä todennäköisyyksien laskemisessa. [1]

Tässä tutkielmassa käsitellään todennäköisyyden laskusääntöihin liittyvää tavoitetta. Muut moduulin tavoitteet käsitellään muiden ryhmäläisten materiaaleissa.

2.2 Ajattelun tavoitteet

Jo kauan tietynlaista matematiikkaa on opetettu kouluissa painottaen erityisesti matematiikan olevan kasa menetelmiä, joiden avulla saadaan haluttuja tuloksia. Tällaisella matematiikalla on kuitenkin hyvin vähän tekemistä sen kanssa, millaista matematiikkaa oppilaat kohtaavat koulun ulkopuolisessa elämässä.
Tällä hetkellä emme siis voi tietää, millaisia matemaattisia ongelmia tulevaisuudessa valmistuvat oppilaat tulevat kohtaamaan, joten tiettyjen menetelmien sijaan voisi olla tärkeämpää opettaa oppilaille erilaisia matemaattisia ajattelumalleja, joita he voivat hyödyntää yleisesti ottaen missä tahansa matemaattisissa ongelmissa. [2]

Tällaisia ajattelumalleja on esitelty artikkelissa *Habits of Mind: An Organizin Principle for Mathematics Curricula*. Kyseisen artikkelin mukaan oppilaille olisi tärkeää opettaa kahdeksan erilaista matemaattista ajattelumallia. Näiden ajattelumallien mukaan oppilaiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä (*pattern sniffers*), kokeilijoita (*experiments*), kuvailijoita (*describers*), puuhailijoita (*tinkerers*), keksijöitä (*inventors*), visualisoijia (*visualizers*), oletuksen tekijöitä (*conjectures*) ja arvailijoita (*guessers*). [2]

Näistä kahdeksasta matemaattisesta ajattelumallista valitsimme oppikirjan tehtävien tavoitteiksi kehittää oppilaita olemaan säännönmukaisuuksien etsijöitä, kuvailijoita ja visualisoijia.

Säännönmukaisuuksien etsiminen
Oppilaiden tulisi osata etsiä erilaisista matemaattisista ongelmista säännönmukaisuuksia kuten kuvioita tai kaavioita, jotka voivat antaa ikään kuin oikotien tehtävän ratkaisemiseen. Säännönmukaisuuksien etsimisestä ei ole hyötyä pelkästään matemaattisissa tehtävissä, sillä kyseisestä taitoa on mahdollista hyödyntää myös arkielämään liittyvissä tilanteissa. [2]

Tämä tavoite otetaan huomioon oppimateriaalissa kannustamalla oppilaita löytämään yhdenmukaisuuksia eri tehtävien välillä ja tunnistamaan, millaisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapahtumasta on kyse, jolloin he voivat käyttää tarvittavaa laskusääntöä tehtävän ratkaisemiseksi.

Kuvaileminen
Oppilaiden tulisi osata kuvailla ja kertoa prosessin eri vaiheet ja perustella toisille, miten ovat kyseiseen prosessiin päätyneet ja miksi se antaa heidän mielestään oikean vastauksen. Oppilaiden olisi myös tärkeää osata kirjoittaa ajatuksiaan ylös prosessiin liittyen. Vaikka ajatukset eivät veisikään oikeaan lopputulokseen, ne voivat kuitenkin olla hyödyksi eteenpäin pääsemisessä ja saada oppilaan kiinnittämään huomioita sellaisiin seikkoihin, joita hän ei vielä ole osannut ajatella. [2]

Tämä tavoite otetaan huomioon oppimateriaalin tehtävänannoissa, sillä useassa harjoitustehtävässä oppilaita pyydetään kirjoittamaan selkeät perustelut, miten ovat päätyneet kyseiseen lopputulokseen. Myös pohdintatehtävissä oppilaiden on tärkeää osata perustella esimerkiksi parilleen, miten ovat päätyneet saamaansa lopputulokseen.

Kyseinen tavoite on myös erittäin oleellinen matematiikan ylioppilaskirjoitusten kannalta, sillä hyvään suoritukseen vaaditaan perustelut saaduille vastauksille. [3]

Visualisointi
Oppilaiden tulisi osata visuaalisesti havainnollistaa erilaisia tilanteita, joita voidaan konkreettisesti nähdä, sekä tilanteita, joihin ei välttämättä ensimmäisellä ajatuksella uskoisi liittyvän visualisointia. [2]

Kyseinen tavoite on huomioitu tehtävissä, joissa edellytetään puukaavion piirtämistä tai on piirretty valmis puukaavio, jota oppilaan on käytettävä. Lisäksi oppimateriaalin teoriaosuuksissa esitellään havainnollistavat Venn-diagrammit, joita oppilaat voivat käyttää myös tehtävien visualisoinnissa.

2.3 Tehtävätyypit

On tehty paljon tutkimusta siitä, miten matematiikkaa pitäisi opettaa, jotta se olisi mahdollisimman tehokasta. Eräs asiaa tutkinut on Malcolm Swan, joka on kirjoittanut aiheesta artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics*. Artikkelissa kerrotaan oppilaiden näkevän matematiikan opetuksen erilaisina toisiinsa liittymättöminä menetelminä ja tekniikoina, jotka heidän on muistettava ulkoa. Kyseinen ajattelutapa juontaa juurensa perinteisistä opetusmenetelmistä, jossa teoriaosuudet, esimerkit ja laskutehtävät vuorottelevat. Artikkelin mukaan tällainen opetustapa vähentää oppilaiden oppimismotivaatiota eikä edistä taitoa käyttää opittuja asioita luokkahuoneen ulkopuolisissa tilanteissa. [4]

Tehokkaamman opettamisen sekä oppimisen edistämiseksi artikkelissa esitellään erilaisia tehtävätyyppejä, joiden tavoitteena on saada oppilaat huomaamaan eri asioiden välisiä yhteyksiä, herättää keskustelua ja ulkoa muistamisen sijaan saada oppilaat oppimaan asioita syvällisesti [4]. Artikkelissa esitellään seuraavat tehtävätyypit: matemaattisten objektien tunnistaminen (*classifying mathematical objects*), erilaisten esitystapojen tulkitseminen (*interpreting multiple representations*), matemaattisten väitteiden arviointi (*evaluating mathematical statements*), ongelmien luominen (*creating problems*) ja erilaisten vastausten analysointi (*analysing reasoning and solutions*) [4]. Näistä viidestä tehtävätyypistä oppikirjaan valittiin erilaisten esitystapojen tulkitseminen, matemaattisten väitteiden arviointi ja erilaisten vastausten analysointi.

Erilaisten esitystapojen tulkitseminen
Matematiikassa on monia erilaisia tapoja esittää sama asia, esimerkiksi sanallisesti, kuvallisesti, algebrallisesti ja symbolisesti. Artikkelissa kerrotaan, kuinka tällaisten erilaisten esitystapojen yhdistäminen on osoittautunut usealle oppilaalle hankalaksi. Tässä tehtävätyypissä oppilaille annetaan saman asian erilaisia esitystapoja ja heidän on yhdistettävä samaa tarkoittavat esitystavat toisiinsa. Artikkelin mukaan tällainen tehtävätyyppi voi oikaista oppilaiden yleisiä väärinkäsityksiä ja herättää keskustelua asioista. [4]

Matemaattisten väitteiden arviointi

Tässä tehtävätyypissä oppilaat arvioivat erilaisia matemaattisia väitteitä ja niiden todenperäisyyttä. Väitteet saattavat pitää paikkaansa aina, joskus tai ei koskaan. Tällaisissa tehtävissä oppilaat pääsevät selittämään ja perustelemaan omia ajatuksiaan ja vakuuttamaan muut oppilaat niiden oikeellisuudesta. Perustellakseen mielipiteensä oppilaiden on keksittävä esimerkkejä, vastaesimerkkejä tai muunlaisia ehtoja, joiden avulla he voivat perustella vastauksen, johon he ovat päätyneet. [4]

Erilaisten vastausten analysointi
Tässä tehtävätyypissä oppilaat analysoivat erilaisia valmiita ratkaisuja. Näissä valmiissa ratkaisuissa voidaan esittää erilaisia ratkaisutapoja samaan tehtävään, jolloin oppilaiden on keskusteltava ja vertailtava erilaisia ratkaisutapoja. Erilaisten oikeiden ratkaisutapojen lisäksi osa annetuista ratkaisuista saattaa olla virheellisiä. Tällöin oppilaiden on tunnistettava ja korjattava virheet. Tällä tehtävätyypillä voidaan oikaista oppilaiden yleisiä väärinkäsityksiä ja herättää keskustelua. [4]

3 Oppimateriaalin perustelu

Todennäköisyyslaskentaa pidetään hyvin tärkeänä matematiikan osa-alueena, sillä oppilaat törmäävät myös koulun ulkopuolisessa elämässä useisiin tapahtumiin, joihin liittyy epävarmuutta [5]. Vaikka todennäköisyyslaskentaa pidetäänkin erityisen tärkeänä, on usealla oppilaalla todettu olevan hankaluuksia siihen liittyvien laskujen kanssa [6]. Ongelmia aiheuttavat erityisesti se, että oppilas ei alkuunkaan ymmärrä, mitä todennäköisyyslaskun tehtävänannossa kysytään, mitkä ovat kaikki mahdolliset tapaukset annetussa tapahtumassa ja mitä laskusääntöä tulisi käyttää missäkin tilanteessa [7]. Tämän tutkielman oppimateriaaliin on pyritty tekemään sellaisia tehtäviä, jotka tukisivat oppilaita edellä mainittujen haasteiden kanssa.

3.1 Osioiden yhteiset perustelut

Kaikissa oppimateriaalin osioissa on esitetty eritasoisia sanallisia tehtäviä, sillä oppilailla on tutkittu olevan haasteita todennäköisyyslaskentaan liittyvien sanallisten tehtävien ratkaisemisessa [9]. Suurimpia hankaluuksia ovat olleet oppilaiden tietämättömyys siitä, mitä tehtävänannoissa esiintyvät sanat tarkoittavat tai minkä luonteisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapahtumasta on kyse. Lisäksi oppilaat eivät ole tunnistaneet tehtävän tavoitetta. Ratkaisuksi haasteisiin sanallisten tehtävien laskemisessa artikkelissa ehdotettiin erityisesti sanallisten tehtävien harjoittelua, jolloin oppilaille tulisi tutummiksi erilaiset sanallisten todennäköisyyslaskujen tehtävänannot. Tällöin heidän olisi helpompi jatkossa tunnistaa tehtävänannoista sanojen merkitykset, tapahtuman todennäköisyyden luonne sekä mihin tehtävän ratkaisemisessa pyritään. [9]

Kaikissa oppimateriaalin osioissa kuvailemiseen liittyvä ajattelun tavoite on pyritty saavuttamaan sillä, että oppilaita pyydetään tehtävissä perustelemaan, miten he ovat päätyneet kyseiseen ratkaisuun. Erityisesti väitteiden arviointi -tehtävissä oppilaat joutuvat perustelemaan luokkatovereilleen, miksi he ajattelevat väitteen pitävän paikkansa aina, ei koskaan tai joskus.

Useassa pohdintatehtävässä oppimateriaalin kaikissa osioissa oppilaita pyydetään pohtimaan tehtävää yhdessä parin kanssa tai ratkaisemaan tehtävä ensin yksin ja sen jälkeen vertaamaan saatuja ratkaisuja parin kanssa. Tämä tukee opetussuunnitelman tavoitetta opetuksesta, joka kehittää oppilaiden vuorovaikutusosaamista [1]. Tämän lisäksi opetuksen, joka herättää oppilaissa keskustelua, on todettu olevan tehokkaampaa tavalliseen opetukseen verrattuna [4].

3.2 Yhteenlaskusääntö

Oppimateriaalin aloittaa pohdintatehtävä A.2, jossa oppilaat pääsevät tunnistamaan, ovatko kyseessä erilliset vai ei-erilliset tapahtumat. Kyseinen pohdintatehtävä on valittu oppimateriaaliin, sillä artikkelissa *A Qualitative Research on the Difficulties and Failures about Probability Concepts of High School Students* havaittiin oppilaiden yleisenä vaikeutena todennäköisyystehtävien laskemisessa se, että he eivät tiedä, millaisesta tapahtumasta on kyse ja mitä laskusääntöä heidän olisi käytettävä [7]. Kun oppilas on pohdintatehtävässä A.2 tunnistanut, millainen tapahtuma on kyseessä, hän luultavammin osaa harjoitustehtävässä 1 soveltaa kyseiseen tilanteeseen sopivaa laskusääntöä.

Pohdintatehtävässä A.3 oppilaita johdatellaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöön tutkimustehtävän avulla. Toisena osion tutkimustehtävänä on pohdintatehtävä A.6, jossa oppilaat tutustuvat ei-erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöön. Kyseisessä tehtävässä oppilaat pääsevät pohtimaan annetun Venn-diagrammin ja heillä valmiiksi olevan tiedon pohjalta annettuja kysymyksiä. On tutkittu, että tehtävissä, joissa oppilaat pääsevät itse etsimään selityksiä ja tutkimaan uutta asiaa, heidän kiinnostuksensa kyseistä asiaa kohtaan lisääntyy sekä perustelu- ja analysointitaidot kehittyvät [8]. Tutkivan oppimisen tavoite on myös esitetty Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 [1]. Molemmat tutkimustehtävät tukevat tutkivan oppimisen tavoitetta, minkä lisäksi pohdintatehtävä A.6 tukee ajattelun tavoitetta visualisoinnista.

Pohdintatehtävään A.9 on valittu artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* esitelty tehtävätyyppi erilaisten valmiiden ratkaisujen analysoinnista. Kyseisessä pohdintatehtävässä oppilaat pääsevät vertailemaan kahta ratkaisutapaa, joista toinen on virheellinen. On tutkittu, että oppilaiden väärinkäsityksiä todennäköisyyslaskentaan liittyen voidaan oikaista kohdistamalla opetusta erityisesti näihin väärinkäsityksiin [6].

Viimeinen harjoitustehtävä 4 on valittu materiaaliin haastavamman sanallisen tehtävänannon lisäksi sen takia, että se on vanhan ylioppilaskokeen tehtävä. Kyseisen tehtävän avulla oppilaat saavat näkemyksen siitä, millaisia tehtäviä aiemmin on ollut ylioppilaskokeessa.

3.3 Kertolaskusääntö

Kertolaskusääntöön liittyvän osion aloittaa pohdintatehtävä A.10, jossa oppilaita johdatellaan ehdolliseen todennäköisyyteen Venn-diagrammiin liittyvän tutkimustehtävän avulla. Oppilaiden tutustuessa Venn-diagrammiin ja sen käyttöön, he voivat myöhemmissä tehtävissä käyttää Venn-diagrammia erilaisten tapahtumien havainnollistamiseen, joka tukee ajattelun tavoitetta visualisoinnista.

Pohdintatehtävässä A.11 oppilaat pääsevät tutustumaan lisää ehdolliseen todennäköisyyteen simuloinnin avulla. Simuloinnin on todettu lisäävän oppilaiden ymmärrystä käsiteltävästä asiasta [10], joten myös pohdintatehtäviin A.17 ja A.22 sekä harjoitustehtäviin 5 ja 6 on valittu esineitä, joita tavallisesta luokkahuoneesta mahdollisesti löytyy. Tällöin oppilaiden on helppo havainnollistaa pohdinta- ja harjoitustehtävissä esiintyviä tapahtumia ja mahdollisesti näin lisätä omaa ymmärrystään todennäköisyyslaskennan kertolaskuun liittyen.

Koska oppilailla on todettu olevan hankaluuksia erilaisten todennäköisyyteen liittyvien laskusääntöjen käytössä [7], on pohdintatehtävään A.16 valittu erilaisia tapahtumia, joista oppilaiden on tunnistettava toisistaan riippuvat ja riippumattomat tapahtumat. Tämä johdattaa oppilaita ajattelutapaan, jossa he tehtävänannon luettuaan lähtisivät miettimään, millaisesta tapahtumasta on kyse ja pystyisivät tämän jälkeen käyttämään laskussa tarvittavaa laskusääntöä.

Pohdintatehtävässä A.15 oppilaat pääsevät tulkitsemaan erilaisia esitystapoja samasta asiasta ja pohdintatehtävässä A.23 oppilaat pääsevät arvioimaan erilaisten väitteiden paikkansapitävyyttä. Molemmat tehtävätyypit ovat projektiryhmän valitsemia artikkelista *Habits of mind*. Kummankin tehtävän tarkoituksena on oikaista mahdollisia väärinkäsityksiä liittyen toisistaan riippuvien ja riippumattomien tapahtumien todennäköisyyksien laskemisessa. Molemmissa tehtävissä on esitetty erilaisia tilanteita, joista oppilaiden on ensin mietittävä, ovatko ne toisistaan riippuvia vai riippumattomia. Erityisesti pohdintatehtävässä A.15 oppilaat pääsevät konkreettisesti huomaamaan, mikä ero on tapahtumilla "saadaan kaksi pataa" ja "nostettaessa kaksi korttia, toinen on pata, kun tiedetään ensimmäisen olleen pata".

Harjoitustehtävässä 8 oppilaat pääsevät pohtimaan, millainen vaikutus ensimmäisen tapahtuman todennäköisyyteen on sillä, että tiedetään, mitä seuraavalla tapahtumalla tulee tapahtumaan. Kyseiseen tehtävään on otettu mallia artikkelin *What is the Nature of High School Student's Conceptions and Misconceptions About Probability?* tehtävästä 11. Kyseisen artikkelin mukaan monella oppilaalla on ollut väärinkäsitys siitä, että myöhemmin tapahtuvalla tapahtumalla ei voisi olla vaikutusta ensimmäisen tapahtuman todennäköisyyksiin [10].

3.4 Kerto- ja yhteenlaskusäännön käyttö samassa tehtävässä

Pohdintatehtävä A.24 aloittaa oppimateriaalin kolmannen osion, jossa aiheena on kerto- ja yhteenlaskusäännön käyttö samassa tehtävässä. Tehtävä tukee tutkivan oppimisen tavoitetta ja siinä esitellään uusi tapa visualisoida erilaisten tapahtumien mahdollisia tapauksia. Visualisoinnin tavoitetta tukevat myös muut tämän osion tehtävät, sillä monessa niistä on esitetty oppilaille valmiiksi puukaavio tai heitä pyydetään itse piirtämään sellainen laskun yhteydessä.

Artikkelissa *Grade 12 Students' Proficiency in Solving Probability Problems Involving Contingency Tables and Tree Diagrams* tutkittiin lukiolaisen kykyä ratkaista todennäköisyyteen liittyviä tehtäviä käyttäen puukaaviota. Tutkimuksessa oppilaiden oli tarkoitus piirtää annettua tehtävää vastaava puukaavio ja sen jälkeen määrittää eri todennäköisyyksiä piirtämänsä kaavion avulla. Tutkimustulokseksi saatiin, että suurin osa oppilaista osasi piirtää tehtävää kuvaavan puukaavion täysin oikein, mutta vain hyvin harva osasi käyttää puukaaviota todennäköisyyksien laskemiseen. [5] Koska niin monella oppilaalla oli hankaluuksia puukaavion käyttämisen kanssa, on oppimateriaaliin valittu useita tehtäviä, joissa on valmiiksi piirretty puukaavio, jota oppilaat analysoivat tai heidän on piirrettävä sellainen itse tehtävän ratkaisemiseksi. Harjoitustehtävään 10 on otettu mallia edellä mainitun artikkelin tehtävästä, joka oppilaille annettiin tutkimuksessa ratkaistavaksi.

Artikkeli *Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams* koskee tutkimusta, jossa lukiolaisille annettiin ratkaistavaksi todennäköisyyslaskentaan liittyvä tehtävä. Tutkimuksessa haluttiin selvittää, miten oppilaiden tehtävästä suoriutumiseen vaikuttaa se, esitetäänkö tehtävänannon luvut prosentteina vai luonnollisina lukuina. Lisäksi tutkittiin, millainen vaikutus oppilaiden suoriutumiseen olisi valmiiksi annetulla visuaalisella esityksellä, kuten puukaaviolla tai 2×2 -taulukolla. Saatujen tulosten perusteella oppilaat saivat paremmin ratkaistua tehtävän, johon he

saivat visuaalisen esityksen ja tehtävänannon luvut oli esitetty luonnollisina lukuina prosenttien sijaan. [11]
Näiden tutkimustulosten johdosta on oppimateriaalin useimmat tehtävänannot esitetty luonnollisten lukujen avulla. Jotta oppilaat pääsisivät kuitenkin harjoittelemaan myös prosentteja sisältäviä tehtäviä, on pohdintatehtävässä A.28 ja harjoitustehtävässä 13 käytetty prosentteja tehtävänannoissa. Pohdintatehtävässä A.28 on myös käytetty artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* valittua tehtävätyyppiä matemaattisten väitteiden arvioinnista. Koska tutkimuksessa havaittiin myös valmiin visuaalisen esityksen auttavan oppilaita ratkaisemaan tehtävä [11], on useassa tämän osion pohdintatehtävässä oppilaille annettu valmis puukaavio, jota heidän tulee tulkita. Jos valmista puukaaviota ei ole annettu, on oppilaita kehotettu oman ratkaisun tueksi piirtämään sellainen itse.
Edellä mainittujen tulosten lisäksi tutkijat huomasivat, että sellaiseen tehtävään, joka oli läheisempi oppilaiden oman elämäntilanteen kanssa, he saivat enemmän oikeita vastauksia [11]. Tämän tutkimustuloksen johdosta moni tehtävä (myös muissa oppimateriaalin osissa) on pyritty tekemään lukiolaiselle ajankohtaisesta aiheesta esimerkiksi kouluun tai harrastuksiin liittyen. Tämä tukee myös Lukion opetussuunnitelman 2019 tavoitetta yhdistää matematiikkaa oppilaita kiinnostaviin asioihin [1].

Kaikissa tämän osion tehtävissä korostuu ajattelun tavoite, joka liittyy säännönmukaisuuksien etsintään. Jotta oppilaat voivat ratkaista annetut todennäköisyyteen liittyvät tehtävät, on heidän tunnistettava, millaisesta tapahtumasta on kyse. Esimerkiksi pohdintatehtävässä A.26 oppilaita pyydetään tunnistamaan onko kyseessä toisistaan riippuvat vai riippumattomat ja erilliset vai ei-erilliset tapahtumat. Kun oppilaat löytävät esimerkiksi tiettyjä sanoja tai muita yhtäläisyyksiä eri tehtävistä, he luultavasti osaavat hyödyntää aiemmin oppimaansa uuden tehtävän parissa. Tämän lisäksi tähän tavoitteeseen on erityisesti pyritty harjoitustehtävässä 13, jossa on esitetty erilaisia tapauksia samasta tapahtumasta. Jotta oppilaat tietävät, millaista laskusääntöä missäkin kohdassa olisi käytettävä, on heidän löydettävä yhtäläisyyksiä aiempien tehtävien väliltä ja sitä kautta tunnistettava, millaisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapauksesta on kyse. Tämä tukee ajattelun tavoitetta säännönmukaisuuksien etsimisestä.

Pohdintatehtävässä A.27 ja harjoitustehtävässä 9 on käytetty artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* tehtävätyyppiä erilaisten ratkaisutapojen vertailusta. Tehtävässä 9 oppilaat pääsevät itse keksimään mahdollisimman monta erilaista tapaa ratkaista annettu tehtävä ja vertailemaan keksimiään ratkaisutapoja parinsa kanssa. Tehtävässä A.27 oppilaat arvioivat kolmea valmista ratkaisua ja etsivät niistä oikein tehdyt kohdat, joihin he lisäävät välivaiheet. Tämän lisäksi oppilaat tunnistavat virheelliset ratkaisut ja perustelevat, millaisia virheitä niissä on tehty.

Harjoitustehtävään 11 on otettu mallia artikkelin *What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?* tehtävästä seitsemän, jossa kysyttiin, onko yhtä suuri todennäköisyys saada kahdella nopalla silmäluvut viisi ja kuusi sekä viisi ja viisi. Monella tutkimukseen osallistuneella oppilaalla oli se väärinkäsitys, että todennäköisyys molemmille tapauksille olisi yhtä suuri [10].

Harjoitustehtävät 12 ja 13 ovat haastavampia sanallisia tehtäviä. Tehtävässä 12 oppilaat pääsevät harjoittelemaan puukaavion piirtämistä ja hyödyntämään sen käyttöä haastavampien kysymysten parissa. Kyseinen tehtävä tukee ajattelun tavoitetta visualisoinnista.

Kuten yhteenlaskusäännön harjoitustehtävissä, myös tämän oppimateriaalin osan harjoitustehtävistä yksi tehtävä on vanha ylioppilastehtävä. Tehtävästä 14 oppilaat saavat ennakkokäsitystä siitä, millaisia tehtäviä aiemmin on ollut ylioppilaskokeissa.

Viitteet

[1] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. 2019.

[2] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

[3] Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet (2022). Ylioppilastutkintolautakunta.

[4] Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs*, 162-176.

[5] Awuah, F. K., & Ogbonnaya, U. I. (2020). Grade 12 students' proficiency in solving probability problems involving contingency tables and tree diagrams.

[6] Khazanov, L., & Prado, L. (2010). Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics Course. *Adults Learning Mathematics*, 5(1), 23-35.

[7] Memnun, D. S., Ozbilen, O., & Dinc, E. (2019). A Qualitative Research on the Difficulties and Failures about Probability Concepts of High School Students. *Journal of Educational Issues*, 5(1), 1-19.

[8] HarlEn, W. (2013). Inquiry-based learning in science and mathematics. *Review of science, mathematics and ICT education*, 7(2), 9-33.

[9] Yusuf, M., Rahim, S, S. S. A., & Eu, L. K. (2021). Obstacles Faced by College Students' Proficiency in Solving Probability Word Problems. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 15(1), 83-90.

[10] Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In *Exploring probability in school* (pp. 241-266). Springer, Boston, MA.

[11] Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information–an empirical study on tree diagrams and 2× 2 tables. *Frontiers in psychology*, 6, 1186.

A Oppimateriaali

A.1 Yhteenlaskusääntö

Todennäköisyyslaskennassa tapahtumat voivat olla erillisiä tai ei-erillisiä.

Määritelmä A.1 *Erillisillä tapahtumilla* tarkoitetaan tapahtumia, joilla ei ole yhteisiä alkeistapauksia. Kyseisiä tapahtumia voidaan myös kutsua toisensa poissulkeviksi tapahtumiksi, sillä molemmat niistä eivät voi tapahtua samaan aikaan. *Ei-erillisillä tapahtumilla* tarkoitetaan niitä tapahtumia, joilla on yhteisiä alkeistapauksia.

Pohdinta A.2 Pohdi parin kanssa tai ryhmässä, ovatko tapahtumat A ja B erillisiä vai ei-erillisiä.

a) A = "Kolikonheitossa saadaan kruuna."
B = "Kolikonheitossa saadaan klaava."

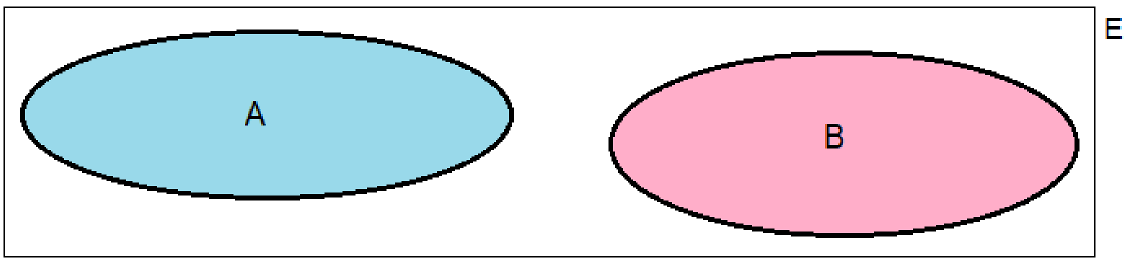
b) A = "Noppaa heitettäessä saadaan parillinen luku."
B = "Noppaa heitettäessä saadaan korkeintaan silmäluku kolme."

c) A = "Korttipakasta nostetaan kuningas."
B = "Korttipakasta nostetaan ässä."

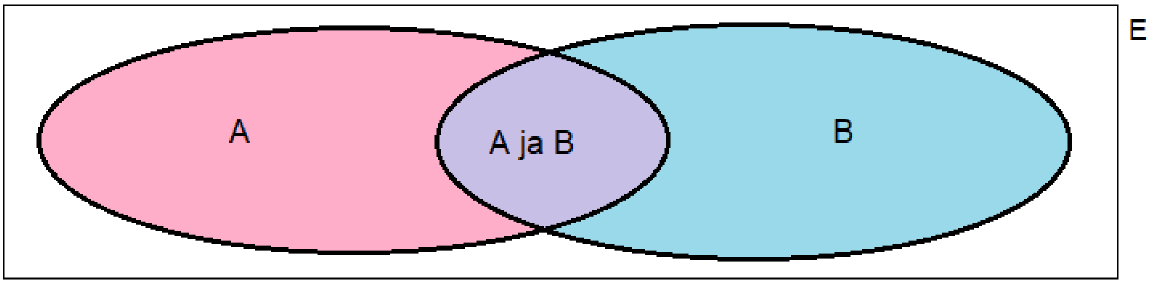
d) A = "Korttipakasta nostetaan ruutu."
B = "Korttipakasta nostetaan ässä."

Havainnollistetaan ei-erillisiä ja erillisiä tapahtumia Venn-diagrammien avulla. Venn-diagrammissa suorakulmio E kuvaa perusjoukkoa, eli kaikkia mahdollisia alkeistapauksia. Ellipseillä kuvataan eri tapahtumia ja ellipsien leikkaus sisältää näiden tapahtumien yhteiset alkeistapaukset. Ellipsien ulkopuolella ovat ne alkeistapaukset, jotka eivät kuulu tarkasteltaviin tapahtumiin.

Erillisillä tapahtumilla ei ole yhteisiä alkeistapauksia, joten tapahtumia kuvaavat ellipsit piirretään toisistaan erilleen alla olevan kuvan osoittamalla tavalla.



Ei-erillisillä tapahtumilla on yhteisiä alkeistapauksia, joten tapahtumia kuvaavat ellipsit piirretään osittain päällekkäin alla olevan kuvan osoittamalla tavalla.



Pohdinta A.3 Alvar heittää noppaa kerran. Laske seuraavat todennäköisyydet parin kanssa tai ryhmässä.

a) Alvar saa silmäluvun yksi.

b) Alvar saa silmäluvun kolme.

c) Alvar saa silmäluvun viisi.

d) Alvar saa parittoman silmäluvun.

e) Alvar saa silmäluvun yksi, kolme tai viisi.

f) Miten voit hyödyntää kohtien a-c todennäköisyyksiä e-kohdan laskemisessa?

Todennäköisyyslaskennan yhteenlaskusäännön avulla voidaan laskea todennäköisyys sille, että tapahtuu "A tai B". Matematiikassa sanalla "tai" tarkoitetaan sitä, että A tapahtuu, B tapahtuu tai molemmat tapahtuvat.
Myöhemmin opitaan todennäköisyyslaskennan kertolaskusääntö, jonka avulla voidaan laskea todennäköisyys sille, että tapahtuu "A ja B". Matematiikassa sanalla "ja" tarkoitetaan sitä, että tapahtuu A ja tapahtuu B.

Edellisessä pohdintatehtävässä tutustuttiin erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöön. Kyseistä yhteenlaskusääntöä voidaan hyödyntää esimerkiksi, kun halutaan saada selville, millä todennäköisyydellä korttipakasta nostettu kortti on hertta tai ruutu.

Määritelmä A.4 Erillisille tapahtumille A ja B pätee yhteenlaskusääntö

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B).$$

Erillisissä tapahtumissa $P(A \text{ ja } B) = 0$.

Lisätieto A.5 Yhteenlaskusääntö ei ole tässä lause vaan määritelmä, sillä se on yksi todennäköisyyslaskennan perusominaisuuksista.

Pohdinta A.6 Erään luokan oppilaista yhdeksän pitää hampurilaisista, kymmenen pitää pizzasta ja neljä oppilasta pitää molemmista. Kolme oppilasta ei pidä kummastakaan. Tutki alla olevaa Venn-diagrammia ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Millä todennäköisyydellä luokasta satunnaisesti valittu oppilas

a) pitää hampurilaisista?

b) pitää pizzasta?

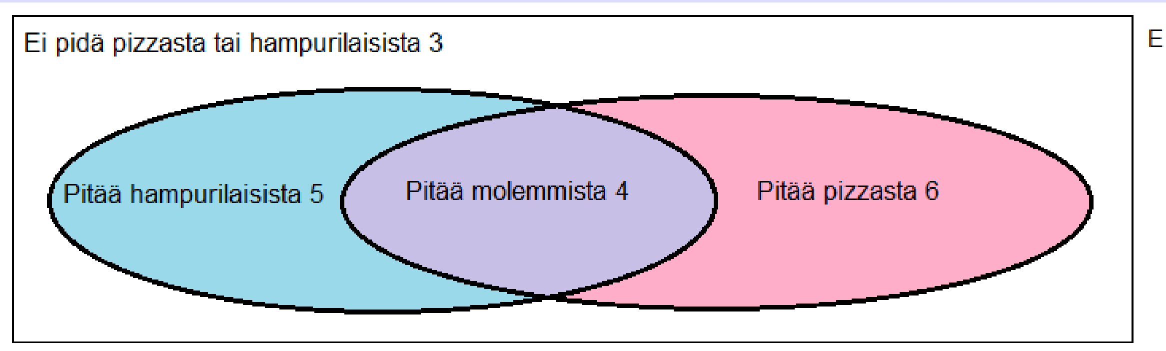
c) pitää pizzasta ja hampurilaisista?

d) pitää pizzasta, mutta ei hampurilaisista?

e) pitää hampurilaisista, mutta ei pizzasta?

f) pitää pizzasta tai hampurilaisista?

g) Pohdi, miksi f-kohdan todennäköisyyttä ei voida laskea summaamalla vain todennäköisyydet "oppilas pitää pizzasta" ja "oppilas pitää hampurilaisista".



Lause A.7 Yleinen yhteenlaskusääntö tapahtumille A ja B on

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B).$$

Huomautus A.8 Laskettaessa todennäköisyyttä tapahtuu ”A tai B", on huomioitava se, että summattaessa $P(A) + P(B)$ tapahtumien yhdiste lasketaan kahteen kertaan. Tällöin niiden yhdiste on vielä vähennettänä kertaalleen.

Pohdinta A.9 Eerik ja Aila ovat ratkaisseet seuraavan tehtävän eri tavoilla. Kumman ratkaisu on oikein? Perustele, mikä menee pieleen väärin olevissa ratkaisuissa.

Bändikerho kokoontuu joka tiistai ja keskiviikko soittamaan yhdessä klo 15.00. Marialla ja Mialla on molemmilla huono tapa tulla välillä myöhässä bändikerhoon. Maria myöhästyy 4,7 % todennäköisyydellä ja Mia 5,4 % todennäköisyydellä. Todennäköisyys sille, että sekä Maria että Mia myöhästyvät on 4,2 %.
Käytetään merkintöjä A = "Maria myöhästyy" ja B = "Mia myöhästyy".

a) Laske todennäköisyys sille, että Maria tai Mia myöhästyy.

b) Laske todennäköisyys sille, että Mia myöhästyy, mutta Maria ei.

Eerikin ratkaisu:

a) Todennäköisyys jommankumman myöhästymiselle lasketaan yhteenlaskusäännöllä.
$$P(A) + P(B) = 4,7\ \% + 5,4\ \% = 10,1\ \%$$

b) Todennäköisyys, että Mia myöhästyy, on
$$5,4\ \%.$$

Ailan ratkaisu:

a) Yhteenlaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että Maria tai Mia myöhästyy, on
$$P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B) = 4,7\ \% + 5,4\ \% - 4,2\ \% = 5,9\ \%.$$

b) Todennäköisyys, että Mia myöhästyy, mutta Maria ei, on
$$P(B) - P(A \text{ ja } B) = 5,4\ \% - 4,2\ \% = 1,2\ \%.$$

Harjoitustehtävät

1. Laske pohdintatehtävän A.2 kohtien a-d todennäköisyydet sille, että tapahtuu A tai B.

2. Tavallisesta korttipakasta nostetaan kortti. Voit havainnollistaa tilannetta korttipakan avulla. Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi Venn-diagrammin avulla.

a) Millä todennäköisyydellä kortti on risti?

b) Millä todennäköisyydellä kortti on kuningatar?

c) Millä todennäköisyydellä kortti on risti tai kuningatar?

3. Tavallisesta korttipakasta nostetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä nostettu kortti on musta tai kuvakortti? (Kuvakorteilla tässä tilanteessa tarkoitetaan jätkää, kuningatarta ja kuningasta.)

4. [S13 t.8]
Kaksipäiväisiin turnajaisiin osallistui kaikkiaan 329 ritaria. Heistä oli ensimmäisenä päivänä paikalla 302 ja toisena 285. Millä todennäköisyydellä turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla molempina päivinä?

A.2 Kertolaskusääntö

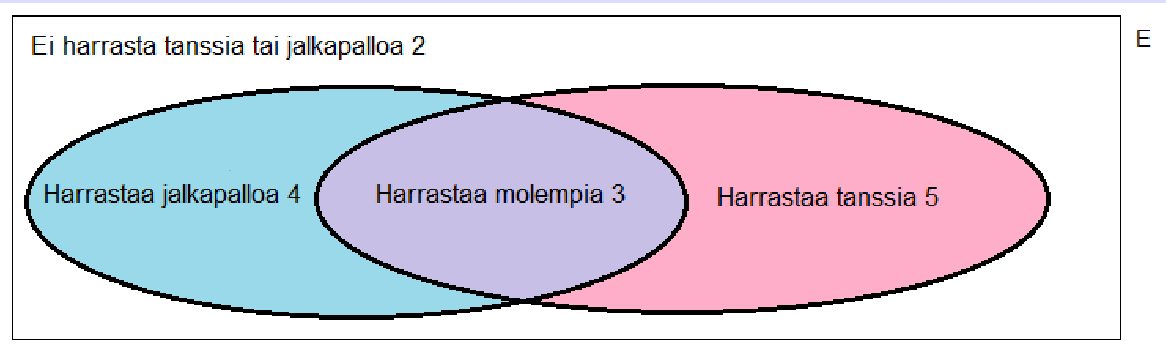
Pohdinta A.10 Erään luokan oppilaista seitsemän harrastaa jalkapalloa, kahdeksan harrastaa tanssia ja kolme oppilasta sekä jalkapalloa että tanssia. Kaksi luokan oppilaista ei harrasta kumpaakaan näistä. Tutki alla olevaa Venn-diagrammia ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Millä todennäköisyydellä luokasta satunnaisesti valittu oppilas

a) harrastaa jalkapalloa?

b) harrastaa tanssia?

c) ei harrasta jalkapalloa eikä tanssia?

d) harrastaa tanssia, kun tiedetään hänen harrastavan jalkapalloa?



Pohdinta A.11 Sailalla on repussaan kolme kirjaa ja neljä vihkoa. Saila nostaa repustaan tavaroita ilman, että hän palauttaa nostamansa tavaran takaisin reppuun ennen seuraavan tavaran nostamista. Voit havainnollistaa tilannetta kolmen vihon ja neljän kirjan avulla. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Millä todennäköisyydellä Sailan nostaessa yhden tavaran repusta, hän saa kirjan?

b) Kun yksi kirja on nostettu, montako tavaraa repussa on jäljellä?

c) Kun Saila on saanut ensimmäisellä nostolla kirjan, millä todennäköisyydellä hän saa seuraavalla nostolla vihon?

d) Vaikuttaako ensimmäinen nosto toisen noston todennäköisyyksiin?

e) Millä todennäköisyydellä Saila saa kolmannella nostolla kirjan, kun toisella nostolla hän sai vihon ja ensimmäisellä kirjan?

Kahdessa edellisessä pohdintatehtävässä sivuttiin ehdollista todennäköisyyttä, joka määritellään seuraavaksi.

Ehdollisella todennäköisyydellä tarkoitetaan jonkin tapahtuman B todennäköisyyttä ehdolla, että tiedetään tapahtuman A tapahtuneen. Tälle käytetään merkintää

$$P(B \text{ ehdolla } A) = P(B \mid A).$$

Esimerkiksi korttipakasta nostettaessa kaksi korttia ilman palautusta, ensimmäisen kortin nosto vaikuttaa toisen kortin todennäköisyyksiin, jolloin kyseessä on ehdollinen tapahtuma.

Määritelmä A.12 Ehdollinen todennäköisyys
Olkoon A tapahtuma, jolle $P(A) > 0$. Tapahtuman B todennäköisyys ehdolla, että A on tapahtunut, on

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ ja } B)}{P(A)}.$$

Kun puhutaan kahdesta ehdollisesta tapahtumasta, voidaan laskea todennäköisyys, että tapahtuu ”A ja B”. Seuraava lause on yleinen kertolaskusääntö.

Lause A.13 Kaikille tapahtumille A ja B pätee

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Huomautus A.14 Yleinen kertolaskusääntö kolmelle tapahtumalle on

$$P(A \text{ ja } B \text{ ja } C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \text{ ja } B).$$

Pohdinta A.15 Tavallisesta 52 kortin korttipakasta nostetaan kaksi korttia ilman palautusta. Yhdistä jokaiseen tapahtumaan (tummennetut) kolme kyseiseen tapahtumaan liittyvää esitystapaa. Annetussa ruudukossa on myös ylimääräisiä vaihtoehtoja.
Käytetään seuraavia merkintöjä.
pata 1 = "Nostetaan pata ensimmäisellä nostolla."
pata 2 = "Nostetaan pata toisella nostolla."
hertta 2 = "Nostetaan hertta toisella nostolla."

Toisella nostolla saadaan hertta, kun ensimmäisellä saatiin pata.	**Toisella nostolla saadaan pata, kun ensimmäisellä saatiin pata.**	**Saadaan kaksi pataa.**
$\frac{13}{52}$	P(hertta 2 | pata 1)	$\frac{12}{52}$
$\frac{13}{51}$	$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$	P(pata 1 ja pata 2)
P(pata 1 | hertta 2)	P(pata 2 | pata 1)	$\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51}$
$\frac{\text{P(hertta 2 ja pata 1)}}{\text{P(pata 1)}}$	$\frac{\text{P(pata 1 ja hertta 2)}}{\text{P(hertta 2)}}$	P(pata 1)·P(pata 2)
$\frac{12}{51}$	$\frac{\text{P(pata 2 ja pata 1)}}{\text{P(pata 1)}}$	$\frac{\text{P(pata 1 ja pata 2)}}{\text{P(pata 2)}}$

Tähän mennessä on käsitelty vain sellaisia tapahtumia, jotka ovat toisistaan riippuvaisia. Näiden tapahtumien lisäksi on olemassa toisistaan riippumattomia tapahtumia. Tällaisissa tapahtumissa muilla samaan tilanteeseen liittyvillä tapahtumilla ei ole vaikutusta laskettavan tapahtuman todennäköisyyksiin.

Pohdinta A.16 Pohdi parin kanssa tai ryhmässä ovatko seuraavat tapahtumat A ja B toisistaan riippumattomia vai riippuvaisia?

a) Korttipakasta nostetaan kortteja siten, että niitä ei palauteta pakkaan noston jälkeen.
A = "Kaksi ensimmäistä korttia ovat ässiä."
B = "Kolmas kortti on ässä."

b) Korttipakasta nostetaan kortteja siten, että ne palautetaan pakkaan noston jälkeen.
A = "Kolme ensimmäistä korttia ovat patoja."
B = "Neljäs kortti on pata."

c) Noppaa heitetään kaksi kertaa.
A = "Ensimmäisellä heitolla saadaan silmäluku kuusi."
B = "Toisella heitolla saadaan silmäluku kuusi."

d) Lukion ensimmäiseltä vuosikurssilta valitaan satunnaisesti kaksi opiskelijaa juontamaan vanhojen tanssit.
A = "Ensimmäinen opiskelija on tyttö."
B = "Toinen opiskelija on poika."

Pohdinta A.17 Oppilaalla on kaksi noppaa, joita hän heittää kumpaakin kerran. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Millä todennäköisyydellä ensimmäisellä nopalla saadaan silmäluku kuusi?

b) Millä todennäköisyydellä toisella nopalla saadaan silmäluku kuusi?

c) Vaikuttaako ensimmäisen heiton tulos toisen heiton todennäköisyyksiin?

d) Piirrä kahta nopanheittoa kuvaava 6×6 -ruudukko. Päättele kyseisen ruudukon avulla, millä todennäköisyydellä molemmilla nopilla saadaan silmäluku kuusi.

Edellisissä pohdintatehtävissä tutustuttiin toisistaan riippumattomiin tapahtumiin.

Määritelmä A.18 Tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, jos tapahtuman B todennäköisyyksiin ei vaikuta se, onko tapahtuma A tapahtunut vai ei. Matemaattisesti tämä ilmaistaan

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Tämän avulla voidaan esittää kahden toisistaan riippumattoman tapahtuman kertolaskusääntö.

Lause A.19 Riippumattomien tapahtumien A ja B kertolaskusääntö on

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Huomautus A.20 Kertolaskukaava, kun toisistaan riippumattomia tapahtumia on n kappaletta

$$P(B_1 \text{ ja } B_2 \text{ ja } \dots \text{ ja } B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot \ldots \cdot P(B_n).$$

Huomautus A.21 Aiemmin esitelty yleinen kertolaskusääntö pätee myös toisistaan riippumattomille tapahtumille.

Pohdinta A.22 Korissa on seitsemän palloa. Palloista kolme on vihreitä ja neljä sinisiä. Korista nostetaan palloja siten, että pallo palautetaan koriin jokaisen noston jälkeen. Simuloi tilannetta seitsemän pallon avulla ja laske seuraavat todennäköisyydet.

a) Ensimmäisellä nostolla saadaan sininen pallo.

b) Nostettaessa kaksi palloa saadaan kaksi vihreää palloa.

c) Nostettaessa kolme palloa saadaan kolme sinistä palloa.

Pohdinta A.23 Pitävätkö seuraavat **väitteet** paikkaansa aina, joskus vai ei koskaan? Perustele vastauksesi. Jos väite on joskus oikein, keksi ehto, jolloin väite pätee. Vertaile saamiasi vastauksia parin kanssa.

a) Pelaaja heittää kahta noppaa. Hän saa ensimmäisellä heitolla silmäluvun yksi. **Ensimmäisen heiton tulos vaikuttaa siihen, että seuraavalla heitolla pelaaja saa silmäluvun kolme.**

b) Pussissa on 10 hedelmää, joista banaaneja on kolme kappaletta, appelsiineja on viisi kappaletta ja omenoita on kaksi kappaletta. **Laskettaessa todennäköisyys saada toisella nostolla banaani, kun ensimmäisenä saatiin omena, jota ei laitettu noston jälkeen takaisin pussiin, vastaus on $\frac{1}{15}$.**

c) Tavallisesta korttipakasta nostetaan viisi korttia palauttaen kortti joka noston jälkeen pakkaan. **Todennäköisyys saada ässä kaikilla nostoilla on sama.**

d) Tavallisesta korttipakasta nostetaan kortteja ilman palautusta. **Todennäköisyys saada ässä on nolla.**

e) Kolikkoa heitetään neljä kertaa. **Todennäköisyys saada seuraavat tulokset on yhtä suuri.** (Tässä kruunasta käytetään merkintää KR ja klaavasta KL.)
KL, KL, KL, KL
KR, KL, KL, KR
KR, KR, KL, KR
KL, KR, KL, KR

Harjoitustehtävät

5. Tavallisesta 52 kortin korttipakasta nostetaan kortteja ilman, että edellinen kortti palautetaan pakkaan ennen seuraavaa nostoa. Voit havainnollistaa tilannetta korttipakan avulla. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Kun pakasta nostetaan yksi kortti, millä todennäköisyydellä se on musta?

b) Kun korttipakasta on nostettu yksi musta kortti, millä todennäköisyydellä toiseksi nostettava kortti on musta?

c) Millä todennäköisyydellä ensimmäinen ja toinen kortti ovat mustia?

d) Miten kohtien b ja c tapaukset eroavat toisistaan?

6. Lucalla on penaalissaan viisi puuvärikynää, kolme kuulakärkikynää ja seitsemän tussia. Luca ottaa penaalistaan kolme kynää ilman, että hän palauttaa edellistä kynää penaaliin ennen seuraavaa nostoa. Voit havainnollistaa tilannetta kynien ja penaalin avulla. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Kun Luca on nostanut penaalista kaksi puuvärikynää, millä todennäköisyydellä kolmas kynä on puuvärikynä?

b) Kun Luca nostaa penaalistaan kolme kynää, millä todennäköisyydellä ne kaikki ovat puuvärikyniä?

c) Onko todennäköisyys kummassakin tilanteessa yhtä suuri? Perustele, miksi todennäköisyydet ovat yhtä- tai erisuuret.

7. Eräällä oppilaalla on hyllyssään seitsemän palapeliä, joista hän on tehnyt kolme. Hän ei muista, mitkä kolme palapeliä hän on tehnyt. Lähtiessään lomamatkalle oppilas valitsee hyllystään satunnaisesti kaksi palapeliä mukaansa. Laske todennäköisyys, että hän saa mukaansa palapelit, joita ei ole vielä tehnyt. Perustele vastauksesi.

8. Miriamilla on lompakossaan kolme euron kolikkoa ja kolme 50 sentin kolikkoa. Miriam laittaa lompakostaan kaksi satunnaisesti valittua kolikkoa säästöpossuun.

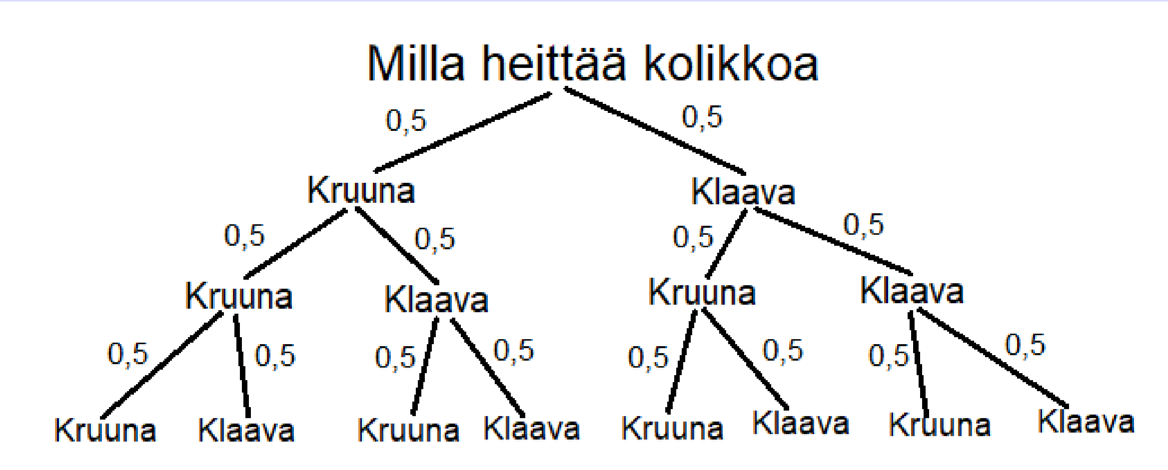
a) Millä todennäköisyydellä toinen kolikko on 50 sentin kolikko, kun tiedetään ensimmäisen kolikon olleen 50 sentin kolikko?

b) Millä todennäköisyydellä ensimmäinen kolikko on 50 sentin kolikko, kun tiedetään toisen kolikon olleen 50 sentin kolikko?

c) Vertaile saamiasi todennäköisyyksiä. Ovatko ne yhtä suuret? Perustele, miksi todennäköisyydet ovat yhtä- tai erisuuret.

A.3 Kerto- ja yhteenlaskusäännön käyttö samassa tehtävässä

Pohdinta A.24 (Pari-/ryhmätehtävä)



Tutki yllä olevaa kuvaa, jossa on esitetty puukaavio eräästä tilanteesta ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Mitä tilannetta puukaavio esittää ja mitä todennäköisyyksiä sen avulla voidaan laskea?

b) Mitä kaavioon merkityt luvut 0,5 tarkoittavat?

c) Laske ilman puukaaviota todennäköisyys sille, että Millan heittäessä kolikko kolme kertaa hän saa kolme klaavaa.

d) Etsi puukaaviosta polku, jonka avulla voit määrittää saman todennäköisyyden kuin c-kohdassa. Määritä tämä todennäköisyys annetun puukaavion avulla.

e) Laske ilman puukaaviota todennäköisyys sille, että Milla saa kaksi klaavaa ja yhden kruunan.

f) Etsi puukaaviosta polut, joiden avulla voit määrittää saman todennäköisyyden kuin e-kohdassa. Määritä tämä todennäköisyys annetun puukaavion avulla.

Edellisessä pohdintatehtävässä esiteltyä kaaviota kutsutaan puukaavioksi. Kyseisessä tehtävässä puukaavio havainnollisti sitä, millaisia tuloksia voidaan saada heitettäessä kolikkoa kolme kertaa. Puukaavion avulla on helppo havainnoida kaikki mahdolliset tapaukset ja tarkastella milloin on käytettävä kerto- tai yhteenlaskusääntöä.

Edellisessä pohdintatehtävässä puukaavion ylin rivi esittää ensimmäisen heiton mahdollisia tuloksia, toinen rivi toisen heiton mahdollisia tuloksia ja kolmas rivi kolmannen heiton mahdollisia tuloksia.

Kolikonheitossa todennäköisyys saada klaava on 50 % ja kruuna 50 %, joten jokaisessa puukaavion haarassa oleva luku 0,5 tarkoittaa todennäköisyyttä päätyä kyseiseen tulokseen.

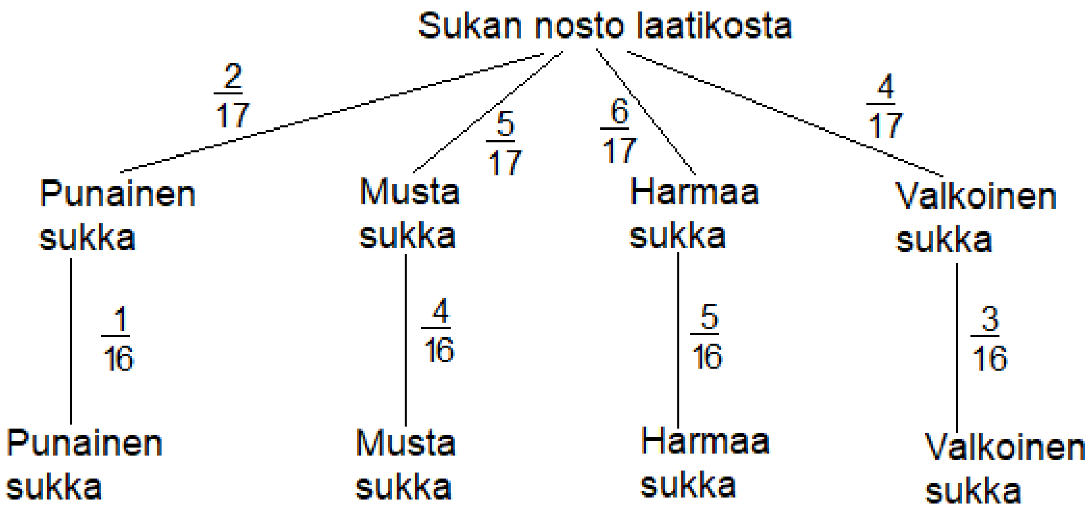
Kaikki mahdolliset tapaukset sisältävä puukaavio on oikein piirretty, kun samasta pisteestä lähtevien seuraavalla rivillä olevien haarojen todennäköisyyksien summa on yksi.

Esimerkki A.25 Ruskalla on laatikossaan 17 sukkaa. Sukista kaksi on punaisia, viisi mustia, kuusi harmaita ja neljä valkoisia. Ruskalla on aamulla kiire kouluun, joten hän nappaa mukaansa kasan päällimmäisinä olevat sukat. Millä todennäköisyydellä

a) Ruskan mukaan saamat sukat ovat molemmat punaisia?

b) Ruska saa mukaansa kaksi samanväristä sukkaa?

Piirretään tilannetta vastaava puukaavio ja lasketaan sen avulla kysytyt todennäköisyydet.



a) Lasketaan todennäköisyys, että Ruska saa mukaansa kaksi punaista sukkaa. Piirretystä puukaaviosta saadaan todennäköisyydeksi

$$P(\text{kaksi punaista sukkaa}) = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136} \approx 0,0074.$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että Ruska saa mukaansa samanväriset sukat. Käytetään seuraavia merkintöjä.
A ="kaksi punaista sukkaa"
B ="kaksi mustaa sukkaa"
C ="kaksi harmaata sukkaa"
D ="kaksi valkoista sukkaa"

$$\begin{aligned} P(A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ &= \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{17} \cdot \frac{4}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} + \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} \\ &= \frac{4}{17} \approx 0,235 \end{aligned}$$

Pohdinta A.26 Tarkastele parisi kanssa tai ryhmässä edellistä esimerkkiä. Vastatkaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Ovatko b-kohdan tapahtumat A, B, C ja D toisistaan riippumattomia vai riippuvia?

b) Ovatko b-kohdan tapahtumat A, B, C ja D erillisiä vai ei-erillisiä?

c) Miksi puukaavioon ei ole piirretty kaikkia mahdollisia polkuja?

d) Missä tilanteissa b-kohdassa käytetään kertolaskusääntöä ja missä yhteenlaskusääntöä?

e) Miten ilman puukaavion piirtämistä olisit ratkaissut a-kohdan?

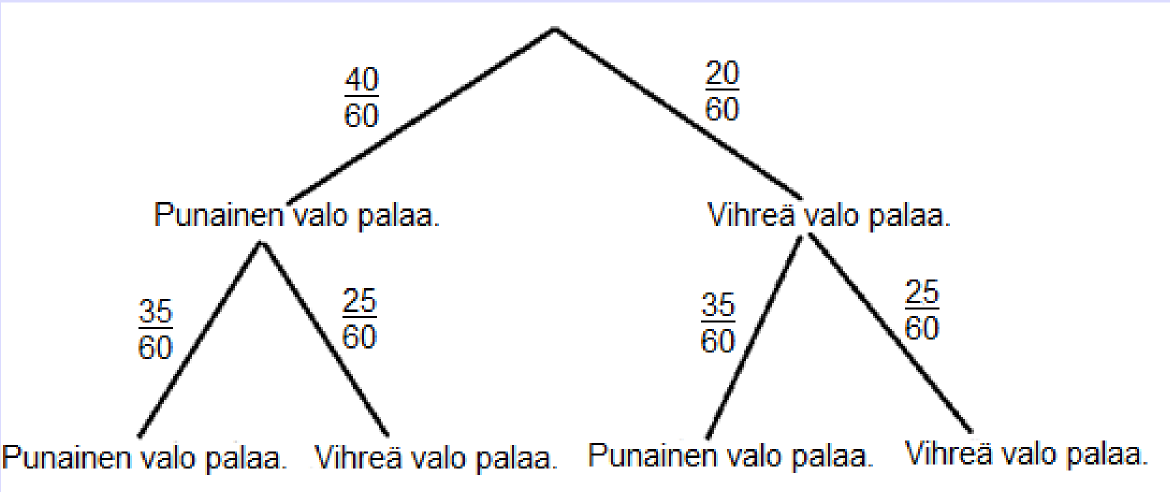
Pohdinta A.27 Oiva, Muru ja Miika ovat ratkaisseet seuraavan tehtävän annetun puukaavion avulla. Etsi ratkaisuista oikein tehdyt kohdat ja kirjoita näihin välivaiheet. Perustele myös, mikä menee pieleen väärin olevissa ratkaisujen kohdissa.

Patrikin koulumatkalla on kahdet jalankulkijoiden liikennevalot. Jokaisessa liikennevalossa valo palaa siis punaisena tai vihreänä. Jokaisen minuutin aikana ensimmäiset liikennevalot ovat vihreinä 20 sekuntia ja toiset liikennevalot 25 sekuntia.

a) Millä todennäköisyydellä Patrik joutuu pysähtymään molemmissa valoissa?

b) Millä todennäköisyydellä hän ei joudu pysähtymään kertaakaan?

c) Millä todennäköisyydellä hän joutuu pysähtymään kerran?



Oivan ratkaisu:

a)

$$\frac{40}{60} + \frac{35}{60} = \frac{5}{4}$$

b)

$$\frac{20}{60} \cdot \frac{25}{60} = \frac{5}{36}$$

c)

$$\frac{40}{60} + \frac{25}{60} + \frac{20}{60} + \frac{35}{60} = \frac{4}{2}$$

Murun ratkaisu:

a)

$$\frac{40}{60} \cdot \frac{35}{60} = \frac{7}{18}$$

b)

$$\frac{20}{60} + \frac{25}{60} = \frac{3}{4}$$

c)

$$1 - \left(\frac{7}{18} \cdot \frac{3}{4}\right) = 0,2916667 \approx 0,292$$

Miikan ratkaisu:

a)

$$\frac{20}{60} \cdot \frac{25}{60} = \frac{5}{36}$$

b)

$$\frac{40}{60} \cdot \frac{35}{60} = \frac{7}{18}$$

c)

$$\frac{40}{60} \cdot \frac{35}{60} + \frac{20}{60} \cdot \frac{35}{60} = \frac{17}{36}$$

Pohdinta A.28 Pitävätkö seuraavat **väitteet** paikkansa aina, joskus vai ei koskaan? Perustele vastauksesi. Jos väite pitää joskus paikkaansa, keksi kyseinen ehto.

a) Koulun oppilaista 18 % on kasvissyöjiä, joista 50 % on täysin vegaaneja. **Kun satunnainen oppilas menee syömään koululounasta, hän on kasvissyöjä, mutta ei vegaani todennäköisyydellä 0,09.**

b) Lukion oppilaista 54 % opiskelee pitkää matematiikkaa ja 38 % psykologiaa. **Todennäköisyys, että oppilas opiskelee pitkää matematiikkaa tai psykologiaa, on 92 %.**

c) Todennäköisyys, että Anja valmistuu ylioppilaaksi ensi keväänä, on 87 %. **Todennäköisyys, että Anja ja Lotta valmistuvat ylioppilaiksi ensi keväänä on 95 %.**

d) Todennäköisyys, että Joakim saa fysiikan kokeesta arvosanan seitsemän on 20 %. **Todennäköisyys, että Joakim saa kyseisestä fysiikan kokeesta arvosanan seitsemän tai kahdeksan on 18 %.**

e) Todennäköisyyslaskennan kurssin oppilas syö purkkaa 50 % todennäköisyydellä. Karkkia oppilas syö 28 % todennäköisyydellä. **Todennäköisyys, että kurssilta valittu oppilas ei syö purkkaa eikä karkkia on 50 %.**

Harjoitustehtävät

9. Kahta noppaa heitetään samaan aikaan. Laske todennäköisyys sille, että toisen nopan silmäluku on jaollinen luvulla kaksi ja toisen nopan silmäluku jaollinen luvulla kolme. Keksi mahdollisimman monta erilaista ratkaisutapaa. Vertaa keksimiäsi ratkaisutapoja parisi kanssa.

10. Joonaksella on karkkipussissaan 13 karkkia, joista viisi on hedelmäkarkkeja ja kahdeksan salmiakkia.

a) Joonas ottaa pussista kaksi karkkia palauttaen ensimmäisen karkin takaisin pussiin ennen uuden nostamista. Piirrä tilannetta kuvaava puukaavio, josta käyvät ilmi kaikki mahdolliset tapahtumat todennäköisyyksineen.

b) Joonas ottaa pussista kaksi karkkia ilman, että palauttaa ensimmäisen karkin pussiin ennen toisen nostamista. Piirrä tilannetta kuvaava puukaavio, josta käyvät ilmi kaikki mahdolliset tapahtumat todennäköisyyksineen.

c) Millä todennäköisyydellä karkit ovat samaa lajiketta a-kohdan tilanteessa?

d) Millä todennäköisyydellä ainakin toinen karkki on salmiakki a-kohdan tilanteessa?

e) Miten voit osoittaa, että piirtämäsi puumalli on oikein tehty?

11. Kolme noppaa heitetään samaan aikaan. Kumpi seuraavista tapahtumista on todennäköisempi vai ovatko ne yhtä todennäköisiä? Perustele vastauksesi.

a) Saadaan silmäluvut yksi, kaksi ja kolme.

b) Saadaan silmäluku kolme kaikilla nopilla.

12. Faredilla on kaksi laatikollista elokuvia. Ensimmäisessä laatikossa hänellä on kaikki ulkomaalaiset elokuvat, joista kuusi on DVD:nä ja seitsemän Blu-ray:na. Toisessa laatikossa Faredilla on kaikki suomalaiset elokuvat, joista neljä on DVD:nä ja kahdeksan Blu-ray:na. Fared ottaa umpimähkään jommasta kummasta laatikosta elokuvan.

a) Millä todennäköisyydellä hän saa käteensä Blu-ray:n?

b) Kun tiedetään elokuvan olleen Blu-ray, millä todennäköisyydellä tämä elokuva on suomalainen?

Voit havainnollistaa tilannetta esimerkiksi puukaavion avulla.

13. Eräässä koulussa 26 % oppilaista käyttää reppua ja 48 % oppilaista pitää mukanaan juomapulloa. Muilla oppilailla ei koskaan ole mukanaan juomapulloa tai reppua. Repunkäyttäjistä 57 % pitää mukanaan juomapulloa. Millä todennäköisyydellä kävelet koulun käytävällä oppilasta vastaan, jolla

a) on reppu ja juomapullo?

b) on reppu tai juomapullo?

c) ei ole reppua eikä juomapulloa?

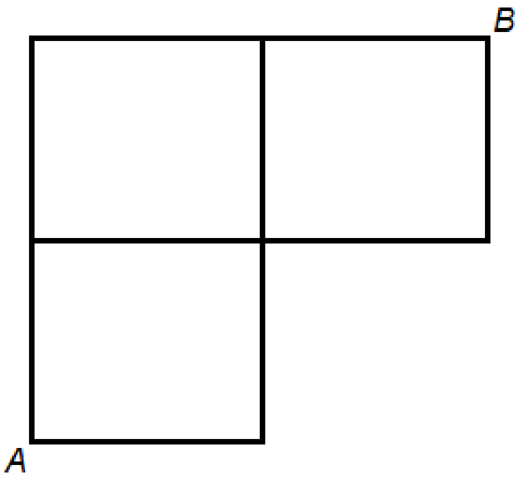
d) on reppu, mutta ei juomapulloa?

e) on juomapullo, mutta ei reppua?

14. [S16 t.8]
Alla oleva kaavio esittää pienen kaupungin katuverkkoa. Anssi kulkee pisteestä A pisteeseen B käyttämällä mahdollisimman lyhyttä reittiä, jolloin matkan pituus on neljä korttelinväliä. Sellaisissa risteyksissä, joissa kaksi vaihtoehtoa johtaa lyhimpään reittiin, hän valitsee suunnan kolikkoa heittämällä.

a) Piirrä erilliset kuviot kaikista niistä viidestä mahdollisesta reitistä, joiden pituus on neljä korttelinväliä, ja määritä niiden valintatodennäköisyydet.

b) Birgitta kulkee pisteestä B pisteeseen A ja valitsee mahdollisimman lyhyen reitinvastaavalla tavalla. Anssi ja Birgitta lähtevät liikkeelle samanaikaisesti ja kulkevat samaa vauhtia. Kuinka suurella todennäköisyydellä he kohtaavat toisensa matkan puolivälissä?



B Opettajan opas

Opettajan opas on tarkoitettu opettajille oman opettamisen tueksi. Oppaassa esitetään ehdotus ajankäyttösuunnitelmasta, pohdintatehtävien tarkoitus ja tavoitteet sekä eriyttämisehdotukset ylös- ja alaspäin näihin tehtäviin liittyen. Lisäksi kerrotaan pohdintatehtävien oikeat vastaukset.

B.1 Ajankäyttöehdotus

Ehdotus ajankäytöstä oppimateriaalin eri osioihin:

- 1 x 75 min Yhteenlaskusääntö
- 2 x 75 min Kertolaskusääntö
- 1 x 75 min Kerto- ja yhteenlaskusäännön käyttö samassa tehtävässä

B.2 Yleistä

Vaikka jokaisessa pohdintatehtävässä ei ole erikseen mainittu pari- tai ryhmätyöskentelyä, on kaikki tehtävät suunniteltu niin, että ne voidaan ratkaista pareittain tai pienissä ryhmissä. Tarpeen mukaan oppilaat voivat kuitenkin ratkaista pohdintatehtäviä myös yksin.

Eriyttämistä ylöspäin ei erikseen mainita jokaisessa pohdintatehtävässä, mutta hyvänä ylöspäin eriyttämisen keinona toimii lisäesimerkkien keksiminen parin ratkaistavaksi. Tämän lisäksi pohdintatehtävissä, joissa tutustutaan tiettyyn laskusääntöön, voivat oppilaat ratkaista vastaavaan tapahtumaan liittyviä haastavampia laskuja.

B.3 Yhteenlaskusääntö

Pohdintatehtävä A.2
Tämän tehtävän tavoitteena on auttaa oppilaita tunnistamaan, millaisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapahtumasta on kysymys.

Ratkaisu:

a) Erillisiä.

b) Ei-erillisiä.

c) Erillisiä.

d) Ei-erillisiä.

Pohdintatehtävä A.3
Pohdintatehtävän tarkoituksena on tutustuttaa oppilaat erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöön.

Ratkaisu:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

f) Kohtien a-c todennäköisyydet ovat $\frac{1}{6}$. Kun nämä summataan yhteen, saadaan kysytty todennäköisyys $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pohdintatehtävä A.6
Tehtävän tarkoitus on toimia tutkimustehtävänä ei-erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöön.
Eriytettäessä ylöspäin oppilaille voi antaa tehtäväksi miettiä matemaattisen esitystavan juuri tutustuttuun yhteenlaskusääntöön.

Ratkaisu:

a) $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

c) $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

d) $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{5}{18}$

f) $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

g) Todennäköisyyksiä ei voida vain summata, sillä kyseessä ovat ei-erilliset tapahtumat, joilla on yhteisiä alkeistapauksia.

Pohdintatehtävä A.9
Pohdintatehtävän tarkoituksena on saada oppilaat huomaamaan, kumpaa yhteenlaskusääntöä on käytettävä annetussa tilanteessa.
Eriytettäessä alapäin oppilaat voivat piirtää Venn-diagrammeja tilanteesta.
Eriytettäessä ylöspäin oppilaat voivat pohtia, millaisessa tilanteessa väärin oleva vastaus olisikin oikein.

Ratkaisu:
Ailan vastaus on oikein, sillä hän on huomannut tapahtumien olevan ei-erilliset. Eerikin vastaus on väärin, sillä on tulkinnut tapahtumat erillisinä ja käyttänyt tällöin väärää laskusääntöä.

B.4 Kertolaskusääntö

Pohdintatehtävä A.10
Tehtävä toimii johdatuksena ehdolliseen todennäköisyyteen ja sen tarkoitus on, että oppilaat pääsevät tutkimaan heille entuudestaan tuntematonta asiaa esitetyn Venn-diagrammin ja heillä valmiiksi olevan tiedon avulla.

Ratkaisu:

a) $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

c) $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

d) $\frac{3}{14}$

Pohdintatehtävä A.11
Tämän tehtävän tarkoituksena on tutustuttaa oppilaat ehdolliseen todennäköisyyteen. Tehtävässä oppilaiden on tarkoitus konkreettisen havainnollistuksen avulla huomata, mitä tarkoitetaan nostolla ilman palautusta ja miten se vaikuttaa tapahtumien todennäköisyyksiin.

Ratkaisu:

a) $\frac{3}{7}$

b) Repussa on kuusi tavaraa jäljellä.

c) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) Ensimmäinen nosto vaikuttaa toisen noston todennäköisyyksiin.

e) $\frac{2}{5}$

Pohdintatehtävä A.15
Tehtävän tavoitteena on, että oppilaat yhdistävät saman asian erilaiset esitystavat toisiinsa. Kyseisen tehtävän on tarkoitus kumota mahdollisia väärinkäsityksiä ehdolliseen todennäköisyyteen liittyen.
Eriytettäessä alaspäin ylimääräisiä vaihtoehtoja voidaan vähentää.

Ratkaisu:

Toisella nostolla saadaan hertta, kun ensimmäisellä saatiin pata.	Toisella nostolla saadaan pata, kun ensimmäisellä saatiin pata.	Saadaan kaksi pataa.
$\frac{13}{52}$	P(hertta 2 | pata 1)	$\frac{12}{52}$
$\frac{13}{51}$	$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$	P(pata 1 ja pata 2)
P(pata 1 | hertta 2)	P(pata 2 | pata 1)	$\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51}$
$\frac{\text{P(hertta 2 ja pata 1)}}{\text{P(pata 1)}}$	$\frac{\text{P(pata 1 ja hertta 2)}}{\text{P(hertta 2)}}$	P(pata 1)·P(pata 2)
$\frac{12}{51}$	$\frac{\text{P(pata 2 ja pata 1)}}{\text{P(pata 1)}}$	$\frac{\text{P(pata 1 ja pata 2)}}{\text{P(pata 2)}}$

Pohdintatehtävä A.16
Tämän tehtävän tavoitteena on auttaa oppilaita tunnistamaan, millaisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapahtumasta on kysymys.

Ratkaisu:

a) Riippuvaisia.

b) Riippumattomia.

c) Riippumattomia.

d) Riippuvaisia.

Pohdintatehtävä A.17
Tehtävä toimii johdatuksena kahteen toisistaan riippumattomaan tapahtumaan ja niiden kertolaskusääntöön.
Eriytettäessä ylöspäin oppilaat voivat miettiä, mitä muita tapahtumia on olemassa, joissa ensimmäinen ei vaikuta toisen tapahtuman todennäköisyyksiin.
Eriytettäessä alaspäin oppilaita voi muistuttaa, miten lasketaan kohtien a ja b todennäköisyydet suotuisten alkeistapausten ja kaikkien alkeistapausten avulla.

Ratkaisu:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{6}$

c) Ei vaikuta.

d)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						×

Piirretyn ruudukon perusteella todennäköisyys on $\frac{1}{36}$.

Pohdintatehtävä A.22
Tehtävän tarkoituksena on johdattaa oppilaita toisistaan riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöön helpohkolla sanallisella tehtävällä. Tehtävässä oppilaiden on tarkoitus konkreettisen havainnollistuksen avulla huomata, mitä tarkoitetaan nostolla palautuksen kanssa ja miten se vaikuttaa tapahtumien todennäköisyyksiin.

Ratkaisu:

a) $\frac{4}{7}$

b) $\frac{9}{49}$

c) $\frac{64}{343}$

Pohdintatehtävä A.23
Tehtävässä oppilaiden on tarkoitus pohtia annettuja väitteitä ja perustella, miksi tietty heidän mielestään pitää paikkaansa aina, joskus tai ei koskaan.

Ratkaisu:

a) Ei koskaan.

b) Ei koskaan.

c) Aina.

d) Joskus (kun kaikki ässät on nostettu).

e) Aina.

B.5 Kerto- ja yhteenlaskusäännön käyttö samassa tehtävässä

Pohdintatehtävä A.24
Tämä tehtävä toimii tutkimustehtävänä yhteen- ja kertolaskusäännön käyttöön samassa tehtävässä. Lisäksi tehtävä tutustuttaa oppilaat puukaavioon.
Eriytettäessä alaspäin valmiiseen puukaavioon voidaan piirtää kohdissa d ja f kysytyt polut, joka selkeyttää oppilaille, miten puukaaviota tulisi tulkita todennäköisyyksien laskemiseksi.

Ratkaisu:

a) Puukavio esittää tilannetta, jossa Milla heittää kolikkoa kolme kertaa. Piirretyn puukaavion avulla voidaan laskea kolmen kolikonheiton eri tapausten todennäköisyyksiä.

b) Kolikonheitossa mahdollisia tapauksia ovat "saadaan kruuna" ja "saadaan klaava". Todennäköisyys saada kruuna on 0,5 ja todennäköisyys saada klaava on 0,5. Tämän takia jokaisessa puukaavion haarassa on luku 0,5.

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

d) Lasketaan puukaaviosta mahdollisten polkujen määrä, joiden varrella on tapaukset "klaava", "klaava" ja "klaava". Koska mahdollisia polkuja on vain yksi, on kysytty todennäköisyys puukaavion perusteella $\frac{1}{8}$.

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

f) Lasketaan jälleen puukaaviosta mahdollisten polkujen määrä, joiden varrella on tapaukset "klaava", "klaava" ja "kruuna". Näitä polkuja on yhteensä kolme, joten kysytty todennäköisyys on puukaavion perusteella $\frac{3}{8}$.

Pohdintatehtävä A.26
Tämän tehtävän tavoitteena on auttaa oppilaita tunnistamaan, millaisesta todennäköisyyteen liittyvästä tapahtumasta on kysymys. Tämän lisäksi tässä tehtävässä oppilaiden on tarkoitus lisätä ymmärrystään puukaavion käytöstä.
Eriytettäessä alaspäin oppilaita voidaan muistuttaa, mitä tarkoittivatkaan erilliset, ei-erilliset, riippumattomat ja riippuvaiset tapahtumat.
Eriytettäessä ylöspäin oppilaita voidaan pyytää pohtimaan, miten tapahtumista saisi ei-erilliset. Lisäksi he voivat pohtia, millä muulla tavalla he ratkaisisivat tutkittavan esimerkkitehtävän. (Esimerkiksi toisenlaisen puukaavion avulla.)

Ratkaisu:

a) Riippuvaiset.

b) Erilliset.

c) Riittää tarkastella vain polkuja, jossa alemmalla rivillä on samanvärinen sukka kuin ylemmällä rivillä, sillä se käsittää kaikki suotuisat tapaukset. (Jos kysyttäisiin todennäköisyyttä saada eriväriset sukat, ei puukaaviota voisi piirtää tällä tavalla.)

d) Kertolaskusääntöä käytetään tilanteessa, kun halutaan kaksi samanväristä sukkaa. Yhteenlaskusääntöä käytetään, kun lasketaan todennäköisyyttä saada jotkut kaksi sukkaa mukaan, jotka ovat samaa väriä.

e) a-kohta voitaisiin laskea ilman puukaaviota käyttäen pelkästään tuttua kertolaskusääntöä $\frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136} \approx 0,0074$.

Pohdintatehtävä A.27
Tehtävässä oppilaiden on tarkoitus huomata, mitä laskusääntöä on käytettävä annetussa tilanteessa ja mikä menee pieleen väärin tehdyissä ratkaisuissa.

Ratkaisu: Oiva on ratkaissut b-kohdan oikein, Muru on ratkaissut a-kohdan oikein ja Miika on ratkaissut c-kohdan oikein.
Oiva on ratkaisussaan käyttänyt kertolaskusäännön sijaan yhteenlaskusääntöä kohdissa a ja c.
Muru on ratkaisussaan käyttänyt kertolaskusäännön sijaan yhteenlaskusääntöä b-kohdassa. c-kohdassa Muru on laskenut todennäköisyyttä komplementin avulla, jossa yhteenlaskun sijaan hän on kertonut kohtien a ja b tulokset keskenään.
Miika on laskenut kohdat a ja b väärinpäin.

Pohdintatehtävä A.28
Tehtävässä oppilaiden on tarkoitus pohtia annettuja väitteitä ja perustella, miksi tietty väite heidän mielestään pitää paikkaansa aina, joskus tai ei koskaan.

Ratkaisu:

a) Aina.

b) Joskus (jos yksikään oppilas ei opiskele sekä psykologiaa että pitkää matematiikkaa).

c) Ei koskaan.

d) Ei koskaan.

e) Joskus (kun kaikki karkkia syövät oppilaat syövät myös purkkaa).

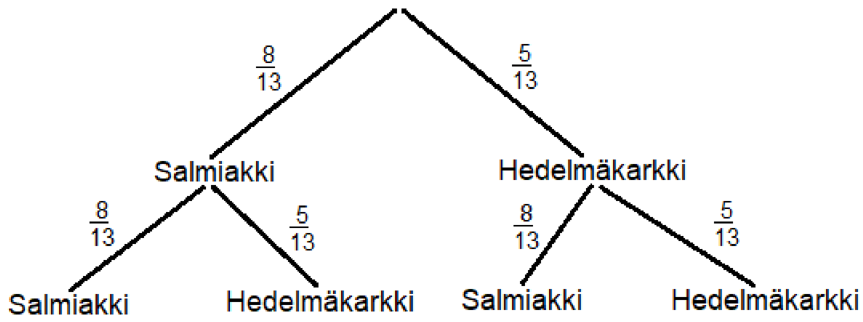
C Tehtävien vastaukset

1. a) 1
   b) $\frac{5}{6}$
   c) $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
   d) $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
2. a) $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
   b) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
   c) $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
3. $\frac{32}{52} = \frac{8}{13}$
4. $\frac{258}{329} \approx 0{,}7842$
5. a) $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
   b) $\frac{25}{51}$
   c) $\frac{25}{102}$
   d) b-kohdassa tiedetään, että ensimmäinen kortti on varmasti ollut musta. c-kohdassa lasketaan myös ensimmäisen kortin todennäköisyys olla musta.
6. a) $\frac{3}{13}$
   b) $\frac{2}{91}$
   c) Todennäköisyys on kummassakin tilanteessa erisuuri. b-kohdassa lasketaan todennäköisyys myös sille, että ensimmäinen ja toinen kynä ovat puuvärikyniä. a-kohdassa tämä tiedetään jo varmaksi, jolloin riittää laskea vain kolmannen kynän todennäköisyys olla puuvärikynä.
7. $\frac{2}{7}$
8. a) $\frac{2}{5}$
   b) $\frac{2}{5}$
   c) Koska molemmissa tapauksissa tiedetään, että joko toinen tai ensimmäinen nostettavista kolikoista on varmuudella 50 sentin kolikko, on toinen kolikko myös 50 sentin kolikko todennäköisyydellä $\frac{2}{5}$. Vaikka b-kohdassa tiedetään jälkimmäinen tapahtuma ennen ensimmäistä, vaikuttaa se kuitenkin ensimmäisen tapahtuman todennäköisyyteen.
9. Eräs tapa ratkaista tehtävä:

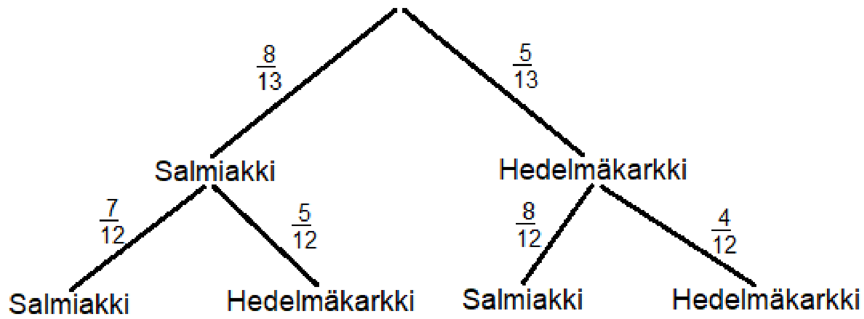
$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

   Tehtävä voidaan ratkaista myös piirtämällä noppien silmälukuja kuvaavat taulukot, laskemalla vastaavat tilanteet kuin taulukkoon kirjattuna tai komplementin avulla.

10. a)



b)



c) $\frac{89}{169} \approx 0,527$

d) $\frac{144}{169} \approx 0,852$

e) Kun alimman rivin edelliseltä riviltä samasta pisteestä lähtevien polkujen todennäköisyydet lasketaan yhteen, tulisi tulokseksi saada 1. Kun tämä pätee, puukaavio on oikein piirretty.

11. Lasketaan todennäköisyydet kummallekin tapaukselle.

a)
$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

b)
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Siis a-kohdan tapaus on todennäköisempi, kuin b-kohdan.

12. a)
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{12} = \frac{47}{78} \approx 0,603$$

b)

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{12}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{13}}=\frac{26}{47}\approx 0,553$$

13. a) $0,1482 \approx 15\%$

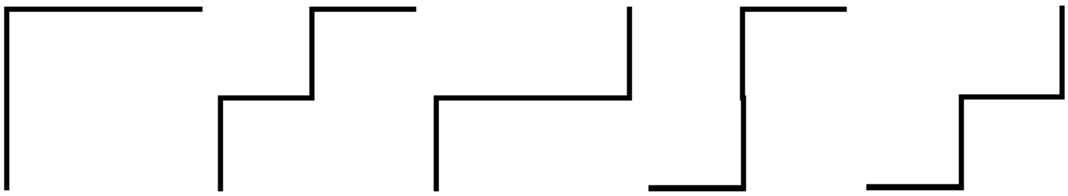
b) $0,0,5918 \approx 59\%$

c) $1-0,5918=0,4082 \approx 41\%$

d) $0,26-0,1482=0,1118 \approx 11\%$

e) $0,48-0,1482=0,3318 \approx 33\%$

14. a)



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

b)

$$\frac{5}{8}$$