



TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

Kehärakenteen analysointi käsin laskumenetelmillä ja FEM-ohjelmilla

Ville Haapasalo

Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka

Kandidaatintyö

Tammikuu 2022

TIIVISTELMÄ

Kehärakenteen analysointi käsin laskumenetelmillä ja FEM-ohjelmilla

Ville Haapasalo

Oulun yliopisto, Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka

Kandidaatintyö 2022, 27 s.

Työn ohjaaja(t) yliopistolla: Hannu Liedes

Tämän työn tavoitteena on tutkia yksinkertaisen kehärakenteen nurkkapisteiden siirtymiä käyttäen käsin tehtävää FEM-laskentaa ja COMSOL Multiphysics -laskentaohjelmistoa. Tavoitteena on myös saada käsin laskennan ja laskentaohjelmiston tulokset vastaamaan toisiaan. Käsin laskentaa varten työssä tarkastellaan FEM-laskennan teoriaa, minkä avulla saadaan käsitys siitä mitä ollaan tekemässä. Jotta työ pysyy kohtuullisessa mitassa, on ohjelmiston käyttö laskennassa käyty karkeasti läpi. Tulokset käsin laskennasta ja COMSOL Multiphysics -laskentaohjelmistosta vastaavat hyvin toisiaan. Työ antaa lukijalle käsityksen FEM-laskentaohjelmistojen toimintaperiaatteesta.

Asiasanat: elementtimenetelmä, kehärakenne, matriisi

ABSTRACT

Frame structure analysis using manual calculation methods and FEM programs

Ville Haapasalo

University of Oulu, Degree Programme of Civil Engineering

Bachelor's thesis 2021, 27 pp.

Supervisor(s) at the university: Hannu Liedes

The aim of this bachelor's thesis is to study a simply frame structure's corners movement by using manual FEM calculation methods and COMSOL Multiphysics program. The aim is to get results to match each other. For the manual calculation in the thesis, we are studying calculation theory of fine element methods. The calculation and use of COMSOL Multiphysics program is introduced briefly in the thesis. The results of manual and program calculations matches very well. The bachelor's thesis gives a brief introduction to FEM-programs calculation methods.

Keywords: fine element method, frame structure, matrix

ALKUSANAT

Työ on kandidaatin tutkinnon lopputyö rakennus- ja yhdyskuntatekniikan tutkinto-ohjelmassa rakennesuunnittelu suuntautumisena. Työn aihe on yliopiston valmiista aiheista valittu. Valitsin kyseisen aiheen, koska halusin varmuutta omaan laskutaitoon ja halusin syventää elementtimenetelmien osaamistani. Kandidaatintyön avulla opin myös käyttämään COMSOL Multiphysics -laskentaohjelmaa. Haluan kiittää työn ohjaajaa Hannu Liedestä aiheesta ja ohjauksesta, sekä Jouko Lumijärveä käsin laskennan ja Comsol mallin tarkastamisesta. Haluan myös kiittää veljeäni Olli Haapasaloa työn oikoluvusta.

Oulu, 24.1.2022

SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ

ABSTRACT

ALKUSANAT

SISÄLLYSLUETTELO

MERKINNÄT JA LYHENTEET

| | |
|--|----|
| 1 Johdanto | 6 |
| 2 Elementtimenetelmät..... | 7 |
| 2.1 Elementtijako ja solmupisteet | 7 |
| 2.2 Solmusuureet..... | 9 |
| 2.3 Vastaavuusmatriisit | 11 |
| 2.4 Elementtien ja koko rakenteen jäykkyysmatriisi | 11 |
| 2.5 Tasapainoyhtälön ratkaisu..... | 13 |
| 3 Käsinlasku | 14 |
| 3.1 Esimerkin esittely..... | 14 |
| 3.2 Laskenta | 15 |
| 4 Laskentaohjelmistot | 22 |
| 4.1 Comsol Multiphysics | 22 |
| 5 Tulokset ja pohdinta..... | 25 |
| 5.1 Tulokset..... | 25 |
| 5.2 Pohdinta..... | 26 |
| LÄHDELUETTELO..... | 27 |

MERKINNÄT JA LYHENTEET

| | |
|---------------------|--|
| α | kiertokulma |
| A | poikkipinta-ala |
| E | kimmomoduuli |
| I | poikkileikkauksen neliömomentti |
| L | pituus |
| N | elementtien lukumäärä |
| U_n | solmupistesiiirtymä |
| c | $\cos \alpha$ |
| e | elementin numero |
| f_n^e | elementin solmukuormitus |
| m | elementtivapausasteiden lukumäärä |
| n | rakennevapausasteiden lukumäärä |
| q_t | pitkittäiskuorma |
| q_n | poikittaiskuorma |
| s | $\sin \alpha$ |
| u_n^e | elementin solmupistesiiirtymä |
| [F] | kuormitusvektori |
| $\{f^e\}$ | elementin solmuvoimavektori |
| $\{f_q^e\}$ | elementin tasajakautuneen kuorman matriisi |
| [K] | koko rakenteen jäykkyysmatriisi |
| $\{k^e\}$ | elementin jäykkyysmatriisi |
| $\{\widehat{k}^e\}$ | elementin kiertämätön jäykkyysmatriisi |
| [P] | pistevoimamatriisi |
| [T] | kiertomatriisi |
| [U] | siirtymämatriisi |
| $\{u^e\}$ | elementin siirtymämatriisi |
| $[V^e]$ | elementin vastaavuusmatriisi |

1 JOHDANTO

Rakennus on suunniteltava siten, että rakenteet ovat lujia ja vakaita. Rakennuksen on myös sovelluttava rakennuspaikan olosuhteisiin ja sen on kestävä suunnitellun käyttöönsä. Kantavien rakenteiden suunnittelun ja mitoituksen on perustuttava rakenteiden mekaniikan sääntöihin ja yleisesti tunnettuihin suunnitteluperusteisiin. Rakennuksen rakentamisessa on käytettävä rakenteiden lujuuden ja vakauden kannalta soveltuvia rakennustuotteita. Rakennus on myös suunniteltava siten, ettei rakentamisen tai käytön aikana kohdistuva kuormitus aiheuta sortumista, lujuutta tai vakautta haittaavia muodonmuutoksia. (MRL 17:117a§)

Teräsrakentaminen on komponenttirakentamista, jossa osat ovat mittatarkkoja ja kevyitä. Teräsrakentaminen on kuiva rakennustapa, eikä vuodenaajat rajoita rakentamista. Rakentamisessa käytetyt runkojärjestelmät ovat pilari-palkki-laatta-runko, pilari-laatta-runko ja liittorunko. Kehärakenteet ja kantavat teräsrakenteiset seinät ovat myös käytettyjä runkojärjestelmiä. (Väisänen 2007)

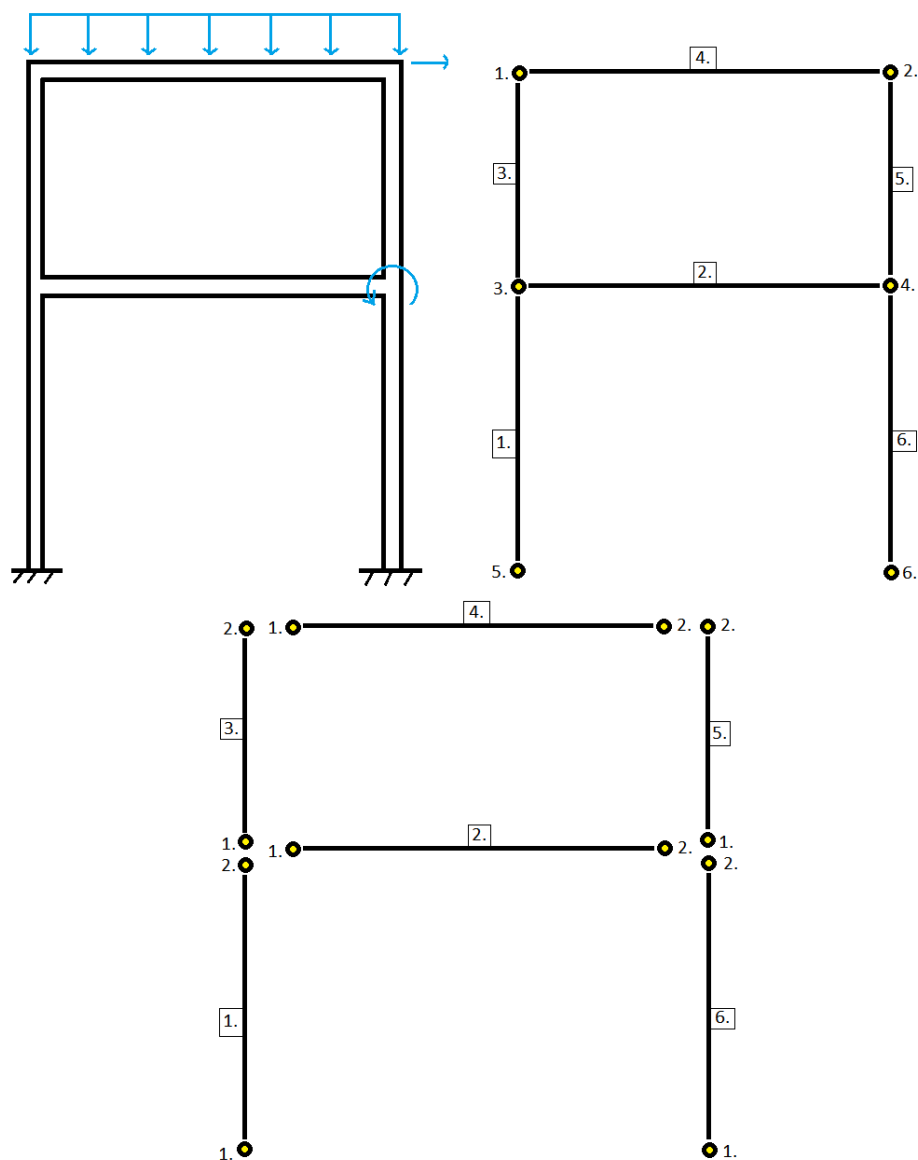
Työn tarkoituksena on analysoida esimerkkirakennetta sekä käsin laskumenetelmällä että FEM ohjelmalla. Esimerkkirakenteena on teräsrakenteinen kehärakenne. Kehärakennetta tarkastellaan tasossa ja tarkoituksena on laskea kehän solmupistesiiirtymät. Käsin laskennassa käytetään kuuden vapausasteen palkkielementtejä ja kuormitukset valitaan siten että laskenta pysyy mahdollisimman yksinkertaisena. Laskennassa käytetään hyväksi lineaarista elementtimenetelmää ja matriisilaskentaa. Tavoitteena on saada samat tulokset käsin laskettaessa, kuin mitä saadaan käyttäen FEM-ohjelmistoa. Työssä käytettävä laskenta ohjelmisto tulee on COMSOL Multiphysics.

2 ELEMENTTIMENETELMÄT

Elementtimenetelmät kehitettiin alun perin lentokoneollisuutta varten 1950-luvulla matriisimenetelmien johdannaisina. Elementtimenetelmät levisivät nopeasti tietokoneiden kehittymisen myötä kone- ja rakennustekniikan alueille käsittelemään statiikkaa ja dynamiikkaa. Menetelmien kehitys oli aluksi intuitiivista ja vasta 1960-luvun lopulla alettiin selvittämään matemaattisia perusteita. Sen jälkeen opittiin soveltamaan menetelmien periaatteita fysikaalisten ongelmien ratkaisuun (Määttänen 1975, s.58; Lähteenmäki 2008).

2.1 Elementtijako ja solmupisteet

Elementtimenetelmässä geometrisesti hankala kappale jaetaan pienempiin osiin, elementteihin. Elementit ovat geometrialtaan tarpeeksi yksinkertaisia laskentaa varten. Viivarakenteissa käytetään janaelementtejä kuvaamaan sauva- ja palkkielementtejä. Elementtien koko voi vaihdella riippuen tarkasteltavasta ongelmasta. Rakenteen tarkastelussa voidaan käyttää samanaikaisesti elementtejä, joilla on esimerkiksi erilaiset materiaaliominaisuudet ja geometriat. Tämä tekee elementtimenetelmistä joustavan rakenteiden käsittelyssä. Rakenne kuvataan toisiinsa liittyvillä elementeillä, elementtiverkolla. Elementit liittyvät toisiinsa solmupisteissä (Lähteenmäki 2008).



Kuva 1. Kehän jakaminen elementtiverkkoon ja elementteihin. (mukaiillen Lähtenmäki 2008)

Elementtien kokoa pienentämällä saadaan kasvatettua elementtiverkkoa. Tämän avulla likiarvoinen ratkaisu rakenteelle lähenee tarkkaa ratkaisua. Kuten aikaisemmin tuli ilmi solmupisteet valitaan elementin päihin, alku- ja loppupisteeseen. Alku- ja loppupisteet, kutsutaan myös nurkkapisteiksi, jotka ovat edullisimmat laskennan kannalta. (Määttänen 1975, s. 65, s. 67)

2.2 Solmusuureet

Solmusuureiden eli siirtymien ja voimien mittaamista varten on solmujen kohdalla nuolet osoittamassa voimien positiivista suuntaa. (Salmi ja Kuula 2012). Merkataan siirtymiä U :lla, ja merkitään sen avulla kehän kaikkia solmupisteiden siirtymiä sarakematriisimuodossa, näin saadaan myös muodostettua siirtymävektori.

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

missä $[U]$ on koko rakenteen siirtymämatriisi
 U_n on solmupistesiertymä

Näin saadaan myös muodostettua yksittäiselle elementille oma siirtymävektori.

$$\{u^e\} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ \vdots \\ u_n^e \end{bmatrix} \quad (2)$$

missä $\{u^e\}$ on elementin solmuvoimavektori
 u_n^e on elementin solmupistesiertymä

Vastaavasti saadaan myös yksittäisen elementin solmuvoimavektori.

$$\{f^e\} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ \vdots \\ f_n^e \end{bmatrix} \quad (3)$$

missä $\{f^e\}$ on elementin kuormitusvektori
 f_n^e on elementin solmukuormitus

Elementin solmuvoimat ovat elementin päissä vaikuttavia voimia, jotka lasketaan elementin muodonmuutoksista (Salmi ja Kuula 2012).

Kuuden vapausasteen palkkielementin tasajakautuneelle kuormalle saadaan solmuvoimat laskettua kaavalla

$$\{f_q^e\} = \begin{bmatrix} \frac{q_t L}{2} \\ \frac{q_n L}{2} \\ \frac{q_n L^2}{12} \\ \frac{q_t L}{2} \\ \frac{q_n L}{2} \\ -\frac{q_n L^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

missä $\{f_q^e\}$ on elementin tasajakautuneen kuorman matriisi

q_t on pitkittäiskuorma

q_n on poikittaiskuorma

L on elementin pituus

Rakenteeseen vaikuttavat pistevoimat voidaan myös esittää vektorina matriisimuodossa. Pistevoimat asetetaan rakennevapausasteita vastaaville paikoille. Koko rakenteen kuormitusmatriisi saadaan, kun yhdistetään ulkoisten voimien aiheuttama kuormitus ja sijoittelusummaamalla elementtien kuormitusvektorit kaavalla

$$[F] = [P] + \sum_{e=1}^N [V^e]^T \{f_q^e\}. \quad (5)$$

missä $[F]$ on koko rakenteen kuormitusmatriisi

$[P]$ on rakenteen pistevoimamatriisi

$[V^e]$ on elementin vastaavuusmatriisi

$\{f_q^e\}$ on elementin tasajakautuneen kuorman matriisi

Poikittaiskuorman positiivinen suunta on koordinaatistossa ylöspäin (Lumijärvi 2021).

2.3 Vastaavuusmatriisit

Jotta vastaavuusmatriisi voidaan muodostaa, on rakenne jaettava rakennevapausasteisiin ja elementit elementtijaon jälkeen elementtivapausasteisiin. Rakennevapausasteita ei käsin laskettaessa laiteta tuettuihin solmupisteisiin. Vastaavuusmatriisi liittää elementtivapausasteet rakennevapausasteisiin. Matriiseissa rivit vastaavat elementtivapausasteita ja siten sarakkeet rakennevapausasteita, alkiot puolestaan ovat joko ykkösiä tai nollia (Lumijärvi 2021). Kuuden vapausasteen vastaavuusmatriisi on muotoa

$$[V^e] = [m^{1-6} \times n] \quad (6)$$

missä $[V^e]$ on vastaavuusmatriisi

m^{1-6} on rivien lukumäärä

n on sarakkeiden lukumäärä

2.4 Elementtien ja koko rakenteen jäykkyysmatriisi

Elementtimenetelmissä on valmiiksi laskettu ja määritetty sekä sauva- että palkkielementin jäykkyysmatriisit. Koordinaatiston vaaka-akselin suuntaisen palkkielementin kuuden vapausasteen jäykkyysmatriisi on

$$\{\widehat{k}^e\} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

missä $\{\widehat{k}^e\}$ on elementin kiertämätön jäykkyysmatriisi

E on elementin kimmomoduuli

A on elementin poikkipinta-ala

L on elementin pituus

I on elementin poikkileikkauksen neliömomentti

Jos palkkielementti poikkeaa koordinaatiston vaaka-akselista, tulee elementin jäykkyysmatriisia kiittää kiirtomatriisilla.

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

missä [T] on kiirtomatriisi

c on $\cos \alpha$

s on $\sin \alpha$

α on kiirtokulma

Kiirtetty palkkielementin jäykkyysmatriisi saadaan yhtälöiden (7) ja (8) avulla seuraavasti

$$\{k^e\} = [T]^T \{\widehat{k}^e\} [T]. \quad (9)$$

missä $\{k^e\}$ on elementin jäykkyysmatriisi

[T] on kiirtomatriisi

$\{\widehat{k}^e\}$ on elementin kiirtämätön jäykkyysmatriisi

Sijoittelusummaamalla elementtien jäykkyysmatriisit saadaan aikaiseksi koko rakenteen jäykkyysmatriisi vastaavuusmatriisin avulla

$$[K] = \sum_{e=1}^N [V^e]^T \{k^e\} [V^e]. \quad (10)$$

missä [K] on koko rakenteen jäykkyysmatriisi

$[V^e]$ on elementin vastaavuusmatriisi

$\{k^e\}$ on elementin jäykkyysmatriisi

2.5 Tasapainoyhtälön ratkaisu

Koko rakenteen tasapainoyhtälön muodostamista varten tarvitaan tiedot koko rakenteen jäykkyyismatriisista, koko rakenteen kuormitusvektorista, sekä koko rakenteen siirtymävektorista. Näiden avulla elementtimenetelmässä tasapainoyhtälö saa muodon

$$[F] = [U][K] \quad (11)$$

missä $[F]$ on koko rakenteen kuormitusvektori
 $[U]$ on koko rakenteen siirtymämatriisi
 $[K]$ on koko rakenteen jäykkyyismatriisi

Jos jokin elementtivoimavektoreista ei ole koordinaatiston vaaka-akselin suuntainen tulee se kääntää, kuten kaavassa (9) tehtiin, mutta elementin jäykkyyismatriisin tilalle sijoitetaan elementtivoimavektori. Tasapainoyhtälö ratkeaa kokorakenteen jäykkyyismatriisin käänteismatriisin avulla

$$[U] = [K]^{-1}[F] \Leftrightarrow [U] = [K] \setminus [F] \quad (12)$$

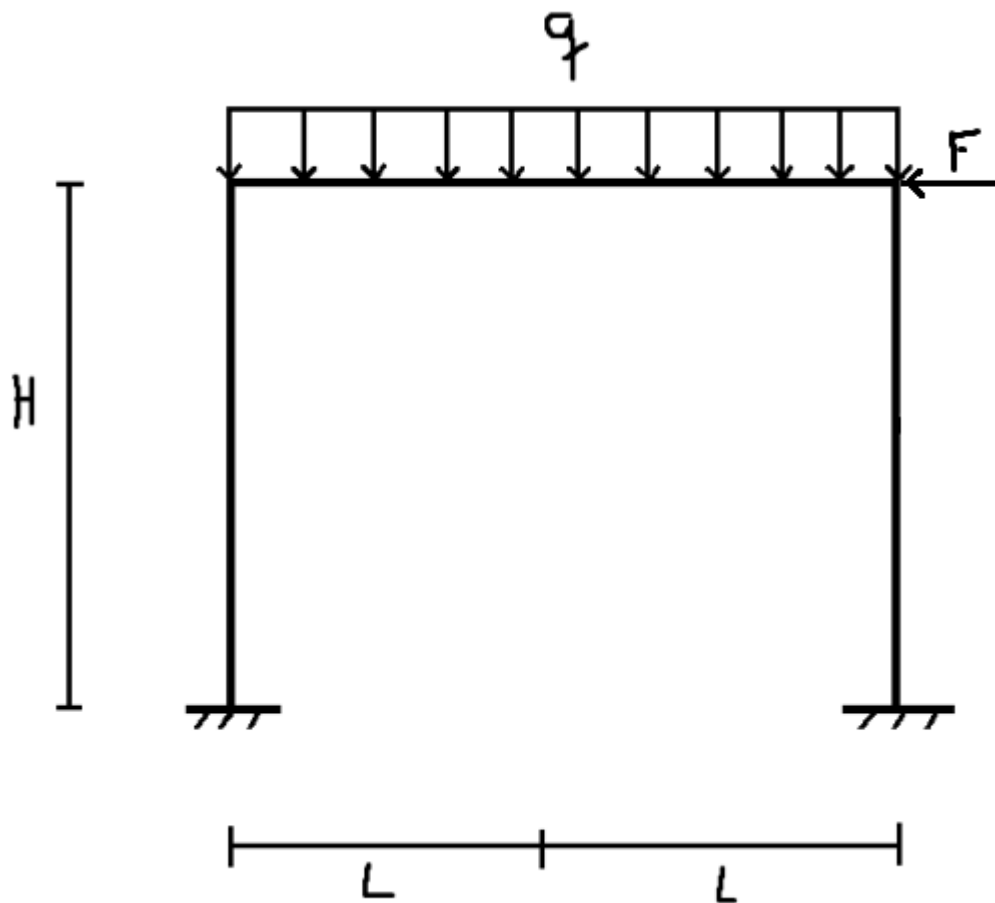
missä $[F]$ on koko rakenteen kuormitusvektori
 $[U]$ on koko rakenteen siirtymämatriisi
 $[K]$ on koko rakenteen jäykkyyismatriisi

Yhtälön tuloksena saadaan solmupistesiiirtymät ja -kiertymät radiaaneina.

3 KÄSINLASKU

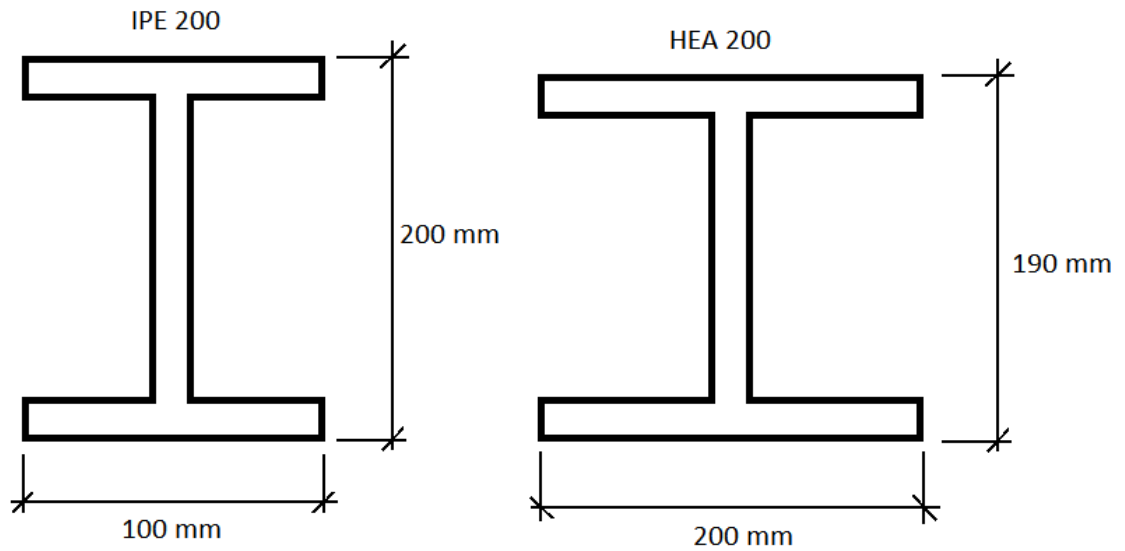
Käsin lasku suoritetaan luvun 2. mukaan ja tarkoituksena on laskea kehän solmupistesiirtymät.

3.1 Esimerkin esittely



Kuva 2. Esimerkin laskentamalli.

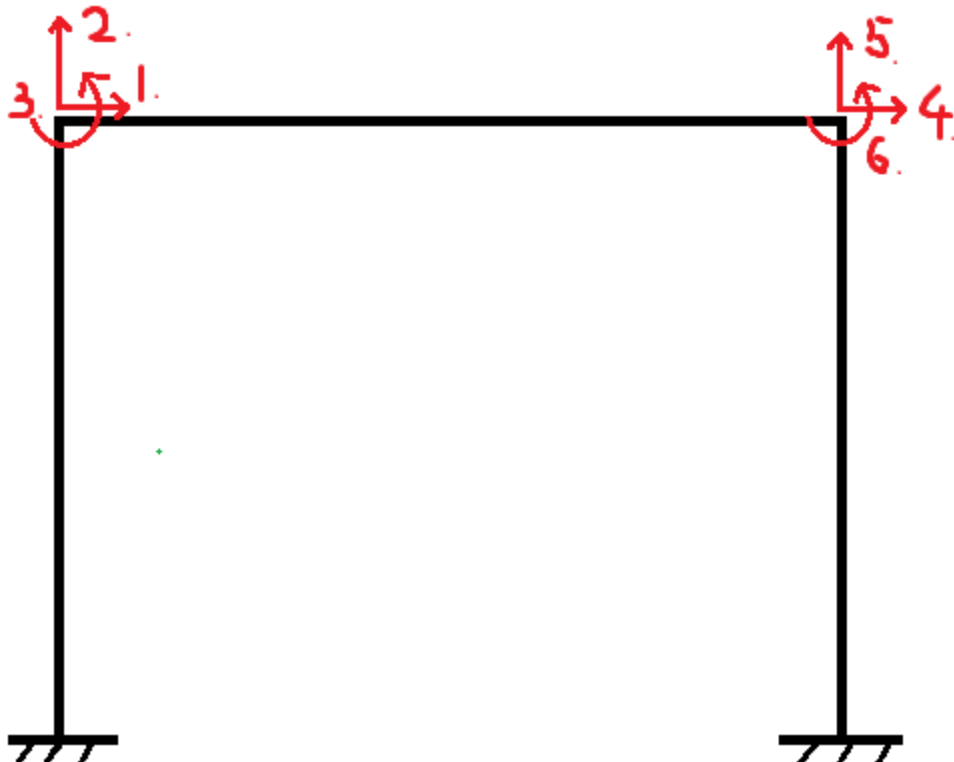
Valitaan kehän kuormitus ja pituus: $q = 2 \text{ kN/m}$, $F = 1 \text{ kN}$, $L = 5 \text{ m}$ ja $H = 3 \text{ m}$. Kehä pilarit ovat HEA200 ja palkki IPE200 rakennusterästä.



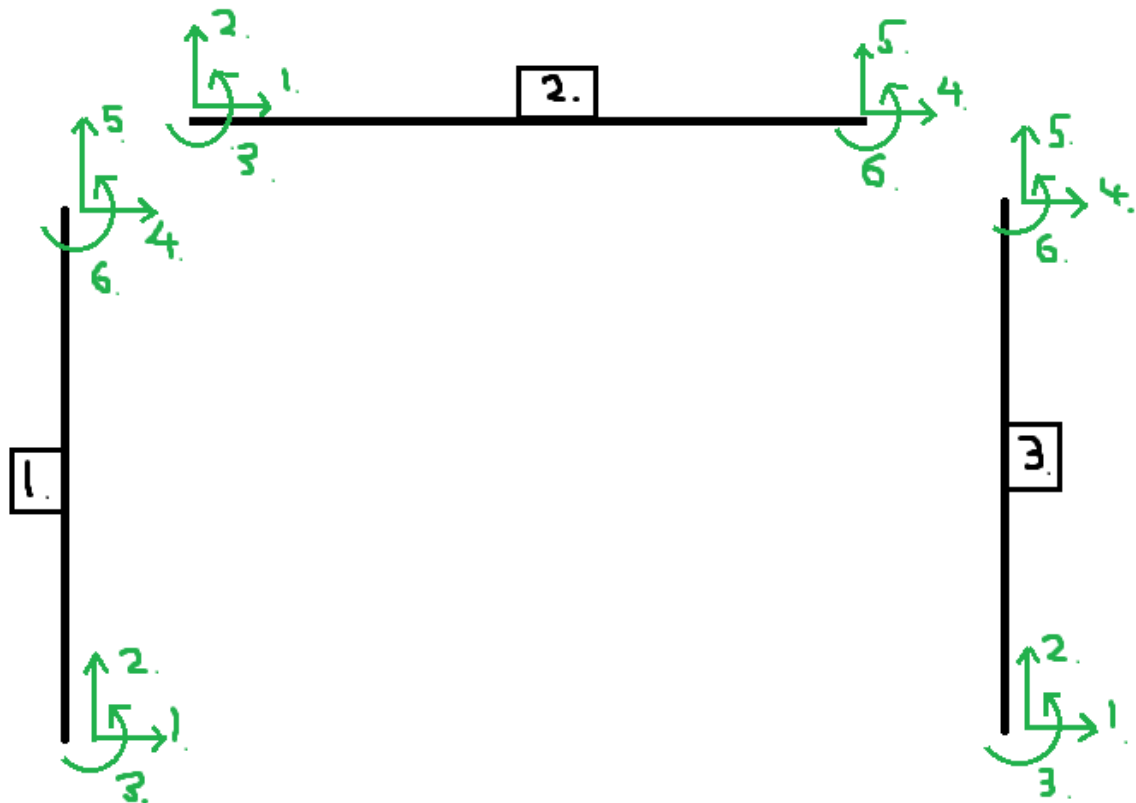
Kuva 3. Teräspalkkien poikkileikkaukset.

3.2 Laskenta

Merkitään koko rakenteen rakennevapausasteet ja suoritetaan elementteihin jako. Elementtijaon jälkeen merkataan elementtivapausasteet.



Kuva 4. Rakennevapausasteet.



Kuva 5. Elementtijako ja elementtivapausasteet.

Muodostetaan rakenne- ja elementtivapausasteiden avulla vastaavuusmatriisit kaavan (6) mukaisesti, vastaavuusmatriiseja käytetään myöhemmin.

$$[V^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[V^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[V^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luodaan elementtien jäykkyysmatriisit. Pilarit ovat HEA200, joidenka poikkipintasuureet on taulukoitu ja ne ovat: $A_{HEA200} = 5380 \text{ mm}^2 = 0.00538 \text{ m}^2$ ja $I_{HEA200} = 13.36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 1.336 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Palkki on IPE200 ja sen poikkipintasuureiden arvot on myös taulukoitu ja ne ovat: $A_{IPE200} = 2850 \text{ mm}^2 = 0.00285 \text{ m}^2$ ja $I_{IPE200} = 19.40 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 1.94 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Sekä palkit että pilarit ovat terästä, jolle $E = 210 \text{ GPa}$. Pilareiden ja palkin kiertämättömät jäykkyysmatriisit kaavan (7) mukaan,

$$\{k^{HEA200}\} = \begin{bmatrix} 376600000 & 0 & 0 & -376600000 & 0 & 0 \\ 0 & 1246933.33 & 1870400 & 0 & -1246933.33 & 1870400 \\ 0 & 1870400 & 3740800 & 0 & -1870400 & 1870400 \\ -376600000 & 0 & 0 & 376600000 & 0 & 0 \\ 0 & -1246933.33 & -1870400 & 0 & 1246933.33 & -1870400 \\ 0 & 1870400 & 1870400 & 0 & -1870400 & 3740800 \end{bmatrix}$$

ja

$$\{k^{IPE200}\} = \begin{bmatrix} 59850000 & 0 & 0 & -59850000 & 0 & 0 \\ 0 & 48888 & 244440 & 0 & -48888 & 244440 \\ 0 & 244440 & 1629600 & 0 & -244440 & 814800 \\ -59850000 & 0 & 0 & 59850000 & 0 & 0 \\ 0 & -48888 & -244440 & 0 & 48888 & -244440 \\ 0 & 244440 & 814800 & 0 & -244440 & 1629600 \end{bmatrix}$$

Muodostetaan kiertomatriisi kaavan (8) mukaisesti ja kierretään pilarelementit kulman $\frac{\pi}{2}$ verran.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kiertomatriisin avulla kierretään pilarielementit kaavan (9) mukaisesti. Koska palkkielementti on vaakatasossa ei sitä tarvitse kiertää.

$$\{k^{HEA200}\} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$$\begin{bmatrix} 376600000 & 0 & 0 & -376600000 & 0 & 0 \\ 0 & 1246933.33 & 1870400 & 0 & -1246933.33 & 1870400 \\ 0 & 1870400 & 3740800 & 0 & -1870400 & 1870400 \\ -376600000 & 0 & 0 & 376600000 & 0 & 0 \\ 0 & -1246933.33 & -1870400 & 0 & 1246933.33 & -1870400 \\ 0 & 1870400 & 1870400 & 0 & -1870400 & 3740800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1246933.33 & 0 & -1870400 & -1246933.33 & 0 & -1870400 \\
0 & 376600000 & 0 & 0 & -376600000 & 0 \\
-1870400 & 0 & 3740800 & 1870400 & 0 & 1870400 \\
-1246933.33 & 0 & 1870400 & 16933.3243 & 0 & 1870400 \\
0 & -376600000 & 0 & 0 & 376600000 & 0 \\
-1870400 & 0 & 1870400 & 1870400 & 0 & 3740800
\end{bmatrix}$$

Seuraavaksi muodostetaan koko rakenteen jäykkymatriisi sijoittelusummaamalla kaavan (10) mukaisesti.

$$= \begin{bmatrix} 61096933.33 & 0 & 1870400 & -59850000 & 0 & 0 \\ 0 & 376648888 & 244440 & 0 & -48888 & 244440 \\ 1870400 & 244440 & 5370400 & 0 & -244440 & 814800 \\ -59850000 & 0 & 0 & 61096933.33 & 0 & 1870400 \\ 0 & -48888 & -244440 & 0 & 376648888 & -244440 \\ 0 & 244440 & 814800 & 1870400 & -244440 & 5370400 \end{bmatrix}$$

Muodostetaan koko rakenteeseen vaikuttavien voimien kuormitusmatriisi kaavan (4) ja (5) mukaisesti.

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2000 \cdot 10}{2} \\ 2000 \cdot 10^2 \\ \frac{12}{0} \\ \frac{2000 \cdot 10}{2} \\ \frac{2000 \cdot 10^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10000 \\ 50000 \\ \frac{3}{-1000} \\ -10000 \\ \frac{50000}{3} \end{bmatrix}$$

Nyt voidaan laskea solmuisiirtymät kaavalla (12).

$$[U] = \begin{bmatrix} 61096933.33 & 0 & 1870400 & -59850000 & 0 & 0 \\ 0 & 376648888 & 244440 & 0 & -48888 & 244440 \\ -1870400 & 244440 & 5370400 & 0 & -244440 & 814800 \\ -59850000 & 0 & 0 & 61096933.33 & 0 & 1870400 \\ 0 & -48888 & -244440 & 0 & 376648888 & -244440 \\ 0 & 244440 & 814800 & 1870400 & -244440 & 5370400 \end{bmatrix}$$

$$\backslash \begin{bmatrix} 0 \\ -10000 \\ 50000 \\ \frac{3}{-1000} \\ -10000 \\ \frac{50000}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000673 \\ -0.000027 \\ -0.003462 \\ -0.000795 \\ -0.000026 \\ 0.003906 \end{bmatrix}$$

Tuloksena saadaan siirtymät metreissä, mitkä ovat [U] matriisin riveillä 1,2,4 ja 5. Rivit 1 ja 4 ovat vaakasiirtymiä ja rivit 2 ja 5 ovat pystysiirtymiä. Riveillä 3 ja 6 ovat rotaatiot radiaaneina.

4 LASKENTAOHJELMISTOT

Yleensä laskenta suoritetaan valmiilla ohjelmistoilla, kuten esimerkiksi Ansys, Comsol ja Robot. Myös ilmaisia kaikkien vapaassa käytössä olevia ohjelmistoja on olemassa, kuten Elmer ja Code_Aster. Ohjelmistoilla laskettaessa tehdään ohjelmistoon rakenteen geometrinen malli ja annetaan ohjelmistolle tiedot rakenteen materiaaleista ja kuormituksista. Ohjelmistolle pitää antaa myös tieto rakenteen reunaehdoista ja elementtijaosta (Lumijärvi 2021).

Ohjelmisto osaa näiden tietojen avulla muodostaa laskentaa varten yhtälöt ja ratkaisee ne. Ohjelmistoista voidaan tulostaa tarvittaessa muun muassa jännitysjakautumia. Laskentaohjelmistoja käytettäessä tulosten analysointi ja tarkastelu jää käyttäjän tehtäväksi.

4.1 Comsol Multiphysics

Laskentaa varten luodaan uusi 2D malli. Tämän jälkeen valitaan avautuvasta valikosta Structural Mechanics, valinta avaa alivalikon, josta valitaan Beam. Valinnan jälkeen painetaan Study -näppäintä. Seuraavassa valikossa tulee valita Stationary, koska ratkaisemme staattista ongelmaa. Valinnan jälkeen Comsol avaa uuden tyhjän työtilan, missä ongelmaa voidaan käsitellä.

Ensimmäisenä tulee määrittää rakenteen geometria. Mallin luominen onnistuu valitsemalla pisteet nurkkapisteet Sketch -toiminnolla tai polygonilla. Polygonia

käytettäessä tulee itse määrittää nurkkapisteiden koordinaatit ja valita tässä tapauksessa Type -kohdasta Open Curve.

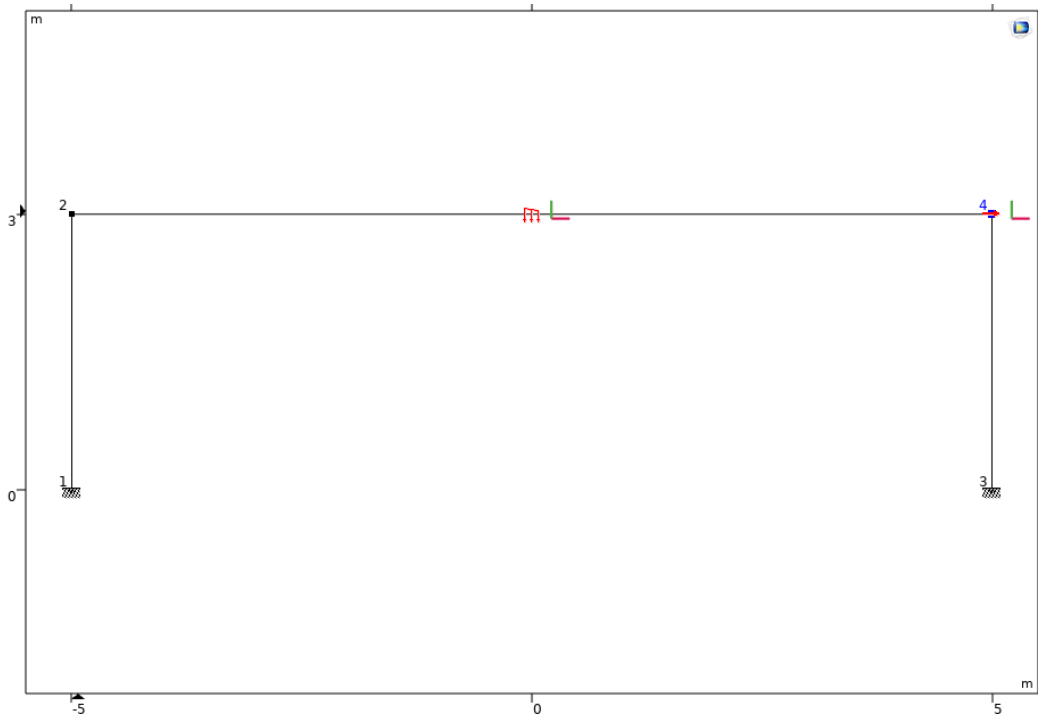


Kuva 6. Luotu geometria.

Seuraavaksi tulee valita Beam -alivalikosta Linear Elastic Material 1 -kohta ja asettaa kimmomoduulin ja poissonin vakion paikalle tehtävänannossa annetut arvot. Tässä kohtaa on hyvä tarkistaa, että kaikki palkit ja pilarit on ollut valittuna. Tämän jälkeen annetaan pilareille tehtävän mukaiset poikkipinta-ala ja neliömomentti Cross-Section Data 1 -kohdassa. Sama pitää tehdä myös palkille, se onnistuu helpoiten valitsemalla Cross-Section Data 1 ja painamalla Duplicate näppäintä. Tällöin Comsol kopioi aikasemmat valinnat Cross-Section Data 2 kohtaan. Nyt riittää vain ottaa valintaan palkit ja muuttamalla poikkipinta-alan ja neliömomentin arvot palkkeja vastaaviksi.

Nyt malliin tulee lisätä tuennat ja kuormitukset. Tuennat ovat jäykkiä ja Comsolissa sitä vastaa Fixed Constraint ja ne tulevat tehtävän mukaiseen paikkaan. Pistemäinen vaakavoima saadaan Comsolissa lisättyä valitsemalla Point Load ja asettamalla voiman suunta ja suuruus oikeaksi. Comsolissa voimien oletus suunnat ovat oikealle ja ylös, siksi

tulee olla tarkkana etumerkeissä. Tasajakaantunut kuorma saadaan Comsolissa lisättyä valitsemalla Edge Load.



Kuva 7. Geometria kuormien ja tuennan lisäämisen jälkeen.

Seuraavaksi tulee määrittää laskennan elementtiverkko. Elementtiverkko tulee nyt olla käsinlaskentaa vastaava. Tämä saadaan siten, että Mesh 1 -kohdasta valitaan Edge, mistä edelleen valitaan Distribution. Näin voimme Comsolissa määrittää sen, kuinka monta elementtiä rakenneosassa on. Nyt tulee olla yksi elementti, joten Number of elements -kohtaan tulee vaihtaa arvoksi 1. Tämän jälkeen tulee painaa Build All -näppäintä, jolloin Comsol rakentaa halutun elementtiverkon. Nyt voidaan valita Study ja painaa Compute -näppäintä, jolloin Comsol laskee mallin. Elementtiverkon konvergenssitarkastelua ei tarvitse suorittaa, koska verkko on tehty vastaamaan käsinlaskentaa.

Results valikosta valitaan Derived Values -kohdasta Point Evaluation. Nyt valitaan Expressions kohdasta Displacement field, x coordinate ja valitaan nurkkapisteet, sekä muutetaan yksiköksi Unit -kohdassa millimetrit.. Tämän jälkeen painetaan Evaluate, jolloin Comsol päivittää tulokset oikealle alas. Tulokset ovat nurkkapisteiden vaakasiirtymät. Vastaavasti tulee luoda Point Evaluation myös pystysiirtymälle ja kiertymälle. Vaakasiirtymässä Expressions kohtaan tulee valita Displacement field, y coordinate ja kiertymälle Rotation field, Z component.

5 TULOKSET JA POHDINTA

5.1 Tulokset

Käsin laskennan tuloksena saatiin siis ylänurkkien siirtymät ja kiertymät. Vasemman ylänurkan vaakasiirtymäksi saatiin -0.000673 m eli -0.673 mm, pystysiertymäksi -0.000027 m eli -0.027 mm ja kiertymäksi -0.003462 radiaania. Oikean ylänurkan vaakasiirtymäksi saatiin -0.000795 m eli -0.795 mm, pystysiertymäksi -0.000026 m eli -0.026 mm, sekä kiertymäksi 0.003906 radiaania. Vasemman ylänurkan suureet ovat kaikki negatiivisia, eli ne ovat valittujen vapausasteiden suuntia vastaan. Vasen ylänurkka siis liikkuu vasemmalle ja alas, samalla se kiertyy myötäpäivään. Oikean ylänurkan kaikki muut arvot ovat negatiivisia paitsi kiertymän saama arvo. Oikea ylänurkka siis liikkuu myös vasemmalle ja alas, mutta se kiertyy valitun vapausasteen suuntaisesti eli vastapäivään.

Comsolilla on saatu kuvien mukaiset tulokset vaaka- ja pystysiertymälle, sekä kiertymälle. Comsol mallissa pisteet 2 ja 4 vastaavat käsinlaskennan vasenta ja oikeaa ylänurkkaa.

| Displacement field, x component (mm), Point: 1 | Displacement field, x component (mm), Point: 2 | Displacement field, x component (mm), Point: 3 | Displacement field, x component (mm), Point: 4 |
|--|--|--|--|
| 0.0000 | -0.67283 | 0.0000 | -0.79503 |

Kuva 8. Vaakasiirtymän Comsol laskennan tulos.

| Displacement field, y component (mm), Point: 1 | Displacement field, y component (mm), Point: 2 | Displacement field, y component (mm), Point: 3 | Displacement field, y component (mm), Point: 4 |
|--|--|--|--|
| 0.0000 | -0.026841 | 0.0000 | -0.026265 |

Kuva 9. Pystysiertymän Comsol laskennan tulos.

| Rotation field, Z component (rad), Point: 1 | Rotation field, Z component (rad), Point: 2 | Rotation field, Z component (rad), Point: 3 | Rotation field, Z component (rad), Point: 4 |
|---|---|---|---|
| 0.0000 | -0.0034616 | 0.0000 | 0.0039055 |

Kuva 10. Kiertymän Comsol laskennan tulos.

Tuloksista nähdään, että käsin laskennalla ja FEM ohjelmistolla saadut tulokset vastaavat hyvin toisiaan.

5.2 Pohdinta

Työ onnistui hyvin. Tulokset saatiin täsmäämään toisiaan, mikä oli yksi tavoitteista. Työn teoria osa onnistui hyvin, siitä tuli selkeä ja johdonmukainen. Siitä on varmasti apua myös muille, jotka ovat esimerkiksi suorittamassa elementtimenetelmien kurssia. Laskenta pidettiin yksinkertaisena, jotta se olisi selkeää ja helposti tarkistettavissa ja seurattavissa, sen takia valittiin yksinkertaiset ja helpot kuormitukset tehtävään.

Työn haasteena oli laajuuden rajaaminen. Työ olisi voinut lähteä paisumaan suurempaan mittakaavaan jo pelkästään lisäämällä kuormituksia ja muuttamalla niiden suuruutta. Työn laajuutta olisi voinut lisätä myös tarkastelemalla pilarien ja palkkien jännityksiä. Laskennallisesti se ei olisi ollut vaikeaa, mutta teorian laajentaminen, käsin laskennan laajentaminen ja FEM ohjelman käytön raportoinnin yhteisvaikutus olisi lisännyt työn pituutta muutamilla sivuilla. Haasteena oli Comsol laskentaohjelman käyttö, missä työ olikin tovin jumissa.

Työn yksi tavoitteista oli saada varmuutta laskutaitoon, mikä onnistui hyvin. FEM laskentataito on työn avulla karttunut kiitettävästi, vaikkakin työ oli aika yksinkertainen.

Työ avaa myös uusia tutkimuskohteita. Esimerkiksi Voitaisiin tutkia kehää, missä olisi palkeista muodostettu harja, kolminivelkehän tavoin. Myös useampi laivaisen ja kerroksisen kehän tutkiminen olisi mielenkiintoista. Näihin voitaisiin myös lisätä kuormitusta enemmän todellisuutta vastaaviksi.

LÄHDELUETTELO

Lumijärvi, J. 2021 Elementtivapausasteet ja rakennevapausasteet. Elementtimenetelmät I -kurssin luentomateriaali. Oulun yliopisto: Konetekniikan koulutusohjelma. Syyslukukausi, 2021.

Lähteenmäki M, 2008. Johdanto [verkkodokumentti].

Saatavissa: https://mlahteen.fi/arkistot/elpe_pdf/johdanto.pdf [viitattu 21.10.2021]

Maankäyttö ja rakennuslaki 5.2.1999/132

Määttänen M, 1975. Elementtimenetelmien perusteet. 3 painos, Oulu: Oulun yliopisto, Konetekniikan osasto/ Teknillisen mekaniikan laitos, 216 s.

Tapio, S. & Kuula K., 2012 Materiaalien mekaniikka. Tampere: Klingendahl Paino Oy, 464 s. ISBN-978-952-9835-83-6

Väisänen, P 2007. Teräs - Perustietoa arkkitehtiopiskelijoille [verkkodokumentti].

Saatavissa: https://www.terasrakenneyhdistys.fi/document/1/40/66e53a5/Teras_web.pdf