



Ilmonen Emma

Musiikin ja matematiikan integrointi lukiotason opetuksessa

Kandidaatin tutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Musiikkikasvatus
2021

Oulun yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Musiikin ja matematiikan integrointi lukiotason opetuksessa (Emma Ilmonen)

Kandidaatin tutkielma, 35 sivua

Helmikuu 2021

Kandidaatin tutkielmassani vastaan kysymyksiin (a) *mitkä tekijät yhdistävät musiikkia ja matematiikkaa oppiaineina?* sekä (b) *kuinka musiikkia ja matematiikkaa voidaan integroida yhteen lukiotason opetuksessa?* Musiikki ja matematiikka ovat intohimojani ja tulevaisuudessa pyrkimyksenäni on päästä opettamaan musiikkia ja matematiikkaa lukioon. Tästä syystä valitsin kohteeksi lukiotason opetuksen. Laaja-alaista osaamista painotetaan lukion opetussuunnitelman perusteissa (2019) ja tämä tapahtuu, kun lähestytään samaa aihetta eri näkökulmista. Tutustun lukion opetussuunnitelman perusteisiin: tutkin, mitä musiikista sanotaan, mitä matematiikasta sanotaan ja lopuksi mitä yhteistä näiden kahden oppiaineen tavoitteista löydetään. Näin saan perustellun pohjan musiikin ja matematiikan integroimiseen lukiotasolla.

Perustelen jo tehtyihin tutkimuksiin nojautuen sitä, kuinka paljon musiikissa ja matematiikassa on samaa. Niiden on huomattu olevan lähellä toisiaan jo kauan aikaa sitten historiassamme. Kuuluisa Pythagoras oli ensimmäinen, joka löysi yhteisen polun musiikin ja matematiikan historiassa. Avaan tutkimuksia liittyen muun muassa sykkeeseen ja rytmiin, transponointiin ja mitasuhteisiin, notaatioon ja geometriaan sekä intervaleihin ja logaritmeihin. Selitän myös sitä, kuinka nämä ko. musiikin ja matematiikan termit ovat yhdistettävissä toisiinsa. Musiikkikasvatuksella on huomattu olevan oma panoksensa myös matematiikan akateemisiin vaikutuksiin.

Lopuksi pohdin, kuinka lukiossa musiikin opiskelu vaikuttaa motivaatioon opiskella muita aineita, miten musiikin ja matematiikan opettajat eroavat toisistaan, sekä kuinka opettaja ylipääntään vaikuttaa motivaatioon opiskella kyseisiä aineita. Pohdin myös, kuinka musiikkikasvatuksen tutkintoa voisi kehittää muun muassa lisäämällä oppiaineiden integrointi -kurssin musiikkikasvatuksen tutkintorakenteeseen, kuinka yhteisopettajuus toimisi musiikin ja matematiikan oppiaineissa, sekä kuinka tutkielmaani voisi hyödyntää, kun lukion opetussuunnitelman perusteita aletaan kehittämään. Tuon esille myös alustavia ideoita, miten tästä voisin jatkaa pro gradu -tutkielmaan.

Avainsanat: musiikki, matematiikka, oppiaineintegraatio, laaja-alainen osaaminen

Sisältö

| | |
|--|-----------|
| 1 Johdanto | 4 |
| 2 Tutkimusasetelma | 6 |
| 3 Musiikki ja matematiikka lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 | 8 |
| 3.1 Musiikki lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019..... | 10 |
| 3.2 Matematiikka lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 | 11 |
| 3.3 Musiikki ja matematiikka – oppiaineiden yhteiset tavoitteet..... | 13 |
| 3.3.1 <i>Yhteiskuntaosaaminen ja ympäristöosaaminen</i> | 13 |
| 3.3.2 <i>Globaali- ja kulttuuriosaaminen</i> | 14 |
| 3.3.3 <i>Luova ja monitieteinen osaaminen</i> | 14 |
| 4 Musiikin ja matematiikan yhdistäviä tutkimuksia | 16 |
| 4.1 Yhteinen historia..... | 16 |
| 4.2 Teoria..... | 17 |
| 4.2.1 <i>Syke ja rytmi</i> | 18 |
| 4.2.2 <i>Transponointi ja mittasuhteet</i> | 19 |
| 4.2.3 <i>Notaatio ja geometria</i> | 20 |
| 4.2.4 <i>Intervallit ja logaritmit</i> | 21 |
| 4.3 Mielenkiinto ja arvostus oppiainetta kohtaan | 22 |
| 4.4 Musiikkikasvatuksen vaikutus matematiikan akateemisiin saavutuksiin | 23 |
| 5 Tulokset | 26 |
| 5.1 Musiikin ja matematiikan oppiaineen yhdistävät tekijät..... | 26 |
| 5.2 Musiikin ja matematiikan integrointi lukiotason opetuksessa | 27 |
| 6 Pohdinta | 29 |
| 6.1 Katse tulevaisuuteen | 30 |
| 6.2 Lopuksi | 31 |
| Lähteet | 33 |

1 Johdanto

Itselleni musiikki on aina ollut tapa karata maailmaa. Sen avulla olen saanut lievitettyä stressiä ja paineita, mitä muu maailma minulle on aiheuttanut. Opiskelen Oulun yliopistossa pääaineenani musiikkikasvatusta, pääsoittimeni on klassinen piano. Matematiikka puolestaan on ollut lempiaineeni seitsemänneltä luokalta lähtien: jo yläasteella saatoinkin hävittää ajantajuni ja käyttää neljäkin tuntia huomaamattani laskiessa matematiikkaa. Kummastuneista katseista huolimatta valitsin matematiikan sivuaineeksi yliopistossa. Vaikka musiikki on taideaine ja matematiikka luonnontiedettä, niistä löytyy yllättävän paljon yhtäläisyyksiä.

Kvantitatiivisen tutkimuksen perusteet -kesäkurssilla tuli vastaan Timo Tossavaisen ja Antti Juvosen (2013) tekemä tutkimus, jossa he tutkivat oppilaiden motivaatiota musiikin ja matematiikan välillä. Tästä tutkimuksesta syntyi ajatus ja mielenkiinto aihetta kohtaan: haluan tutkia musiikin ja matematiikan yhteyttä ja kuinka nämä kaksi erilaista oppiainetta voidaan yhdistää lukio-opetuksessa.

Musiikin on katsottu olevan matematiikkaa jo historiasta tutun Pythagoraan ajattelutavassa. Siispä voidaan jo tästä päätellä, että musiikin ja matematiikan oppiaineiden yhteyttä on tutkittu aikaisemmin. Esimerkiksi Heikki Apiola (2015) on kirjoittanut musiikin ja matematiikan yhteydestä. Artikkelissaan hän selittää muun muassa matematiikasta tuttujen keskiarvojen ja soitinten värähtelytaajuuden yhteisen laskukaavan sekä kuinka trigonometrian sinifunktio ja äänen värähtelynopeus kulkevat käsikädessä. Hän kertoo myös intervallien ja asteikoiden olevan suhdelukuja sekä kuinka musiikin rytmi pystytään helposti kirjoittamaan matematiikan matriisi-muodossa.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2019, s. 17, 60; tästä lähtien LOPS) opettajia kannustetaan oppiaineiden rajat ylittävään opetukseen, joka tapahtuu oppilaan tutustuessa samaan ilmiöön monen eri aineen kautta. Siellä kerrotaan, että kokonaisvaltainen oppiminen tapahtuu muun muassa silloin, kun oppilas saa tietoa samasta aihealueesta, mutta eri näkökulmista. Omat kokemukseni kokonaisvaltaiseen oppimiseen tapahtui ollessani työkokeilussa ala-asteella. Olin mukana matematiikan tunnilla, jonka aiheena oli murtoluvut. Opettaja päätti lähestyä tätä nuottien kautta. Oppilaiden tehtävänä oli jakaa ympyrä niin moneen osaan, kuin tahdissa oli nuotteja, aika-arvoja unohtamatta. Samalla kerrattiin myös nuottien nimiä. Tällöin ymmärsin ensimmäistä kertaa, kuinka yksinkertaista musiikin ja matematiikan oppiaineiden yhdistäminen

voi olla. Mahtavaa oli nähdä erään oppilaan kasvot, kun hän ymmärsi murtolukujen toimintatavan.

Tavoitteenani on tarkastella tutkimuksia, jotka ovat löytäneet yhteyksiä musiikin ja matematiikan välillä sekä LOPSin (2019) mukaisen tavan opettaa koulussa integroiden molempia aineita. Tämä tutkielma tuo jo tehtyihin tutkimuksiin pohjautuen esiin sen, kuinka paljon musiikissa ja matematiikassa on samaa ja kuinka helposti ne ovat yhdistettävissä toisiinsa. Ennen kuin oppiaineita voi yhdistää oppitunneilla, mielestäni on tärkeää löytää yhteydet niiden välillä. Helppompi on pohtia keinoja yhdistää ja opettaa kahta eri ainetta, kun teoria ymmärretään ensin. Mitä enemmän opettaja tietää aiheesta ja näyttää omaa kiinnostusta sekä asiantuntemusta kyseessä olevaa aihetta kohtaan, sitä helpompaa itse oppilaiden on innostua ja oppia.

Aikaisemmin perustellun pohjalta haluan tässä kandidaatintutkielmassa pohtia, kuinka lähellä musiikki ja matematiikka ovat teorioiltaan ja kuinka nämä kaksi ainetta ovat mahdollista yhdistää koulumaailmassa. Tutkimuskysymyksiksi muodostui: (a) *mitkä tekijät yhdistävät musiikkia ja matematiikkaa oppiaineina?* sekä (b) *kuinka musiikkia ja matematiikkaa voidaan integroida yhteen lukiotason opetuksessa?* Koska henkilökohtaisena tavoitteenani on päästä opettamaan lukiotasolle, keskityn pääasiassa lukioikäisten opetukseen.

Tässä kandidaatin tutkielmassa tutkin ensin, mitä musiikista ja matematiikasta on kirjoitettu LOPSissa (2019) sekä mitä samaa näistä löytyy (3). Tämän jälkeen lähestyn aihetta eri tutkimusten puolesta: kartoitan sitä, mitä tiedetään jo (4). Seuraavaksi mietin tapoja opettaa musiikkia ja matematiikkaa käytännön tasolla (5), millä tavalla opettajan rooli vaikuttaa motivaatioon opiskella ja millaisia stereotyyppioita yhdistetään musiikin ja matematiikan opettajiin (6). Pohdin myös millä tavalla tutkielmaani voitaisiin hyödyntää, kun LOPSia lähdetään kehittämään, sekä miten itse voisin tästä jatkaa pro gradu -tutkielmaan (6.1).

2 Tutkimusasetelma

Tässä luvussa kerron työni luonteen ja yleisesti työprosessista. Selitän tutkimustyyppin, tutkimuskysymyksen ja miten olen kerännyt työtäni varten materiaalia sekä mitä hakusanoja olen käyttänyt.

Työssäni käsittelen musiikin ja matematiikan yhteyksiä ja varsinaisiksi tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat (a) *mitkä tekijät yhdistävät musiikkia ja matematiikkaa oppiaineina?* sekä (b) *kuinka musiikkia ja matematiikkaa voidaan integroida yhteen lukiotason opetuksessa?* Tavoitteenani on löytää yhdistäviä tekijöitä LOPSista (2019), musiikin ja matematiikan teorioista sekä löytää tapoja yhdistää näitä kahta konkreettisesti lukiossa.

Toteutan tutkimuksen kirjallisuuskatsauksena. Tämän kirjallisuuskatsauksen tyyppi on *systemaattinen*. Ari Salmisen (2011) mukaan systemaattinen kirjallisuuskatsaus käytännössä tiivistää aiempien kyseessä olevan aiheen tutkimusten olennaisen sisällön. Hän kirjoittaa, että tällaisen tyyppin ideana on kartoittaa keskustelua ja etsiä mielenkiintoisia ja tärkeitä tutkimuksia. Kirjallisuuskatsauksessa käyn läpi eri tutkimusmateriaalia ja perustelen niiden pohjalta, miksi aihe on merkittävä.

Lähteinä käytin sekä suomenkielistä että englanninkielistä kirjallisuutta, artikkeleita ja tutkimuksia, sekä LOPSia (2019). Musiikkiin ja matematiikkaan liittyvää kirjallisuutta on paljon, mutta varsinaisia tutkimuksia ei vielä ainakaan Suomessa olla tehty montaa. Lähteitä olen etsinyt eri tietokannoista: Ebsco Databases, Google Scholar, Oula-Finna, ProQuest sekä Ellibs. Hyödylliseksi osoittautui myös ResearchGate. Hakusanoja käytin sekä suomeksi että englanniksi. Esimerkkejä suomenkielisistä hakusanoista: *musiikin ja matematiikan yhdistäminen opetuksessa*, *musiikin ja matematiikan yhteys* sekä *musiikin ja matematiikan teoria*. Englanninkielisiä esimerkkejä *mathematical music*, *music and math integration*, *similarities between music and math* sekä *relation between music and math*.

Yksi keskeinen lähteeni on lukion opetussuunnitelman perusteet (2019). Tämä lähde on työlleni tärkeä, koska keskityn nimenomaan lukiotason opetukseen. Tutkin tätä perusteellisesti, jotta pystyn perustelemaan mahdollisimman hyvin, miten musiikkia ja matematiikkaa voidaan lukiossa integroida yhteen ja näin löytää konkreettisesti esimerkkejä ja työkaluja sekä tulevaan ammattiini että muiden opettajien käyttöön. Opetussuunnitelma on kuitenkin opettajille yksi tärkeimmistä työkaluista. Otan vertailuksi Ranskassa sijaitsevan brittiläisen koulun opetussuunni-

telman oppaan. Tämän kautta saan tuotua esille sen, kuinka helposti suomalaisessa koulujärjestelmässä oppiaineiden integrointi pystytään toteuttamaan verrattuna Suomen ulkopuoliseen koulujärjestelmään.

Lähteitä on hyvin tarjolla, mutta erityisesti matematiikkaan liittyviä tieteellisiä lehtiä ja julkaisuja oli haastavaa löytää. Joihinkin en päässyt käsiksi ollenkaan, koska ne edellyttivät tieteellisen lehden lisenssin ostamista. Erityisesti teoria (4.2) kappaleessa esitetyille yhteyksille, kuten transponointi ja mittasuhteet (4.2.2) sekä notaatio ja geometria (4.2.3), on perusteluna vain yksi tutkimus. Näihin aiheisiin löysin enemmän tutkimuksia, mutta ne vaativat joko lisenssin ostamista tai sivun maksullista versiota.

Tieteelliset artikkelit ja tutkimukset olivat pääosin englanninkielisiä, vaikka mukaan mahtui myös suomenkielistä materiaalia. Musiikkiin ja matematiikkaan liittyen löytyy materiaalia, onnekseni joistain tietyistä aiheista löytyy useampia lähteitä, esimerkiksi musiikin vaikutuksesta matematiikan (ja muiden aiheiden) akateemisiin vaikutuksiin. Koska eri artikkelit keskittyivät eri aihepiireihin ja eri näkökulmiin, haasteena oli rajata materiaali tutkimukseni kannalta olennaiseen.

Koska tämä tutkimustyyppi on kirjallisuuskatsaus, eettisyys jää pääosin viittausten ja lähdeluettelon varaan. Koska kirjallisuuskatsauksen on tarkoitus pohjautua jo tehtyihin tutkimuksiin, kunnia on annettava niille, jotka ovat tutkimuksen tehneet. Olen pyrkinyt käyttämään APA-viittaustekniikkaa selkeästi, jotta lukijat tietävät, onko kyseessä tietyn tutkijan vai minun kirjoitustani. Tarkemmat tiedot tutkimuksista löytyvät lähdeluettelosta. Näin lukija pääsee helposti käsiksi alkuperäisiin tutkimuksiin.

Luotettavuuteen liittyy tutkimuksen toistettavuus. Laitoin kaikki lähteet selkeästi esille ja lähteisiin pääsee käsiksi ilman tieteellisen lehden lisenssiä tai maksullista versiota, joten kirjallisuuskatsaukseni on toistettavissa. Luotettavuuden lisäämiseksi lähteiksi pyrin valikoimaan 2000-luvulla julkaistuja aineistoja. Suurin osa käyttämistäni tieteellisistä artikkeleista ja tutkimuksista on vertaisarvioituja. Katsoin myös Google Scholarissa viittausten määrää valikoidesani materiaalia.

3 Musiikki ja matematiikka lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019

Tässä luvussa käsittelen lukion opetussuunnitelman perusteita (2019) ja avaan käsitteen *laaja-alainen osaaminen*. Lähdän liikkeelle erikseen musiikista ja matematiikkaa LOPSissa (2019). Lopuksi etsin näille yhteisiä tavoitteita ja kuinka laaja-alaista oppimista voidaan hyödyntää. Tämän luvun perusteella luon pohjan sille, kuinka musiikkia ja matematiikkaa voidaan lähteä suunnittelemaan oppiaineiden yhdistäville oppitunnille.

LOPSissa (2019, s. 9–10) kerrotaan eri oppiaineiden tehtävät ja tavoitteet. Tämä opetussuunnitelma perustuu lukiolakiin (714/2018) ja asetukseen, jonka valtioneuvosto on asettanut lukio-koulutuksesta (810/2018). Uusi LOPS (2019) otetaan paikallisesti käyttöön 1.8.2021 alkaen. Lukiokoulutuksessa kehitetään jokaisen oppiaineen tavoitteiden ja keskeisten sisältöjen hallitsemista sekä laaja-alaista osaamista. Entisten kurssien sijaan uudessa opetussuunnitelmassa puhutaan opintojaksoista ja ne voivat olla laajuudeltaan ja muodoltaan poikkeuksellisia. Ne myös arvioidaan opintojaksoittain, mutta kuitenkin jos yksi opintojakso koostuu kahdesta tai useammasta oppiaineesta, ne arvioidaan oppiaineittain.

Kaupungeilla ja kunnilla on myös paikallisesti vapauksia tehdä painotuksia oppiaineiden suhteen siten, miten näkee parhaaksi omalle koululle (LOPS, 2019, s. 17). LOPSissa (2019, s. 57) annetaan arviointiin liittyviä paikallisesti päätettäviä teemoja. Näitä ovat esimerkiksi arvioinnin toteuttaminen ja palautteen antaminen. Opetussuunnitelman mukaan opintojaksoittain voidaan päättää paikallisesti keskeisistä sisällöistä, tavoitteista sekä laaja-alaisen osaamisen tavoitteiden ja osa-alueiden toteutumisesta.

Kun verrataan Suomen lukion opetussuunnitelmaa (2019) esimerkiksi Pariisissa sijaitsevan brittiläisen koulun The British School of Paris kansalliseen opetussuunnitelmaan (2018), on suomalaisessa opetussuunnitelmassa kerrottu erittäin tarkasti ja perusteellisesti musiikin ja matematiikan tavoitteet ja tehtävät. The British School of Paris opetussuunnitelmassa (2018, s. 53, 47) kerrotaan yhden sivun verran, mitä mahdollisuuksia *Kuudennen tason* (16–18 vuotta) oppilaille on musiikin osalta. Sama pätee myös matematiikan kohdalla.

The British School of Paris koulun musiikkiosasto tarjoaa kuoroja, orkestereita, pienempiä kokoonpanoja sekä toiminnallisia soitintunteja oppilailleen, jotta he voivat kehittää omaa musiikkista taitoaan. Näistä oppilaat saavat lisäpisteitä hakiessaan seuraavalla koulutustasolla musiikkiin tai esittäviin taiteisiin liittyville linjoille ja kursseille. Matematiikan osalta Pariisissa

sijaitseva koulu tarjoaa suullisia-, kirjallisia- sekä käytännön taitoja, joita tarvitaan jokapäiväisten ongelmien ratkomiseen. Siellä myös opetellaan hankkimaan tietoa muista aiheista, kuten luonnontieteistä ja tekniikasta. (6th form curriculum guide, 2018.) Molemmista aineista on siis kirjoitettu, mutta vain lyhyesti. Siinä suomalaiset opettajat ovat onnekkaita, opetussuunnitelmista saa enemmän apuja ja työvälineitä aineiden opettamiseen.

LOPSissa (2019) *laaja-alainen osaaminen* jaetaan kuuteen osa-alueeseen, jotka muodostavat yhteiset tavoitteet kaikille oppiaineille. Nämä osa-alueet ovat: 1) hyvinvointiosaaminen, 2) vuorovaikutusosaaminen, 3) monitieteinen ja luova osaaminen, 4) yhteiskunnallinen osaaminen, 5) eettisyys ja ympäristöosaaminen sekä 6) globaali- ja kulttuuriosaaminen. Tavoitteena on antaa hyvä yleissivistys, rakentaa kestävää tulevaisuutta sekä mahdollistaa vahvat jatko-opinto-, työelämä- ja kansainvälisyysvalmiudet. Osa-alueet auttavat hyödyntämään ja soveltamaan opittua tietoa ja taitoa käytännön elämään. (LOPS, 2019, s. 9, 60.)

Opetuspäällikkö ja opettajakouluttaja Juho Norrena (2016, s. 10) puolestaan kertoo, että laaja-alainen osaaminen ei ainoastaan tapahdu koulun oppitunneilla eikä se ole pelkästään opettajan mahdollistamaa oppimista. Siinä korostuvat oppilaan oma aktiivisuus ja monipuolista oppimista korostavat toimintakulttuuri sekä yhteisöllinen työskentely. Norrenan (2016, s. 19) mielestä muuttuvassa maailmassa tarvitaan kykyä reagoida eri tilanteissa eri tavalla ja taitoa hyödyntää omaa osaamista ja omia vahvuuksia. Hän korostaakin, että jos opettaja haluaa opettaa aktivoituneita oppilaita, opettajan on sisällytettävä oma persoonansa työhön. Aki Luostarinen ja Ida-Maria Peltomaa (2016, s. 77) puolestaan kertovat kirjassaan, että opettajalla on tärkeä rooli esimerkkinä toimimisessa laaja-alaisen toiminnan tavoitteissa. Opettajatkin ovat vain ihmisiä: aina ei kuitenkaan voi onnistua. He lähestyvät aihetta myös oppilaan näkökulmasta: oppilaiden henkilökohtaistaminen on rikkaus. Joskus se voi tarkoittaa kaoottiselta ulkopuolisen silmiin, mutta yksittäiselle oppijalle tilanne voi olla hyvin järjestelmällinen ja määrätietoinen.

Kun oppilas kykenee itse kontrolloimaan omaa oppimistaan, oppimisesta tulee kokonaisvaltaisempaa ja palkitsevampaa. Tällöin oppilas kantaa itse vastuun oppimisesta, eikä ulkoista sitä esimerkiksi opettajaan. Norrena (2016, s. 19–20) toteaa, ettei tämä kuitenkaan tapahdu automaattisesti, vaan siihen tarvitaan määrätietoista harjoittelua ja portaissa etenemistä. Oppilaan ottaessa aktivoituneen käyttöönsä, Norrena (2016, s. 23) korostaa, kuinka oppilas edelleen tarvitsee opettajaa, vaikka energia kohdistetaan eri paikkaan. Opettajan rooli on nykypäivänä enemmänkin kuuntelija, kannustaja ja myötätunnonantaja sekä itse oppija. Luostarinen ja Peltomaa

(2016) selittävät, että opettajatkin voivat kehittyä ja tulla paremmiksi sekä yksilöinä, että yhteisönä. He korostavat, että näin opettajat pystyvät näyttämään yhä parempaa mallia siitä, millaista osaamista työelämässä, maailmassa ja ihan arjessa vaaditaan.

3.1 Musiikki lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019

Musiikki on taideaine, joka tasapainottaa lukiolaisten opintoja ja kirjojen lukemista tai tietokoneen ruudun katsomista. LOPSin (2019) mukaan pakollisia musiikin opintoja on kaksi ja valtakunnallisia valinnaisia opintoja kaksi. Paikallisesti lukioissa musiikinkursseja voi olla enemmänkin tarjolla, esimerkiksi musiikkilinjalla musiikin opintoja voidaan käydä peräti 23 kurssia. (Jyväskylän lukiokoulutuksen opetussuunnitelma, 2016).

Lukion opetussuunnitelmassa (2019, s. 339) musiikin tehtävänä on viedä eteenpäin opiskelijan aktiivista musiikillista osallisuutta sekä toimintaa. Myös maailmaan tutustutaan moniaistisesti ja tutkitaan sitä erityisesti kuulonvaraisesti. Opetushallitus kirjasi opetussuunnitelmaan musiikin oppiaineelle toiseksi tehtäväksi syventää myönteistä suhdetta musiikkiin ja taiteelliseen ilmaisuun sekä pohtia näiden merkitystä elämässä. Lukion opetuksessa luova tuottaminen ja uusien ratkaisujen jäljittäminen musiikillisesti ovat prosesseja. Nämä edellyttävät opiskelijalta aikaa ja rauhaa ajatella. Se edistää pitkäjänteisyyttä sekä kehittää opitun soveltamista uusissa tilanteissa. (LOPS, 2019, s. 339.)

LOPSin mukaan (2019, s. 339) musiikin opiskelu itsessään tukee oppimista ja yhteisöllisyyttä eri keinoin. Siellä kerrotaan, että yhteismusisointi on ryhmätoimintaa, jossa vahvistuu vuorovaikutus- ja kommunikointitaidot, ja nämä puolestaan laajentavat opiskelijan näkemyksiä. Tämän kautta kehittyvät myös luovan ja kriittisen ajattelun taidot. Näitä taitoja tarvitaan niin jokapäiväisessä arjessa kuin myös eri alojen opinnoissa ja työtehtävissä.

Musiikilla on selkeä yhteys kaikkiin lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueisiin, ja musiikin opiskelu on hyvin kokonaisvaltainen oppimisprosessi. Siinä on kyse muun muassa kehollisen, kognitiivisen sekä ilmaisutaitojen kehittämisestä sosiaalista vuorovaikutusta unohtamatta. Musiikki luo perustaa hyvinvointi- ja vuorovaikutustaitojen sekä eettisyyden kehitykselle. (LOPS, 2019, s. 339.) Opetussuunnitelmassa (2019, s. 240) selitetään, että sitä kautta opiskelijat saavat tilaisuuksia ymmärtää sekä itseään, että muita. Musiikin opintojen kautta opitaan tunnistamaan

omia vahvuuksia ja harjoiteltavia taitoja. Musiikillisen, niin kuin muunkin taiteellisen toiminnan avulla, opiskelijat oppivat ymmärtämään muiden ajatuksia ja tunteita. Tämä on ehto myötätunnon kehittymiselle ja taidolle asettua toisen asemaan.

LOPSista (2019, s. 340) käy ilmi, että opiskelijan luova ja monitieteinen osaaminen kehittyy monipuolisen musiikin opetuksen kautta. Mielikuvitus ja kyky kuvitteluun ovat inhimillisiä ominaisuuksia, joita musiikillinen toiminta ohjaa ymmärtämään. Nämä opettavat katsomaan asioita eri kulmista, ajattelemaan uusin tavoin ja ratkaisemaan käytännön pulmia. Tällä puolestaan on yhteys ympäristöosaamiseen: ekologinen kuvittelukyky mahdollistaa vaihtoehtoisten valintojen tekemiseen ja sitä kautta ymmärtämään oman toiminnan seuraukset kestävän elämäntavan perspektiivistä. Musiikin opetus vahvistaa harkintakykyä eettisyyden näkökulmasta sekä auttaa havaitsemaan musiikin ja muiden tieteenalojen risteyskohtia.

Pohdittaessa suomalaisen LOPSin (2019) eroa aiemmin esittelemääni The British School of Pariisiin (2018, s. 53), siellä koulun musiikkiosasto tarjoaa mahdollisuuksia laajentaa musiikillista osaamista koulun ulkopuolella, mutta myös kouluajan puitteissa. Tutkintojen suorittaminen eroaa Suomen opetussuunnitelmasta (2019). Pariisissa oppilaat voivat suorittaa tutkintoja ja teoriakokeita, jotkut saattavat jopa saada tutkintotodistuksen *kuninkaallisen musiikkikoulun* (Royal School of Music) lautakunnan hyväksymänä. Toisaalta kurssien tarjonta on Suomessa huomattavasti suurempi kuin Pariisissa.

3.2 Matematiikka lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019

Matematiikalla on keskeinen asema kouluopetuksessa. Kaarina Merenluonto (2009, s. 20) kirjoittaa artikkelissaan, että matematiikka opetettavana aineena on erityinen sen hierarkkisen luonteen takia. Toisin sanoen aiemmin opittu pysyy voimassa, ja on edellytys uuden oppimiselle. Eli jos oppilas ymmärtää hyvin asiat alaluokilla, siirtyminen myöhemmin uusiin opetettaviin käsitteisiin on kohtuullisen sujuvaa. Toisaalta oppilaalla, joka ei ole ymmärtänyt aikaisemmin opetettua, on haasteita pysyä mukana ylemmillä asteilla.

Lukiossa matematiikan osalta oppilas voi valita joko lyhyen tai pitkän matematiikan. Pitkän matematiikan opiskelu on hyvin työlästä sekä sen kirjoittaminen ylioppilaskokeissa vaatii yli kymmenen kurssin osaamista (Valmennuskeskus, 2019). LOPSissa (2019, s. 221–222) on lueteltu matematiikalle tavoitteita, tehtäviä ja oppiaineen laaja-alainen osaaminen. Seuraavaksi keskityn matematiikan osalta oppiaineen tehtäviin sekä laaja-alaiseen osaamiseen.

LOPSissa (2019, s. 221) matematiikan opiskelu ohjataan opiskelijalle valmiuden muun muassa ymmärtää, soveltaa, tuottaa ja arvioida matemaattisesti esitettyä tietoa. Opetuksen on tarkoitus muun muassa ohjata oppilasta ymmärtämään kyseessä olevan oppiaineen merkitys nykyajan eri kulttuureissa sekä huomaamaan yhteyden myös muilla aloilla, esimerkiksi yhteiskunta- ja luonnontieteissä sekä taiteissa.

Opetuksen yhtenä keskeisenä tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matematiikan peruskäsitteisiin, -ideoihin ja rakenteisiin. Tarkoituksena on oppia myös käyttämään puhuttua, kirjoitettua ja muutoin ilmaistua matematiikkaa. Opetus edistää laskemisen, luovan ajattelun ja ilmiöiden mallintamisen sekä pulmien ratkaisemisen taitoja. (LOPS, 2019, s. 221.)

Opetussuunnitelmassa (2019, s. 221) kerrotaan, että opetuksen aikana oppilas tutkii arkielämän ja matematiikan välisiä yhteyksiä. Siinä käytetään hyväksi oppilaan kiinnostusta ja vahvistetaan itsetuntoa sekä rohkaistaan opiskelijaa kokeilemaan ja työskentelemään sinnikkäästi. Tarkoituksena on soveltaa ja hyödyntää matematiikassa opittuja taitoja kestäväan kehitykseen ja ihmiskuntaan kietoutuneiden kysymysten ja ongelmien ratkaisemisessa.

Matematiikka voi olla yhdessä tekemistä: usein opetuksessa käytetään erilaisia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät joko yksin tai yhdessä muiden kanssa. Tällä vahvistetaan vuorovaikutusosaamista. Opetustavat on hyvä valita yhdessä opiskelijoiden kanssa, ja opetustilanteet järjestetään siten, että opiskelijoille herää omien havaintojen pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perusteluita. (LOPS, 2019, s. 221.)

Matematiikan opiskelu tukee myös laaja-alaisen osaamisen tavoitteita kulttuuriosaamisessa, monitieteisessä- ja luovassa osaamisessa. Opetuksessa pyritään siihen, että opiskelija ymmärtää matematiikan merkityksen eri kulttuureissa ja sen luonteen universaalina kielenä. Tarkoituksena on, että opiskelija hahmottaa matemaattisten käsitteiden merkityksen ja huomaa, kuinka ne ovat kytköksissä suurempiin kokonaisuuksiin; ei ainoastaan matematiikassa, mutta myös muissa oppiaineissa. (LOPS, 2019, s. 221.)

Vertailua tehdessä The British School of Paris koulun kuudennen tason matematiikka tähtää pääosin GCSE-kokeissa menestymiseen, joilla Iso-Britanniassa haetaan seuraavan tason koulutukseen, esimerkiksi yliopistoon. Matematiikan GCSE-koe on mahdollista tehdä kolmena kertana. Ne, jotka valitsevat matematiikan aineekseen, pitävät opintoja haastavina, hyödyllisenä sekä nautinnollisena. Vaikka heidän kansallisessa opetussuunnitelmassansa ei kerrota kovin

tarkasti tapoja tai sisältöjä, matematiikan opettajat haluavat auttaa opiskelijoita nauttimaan matematiikasta ja menestymään kokeissa.

Ero suomalaiseen opetussuunnitelmaan löytyy myös parhaimman hyödyn antamisessa oppilaille. The British School of Parisissa ollaan sitä mieltä, että oppilaat hyötyvät parhaiten opinnoistaan, kun oppilailla on mukana opetussuunnitelmassa listatut materiaalit (esimerkiksi tieteellinen laskin, kompassi kynällä, viivoitin sekä kulmaviivoitin). Kun puolestaan suomalaisessa LOPSissa (2019) ei niinkään kerrota materiaaleista, vaan varsinaisista kurssien sisällöistä.

3.3 Musiikki ja matematiikka – oppiaineiden yhteiset tavoitteet

Vaikka musiikin ja matematiikan oppiaineiden tehtävät kuulostavat olevan kaukana toisistaan eivätkä ole suorassa yhteydessä, niistä löydetään hyvin paljon samaa. Laaja-alainen oppiminen on mahdollista yhdistää sekä musiikissa että matematiikassa. LOPSissa (2019) kerrottujen tehtävien, tavoitteiden sekä laaja-alaisen osaamisen perusteella nämä kaksi oppiainetta kohtaavat toisensa ja tästä syystä on myös luontevaa yhdistää koulun oppitunneilla.

3.3.1 Yhteiskuntaosaaminen ja ympäristöosaaminen

Molemmissa aineissa opetellaan vuorovaikutustaitoja, vaikkakin eri tavoin. LOPSin (2019, s. 340) mukaan musiikissa tarjotaan mahdollisuus ymmärtää itseään ja muita sekä tunnistamaan muiden ajatuksia ja tunteita. Musiikki luo myös pohjaa hyvinvointi- ja vuorovaikutusosaamiselle, onhan koulun musiikki hyvin pitkälti yhdessä tekemistä. (LOPS, 2019, s. 339–340). Matematiikassa puolestaan voidaan ratkoa tehtäviä yhdessä sekä mietitään mitä pitää tehdä seuraavaksi. Opetussuunnitelmassa kerrotaan myös, että oppilaille opetetaan matematiikan taitojen hyödyntämistä myös ihmiskuntaan liittyvissä asioissa. Tällä tavalla vahvistetaan opiskelijan yhteiskunnallista osaamista, kuten myös hyvinvointiosaamista. (LOPS, 2019, s. 221.) Joka tapauksessa molemmissa oppiaineissa opetellaan kuuntelemaan muita, huomioimaan toisten mielipiteitä ja ajatuksia sekä tekemään kompromisseja.

Ympäristöosaamisen puolesta musiikki ohjaa ja opettaa ymmärtämään, kuinka mielikuvitus ja kyky kuvitella on osa ihmisenä olemista, ne antavat tavan katsoa asioita eri näkökulmista. Kyky kuvitella on myös ympäristöosaamisen kannalta tärkeää. Ekologinen kuvittelu antaa tilaa nähdä valintojen mahdollisuuksia ja puntaroimaan omien valintojen vaikutusta kestäväan elämänta-

paan. (LOPS, 2019, s. 340.) Matematiikan osalta oppilaat pääsevät pohtimaan, miten matemaatiikan taitoja voidaan hyödyntää ongelmien tullen liittyen kestävään kehitykseen ja ihmiskuntaan. Tällä vahvistetaan oppilaan ympäristöosaamista ja eettisyyttä. (LOPS, 2019, s. 221.)

3.3.2 Globaali- ja kulttuuriosaaminen

Musiikki ja matematiikka tukevat globaali- ja kulttuuriosaamista. Musiikissa avataan katseita, mikä auttaa näkemään yli rajojen ja kohtaamaan konflikteja oikealla tavalla. Se kehittää kriittistä arviointikykyä, jolloin opiskelijan on mahdollista vastustaa esimerkiksi epädemokraattisiin arvoihin perustuvia argumentteja halventamatta toisen ihmisarvoa tai kulttuuria. (LOPS, 2019, s. 340.) Matematiikassa pyritään ymmärtämään matematiikan merkitys eri kulttuureissa sekä sen luonne universaalina kielenä (LOPS, 2019, s. 221). Yhtenä tavoitteena on oppia perustelemaan väitteitä ja arvioimaan eri muodossa tarjottua informaatiota (LOPS, 2019, s. 222) muiden ihmisarvoa väheksymättä. Molemmissa aineissa tavoitteena on löytää ymmärrystä ja tapaa kommunikoida erilaisten ja eri kulttuureista tulevien ihmisten kanssa.

Molemmissa aineissa pyritään vastaanottamaan tietoa ja arvioimaan sitä. Nimenomaan tietoa, ei toisen ihmisen arvoa, kulttuuria tai uskontoa. Molemmissa aineissa opetellaan kohtaamaan ihminen ihmisenä ja perustelemaan oma kanta informaation pohjalta. Perustelun pohjalla ei voi olla toisen ihmisen ajattelutavan, elämäntavan tai jonkin muun asian halventaminen. (LOPS, 2019, s. 340, 221.) Koska musiikki on iso osa eri maiden kulttuureja, musiikin tunneilla voidaan helposti kehittää kulttuuriosaamista. Matematiikan tunneilla pohditaan matematiikan merkitystä eri kulttuureissa, historian kehityksessä, ja niin edelleen (LOPS, 2019, s. 221). Näin molemmat aineet antavat pohjaa kulttuuriosaamiselle ja ihmisten kanssa toimimiseen katsomatta heidän taustaansa tai ulkonäköä.

3.3.3 Luova ja monitieteinen osaaminen

Luova ja monitieteinen osaaminen ovat osa lukion musiikkia ja matematiikkaa. Musiikissa se opettaa ymmärtämään, kuinka mielikuvitus on osa ihmistä. Se muun muassa auttaa katsomaan asioita toisin ja ajattelemaan uudella tavalla (LOPS, 2019, s. 340), mitä tarvitaan myös matematiikassa. Matematiikka on pääosin ongelmien ratkaisua, lähestymistä ongelmaan eri näkökulmista ja ajatteleminen uudella tavalla, jos vanha tapa ei päästä eteenpäin. LOPSissa (2019, s. 221) kerrotaan, että opiskelijan on tarkoitus oppia hahmottamaan kuinka matemaattiset käsitteet liittyvät paljon suurempiin kokonaisuuksiin, myös muihin oppiaineisiin.

Viime vuosien aikana opettajat ovat lisänneet oppiaineiden rajat ylittävää opetusta ja LOPS (2019) on oiva työkalu tähän. Monitieteinen osaaminen sisältää myös taidon tiedonhankinnassa ja -esittämisessä (LOPS, 2019, s. 63). Musiikissa ja matematiikassa tarvitaan tiedonhankintataitoja, mutta myös lähteiden luotettavuuden arviointia. Esimerkkeinä musiikissa musiikin historiaan liittyvän tiedon etsiminen, matematiikassa oikeiden kaavojen ja erityisesti kaavojen todistusten luotettavuus.

Tämän luvun (3.3) perusteella voin todeta, että LOPSin (2019) mukaiset tavoitteet ovat musiikin ja matematiikan oppitunneille mahdollista luoda. Myös opetussuunnitelmassa painotettu laaja-alainen osaaminen yhdistyy molempiin oppiaineisiin.

4 Musiikin ja matematiikan yhdistäviä tutkimuksia

Saloni Shah (2010) selittää, kuinka musiikki ja matematiikka ovat kaksi erilaista ja kaukaista tieteenalaa. Musiikki on taiteellista ja ilmaisevaa. Matematiikka puolestaan on tieteellistä, täynnä järjestyksiä ja laskettavuutta. Hän kertoo, että vaikka ne vaikuttavat olevan täysin eri tieteenaloja, ne ovat olleet linkittyneitä yli kaksituhatta vuotta. Musiikki itsessään on hyvin matemaattista, matematiikka puolestaan on luonnollista musiikin teorian perusideoille. Shah (2010) toteaa, että monet musiikin teoreetikot käyttävät matematiikkaa ajatustensa kehittämiseen sekä niiden ilmaisuun.

Jihwa Noh ja Nan Huh (2015) kertovat tutkimuksessaan, kuinka matemaattinen luovuus on tärkeä tavoite matematiikan opinnoissa. Heidän mukaansa sitä voidaan edistää integroimalla oppimisympäristöä, missä opiskelijat pääsevät tutkimaan matematiikkaa muiden aineiden, kuten tieteen, teknologian, tekniikan sekä taideaineiden, kautta. Noh ja Huh (2015) ajattelevat, että sellaisen opiskeluympäristön perustaminen ei ole triviaali tehtävä. Sen takia tämä luo tarpeen kehittää mielekästä integraatiota edistäviä opetusresursseja

Tässä kappaleessa avaan musiikin ja matematiikan yhdistäviä tutkimuksia. Lähden liikkeelle näiden kahden aiheen historiasta ja esitän, kuinka kaukaa näitä on lähdetty tutkimaan ja löytämään yhteyksiä. Seuraavaksi avaan joitain teoriaan liittyviä yhteyksiä ja oppiaineiden kiinnostuksesta oppilaan sekä opettajan näkökulmasta. Viimeisenä kerron musiikin vaikutuksesta matemaattisiin kykyihin sekä toisin päin.

4.1 Yhteinen historia

Deanne Kells (2008) kertoo kuinka numerot, kuviot ja mittasuhteet ovat konsepteja, jotka ovat molempien, muusikkojen ja matemaatikkojen hallinnassa. Suuret ajattelijat muinaisista ajoista nykypäivään ovat nähneet ja käyttäneet näitä yhteyksiä. Jeanne Bamberger ja Andrea Disessa (2003) löysivät saman yhteyden. He kertovat, että musiikista ja matematiikasta on oltu kiinnostuneita jo pitkään: Platon, Aristoteles, Leibnitz sekä viimeaikaisempia Hofstadter (1979), Rothstein (1995) ja monet muut ovat tutkineet musiikin ja matematiikan keskinäisiä suhteita. Rocío Chao-Fernández, Sara Román-García ja Aurelio Chao-Fernández (2017) selittävät tarkemmin, miten Pythagoras oli ensimmäinen, joka yhdisti musiikin ja matematiikan toisiinsa. Pythagoraan löydöksestä lähtien on kysytty monia kysymyksiä ja on tehty monia tutkimuslinjauksia näiden yhteyksien tutkimiseen.

Apiola (2015) kirjoittaa artikkelissaan tarunhoitoisesta Pythagorasta. Pythagoras vaikutti suuresti niin matematiikan kuin myös länsimaisen musiikin perusteisiin. Hän muun muassa havaitsi, kuinka värähtelevän kielen pituus on kääntäen verrannollinen sen tuottaman äänen korkeuteen. Apiola (2015) kertoo, kuinka Pythagoras loi ajatuksen siitä, että maailmankaikkeus, ihminen ja musiikki perustuvat yksinkertaisiin lukusuhteisiin.

Kells (2008) puolestaan huomasi, kuinka Keskiajan musiikkieksperti Boethius (n. 480–524) ilmaisi joitain omia musiikillisia ideoitaan matemaattisten käsitteiden avulla. Ja kukapa ei olisi kuullut Einsteinin (1879–1955) rakkaudesta musiikkiin, minkä hän on sanonut olleen erittäin hyödyllistä hänen työssään. (Kells, 2008.)

Benjamin Wardhaugh (2007) kirjoitti työnsä perustuen kolmeen lähteeseen, jotka keskittyivät musiikin suhteiden ja logaritmin yhteyteen erityisesti 1600 – luvulla, jolloin keskusteltiin paljon musiikin suhteiden laskemisesta logaritmien avulla. Wardhaughin (2007) mukaan matemaatikko Johannes Kepler (1571–1630) oli ensimmäinen, joka sovelsi ajatusta mitata suhdetta suuruuden avulla. Kepler esitteli erilaisia esimerkkejä jatkuvasta suhteesta ja annetuista suhteiden jakamisesta yhtä suuriin osiin. Sitä sovellettiin myös muun muassa intervaleihin, ja vasta myöhemmin tälle annettiin nimeksi logaritmi.

Tämä tieteellinen materiaali kertoo sen, kuinka musiikin ja matematiikan elementtien yhdistäminen toisiinsa on kiehtonut ihmiskuntaa jo satoja vuosia. Monet suuret ihmiset, kuten Aristoteles, Pythagoras, Boethius, Kepler sekä monet muut ovat tutkineet musiikin ja matematiikan yhdistettävyyttä, eli niillä kahdella on selkeä yhteinen historia.

4.2 Teoria

Musiikki ja matematiikka ovat teorioiltaan yllättävän lähellä toisiaan. Sah, Rawat, Nautiyal, Ahmed ja Chhabra (2012) kertovat, että jo muinaiset kreikkalaiset huomasivat, että kokonaisluvut vastaavat musiikin nuotteja. He toteavat, että mikä tahansa värähtelevä esine tekee säveliä ja harmonioita, jotka ovat sarjoja nuoteista ja jotka ilmaantuvat yksittäisestä värähtelevästä esineestä. Toisaalta Shah (2010) kertoo tutkimuksessaan, että matemaatikoita on kiehtonut musiikin teorian opiskelu jo muinaisen Kreikan ajoilta. Hän arvelee syyksi sen, että musiikin teoria ja säveltäminen vaativat abstraktia miettimistä, joka on hyvin samankaltainen puhtaasti matemaattisen ajattelutavan kanssa.

Bamberger ja Disessa (2003) tutkivat musiikin ja matematiikan luonnollisesti toinen toisiinsa sulautuvia rakenteita, jotka generoivat käsityksiä ja keksintöjä musiikillisesta yhteensopivuusteoriasta. Koska musiikin teoria ja matematiikan teoria ovat laajoja käsitteitä, seuraavaksi otan esimerkeiksi muutamia koulussa tuttuja käsitteitä: syke ja rytmi, transponointi ja notaatio sekä intervallit ja logaritmit.

4.2.1 Syke ja rytmi

Syke ja rytmi usein yhdistetään ensimmäisenä musiikkiin, vaikka niillä on kuitenkin yhteys myös matematiikkaan. Karen Palubinski (2019) kertoo tutkimuksessaan, kuinka musiikki on kuunneltava matematiikan muoto. Kun opetellaan musiikin kieltä, muusikot viittaavat sanaan ”syke”. Tämä käsite on helposti muutettavissa matematiikan konseptiin. Palubinskin (2019) mukaan syke on tasainen, muuttumaton ja jatkuva pulssi, aivan kuin sydämen lyönti. Musiikin perusta muodostuu rytmistä, joka puolestaan tulee sykkeestä.

Palubinski (2019) kirjoittaa tekstissään, että rytmi on osuuksia äänistä tai hiljaisuudesta, ja näin se muodostaa musikaalisen luurangon. Kun musiikin vaikeustaso nousee, nuottien kestoista tulee sykkeen murto-osia ja musiikkiin liittyvät matemaattiset konseptit monimutkaistuvat. Palubinski (2019) antaa esimerkkinä, kuinka $\frac{1}{8}$ nuotti on yhtä suuri kuin puolet neljänneksen lyönistä. Säveltäjällä on vapaat kädet leikitellä eri pituisten nuottien kanssa, jolloin esittäjän on sovellettava murto-osia määrittääkseen, kuinka rytmi sopii sykkeeseen.

Kun konsepti sykkeestä ja rytmistä sisäistetään, Palubinski (2019) vakuuttaa, että ne vahvistavat matematiikan tunneilla opittuja käsitteitä. Myöhemmin näitä kyseessä olevia käsitteitä on helpompi soveltaa eri tilanteissa. Yleisin musiikkiin yhdistetty ja sovellettu matemaattinen käsite on murtoluvut. Palubinski (2019) toteaa sen, että mitä useammin käsite on sovellettavissa useampaan sisältöalueeseen, sitä syvällisemmin käsite ymmärretään eri sisällöissä.

Tämä tutkimus esittää sen, että syke ja rytmi liittyvät sekä musiikkiin että matematiikkaan, vaikka ne eivät varsinaisesti kuulu matematiikan sanastoon. Koska alussa viittaamani kokemus murtoluvuista ala-asteella on aivan liian helppo lukiossa, sitä voi muokata esimerkiksi klassisen musiikin kappaleisiin ja tätä kautta vaikeampiin rytmeihin.

4.2.2 Transponointi ja mittasuhteet

Transponointi on musiikin sanastoa ja mittasuhteet yleensä yhdistetään matematiikkaan. Bamberger ja Disessa (2003) löysivät näiden välillä yhteyden. Heidän mukaansa transponointi on äänenkorkeuden muuttamista pitäen intervallien sisäiset yhteydet samoina. Melodian näkökulmasta transponointi säilyttää sekä tapahtumien välisen suhteen että suhteelliset sävelten kestot. Tällöin kuulemme sen ikään kuin ”samana sävelenä”. Musiikki kuitenkin sallii hienovaraiset muuttumattomat teemat, jotka laajentavat kykyä kuulla ”sama”. Samalla kun sallitaan muunnelmat, ne lisäävät musiikillista kiinnostusta. Bambergerin ja Disessan (2003) esimerkkinä: säveltäjä saattavat päättää kirjoittaa sama melodinen kuvio eri kohdasta. Koska asteikolla sävelvälit eivät ole samat, siirrettäessä kuvio ylös -tai alaspäin melodisen osan yleinen muoto ei muutu, mutta se on edelleen tunnistetavissa.

Bamberger ja Disessa (2003) selittävät transponoinnin yhteyden matematiikkaan. He korostavat, että kun siirrytään nuottikirjoitukseen, sillä voidaan viitata erilaisiin kokonaisuuksiin ja suhteisiin, jotka toimivat eri tasoilla. Alkuperäisiä osia voidaan merkitä x :llä, y :llä ja z :lla sekä muunneltuja osia: x' , y' sekä z' . Oletuksena on, että x :sta tulee x' , ja niin edelleen. Suhteet voidaan esittää mittayksikköinä, eli suhteet esittävät kyseessä olevat parit (x ja x' , ja niin edelleen) numeroina tai vastaavina mitta-alueina. Esimerkkinä tavalliset tavat mitata intervaleja (kuten suuri kolmonen (s_3) tarkoittaa suurta terssiä tai vähennetty vitonen (v_5) tarkoittaa vähennettyä kvinttiä). Bamberger ja Disessa (2003) vievät tämän pidemmälle: jos merkitsemme suhdetta R :nä ja muutosta T :nä, säilyttääkö T R :n eli onko $R(x,y) = R(x',y')$, jossa $R(x',y')$ on sama kuin $R[T(x), T(y)]$. Toisin sanoen R on muunnoksen T muuttumaton osa, kun $R(x, y) = R(x', y')$.

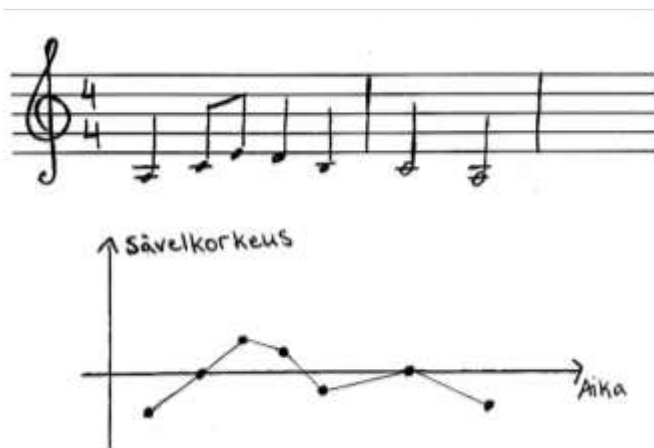
Bamberger ja Disessa (2003) kertovat, kuinka kaikkien mahdollisten muutosten joukko on valtava ja monilla niistä ei ole merkitystä. Eli emme voi nähdä tai kuulla alkuperäisen sävellyksen ja muunnoksen välistä suhdetta. Kuitenkin musiikissa voimme pohtia, mitä variaatio tai transponointi tekevät alkuperäiselle teemalle. Säveltäjä saattaa kirjoittaa ”saman melodian”, mutta käyttäen sävellajia, joka sisältää erilaisia sisäisiä intervaleja. Esimerkiksi duuri ja molli sävelasteikot vaikuttavat hyvin paljon kappaleen tunnelmaan; antaen sille iloisen tai surullisen sävyn. (Bamberger & Disessa, 2003.)

Tämä tutkimus osoittaa sen, kuinka transponointi voidaan muuttaa matematiikan kieleksi ja yhdistää mittasuhteisiin. Lukiossa opiskeleville oppilaille voi antaa tehtäväksi tutkia, miten alkuperäinen nuotti $R(x, y)$ voidaan transponoida siten, että $R(x, y) = R(x', y')$. Tämä tehtävä on yhdistettävissä myös notaation kirjoittamiseen geometrisesti.

4.2.3 Notaatio ja geometria

Notaatiolla tarkoitetaan musiikin kirjoitettua muotoa paperilla, *geometria* puolestaan on matematiikan osa-alue, joka liittyy läheisesti muotoihin. Noh ja Huh (2015) tutkivat musiikillista tilaa, joka ei ainoastaan tarkoita viivastoa, johon musiikki on systemaattisesti kirjoitettu. Musiikkikomponentit, sävelkorkeus ja aika luovat myös kaksiulotteisen avaruuden tason. Tätä voidaan kutsua myös musiikilliseksi tilaksi. (Noh & Huh, 2015.)

Noh ja Huh (2015) vertaavat notaatiota eli nuottikirjoitusta kaksiulotteiseen *xy-avaruuden* tasoon, jossa x-akseli kertoo kappaleen keston eli ajan ja y-akseli sävelkorkeuden. Kuva 1 näyttää meille nuotin musiikillisena notaationa ja matemaattisesti xy-tasossa. Tutkijat huomauttavat, että musiikillisen tilan hahmottaminen riippuu nimenomaan katsojasta eli siitä, onko tulkitsijana muusikko vai matemaatikko.



Kuva 1: Nuotti esitetty musiikillisena notaationa ja matemaattisesti xy-tasossa. Kuvio tekijän.

Noh ja Huh (2015) havainnoivat, että musiikillista tilaa, aivan kuten notaatiota ja koordinaattitasoa, voidaan muuntaa eri geometrinen kappaleiden tavoin. Kun tätä sovelletaan notaatioon, muoto pysyy jäykästi samana, koska transponoidessa sävelten etäisyydet eivät muutu. Skalariunnoksissa puolestaan välien etäisyydet muuttuvat, koska muutos vaikuttaa intervaleihin.

Heidän mukaansa hyvänä esimerkkinä on muuntelu. Joka tapauksessa jokaiselle notaatiolle tai avaruuden geometriselle muunnokselle on löydettävissä vastaava musiikillinen muutos.

Tästä voidaan todeta, että notaatio on helposti piirrettävissä geometriseksi muodoksi. Aikaisempaan viitaten tämä on konkreettisesti yhdistettävissä transponointiin. Samalla tavalla alkuperäinen nuotti ja transponoitu nuotti on mahdollista tehdä geometrisesti xy-tasoon.

4.2.4 Intervallit ja logaritmit

Niinkin erilaiselta kuulostavat ja eri asiaa tarkoittavat käsitteet kuin *intervalli* ja *logaritmi*, ovat yhdistettävissä toisiinsa. Kuten jo aikaisemmin totesin, logaritmien yhteys musiikin suhteisiin huomattiin jo 1600-luvulla (kts. Wardhaugh, 2007). Musiikista tuttu käsite intervalli tarkoittaa tasoeroa kahden sävelen välillä (Valli & Leinonen, 2008, s. 30). Logaritmi puolestaan on eksponenttifunktio¹, joka on muotoa $\log_a b$, missä a on reaaliluku, joka on suurempi kuin nolla ja eri suuri kuin yksi. Tällöin $\log_a b$ on *luvun b a -kantainen logaritmi*. Se vastaa kysymykseen ”*mihin potenssiin kantaluku a täytyy korottaa, jotta tulokseksi saadaan b ?*” (Cederberg, 2013.)

David Wrightin (2009, s. 53) mukaan logaritmit antavat meidän muuntaa suhteita senteiksi tai puolisävelaskeliksi, mitkä ovat intervallien luonnollisia esitystapoja. Wardhaugh (2007) selittää, kuinka logaritmien additiivisen ominaisuuden vuoksi, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, logaritmien lisäys vastaa suhdelukujen kertomista ja siten myös musiikki suhteiden lisäämistä². Esimerkiksi jos lisätään kvartti (4) kvintiin (5), saadaan oktaavi: $3 : 2 \times 4 : 3 = 2 : 1$. Tämä saadaan myös logaritmien avulla:

$$\log(3 : 2 \times 4 : 3) = \log(2 : 1) \text{ ja } \log(3 : 2) + \log(4 : 3) = \log(2 : 1)$$

Tästä seuraa, että voimme korvata logaritmien lisäämisen intervallien lisäämisellä. Wardhaughin (2007) mukaan myös muut laskusäännöt toimivat: logaritmien vähennys vastaa intervallien vähennystä, ja niin edelleen. Logaritmit tarjoavat ”mitan” intervalleille, ja näitä mittoja voidaan verrata toisiinsa ja jakaa keskenään. Wardhaugh (2007) pohtii, kuinka kahden

¹ Eksponenttifunktio on muotoa $f(x) = a^x$, jossa a on vakio ja aina suurempaa kuin nolla. Esimerkiksi 2^x , 10^x ja 13590^x ovat eksponenttifunktioita.

² Intervallien välisiä eroja voidaan kuvata mittasuhteina, ja jokaiselle intervallille on laskettavissa suhdeluku. Esimerkiksi Sakari Vainikka (2001) selittää näistä tarkemmin omassa artikkelissaan.

intervallin suhteellinen koko voidaan ilmaista määrällisesti niiden logaritmistien ”mittojen” suhteella. Esimerkiksi kvintin ja oktaavin suhteellinen koko saadaan niiden logaritmistien kokojen suhteen:

$$\log(3 : 2) : \log(2 : 1) \approx 176 : 301$$

Wardhaugh (2007) kertoo myös, että vaikka muutkin tekivät tällaisia yksittäisiä musiikillisia laskutoimituksia, René Descartes (1596–1650) tuotti ensimmäisenä kaavion musiikin sävelkorkeudesta sekä tähdellisen esityksen musiikillisesta oktaavista, käyttäen logaritmeja. Matemaatikot Nicolaus Mercator (1620–1687) ja Isaac Newton (1642–1727) seurasivat häntä. Wardhaugh (2007) ihmettelee, miksi kukaan näistä kolmesta ei julkaissut matemaattisten töidensä yksityiskohtia.

Näiden materiaalin ja konkreettisten esimerkkien perusteella voimme sanoa, että logaritmien avulla voidaan laskea intervallien välisiä suhdelukuja. Lisäksi logaritmit kuuluvat lukiotason kursseihin (LOPS, 2019, s. 225), joten lukio-opetuksessa tätä on konkreettisesti mahdollista hyödyntää musiikin tunnilla esimerkiksi laskemalla moniäänisesti laulettavien kappaleiden intervallien välisiä suhteita.

4.3 Mielenkiinto ja arvostus oppiainetta kohtaan

Koulun opetuksessa musiikki ja matematiikka ovat tunnin kulultaan ja aiheiltaan hyvin erilaisia. Mielenkiintoa ja arvostusta kumpaakin oppiainetta kohtaan on tutkittu ja etsitty korrelaatiota niiden välillä. Tossavainen ja Juvonen (2013) tekivät vertailututkimuksen peruskoululaisten ja lukiolaisten kiinnostuksesta musiikkiin ja matematiikkaan. Tutkimuksen lähtökohtana oli selvittää, miten osallistujien kiinnostus musiikkiin eroaa heidän kiinnostuksestaan matematiikkaan, millaisia eroja näiden kahden oppiaineen välillä havaitaan, kuten hyödylliseksi näkemisessä, vaikeaksi kokemisessa ja siitä pitämisestä, ja miten nämä ominaisuudet selittävät ensimmäiseen tutkimuskysymykseen liittyviä kiinnostuseroja. (Tossavainen & Juvonen, 2013)

Tossavaisen ja Juvosen (2013) tutkimuksen yksi tulos kertoo, että musiikki koetaan mielenkiintoiseksi yksityiselämässä, kun taas matematiikka koetaan mielenkiintoiseksi koulun opetuksessa. Kun puhutaan musiikkiharrastuksesta, Erja Kososen (2017) mukaan sillä usein tarkoitetaan erityisesti vapaa-ajalla tapahtuvaa musiikkitoimintaa. Yksi musiikkikasvatuksen tärkeä

tehtävä on motivoida omatoimiseen musisoimiseen sekä oppilaiden aktiiviseen musiikkisuhteen muotoutumiseen. Kosonen (2017) kertoo myös, että musiikki on edelleen yksi suosituimmista harrastuksista.

Tossavainen ja Juvonen (2013) löysivät eroja myös sukupuolten välillä: matematiikka kiinnostaa enemmän poikia, kun taas musiikki kiinnostaa enemmän tyttöjä. Matematiikka huomattiin olevan myös ehdottomasti yksi arvostetuimmista oppiaineista, vaikka sitä ei niinkään pidetä miellyttävimpien joukossa. Musiikki puolestaan kuuluu pidetyimpien oppiaineiden listalle, vaikka moni ei sitä arvosta samalla tavalla kuin esimerkiksi matematiikkaa. (Tossavainen & Juvonen, 2013.)

Eija Kauppinen (2010) teki tutkimuksen liittyen opettajan työhön ja tunteisiin. Tutkimuksen aiheena oli selvittää, kuinka itse opettajan mielenkiinto on vaikuttanut hänen opettavan aineen valinnassa. Hänen tutkimuksensa tarkoituksena on ymmärtää ja kuvata opettajien työhön liittyviä tunteita, kokemuksia työstä sekä tunnepuheesta muodostuvaa opettajuutta. Empiirisenä aineistona Kauppinen (2010) käytti haastatteluita, joihin osallistui viisi musiikin opettajaa ja kolme matematiikan opettajaa, yhteensä seitsemän aineenopettajaa. Hän huomasi tutkimuksessaan, että opettajien läheinen suhde musiikkiin on ollut heidän ponnahduslautansa tai syy hakea musiikkiopintojen pariin lukion jälkeen. Matematiikan opettajien kertomuksista puolestaan tulee ilmi, että suhde matematiikkaan ei ole samalla tavalla läheinen kuin musiikissa. Tässä taustalla on enemmänkin kouluajan oma kiinnostus ja omien kykyjen tiedostaminen.

Näiden tutkimusten perusteella voidaan sanoa, että molempien oppiaineiden mielenkiintoon liittyy vahvasti oppilaan oma mielenkiinto oppiainetta kohtaan ja kuinka vaikeaksi sen oppilas kokee. Sama pätee myös opettajilla: he eivät ainetta opettaisi, jos se ei heitä kiinnostaisi. Tutkimuksista tulee myös ilmi, että musiikkia pidetään mielenkiintoisempana koulumaailman ulkopuolisena harrastuksena.

4.4 Musiikkikasvatuksen vaikutus matematiikan akateemisiin saavutuksiin

Musiikkikasvatuksen ja ylipäänsä musiikin harjoittamisen vaikutuksia matematiikan akateemisiin saavutuksiin on tutkittu jo jonkin verran. Chao-Fernández, Román-García ja Chao-Fernández (2017) kertovat musiikin vaikutuksista neurologisella tasolla. Kuitenkaan se ei ole saanut samanlaista huomiota opiskelijoiden koulutuksissa. Heidän mukaansa monet tutkimukset osoittavat, että muusikon aivot eroavat sellaisten ihmisten aivoista, joilla ei ole ollut minkäänlaista

musiikillista koulutusta. Seuraavaksi esittelen tutkimuksia, jotka yhtyvät Chao-Fernándezin, Román-Garcían ja Chao-Fernándezin (2017) ajatusten kanssa, sekä etsin pohjaa sille, kuinka musiikilla on vaikutusta matemaattisiin taitoihin.

Kelli Beth Deere (2010) teki tutkimuksen musiikkikasvatuksen vaikutuksesta lukemisen ja matematiikan akateemisiin saavutuksiin. Tutkimus tehtiin lukuvuonna 2008–2009 ja tutkimus toteutettiin TCAP (Tennessee Comprehensive Assessment Program) testin pohjalta. Tämä testi tehdään Tennesseessä vuosittain, jotta he voivat seurata oppilaiden yksilöllistä kehittymistä.

Yksi Deeren (2010) tutkimuksen keskeinen tulos on, että musiikkikasvatus vaikuttaa oppilaiden saavutuksiin, koulun ilmapiiriin ja oppimisympäristöön. Musiikkipainotteisessa koulussa oppilaat saivat parempia tuloksia lukemisen kuin myös matematiikan osalta. Deeren (2010) mukaan korkea tilastollinen korrelaatio löydettiin neljännellä luokalla, mutta ei enää kahdeksannen luokan oppilaiden välillä. Hänen tekemä tutkimus paljasti sen, että lukemisen ja matemaattisten taitojen osalta musiikkikasvatuksella on merkitystä erityisesti ala-asteella, mutta ei niinkään yläasteella. Kiinnostavaa on, miksi neljännen ja kahdeksannen luokan oppilailla tämä ero oli niin suuri.

Puolestaan Kells (2008) pohjustaa tutkimuksessaan, kuinka tietyt aivojen kehitystutkimukset kertovat lapsien alkuvuosien olevan tärkeintä aikaa luoda yhteyksiä hermoroja pitkin. Tässä musiikille altistamisella on täydellinen sisäänpääsy. Kun kuunnellaan tai tehdään musiikkia, tietyt aivokuoren neuronit alkavat liikkua. Ne käyttävät samoja luotuja liikeratoja, joita käytetään suorittaessa monimutkaisia päättelyitä. (Kells, 2008.) Curt Glendale Willis (2016) on samaa mieltä Kellsin (2008) kanssa, Willisin (2016) mukaan musiikkikasvatuksen vaikutukset aivojen toimintoihin välittyy monien muuttujien mukana. Nämä muuttujat vaikuttavat oppimiseen musiikkikasvatuksen avulla. Siten ne samat muuttujat vaikuttavat myös siihen, missä määrin musiikkiopetus vaikuttaa kognitiivisiin alueisiin. Willis (2016) listaa näihin muuttujiin muun muassa sukupuolen, absoluuttisen sävelkorkeuden, musiikin harjoittelun tyyppin ja soitettun instrumentin.

Willis (2016) kertoo myös, että mitä enemmän oppilas harjoittaa musiikkia, sitä vahvempia ovat myös oppilaan hermosolujen yhteydet. Kells (2008) huomasi saman asian: nuoriin lapsiin kohdistuvat tutkimukset ovat ehdottaneet, että matematiikan taidot lisääntyvät sen mukaan, kuinka aktiivisesti oppilas on harjoittanut musiikkia vuosien varrella (kts. myös Gardiner, 2000). Hän painottaa musiikin harjoittamisen vaikuttavan muihin taitoihin sitä voimakkaam-

min, mitä aikaisemmin aloittaa musiikin harjoittelun. Willis (2016) huomauttaa myös, että hermosolujen yhteydet ovat ilmeisiä erityisesti silloin, kun musiikin harjoittelu yhdistetään perheen musikaaliseen historiaan ja musiikin harjoittelun aloittamiseen aikaisella iällä. Hänen mukaansa muusikot käyttävät samantapaisia aivojen toimintoja musiikin prosessoinnissa, kuin myös algebran ongelmien ratkaisemisessa.

Barbara H. Helmrich (2010) yhtyy myös Kellsin (2008) ja Willisin (2016) tutkimusten tuloksiin. Hän teki hypoteesin, että musiikin tunneille/koulutukseen, instrumenttiopetukseen tai kuoroon osallistuvat oppilaat saivat matemaattisesti parempia tuloksia. Hän testasi hypoteesiaan Yhdysvalloissa Marylandissa 6,026 murrosikäisellä nuorella käyttäen Marylandin Algebra/Data-analyysia lukion arvioinnissa. Helmrich (2010) huomasi merkittävän eron algebran tuloksissa kahden ryhmän välillä: ryhmän, joka harjoitti musiikkia jollakin tavalla ja ryhmän, jolla ei ollut musiikillista taustaa.

Näihin tutkimuksiin pohjautuen voimme todeta, että musiikin harrastaminen jo pienestä iästä lähtien vaikuttaa positiivisesti matematiikan oppimiseen. Musiikin tekeminen ja kuunteleminen vaikuttaa aivoissa luoden yhteyksiä hermoratoja pitkin, jotka ovat verrattavissa matematiikan ongelmien ratkaisussa tarvittaviin hermoratoihin. Tämä edesauttaa matematiikan opiskelun sujuvuutta myöhemmällä iällä.

5 Tulokset

Tässä osiossa vastaan tutkimuskysymyksiini edellä mainitsemieni tutkimusten pohjalta. Ko-koan yhteen musiikin ja matematiikan yhdistäviä tekijöitä, yhteistä teoriataustaa ja mahdolli-suuksia integroida niitä yhteen lukiotason opetuksessa.

Tutkimuskysymykseni olivat: (a) *mitkä tekijät yhdistävät musiikkia ja matematiikkaa oppiai-neina*, sekä (b) *kuinka musiikkia ja matematiikkaa voidaan integroida yhteen lukiotason ope-tuksessa?*

5.1 Musiikin ja matematiikan oppiaineen yhdistävät tekijät

Ensimmäiseksi vastaan ensimmäiseen tutkimuskysymykseeni, eli *mitkä tekijät yhdistävät mu-siikkia ja matematiikkaa oppiaineina?*

Tämän kandidaatintutkielman perusteella voidaan todeta, että musiikki ja matematiikka yhdis-tyvät teoriapohjiltaan. Tämä on huomattu jo kauan aikaa sitten historiassamme. (kts. Bamberger & Disessa, 2003). Kuten myös Kells (2008) totesi, numerot, kaavat ja mittasuhteet ovat hallin-nassa sekä muusikoilla että matemaatikoilla. Bamberger ja Disessa (2003) ovat samaa mieltä Kellsin (2008) kanssa todeten sen, kuinka musiikista ja matematiikasta on oltu kiinnostuneita jo pitkään: muun muassa Plato ja Aristoteles tutkivat näiden kahden konseptin yhteyksiä. Unoh-tamatta Pythagoraa, jonka myös Apiola (2015) sekä Chao-Fernández, Román-García ja Chao-Fernández (2017) huomioivat omissa artikkeleissaan.

Syke ja rytmi yhdistetään useammin musiikkiin, mutta nämä vahvistavat myös matematiikan käsitteitä. Esimerkiksi murtoluvut ovat helposti yhdistettävissä sykkeeseen ja rytmiin. Syke py-syy samana, mutta sen sisällä voidaan leikkiä murtoluvuilla. Yksi isku voidaan jakaa kahteen puolikkaaseen, kahteen $\frac{1}{8}$ nuottiin ja yhteen puolikkaaseen, ja niin edelleen. (Palubinski, 2019.)

Harvemmin musiikin opettaja transponoidessaan ajattelee muuttavansa sävelten korkeutta al-kuperäisestä kappaleesta R kahden osan (x,y) ylöspäin esimerkiksi (3x,3y) verran, missä nu-mero 3 tarkoittaa terssiä. Kuitenkin mittasuhteilla ja transponoinnilla on selkeä yhteys toisiinsa, ja tämän yhteyden Bamberger & Disessa (2003) löysivät. Transponointi yhdistyy myös notaa-tioon eli musiikilliseen nuottikirjoitukseen. Kun Bamberger ja Disessa (2003) huomasivat no-taation olevan mittasuhteiden muuttamista, Noh ja Huh (2015) löysivät geometrisen notaation.

Notaatio voidaan ajatella matemaattisesti: muutetaan nuottikirjoitus koordinaatistoon xy-akselille, jossa x-akseli on aika/syke ja y-akseli kuvaa sävelkorkeutta. Kappaleista voi konkreettisesti tehdä geometrisiä muotoja ja kappaleita, sekä kokeilla, kuinka kappaleen transponointi tai muuntelu vaikuttaa geometriseen muotoon. Selkeä yhteys siis löytyy myös geometrialla ja notaatiolla.

Näiden tutkimusten perusteella huomaamme, että musiikilla ja matematiikalla on vahva teoreettinen yhteys toisiinsa. Tämä yhteys on selkeä huolimatta siitä, että toinen on taideaine ja toinen tiedettä.

5.2 Musiikin ja matematiikan integrointi lukiotason opetuksessa

Seuraavaksi vastaan toiseen tutkimuskysymykseeni, eli *miten musiikkia ja matematiikkaa voidaan integroida yhteen lukiotason opetuksessa?*

Voin todeta sekä tässä työssä esitettyjen tutkimusten että omien kokemuksieni pohjalta, että oppiaineiden rajat ylittävä opetus auttaa oppilaita hahmottamaan aihetta monesta eri näkökulmasta ja tätä kautta ymmärtämään, miksi heidän täytyy opiskella kyseinen asia. Ymmärrys kysymykseen ”miksi tätä aihetta täytyy opiskella” edesauttaa opiskelun motivaatiossa. Oppilaat ovat yksilöllisiä ja siten jokainen heistä oppii eri tavalla. Toiset ymmärtävät asian heti, toisille auttaa lähestyminen eri näkökulmasta. (kts. myös Norrena, 2016)

Jo kauan aikaa sitten löydettiin, kuinka historia yhdistää musiikkia ja matematiikkaa. Pythagoras on sekä länsimaisen musiikin että matematiikan perusteisiin vaikuttanut tärkeä henkilö (Apiola, 2015.) Jo historiasta kertoessa voidaan yhdistää musiikki ja matematiikka. Aina matematiikan tunnin ei tarvitse olla pelkästään laskemista, kuin myös musiikin historia on osa musiikin merkityksen ymmärtämisessä yhteiskunnassa. Yhtenä musiikin oppiaineen yleisenä tavoitteena onkin syventää musiikin eri tyyleihin, lajeihin ja historiaan liittyvää osaamistaan (LOPS, 2019, s. 341).

Rytmi on varsin vaivaton yhdistää matematiikkaan oppitunneilla. Johdannossa mainitsemani murtoluku esimerkki ala-asteella toimii myös lukiossa, hiukan vaikeampana versiona. Esimerkiksi LOPSin (2019, s. 342) mukaisesti MU1 Intro – kaikki soimaan -kurssilla opetellaan ”hahmottamaan musiikin elementtejä kokemuksellisesti” (s. 342). Kappaleeksi voidaan ottaa sellainen teos, missä on haastavampia rytmejä. Oppilaat voivat kirjoittaa tai piirtää haastavat rytmit paperille matematiikan kielellä. LOPSissa (2019, s. 223) ensimmäisen matematiikan kurssin

tavoitteena on kerrata ja syventää tietoa murtolukuihin sekä prosenttilukuihin liittyen. Nuotit voidaan kirjoittaa myös prosentteina, jossa yksi tahti on 100 %. Näillä kahdella kurssilla on hyvä mahdollisuus myös olla käynnissä yhtä aikaa, koska molemmat ovat ensimmäisenä oppiaineensa kurssina. Edellä oleva harjoitus on konkreettisesti mahdollista toteuttaa luokassa.

Tutkimuksiin nojautuen käytännön pedagogisia sovituksia voisi suunnitella geometrian osalta myös muotojen hahmottamiseen ja tekemiseen. Näitä voidaan lähestyä musiikillisten kappaleiden kautta. Opettaja voi valita kappaleen, josta oppilaat tekevät oman muunnelman, improvi-soinnin. Tämän jälkeen jokainen piirtää kappaleen xy-koordinaatistoon geometrisesti. Seuraavaksi vertaillaan, kuinka musiikin melodian pienellä muuttamisella muuttuu myös geometrinen muoto. Samoin kun x-akselin tai y-akselin koordinaatin muuttaminen muuttaa geometrisen piir-roksen muotoa. Haastetta voi antaa muuttamalla se kolmiulotteiseksi, piirtämällä kuvio xyz-koordinaatistoon. LOPSissa (2019, s. 224) pitkän matematiikan geometria -kurssin yhtenä ta-voitteena on oppia ”hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi -että kolmiulotteisessa tilanteissa” (s. 224).

LOPSin (2019, s. 225) mukaan logaritmifunktiot kuuluvat lukion pitkän matematiikan viiden-teen kurssiin ”MAA5 Funktiot ja yhtälöt 2”. Tämän kurssin yhtenä tavoitteena on tuntea loga-ritmifunktioiden ominaisuudet sekä osata ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä. Osa musiikillista toimintaa ja oman musiikillisen osaamisen kehittämistä on musiikin teorian hallinta. Esimer-kiksi intervallien hallinta helpottaa huomattavasti kaksi-, kolmi- tai neljääänisesti laulamista. Luokan matemaatikko-oppilas/-oppilaat ymmärtävät intervallin varmasti helpommin logarit-mien kautta. Luokassa siis voidaan laskea intervallien yhteyksiä käyttämällä logaritmifunktioita ja soveltamalla niiden ominaisuuksia.

Esittämäni yhteydet ovat pieni määrä niistä kaikista mahdollisuuksista, mitä musiikin ja mate-matiikan integroiminen voi parhaimmillaan tarkoittaa. Kuten jo johdannossa tuli ilmi, Apiola (2015) kertoo artikkelissaan, kuinka trigonometriasta tuttu sinifunktio voidaan esittää äänen värähtelynopeutena, intervallien ja asteikoiden suhdeluvut voidaan esittää matriisimuodossa ja kuinka harmonisen lukujonon kaavalla voidaan laskea värähtelytaajuuksia. Matti Takala (2005) puolestaan kertoo artikkelissaan, miten soittimen virittäminen on yhdistettävissä matemaattisiin lukusuhteisiin, joiden arvot annetaan sentteinä. Mahdollisuuksia integroida musiikkia ja mate-matiikkaa on tarjolla paljon niille, jotka ovat valmiita ottamaan haasteen vastaan.

6 Pohdinta

Tässä kappaleessa kerron omia pohdintojani liittyen musiikkiin ja matematiikkaan. Aihetta lähestyn opiskelumotivaation, opettajien stereotyyppien ja opettajan roolin kautta. Mietin myös, miten aiheestani voisi olla hyötyä opetussuunnitelman kehittämisessä sekä mihin suuntaan tästä pystyisin itse jatkamaan pro gradu -tutkielmassa.

Kuulin yliopiston vuosikurssilaisiltani kokemuksia liittyen musiikin opiskelun vaikutuksista muihin oppiaineisiin. Yksi yhdistävä kokemus on, kuinka erityisesti yläasteella ja lukiossa musiikki vaikutti jopa negatiivisesti muiden aineiden oppimiseen. Soittamisen harjoittelu, projektit ja konsertit veivät niin paljon aikaa, ettei sen jälkeen ollut enää energiaa opiskella muita aineita. Musiikkiluokkalaisia yleisesti ottaen kiinnostaa musiikin opiskelu muita aineita enemmän; tämä haukkaa motivaatiota muiden oppiaineiden opiskelusta.

Kyselin tuttaviltani myös mielikuvia liittyen musiikin ja matematiikan opettajiin. Useimmiten musiikin opettaja sanottiin olevan rento, huumorintajuinen ja virheitä salliva. Puolestaan matematiikan opettajaa kutsuttiin teoreettiseksi ja jäykäksi. Mistä tämä johtuu? Miksi musiikin ja matematiikan opettajat koetaan olevan niin erilaisia? Musiikki ja matematiikka ovat erilaisia, niin myös opettajien luonne kuvautuu tämän mukaan: musiikki on taideaine ja matematiikka teoriapohjainen aine. Omasta mielestäni opettajan tulisi löytää se kultainen keskitie hukuttamatta omaa persoonallisuuttaan.

Omasta kokemuksesta voin sanoa, että oli aine mikä tahansa, opettajalla on oma vaikutuksensa oppiaineen kiinnostukseen. Toki jos intohimona on klassisen pianon harjoittelu, ei siihen musiikin opettaja pääse vaikuttamaan. Matematiikassa puolestaan aiheen ymmärtäminen on äärimmäisen tärkeää. Jotta teoriaa voi soveltaa, täytyy perusteoria ensin ymmärtää. Matematiikan hierakisen tyylin takia uuden oppiminen on haastavaa, jos ei edellistikään ymmärtänyt (kts. Merenluonto, 2009). Olen huomannut, että jotkut matematiikan opettajat opettavat hyvin matemaattisesti ja matemaattisella kielellä, mikä suurimmalle osalle oppilaista on haastavaa ymmärtää. Tästä seuraa turhautuminen, motivaation laskeminen sekä haluttomuus edes yrittää. Siksi aineesta huolimatta, opettajalla pitäisi olla tilannetajua ja selkeä kieli.

Kyllä, musiikki ja matematiikka voivat kiinnostaa yhtä aikaa ja kyllä, niissä voi olla hyvä yhtä aikaa. Se ei ole ”joko tai” tilanne, päinvastoin: vastakohtat täydentävät toisiaan. Tästä syystä

uskon, että saan musiikin ja matematiikan yhdistämisellä tuotua jämäkkyyttä musiikin opettamiseen ja rentoutta matematiikan opettamiseen. Edeltävä lause ei koske ainoastaan integroituja tunteja, mutta myös tunteja, jotka keskittyvät joko vain musiikkiin tai vain matematiikkaan.

Kappaleisiin transponointi ja mittasuhteet (4.2.2) sekä notaatio ja geometria (4.2.3) olisin toivonut enemmän tutkimuksia, jotta aiheet olisivat vielä selkeämmin yhdistettävissä. Bamberger ja Disessa (2003) sekä Noh ja Huh (2015) selittivät selkeästi tuloksiaan ja selkeästi sen, miten musiikin ja matematiikan käsitteet saadaan yhteen, mutta uskottavuutta lisäisi useamman tutkijan päätyminen samaan tulokseen.

6.1 Katse tulevaisuuteen

Kuten jo aikaisemmin totesin, oppilaat oppivat eri tavalla ja tästä syystä myös musiikin ja matematiikan yhdistämisellä voisi olla hyötyä opiskelijoille. Tietenkin jokainen on yksilö ja se ei välttämättä ole hyödyksi kaikille oppilaille. Sitä suuremmalla syyllä olisi syytä ottaa opetukseen mukaan eri opetusmetodeita ja lähestymistapoja. Näin varmistetaan, että mahdollisimman moni oppii mahdollisimman hyvin. Avasin kolmannessa luvussa musiikin ja matematiikan yhteisiä tavoitteita LOPSissa (2019). Tähän pohjautuen opetussuunnitelmaa voisi kehittää siten, että otettaisiin enemmän huomioon oppiaineiden yhtenäisyydet, myös musiikissa ja matematiikassa. Moni opettaja yhdistää muita aineita keskenään, esimerkiksi musiikkia ja kuvaamataitoa: ”maalaa mitä kuulet”, tai matematiikkaa ja liikuntaa: ”laske yhteen-/kertolasku ja liiku yhtä monta hyppyä eteenpäin”, mutta niin sanotut vieraamat aineet jäävät pimentoon.

Entä miten toimisi musiikin ja matematiikan opettajien yhteisopettajuus kouluissa? Tai esimerkiksi matematiikan (miksi ei myös muiden aineiden) yhdistettävyyden musiikkiin -kurssi musiikkikasvatuksen opinnoissa? Tämä ainakin avaisi oman aineen käsittämistä ja auttaisi myös tulevassa työssä. Monissa kouluissa tehdään paljon yhteisopettajuutta ja yhdistetään aineita: kun ympäristötiedossa tulee aiheeksi vesialueet, musiikissa lauletaan vesiaiheisia lauluja, kuvaamataidossa piirretään vesiväreillä, fysiikassa ja kemiassa mietitään eri yhdisteitä, joista löytyy vettä, ja niin edelleen. Miksi sitä ei voisi opettaa myös niiden eriskummallisten oppiaineiden yhdistämisestä ennen sinne työelämään siirtymistä? Opintojen aikana myös oppilaat voisivat järjestää jonkinlaisen ”työpajan” muille luokkatovereilleen aineiden yhdistämisestä, koska musiikkikasvatustilastakin moni opiskelee jotain sivuainetta.

LOPSissa (2019, s. 341) yhtenä musiikin tavoitteena on myös kokeilla rohkeasti uusia ja epätavallisia musiikillisia ideoita myös yhdessä muiden kanssa. Omasta kokemuksesta voin sanoa, että nykypäivänä musiikin tuntien rakenne menee aika samalla kaavalla. Mitä jos sitä muutettaisiin? Mitä jos aihetta lähdetäisiinkin lähestymään aivan eri suunnasta ja kokeilemaan uusia ja epätavallisia ideoita? Musiikin sekä matematiikan maailmat ovat suuria, miksei niitä lähdetäisi tutkimaan, hahmottamaan ja avaamaan integroiden.

Tutkimuksia etsiessäni ja lukiessani huomasin toistuvan teeman: musiikin vaikutuksia matemaattisiin taitoihin ja toisin päin, on tutkittu pääosin ala-asteella. Yläaste- ja lukiotasolla ei juurikaan olla tehty tutkimuksia. Mistä tämä johtuu? Deere (2010) tutki vähän musiikkikasvatuksen vaikutuksia vanhempien oppilaiden akateemisiin vaikutuksiin. Hän ei havainnut merkittävää korrelaatiota yläasteikäisiin oppilaisiin. Luulen tämän olevan niin siksi, että pienempien oppilaiden on helpompaa oppia ja aivot kehittyvät eri tavalla yläasteikäisiin verrattuna. Tästä syystä musiikillinen harrastus vaikuttaa parhaalla mahdollisella tavalla, kun se aloitetaan nuorella iällä. Tästä kertoivat myös Helmrich (2010), Kells (2008) ja Willis (2016) omista tutkimuksissaan. Siitä huolimatta erityisesti lukioikäiset opiskelijat vaatisivat enemmän tutkimuksia yhteisesti musiikin ja matematiikan harrastuksen, kiinnostuksen ja vaikutuksien osalta.

Pro gradu – tutkielmassani voisin tutkia aihettani konkreettisesti lukiotasolla. Tämä on se luokkataso, jota tahtoisin päästä opettamaan valmistumisen jälkeen. Minua kiinnostaa, onko musiikin ja matematiikan oppimisen välillä eroja; jos joku oppilas on matemaattisesti lahjakas, onko hänen helpompaa myös oppia musiikkiin liittyviä asioita? Tämä aihe on hyvin laaja, ja yksi pro gradu – tutkielma ei sitä millään pysty kattamaan, mutta idean tasolla aihe on kiehtova. Muita tutkimuskysymyksiä voi olla myös (a) *kuinka oppilaat kokevat näiden kahden aineen yhdistämisen oppitunneilla*, (b) *kuinka paljon musiikkia ja matematiikkaa jo yhdistetään lukiotasolla* sekä (c) *millä tavalla opettajat kokevat musiikin ja matematiikan yhdistämisen*. Koska musiikki ja matematiikka molemmat ovat lähellä sydäntäni, olisi hienoa päästä syventämään tietämystäni ja tutkimaan aihetta myös maisterivaiheessa.

6.2 Lopuksi

Tämä kirjallisuuskatsaus oli erittäin mielenkiintoista tehdä, koska (kuten jo johdannossa totesin) opiskelen musiikkikasvatusta pääaineena ja matematiikkaa sivuaineena. Tämä kombinaatio on monelle muulle tullut yllätyksenä. Kandidaatin tutkielmani pohjalta olen yhä enemmän

vakuuttunut siitä, että valitsin opetettavat aineet juuri itselleni sopiviksi. Jaan intohimon molempia aineita kohtaan ja tämä kirjallisuuskatsaus antoi minulle paljon tietoa ja työkaluja tulevaa ammattiani varten.

Tämän työn myötä toivon, että moni muukin löytäisi kiinnostuksen integroida musiikkia ja matematiikkaa omissa opetuksissaan. Eihän sitä tiedä, kuinka paljon musiikista ja matematiikasta tullaan vielä tekemään tutkimuksia. Joka tapauksessa se on saanut hyvän alkusysäyksen jo aikaa sitten; toivottavasti loppua ei vielä vähään aikaan nähdä.

Lähteet

- Apiola, H. (2015). *Matematiikkaa ja musiikkia*. Haettu osoitteesta <http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html>
- Bamberger, J., & Disessa, A. (2003). Music as embodied mathematics: A study of a mutually informing affinity. *International journal of computers for mathematical learning*, 8(2), 123-160. Doi: 10.1023/B:IJCO.0000003872.84260.96
- Cantell, H. (2015). *Näin rakennat monialaisia oppimiskokonaisuuksia*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Cederberg, J. (ohjaaja) [Opetus.tv]. (2011). Logaritmit ja sen laskusäännöt [video]. Haettu osoitteesta <https://opetus.tv/lukio-ops2016/matematiikka/maa8/logaritmi/>
- Chao-Fernández, R., Román-García, S., & Chao-Fernández, A. (2017). Art, science and magic: Music and math the classroom. The 5th edition of the Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality (TEEM) conference. Doi: 10.1145/3144826.3145427
- Deere, K. B. (2010). The impact of music education on academic achievement in reading and math. Social Science Premium Collection. (759833158). Haettu osoitteesta <https://search.proquest.com/docview/759833158?accountid=13031>
- Halonen, P. (2009). *Pianovapari.com: oppikirja 1*. Kempele: MeSTRADA Oy.
- Helmrich, B. H. (2010). Window of opportunity? Adolescence, music, and algebra. *Journal of Adolescent Research*, 25(4), 557–577. doi:10.1177/0743558410366594
- Jyväskylän lukiokoulutuksen opetussuunnitelma. (2016). Haettu osoitteesta <https://peda.net/jao/lop2/5ojoks/5-19-musiikki>
- Kauppinen, E. (2010). *Opettajien tunnenarratiivit ja niiden rakenneanalyysi: Musiikin ja matematiikan aineenopettajien opettajuus ja elämäntilanne* (Väitöskirja). Tampere: Tampereen yliopistopaino Oy – Juvenes Print. Haettu osoitteesta <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/66613>
- Kells, D. (2008). The impact of music on mathematics achievement. *Journal of Applied Developmental Psychology*. Haettu osoitteesta <http://www.susi-up.de/wp-content/uploads/2010/04/ImpactOfMusicOnMath.pdf>
- Kosonen, E. (2017). Musiikkia koulussa ja koulun jälkeen. *Suomen musiikkikasvatusseura – FiSME ry*. Haettu osoitteesta <https://fisme.fi/wp-content/uploads/2017/08/Musiikki-koulussa-ja-koulun-j%C3%A4lkeen-Kosonen.pdf>
- Luostarinen, A., Peltomaa, I.-M. (2016). *Reseptit OPSin käyttöön: Opettajan opas työssä onnistumiseen*. Jyväskylä: PS-Kustannus.

- Merenluonto, K. (2009). Matematiikkaa opettamaan. Teoksessa M-L. Rönkkö, J. Lepistö & S. Kullas (toim.) *Monialainen opettajuus. Kasvatuksellisia näkökulmia oppiaineisiin ja aihekokonaisuuksiin*. (s. 20–32). Turku: Uniprint.
- Noh, J., Huh, N. (2015). Integrating math and music: Teaching ideas. *Korean society of mathematical education*, 19(3), 177–193. Doi: 10.7468/jksmed.2015.19.3.177
- Norrena, J. (2016). *Laaja-alainen osaaminen käytäntöön: Arviointi, opetuksen suunnittelu ja oppilaan ohjaaminen* (1. painos ed.). Helsinki: Edita.
- Opetushallitus (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet. Haettu osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Palubinski, K. (2019). Effects of music education on academic achievement. Arizona State University. Haettu osoitteesta <https://core.ac.uk/download/pdf/240228993.pdf>
- Salminen, A. (2011). Mikä kirjallisuuskatsaus? Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyypeihin ja hallintotieteelisiin sovelluksiin. *Vaasan yliopiston julkaisuja*. Haettu osoitteesta https://osuva.uwasa.fi/bitstream/handle/10024/7961/isbn_978-952-476-349-3.pdf?sequence=1
- Sah, A., Rawat, S., Nautiyal, B., Ahmed, A. & Chhabra, O. (2012). Tuning of musical notes through mathematics. *International journal of scientific & engineering research*, 3(10), 670–675. Haettu osoitteesta <https://www.ijser.org/researchpaper/Tuning-of-Musical-Notes-through-Mathematics.pdf>
- Shah, S. (2010). An exploration of the relationship between mathematics and music. University of Manchester. Haettu osoitteesta <http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/cov>
- Takala, M. (2005). *Virittämisen teoriasta ja käytännöstä*. Haettu osoitteesta https://muhi.uniarts.fi/muut_mt_viritys/
- The British School of Paris (2018). 6th form curriculum guide 2019-20. Haettu osoitteesta <https://issuu.com/britishschparis/docs/document-6th-form-curriculum-guide>
- Tossavainen, T., & Juvonen, A. (2013). Vertailututkimus peruskoululaisten ja lukiolaisten kiinnostuksesta musiikkiin ja matematiikkaan. *Musiikkikasvatus*, 16(1), 18–28. Haettu osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/287196649_Vertailututkimus_peruskoululaisten_ja_lukiolaisten_kiinnostuksesta_musiikkiin_ja_matematiikkaan
- Vainikka, S. (2001). Antiikin säveljärjestelmät. Teoksessa J. Niemi (toim.) *Etnomusikologian vuosikirja 2001*. (s. 19–24). Saarijärvi: Gummerus kirjapaino Oy. Doi: 10.23985/evk.101117

- Valli, A., & Leinonen, J. (2008). *Perusaste: Musiikin teorian ja säveltapailun oppiakso*. 1 (4. p. ed.). Pori: Edition JLE.
- Valmennuskeskus (2019). Pitkä vai lyhyt matematiikka? [Utinen] 6.6.2019. Haettu osoitteesta <https://www.valmennuskeskus.fi/uutiset/7091-pitka-vai-lyhyt-matematiikka>
- Wardhaugh, B. (2007). Musical logarithms in the seventeenth century: Descartes, Mercator, Newton. *Historia mathematica*, 35, 19–36. Doi: 10.1016/j.hm.2007.05.002
- Willis, C. G. (2016). Impact of music education on mathematics achievement scores among middle school students. Walden university. Haettu osoitteesta <https://scholarworks.waldenu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3091&context=dissertations&httpsredir=1&referrer=>
- Wright, D. (2009). *Mathematics and music*. United States of America: AMS. Haettu osoitteesta https://books.google.fi/books?hl=fi&lr=&id=g4ONAwAAQ-BAJ&oi=fnd&pg=PR9&dq=Mathematics+and+Music.+Washington+University+in+St.+Louis&ots=4PfUscB3V6&sig=cqdWGf0KzfuA_6vHcnQnUBzcVAk&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false