

Integraalin sovelluksia: pinta-ala y-akselin suhteen ja tilavuus

Pro gradu -tutkielma
Timo Joensuu
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisällys

1 Oppikirjan tavoitteet	3
1.1 Opetussuunnitelman määräämät raamit kurssille	3
1.2 Habits of mind	4
1.3 Tehtävätyypit: Collaborative Learning in Mathematics	6
2 Perusteluosa	10
2.1 Pinta-ala y-akselin suhteen	12
2.2 Tilavuussovellukset	13
3 Lähdeluettelo	16
A Pinta-ala y-akselin suhteen	18
A.1 Harjoitustehtävät	24
B Tilavuussovelluksia	26
B.1 Avaruuskappaleen tilavuus	26
B.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus	28
B.3 Harjoitustehtävät	39
C Lisätehtäviä	44
D Opettajan opas	47
D.1 Tuntijako	47
D.2 Pinta-ala y-akselin suhteen	47
D.3 Tilavuussovelluksia	49
D.3.1 Avaruuskappaleen tilavuus	49
D.3.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus	50
E Tehtävien vastaukset	52

1 Oppikirjan tavoitteet

Lukion opetussuunnitelman uudistus sekä alati digitalisoituva maailma ajavat opettajat jokseenkin uuden asian äärelle. Ylioppilaskirjoitukset sähköistyivät portaittain syksyn 2016 ja kevään 2019 välillä, matematiikan ollessa vuorossa muutokselle viimeisenä. Uuden Abitti-järjestelmän ja kokeissa käytettävien sähköisten ohjelmien runsaus vaativat opettelua niin opiskelijoilta kuin opettajiltakin. Ylioppilaskirjoituksia silmällä pitäen sähköisten apuvälineiden käyttö olisi hyvä aloittaa lukion ensimmäisiltä kursseilta asti.

Tämä lopputyö yhdessä neljän muun pro gradu -työn kanssa muodostaa lukion pitkän matematiikan Integraalilaskenta-kurssin (MAA7) avoimen oppikirjan. Työ on järjestyksessään viimeinen viiteen osaan jaetusta oppikirjasta. Tässä työssä käydään läpi pinta-ala y -akselin suhteen sekä tilavuussovelluksia. Kirjatyöryhmän kanssa valittiin yhteisiksi tavoitteiksi pyrkiä tekemään tehtävistä sellaisia, että opiskelijat pääsisivät hyödyntämään visualisointia, kuvailua sekä arvaamista ja kokeilemista. Avoimen oppikirjan tehtävissä pyritään hyödyntämään tehtävätyyppinä päättelyvirheiden korjausta ja erilaisten esitystapojen yhdistelemistä.

1.1 Opetussuunnitelman määräämät raamit kursseille

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 on ollut käytössä syksystä 2016 asti ja on pian väistymässä. Uuden *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* [12] käyttöönotto tapahtuu 1.8.2021 lukio-opintonsa aloittavien opiskelijoiden opetuksessa. Uudistus etenee porrastetusti vuosikurssi kerrallaan, jolloin uusi opetussuunnitelma on teoriassa käytössä 1.8.2023 alkaen koko lukion oppimäärässä.

Opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen tarkoituksena on antaa "valmiudet ymmärtää, soveltaa ja tuottaa sekä arvioida matemaattisesti esitettyä tietoa". Opetuksen tarkoituksena on auttaa opiskelijaa huomaamaan, ettei matemaattikkaa opiskella vain laskemisen vuoksi, vaan taitoja sovelletaan nykyajan kulttuureissa laajasti useilla eri aloilla. Opetuksen tarkoituksena on kehittää opiskelijan laskemista, luovaa ajattelua, ennustamista, ilmiön mallintamisen sekä ongelmien ratkaisemisen taitoja. Opetussuunnitelmassa otetaan huomioon opiskelijan tietokoneohjelmistojen ja digitaalisten tietolähteiden hyödyntämisen tärkeys. Opiskelijalle muodostuu mielikuva tietoteknisten apuvälineiden hyödyllisyydestä ja toisaalta niiden käytön rajoituksista matematiikassa. [12]

Laaja-alaisena tavoitteena on rohkaista opiskelijaa "käyttämään matematiikan kieltä ja merkintöjä sekä ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä" sekä "siirtymään eri matemaattisen tiedon esitysmuodoista toiseen ilmiön mallintamisessa, ongelman ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa sekä tuloksesta keskustelemisessä". [12] Tämä oppikirja on pyritty rakentamaan avuksi myös näiden asioiden harjoitteluun.

Integraalilaskennan moduuli (MAA7) kuuluu pitkän matematiikan pakollisiin opintoihin ja on laajuudeltaan kaksi opintopistettä. Moduulin tavoitteet opiskelijalle ovat:

- Ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja oppia määrittämään yksinkertaisten

funktioiden integraalifunktioita.

- Ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan sekä tutustua numeeriseen menetelmään määrätyn integraalin määrittämisessä.
- Osata määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla.
- Perehtyä integraalilaskennan sovelluksiin.
- Osata käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa, integraalifunktion määrittämisessä, määrätyn integraalin laskemisessa sovellusten yhteydessä sekä numeerisessa integroinnissa.

Keskeisenä sisältönä mainitaan integraalifunktio ja tärkeimpien alkeisfunktioiden integrointi, määrätty integraali, suorakaidesääntö sekä pinta-alan ja tilavuuden laskeminen. [12]

Tässä oppikirjassa käydään läpi pinta-ala y -akselin suhteen sekä tilavuussovelluksia. Apuna tehtävissä käytetään dynaamista GeoGebra-ohjelmistoa, jossa piirroksia voidaan muokata reaaliajassa arvoja muuntamalla tai hiirtä käyttämällä. GeoGebra:n käyttö opetuksen ja oppimisen apuna on perusteltua, sillä ohjelma on käytössä ylioppilaskirjoituksissa. Lisäksi se on kaikkien ladattavissa ilmaiseksi internetistä ja kielivalintoja on lukuisia. Oppilaat voivat siis käyttää ohjelmaa myös kotikoneillaan, erillisiä ohjelmistolisenssejä ei vaadita. Lisäksi ohjelman käyttö onnistuu peruskoululaiselta, mutta ohjelmasta voi hyötyä myös korkeakouluopiskelija. [6] Tämän kurssikirjan oletuksena on, että opiskelijat ovat jo tutustuneet GeoGebra:n perusominaisuuksiin aiemmillä lukion pitkän matematiikan kursseilla.

Kurssin asioiden ymmärtäminen vaatii opiskelijalta jo ennalta opittuja taitoja, joiden päälle uutta asiaa on hyvä rakentaa. Väärinymmärrysten osoittaminen ja korjaaminen aikaisessa vaiheessa estää opiskelijaa kompastumasta samoihin virheisiin kerta toisensa jälkeen. Vaikeudet integraalilaskennassa voivat johtua mm. funktioiden, raja-arvojen ja derivaatan heikosta ymmärtämisestä. Peruskäsitteiden ja asiayhteyksien heikko hallinta rajoittaa opiskelijan strategian valintaa ongelmanratkaisutilanteissa. [8]

1.2 Habits of mind

Cuoco ja muut [1] tutkivat artikkelissaan *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*, minkälaista matematiikan opetuksen tulisi olla, jotta opiskelijat pystyisivät hyödyntämään taitojaan myös tulevaisuuden alati muuttuvassa maailmassa ja rutiininomaisten koulutehtävien ulkopuolella.

Huolena on, että koulussa tapahtuva oppiminen on ja pysyy mekaanisena kaavojen ulkoa opettelemisena. Tulevaisuuden haasteita ei vielä tunneta ja näin ollen ei myöskään tarkalleen tiedetä, mitä opiskelijoille olisi tärkeintä opettaa, jotta he pärjäisivät esimerkiksi työelämässään mahdollisimman hyvin. Opetussuunnitelman muutos on perinteisesti tarkoittanut yhden opettavan aihealueen korvaamista toisella, ehkä modernimmalla, tähän hetkeen sopivalla aihealueella. Tarvitaan kuitenkin uusia ajattelutapoja. Opetussuunnitelman modernisoinnin ei tule olla uusimpien tieteen keksintöjen

esittelemistä, vaan opetusmenetelmien modernisointia. Oikeanlaisilla opetusmetodeilla opiskelijoista tulee uusiin tilanteisiin sopeutuvia. He pystyvät ratkomaan ongelmatilanteita luovasti, useita eri lähestymistapoja harkiten. Parhaimmassa tapauksessa he ovat oppineet ajattelemaan hieman kuten matemaatikot ja saaneet keinoja luoda uudenlaista matematiikkaa. [1]

Kirjoittajien pyrkimyksenä on, että lukiolaisten koko käsitys matematiikasta muuttuisi. He pyrkivät siihen, että opiskelijat ajattelisivat matematiikkaa erilaisina tapoina ratkaista ongelmia, eivätkä vain perinteisenä yhtälön ratkaisemisena ja prosenttilukujen pyörittelemisellä. Opiskelijoilla tulisi muodostua käsitys erilaisista ajatusmalleista ja ymmärrys siitä, milloin kutakin ajatusmallia on aika käyttää. Ajatusmallien oppiminen on mahdollista, jos opiskelija pääsee käyttämään halutunlaisia malleja uudestaan ja uudestaan. Opiskelijan olisi hyvä pystyä esittämään matemaattisia sovelluksia geometriaa apunaan käyttäen ja toisaalta hyödyntämään algebraa geometristen ongelmien parissa. Artikkelissa esitellään kahdeksan ajattelutapaa, jotka artikkelin kirjoittajien mukaan opiskelijoiden tulisi omaksua. [1]

1. Opiskelijoiden tulisi etsiä toistuvia kaavoja (*pattern sniffer*):

- Laskuista löytyvien toistuvien kaavojen löytäminen helpottaa laskemista ja mahdollistaa oikoreittien löytämistä.

2. Opiskelijoiden tulisi olla kokeilijoita (*experimenter*):

- Uuden ongelman kohdattuaan, opiskelijan tulisi oppia kokeilemaan jo aiemmin oppimiaan ratkaisumalleja.
- Heidän tulisi myös oppia testaamaan, miten yhtälön eri parametrien arvojen muuttaminen vaikuttaa tulokseen.
- Opiskelijoiden tulisi oppia muodostamaan jonkinlainen näkökulma laskuun tai ongelmaan ilman kynää ja paperia tapahtuvan päättelyn kautta.
- Opiskelijoiden tulisi oppia ymmärtämään, mitä rajoituksia kokeellisilla tuloksilla on, sekä oppia arvioimaan tulosten oikeellisuutta.

3. Opiskelijoiden tulisi olla kuvailijoita (*describer*):

- Kuvailu on tärkeä taito matematiikassa, joten opiskelijan tulisi oppia kertoamaan sanallisesti mistä ongelmassa on kyse ja mitä vaihe vaiheelta tulisi tehdä.
- Opiskelijoiden tulisi myös oppia kirjoittamaan muistiinpanoja, kommentoimaan ja vaihtamaan ajatuksia asiasta sekä tarvittaessa väittelemään, jolloin asiaan on mahdollista päästä sisään vielä syvemmälle tasolle.

4. Opiskelijoiden tulisi olla puuhailijoita (*tinkerer*):

- Kun opiskelija oppii hajottamaan idean, joka hänellä alunperin ongelmasta oli, osiin, hän pystyy rakentamaan idean uudelleen ja tutkimaan, miten kukin osa vaikuttaa kaavaan.

5. Opiskelijoiden tulisi olla keksijöitä (*inventor*):

- Opiskelijoiden tulisi oppia etsimään usein toistuvia rakenteita ja yhteneviä piirteitä.
 - Toistuvien rakenteiden löytäminen mahdollistaa loogisesti etenevän säännön muodostamisen jonkin tehtävän ratkaisulle.
 - Keksinnöt voivat olla sääntöjä peleihin, toimintoketjujen kuvailemista (esimerkiksi ohjelmoinnissa), selityksiä, miten asiat toimivat tai jopa matemaattisia peruslauseita.
 - Hyvä keksintö ei ole teennäinen, vaan keksinnön laatimista on ajanut eteenpäin käytännön tuoma tarpeellisuus.

6. Opiskelijoiden tulisi olla visualisoijia (*visualizer*):

- Ongelman tai prosessin visualisointi, joko piirtämällä paperille tai kuvittelemalla mielessä, voi auttaa konkreettisen tai abstraktin asian ymmärtämisessä, sekä laskentaprosessin seuraamisessa.

7. Opiskelijoiden tulisi olla otaksujia (*conjecturer*):

- Opiskelijoiden tulisi oppia olettamaan asioita, muttei pelkästään käytännön kokemusten kautta, vaan myös ennustamalla loogista tapahtumaketjua.
 - Kun opiskelija ymmärtää asiayhteyden ja logiikan, hänen on helpompi ymmärtää, mitä seuraavaksi voisi tapahtua.

8. Opiskelijoiden tulisi olla arvaajia (*guesser*):

- Kun opiskelija aloittaa otaksutusta ratkaisusta ja siirtyy ratkaisussa alkua kohti, hän tulee käyneeksi läpi tehtävää.
 - Opiskelijalla on mahdollisuus saada uusia ideoita ja oivalluksia tehtävän kulusta ja tehtävätyypistä. [1]

Oppikirjatyöryhmä valitsi *Habits of Mind* -artikkelista oppikirjan tavoitteiksi 2. kokeilemisen, 3. kuvailun, 6. visualisoinnin sekä 8. arvaamisen. Erilaisten arvojen kokeileminen yhtälöön onnistuu helposti tietokoneen avulla, arvojen vaihtamisen käydessä nopeasti ja tuloksen näkyessä ruudulla samassa hetkessä. Visualisoinnin harjoittelu onnistuu erinomaisesti tilavuukssovellusten ja pinta-alan laskemisen kohdalla GeoGebra-ohjelmiston avulla, mutta tietenkin myös käsin piirtämällä.

1.3 Tehtävätyypit: Collaborative Learning in Mathematics

Swan käy läpi *Learning in Mathematics* -artikkelissaan aktiivisempia ja yhteistyöhön perustuvia toimintatapoja oppia ja opettaa matematiikkaa. Artikkelin tavoitteena on opiskelijoiden oppimiskäytäntöjen kehittäminen keskustelelevampaan ja yhdessä työkentelyn suuntaan. Lisäksi artikkelissa tuodaan esille tavoite opettamisen kehittämistä tiedon siirrosta yhteisölliseen opettamiseen, jossa opettajan ja opiskelijoiden välille syntyy keskustelua ja sen myötä opettajalla on mahdollisuus saada selville yleisiä

väärinkäsityksiä, jotka pystyy keskustelun ansiosta oikomaan. Opetuksessa korostetaan, että opiskelijan annetaan ensin itse pohtia uutta ongelmaa sen sijaan, että hänelle annettaisiin heti tietty tapa ratkaista kyseinen ongelma. Opiskelijan oma pohdinta auttaa myöhemmin ei-rutiininomaisten ongelmien ratkaisussa. Opiskelijat joutuvat myös muistelemaan ja soveltamaan kaikkea aiemmin oppimaansa. Opettajan rooli on tämän jälkeen arvioida opiskelijan ennakkotieto. Tukeutuen opiskelijan aiemmin tuntemaan teoriaan opettaja voi rakentaa uutta tietoa sopivilla kysymysasetteluilla. [18]

Opiskelijoiden ei tule unohtaa aiemmin opittuja perusasioita. Tutkimuksen mukaan opetus on tehokkaampaa, kun tietoa rakennetaan jo olemassa olevan tiedon päälle formatiivisesti, oppimisen aikana arvioiden. Lisäksi uudet asiat tulisi, opettajan avustamana, linkittää ennalta opittuihin tuttuihin asioihin. [18] Peruskäsitteiden ymmärtäminen on oppimisen kannalta tärkeää, sillä kokonaisuuden ymmärtäminen pohjautuu niihin. [11] Saman asian opettaminen useammalla eri tavalla voi auttaa opiskelijoita ymmärtämään asian helpommin, kuin vain yhdellä tavalla esittämällä. [18] Esimerkiksi kyky esittää funktio eri muodoissa, kuten piirtämällä, mahdollistaa aiheen syvemmän ymmärtämisen. [11]

Oppiminen on tehokasta, kun opiskelijat pääsevät työskentelemään yhdessä, pienissä ryhmissä. Tällöin mahdollistuu opiskelijoiden välinen keskusteleminen, väittelemine ja toisten opettaminen. Ryhmässä työskentely mahdollistaa väittelyn, jolloin tarvitaan myös taitoa perustella omaa mielipidettään. Opiskelijat pystyvät todistamaan toisilleen, miksi toinen vaihtoehto on väärin ja toinen ei. [18]

Swanin artikkelissa [18] on eroteltu viisi erilaista opetustyyppiä opettajien avuksi.

1. Matemaattisten asioiden luokittelu:

- Opiskelijat laativat omia luokittelutapoja matemaattisille asioille, kuten muodoille tai yhtälöille.
- Oman luokittelusäännön lisäksi he voivat käyttää kaverin keksimää luokittelusääntöä.
- Opiskelijat oppivat näkemään eroja, huomaavat ominaisuuksia sekä oppivat matemaattisen kielen ja määritelmät.

2. Useiden esitystapojen tulkitseminen:

- Opiskelijat muodostavat mielessään uusia yhteyksiä opetettavasta aiheesta yhdistelemällä kortteja, joissa samoja asioita esitetään eri tavoin.
- Työskentely parin kanssa tai ryhmissä.

3. Matemaattisten väitteiden arviointi:

- Opiskelijat päättävät, onko annettu väite tosi aina, joskus tai ei koskaan.
- Opiskelijat pääsevät perustelemaan väitteitään sekä keksimään perusteluaan tukevia esimerkkejä.

4. Ongelmien keksiminen:

- Opiskelijat keksivät matemaattisia tehtäviä toisilleen.

- Ongelmatilanteissa tehtävän laatinut opiskelija ottaa roolin opettajana.

5. Päättelyn analysointi ja ratkaisu:

- Opiskelijat vertailevat saman tehtävän erilaisia ratkaisutapoja, järjestelevät ratkaisut ja/tai miettivät syitä virheiden syntymiseen.
- Opiskelijat huomaavat, että tehtävien ratkaisuun löydetään monia eri lähestymistapoja.
- Opiskelijat muodostavat omat päättelyketjut ongelmanratkaisuun.

Integraalilaskenta-kurssin avoimen oppikirjan työryhmä valitsi oppikirjan osien yhteiseksi tehtävätyypeiksi Swanin *Collaborative Learning in Mathematics* -artikkelin pohjalta tehtävätyypin kaksi *erilaisten esitystapojen yhdistäminen* sekä tehtävätyyppiin viisi kuuluvan *päättelyvirheiden korjauksen*.

Erilaisten esitystapojen yhdistäminen (*interpreting multiple representations*):

Matematiikassa asioita voidaan esittää sanallisesti, kuvien, symbolien, taulukoiden ja kaavioiden avulla tai algebrallisesti. Erilaisten esitystapojen tunnistaminen samasta asiasta auttaa ymmärtämään toisenlaisia ajattelutapoja päästä samaan lopputulokseen. Tunnetuin harjoitusmuoto on saman aiheen eri esitystapojen yhdistäminen esimerkiksi "korttipelinä". Opiskelijan tulee itse päätellä miksi ja millä tavoin korttien kuvat, kaavat tai teksti liittyvät toisiinsa. Swan huomauttaa, että opiskelijat aloittavat tällaiset tehtävät usein hätäillen, sen kummempia miettimättä. Opettajan tehtävä on varmistaa, etteivät opiskelijat hötkyile. Opiskelijoiden on myös annettava toisille aikaa miettiä, mikäli tehtävä suoritetaan ryhmässä. Kuten kaikissa ryhmätyöissä, myös tässä joku jää aina "seuraajan" rooliin toisten tehdessä työn. Opettajan tulee myös ohjata opiskelijoita kirjoittamaan perustelut ylös. Tapauksissa, joissa ryhmän jäsenet ovat erimieltä yhdistettävistä korteista, opettajan tulee ohjata opiskelijat perustelemaan omat valintansa. Vastaukset voi tarkistaa suullisesti, piirtämällä, laskemalla, tietokoneohjelmia käyttämällä. Mitä enemmän vaihtoehtoja käytetään, sitä syvempi ymmärrys opiskelijalle asiasta muodostuu ja hän pystyy linkittämään asiayhteyksiä toisiinsa. Ymmärrystä voi osoittaa myös tekemällä lisää kortteja samoihin asiakokonaisuuksiin. [18]

Erilaisten esitystapojen yhdistämistä harjoitellaan pohdintatehtävissä A.6, B.4, sekä pohdintatehtävässä B.7.

Päättelyvirheiden korjaus (*correcting mistakes in reasoning*):

Tehtävät pyritään suunnittelemaan niin, että opiskelijat eivät keskittyisi ratkaisuihin, vaan keskustelisivat ja arvioisivat tapoja, joilla ratkaisuun päästään. Opiskelija asetetaan nyt neuvonantajan rooliin, jolloin hänen tulee tuntea ratkaisu ja pystyä perustelemaan eri lähestymistavat, miksi toinen tapa ratkaista on mahdollinen ja toinen ei. Opiskelijat tarkastavat toistensa ratkaisuja ja heidän tulee tunnistaa sieltä tehdyt virheet sekä korjata ne. Opiskelija voi myös antaa kirjallista palautetta ja ohjeita tehtävän suorittaneelle kaverilleen, jolloin opiskelija asetetaan neuvonantajan rooliin. Usein tehdyt virheet ovat yleisiä väärinkäsityksiä, jotka korjatakseen oppilaan tulee kohdata ja kommentoida erilaisia ajattelutapoja. Tehtävätyyppinä voi olla myös kaverusten välinen väittely. Toinen kaveruksista perustelee asiaa toisesta näkökulmasta ja toinen toisesta. Opiskelijan on pääteltävä ovatko molemmat oikeassa, väärässä tai vain toinen. [18]

Pohdintatehtävässä [A.4](#) sekä harjoitustehtävissä [3](#) ja [9](#) opiskelijat pääsevät etsimään virheet valmiista ratkaisuista.

2 Perusteluosa

Differentiaali- ja integraalilaskenta on tärkeä osa-alue matematiikassa. [14] Integraalilaskennassa saadaan laskettua halutun muotoisten alueiden ja kappaleiden pinta-aloja ja tilavuuksia suuri määrä hyvin pieniä kappaleita yhdistelemällä. [20] Useimmat ongelmat, joita opiskelijoilla on derivoinnin ja integroinnin oppimisessa, kumpuavat ongelmanratkaisutaitojen heikkoudesta. [5] Konkretian puuttuminen aiheuttaa opiskelijoille hankaluuksia ymmärtää integraali summaamisen periaatteena. [21]

Opiskelijoiden asenteet matematiikkaa kohtaan ovat usein negatiivisia. Negatiiviset asenteet voivat olla peruja jo peruskoulun alaluokilta. Negatiiviset asenteet saattavat rajoittaa ja jopa estää opiskelijoiden jatko-opintojen valintaa ja sitä kautta työllistymistä STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) -aloille. Tutkimukset ovat osoittaneet, että opiskelijat suoriutuvat paremmin, kun he ovat aidosti motivoituneita. Opiskelijat eivät välttämättä ole motivoituneita tekemään kotitehtäviä ajatuksen kanssa, jolloin opetetun asian ymmärtäminen syvemmällä tasolla voi jäädä tapahtumatta. Opiskelijoilla ei välttämättä löydy tavoitteellisuutta kurssien suhteen, eivätkä he usko tarvitsevansa opetettavaa asiaa mihinkään. [15]

Isaac Newtonin ja Gottfried Leibnizin 1600-luvulla kehittämässä differentiaali- ja integraalilaskennassa tutkitaan funktion pienen pieniä muutoksia, kuten pinta-aloja, tilavuuksia, gradientteja ja muutosnopeuksia. Differentiaali- ja integraalilaskennan ymmärryksestä on hyötyä matematiikan ja muiden tieteiden omaksumisessa ja sitä käytetäänkin hyväksi mm. todennäköisyysteoriassa, optimoinnissa, analyysissä ja matemaattisessa mallinnuksessa. [11] Differentiaali- ja integraalilaskentaa sovelletaan laajasti myös liiketalouden ja tekniikan aloilla. [5]

Useissa tämän oppikirjan pohdinta- ja harjoitustehtävissä kannustetaan tutkimaan laskua GeoGebra-ohjelmiston avulla. Kuten artikkelissa *Technology and Calculus* [19] todetaan, tietokoneet ja muut apuvälineet eivät automaattisesti, ilman tarkoituksenmukaista harjoitusta, tee kenestäkään parempaa matemaatikkoa. Orton [14] kuitenkin muistuttaa, että niiden myötä integrointia on mahdollista ymmärtää hieman syvemmin. Nykyään apuna on graafisia ja dynaamisia sovelluksia, joissa käyttäjän ei tarvitse käyttää aikaa ohjelmointiin tai symbolien työstämiseen. Laskeminen ja piirtäminen hoituvat kirjaimellisesti hiiren klikkauksella. Käyttäjän tulee vain tietää mitä on tekemässä. Ongelmaksi ohjelmistojen käytöstä voi muodostua se, että opiskelijat oppivat rutiininomaisesti painelemaan oikeista napeista, jolloin saadaan oikeita tuloksia tietämättä mitä ollaan tekemässä. Ohjelmistot tuovat lisähyötyä oppimiseen vain, kun niitä käytetään oikein. Erityisesti ohjelmista on hyötyä visuaalisessa mielessä, jolloin opiskelija näkee käyrän tai pinnan muodon ja pystyy havainnoimaan ja tutkimaan laskettavaa aluetta tarkasti. [19]

Artikkelissa *Technology and Calculus* Tall ja muut muistuttavat, että matematiikan syvällisempi oppiminen on mahdollista, kun opiskelijat pääsevät työskentelemään ryhmissä vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Tiedon tulee olla hyvin rakennettua, eli uusi asia tulee sitoa aina aiemmin opitun tai koetun asian kanssa, jolloin opiskelija huomaa yhteyden asioiden välillä. Opiskelijoita pitää pystyä motivoimaan niin, että he ryhtyvät itsenäiseen työskentelyyn. Oman toiminnan myötä myös abstraktimpien asioiden oppiminen helpottuu. [19]

Revinan ja muiden vuonna 2011 julkaistun tutkimuksen [16] mukaan opiskelijat onnistuivat laskemaan hyvin konkreettisten, tuttujen muotojen lukumäärän kuvasta. Esimerkiksi saippuapalojen muodostaman kasan piirroksesta opiskelijoiden oli helpompi hahmottaa palojen lukumäärä kuin piirroksesta, jossa kasan muodostivat abstraktimman muotoiset palaset. Opiskelijat eivät enää laskeneet kolmiulotteisten kappaleiden määrää, vaan keskittyivät neliöihin, jotka olivat selvästi näkyvillä piirroksessa. Opiskelijat pystyvät kuvittelemaan tilanteen päässään, kun tehtävän kuva koostuu jostakin heille tutuista asioista tai muodoista.

Dorko ja Speer (2013) tutkivat samaa hahmottamisongelmaa peruskoulun oppilailla. Peruskoulun kolmannen luokan oppilaista vain 23% ja viidennen luokan oppilaista 63% osasi laskea kuutioiden määrän $3 \times 4 \times 5$ -kokoisessa kuutioista muodostetussa kolmiulotteisessa suorakulmaisessa särmiössä. Ongelmana oli, etteivät kaikki oppilaat ymmärtäneet pinta-alan ja tilavuuden käsitteitä. [2]

Ohion osavaltion yliopistossa kokeiltiin muuttaa differentiaali- ja integraalilaskennan kurssi perinteisestä luennoimalla pidetystä kurssista tietokoneohjelma Mathematicaa hyödyntäväksi kurssiksi. Kurssi painotti tietokoneella tapahtuvaa ongelmanratkaisua arkipäiväisissä sanallisissa ongelmissa, luentojen jäädessä vähemmälle huomiolle. Koska luentojen painotus jäi kurssilla pieneksi, opiskelijoiden tuli itse huolehtia oppimisestaan osallistumalla keskusteluun ja olemalla aktiivinen. Opiskelijat joutuivat itse muodostamaan käsityksensä ja ajatusmallinsa opetettavasta aiheesta. [17]

Kurssin ajatuksena oli opiskelijoiden ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen tietokoneohjelmistoa apuna käyttäen. Opiskelijoilla oli mahdollisuus vapaaseen työskentelyyn muiden opiskelijoiden kanssa, jolloin he pystyivät vaihtamaan vapaasti ajatuksiinsa ja opettamaan muita. Opiskelijoiden tuli selittää sanallisesti kotitehtäviensä ratkaisut, jolloin he joutuivat selvittämään itselleen, mitä laskussa oikeastaan tehtiin. Tutkimuksessa havaittiin, että opiskelijat ymmärsivät kurssin asiat paremmin, kun kurssilla painotettiin aiheen ymmärtämistä enemmän kuin laskentaprosessin osaamista. [17]

Haripersadin (2011) mukaan opiskelijan syvää oppimista edistävät:

- Oppilaan ja opettajan välinen keskustelu.
- Oppilaiden välinen keskustelu.
- Aktiivinen ja interaktiivinen opetustapa.
- Asioiden linkittäminen oppilaiden aiemmin oppimaan tietoon.
- Oppimistavoista opettaminen/keskustelu.
- Aiheiden linkittäminen oppilaiden elämään tai tulevaisuuden ammattihaaveisiin.
- Rohkaisu yhteistyöhön. [4]

Tässä kirjassa pohdintatehtävässä A.3, sekä tehtävässä 3 ja 9 opiskelijat joutuvat etsimään valmiista ratkaisuista virheet ja korjaamaan ne. Laskuteknisesti laskut saattavat olla laskettu oikein, mutta opiskelijan tulee ymmärtää, mitä laskussa halutaan saada selville ja sen myötä huomaamaan, mikä ratkaisussa on mennyt pieleen.

2.1 Pinta-ala y -akselin suhteen

Tässä kirjassa pyritään antamaan opiskelijalle mahdollisuus harjoitella ja hyödyntää GeoGebra-ohjelmistoa tehtävien teon yhteydessä, sillä ohjelmisto on käytössä myös ylioppilaskirjoituksissa. Kun opiskelijalla on vahva osaaminen käytettävissä oleviin työkaluihin, hän voi keskittyä tehtävien ratkaisuun. GeoGebran käyttö tulisi aloittaa mahdollisimman ajoissa, jotta ohjelmiston käytöstä olisi hyötyä, ei vain tehtävien ratkaisua hidastava tekijä. Pinta-alan määrittämisessä y -akselin suhteen GeoGebra ei kuitenkaan ole paras apu, sillä se ei salli integrointia y :n suhteen. Aluetta voi tarkastella, mutta suora numeerista vastausta integraalille y -akselin suhteen ohjelmiston avulla ei saada. Oman laskunsa voi kuitenkin tarkastaa ainakin silmämääräisesti määrittämällä halutulle alueelle monikulmion, jonka pinta-alan GeoGebra osaa määrittää.

Machromah ja muut (2019) tutkivat integraalikirssin opiskelijoiden edistymistä collegessa, kun opiskelijoiden käytössä oli GeoGebra-sovellus. Tulokset olivat oppimisen kannalta rohkaisevia. Yli 50% tarkastellun ryhmän opiskelijoista tunsivat hyötynsä ohjelmiston käytöstä. Lisäksi integraalikirssin asioiden, kuten pinta-alojen ja tilavuuksien määrittäminen, koettiin mukavaksi ja motivoivaksi ohjelman avulla. GeoGebran avulla kuvaajien piirtäminen oli opiskelijoille myös helpompaa, kuin perinteisesti kuvaajien määrittäminen kynän ja paperin kanssa. Ennen GeoGebran käyttöönottoa opiskelijat kokivat hankaluuksia eritoten käyrien rajaaman alueen määrittämisessä ja pyörähdyskappaleen piirtämisessä. Tietokoneavusteisesti integraalilaskennan abstrakteja aiheita pystyttiin tuomaan opiskelijoille edes hieman ymmärrettävämpään muotoon. Huonoina puolina opiskelijat mainitsivat eri välivaiheiden määrän ennen tutkittavan asian laskemista. [9]

Nimensä mukaisesti *Pinta-ala y -akselin suhteen* -kappaleessa opiskelijan on tarkoitus oppia laskemaan alueen pinta-ala käyrän ja y -akselin välillä käyttäen integrointia. Kiatin tutkimuksen [7] mukaan lukio-opiskelijat selviytyvät hyvin määrätyn integraalin tehtävistä, mutta heillä on alueen pinta-alaa määrittäessään ongelmia löytää oikeat integroimisrajat. Ongelmia ilmeni siitä huolimatta, että heillä oli kuva tilanteesta tai he olivat itse osanneet piirtää kuvaajat. Integraalikirssillä (MAA7) on tässä vaiheessa jo opittu määrittelemään pinta-ala x -akselin suhteen. Pohdintatehtävässä A.1 pyritään johdattamaan uuteen asiaan pienin askelin mm. integrointirajoja kysymällä. Rajojen löytyminen on olennaista laskun kannalta. Kiatin tutkimuksessa ilmeni, että rajojen löytyminen oli hankalaa eritoten tilanteissa, joissa tutkittavaa aluetta löytyi niin x -akselin ylä- kuin alapuoleltakin. Pohdintatehtävässä A.2, sekä tehtävässä 1 selvitetään pinta-aloja, jotka levittäytyvät y -akselin molemmille puolille.

Integraalikirssi tulisi aloittaa aiheen tutustuttamisella opiskelijoille. Kun käsitteet ja ajatukset ovat tuttuja, voidaan siirtyä laskuteknisiin asioihin. Määrätyn integraalin ja pinta-alan laskemisen välinen yhteys tulisi luoda kuvaajien avulla aina kun se on mahdollista, jolloin opiskelijat voivat itse nähdä, mitä laskulla tarkoitetaan. [7] Tähän sopii mainiosti GeoGebra. Pohdintatehtävässä A.2 pyritään luomaan yhteys pinta-alan ja määrätyn integraalin välille. Tehtävässä A.6 opiskelijan tulee löytää yhteys kuvaajan sekä laskun välillä.

Matematiikka eksaktina tieteenä vaatii tarkkoja ilmauksia. Matematiikassa kommunikointitaidot koostuvat lukemisesta, kirjoittamisesta, puhumisesta sekä esimerkiksi

mallintamisesta. Kun opiskelija osaa ilmaista ajatuksensa, hänen on helpompi jäsenellä ongelmat tarkemmin myös itselleen. Tässä kirjassa useimmat tehtävänannot ovat sanallisia, jolloin opiskelijat oppivat hakemaan oleellisen tiedon muun tiedon seasta. Opiskelijoita myös kehoitetaan parityöhön, jolloin he pääsevät vaihtamaan ajatuksiaan ongelmista. Pohdintatehtävässä A.4 opiskelijat pääsevät harjoittelemaan niin sanallisia, kuin puhumisen taitojaan. Tehtävässä 4 sekä seuraavan kappaleen tehtävässä 8 opiskelijat pääsevät olemaan opettajan roolissa selittämällä parilleen tehtävän ratkaisuisia ilmenneitä ongelmakohtia.

2.2 Tilavuuksiovellukset

Kirjan toisessa ja kolmannessa kappaleessa opiskelijoiden on tarkoitus oppia hahmotamaan ja piirtämään pyörähdyskappaleita, sekä määrittämään muodostetun pyörähdyskappaleen ja muiden avaruuskappaleiden tilavuudet integroimalla.

Mofolo-Mbokane [10] tutki tohtorinväitöskirjassaan syitä insinööriopiskelijoiden kokeille hankaluuksille opiskeltaessa pyörähdyskappaleiden tilavuuksia. Tutkimus suoritettiin Etelä-Afrikassa. Mofolo-Mbokane jakoi tekijät viiteen pääkohtaan:

- Visuaaliset taidot.
 - Kyky ilmaista ja tulkita algebrallisia yhtälöitä/ilmaisuja visuaalisina kuvajina.
 - Tärkeä taito niin insinööreille kuin kaikille, jotka tarvitsevat työssään kolmiulotteista hahmotusta.
- Kolmiulotteinen ajattelu.
- Diskreetin ja jatkuvan esityksen välillä liikkuminen.
- Yleiset manipulointitaidot.
- Kognitiivinen kehittyminen yleisellä tasolla.

Luokkahuonetarkastelun perusteella ilmeni, että pyörähdyskappaleiden tilavuus on aiheena vaikea sekä opettaa, että oppia. Mofolo-Mbokane tutki väitöskirjassaan kuinka opiskelijat osasivat piirtää kuvaajia, miten he käyttivät Riemann-summaa kuvaajaansa, miten opiskelijat tulkitsivat kuvaajia ja kuinka he käsittelivät annettua ongelmaa, joka vaatii opiskelijalta niin prosessoimiskykyä kuin käsitteellistä ymmärrystä, sekä miten he selviytyivät laskusuudesta pinta-alaa tai tilavuutta arvioitaessa. Lisäksi opiskelijoiden tulee osata ajatella niin kaksi- kuin kolmiulotteisesti. Toinen asian oppimista hankaloittava tekijä oli kieli. Etelä-Afrikassa opetuskielenä on englanti, mikä ei kuitenkaan ole kaikkien opiskelijoiden äidinkieli. Tämä aiheuttaa vaikeuksia sanallisten tehtävien ymmärtämisessä. [10]

Suomessa lukutaito on maailman huippua, mutta myös täällä huoli opiskelijoiden lukutaidosta on noussut 2000-luvulla. Kolmen vuoden välein OECD-maissa (Taloudellisen yhteistyön ja kehityksen järjestö) 15-vuotiaille järjestettävien PISA-tutkimusten

mukaan suomalaisoppilaiden lukutaito on laskenut niin tytöillä kuin pojilla, poikien lukutaidon ollessa tyttöjä selvästi heikompaa. Erinomaisen lukutaidon omaavien osuus on 2000-luvulla pysynyt samana, mutta heikkojen lukijoiden osuus on kasvanut. Heikentyneen lukutaidon tärkeimpänä syynä on lukemisen väheneminen. Heikko lukutaito ei välttämättä riitä opiskelemiseen. [13]

Lähes kaikki tämän kirjan tehtävät ovat sanallisia tehtäviä, jolloin opiskelijan tulee löytää ongelma ja tehtävän kannalta oleellinen tieto tekstin seasta. Tavoitteena on myös, että opiskelijoiden matemaattinen sanoittaminen kehittyisi, jolloin he pystyisivät sanallisesti kertomaan, mitä ovat laskemassa ja millä tavalla lähtevät ongelmaa purkamaan.

Mofolo-Mbokanen tutkimuksessa saatiin selville, että opiskelijoiden graafisten taitojen puute esti pyörähdyskappaleiden tilavuuden ymmärtämisen ja oppimisen. Ongelmat havainnoida kolmiulotteisesti, aiheuttavat opiskelijoille ongelmia hahmotella pyörähdyskappaleen kuvaaja. [10] Kirjassa aiheeseen tutustutaan opettelemalla piirtämään pyörähdyskappale käsin (pohdintatehtävä B.3). Pohdintatehtävässä B.4 opetellaan tunnistamaan muodostuva pyörähdyskappale funktion kuvaajan perusteella.

Tavoitteena on, että opiskelijat sisäistäisivät asian, eivät vain oppisi laskemaan rutiininomaisesti pyörähdyskappaleiden tilavuuksia. Sisäistettyään opetetun asian opiskelijat kykenevät soveltamaan taitojaan monimutkaisempiin ongelmiin. Mofolo-Mbokane ehdottaa, että opettajat ottavat pyörähdyskappaleita opettaessaan käsitteet vahvemmin mukaan niin opetukseen kuin tehtävien suorittamiseen. Opiskelijoiden graafisia taitoja tulisi vahvistaa antamalla heille tehtäväksi piirtää kuvaaja tai diagrammi annetun yhtälön tai lausekkeen perusteella. Näin opiskelijat suorittaisivat tehtävää päinvastaisessa järjestyksessä perinteiseen verrattuna. Kuvaajassa tummennetun alueen pinta-alan tai tilavuuden laskemisen sijaan opiskelijoiden tulisi esittää, mitä tehtävässä halutaan laskea. Tehtävien avulla opiskelijoiden olisi mahdollista huomata, miten kaavat saadaan johdettua kuvaajista. Tietokoneohjelmistojen käyttö opetuksen apuna mahdollistaa pyörähdyskappaleiden tarkastelun ja pyörittämisen vapaasti. [10]

Mofolo-Mbokane pitää tärkeänä myös opettajien roolia pyörähdyskappale-aiheen opetuksessa ja oppimisen arvioinnissa. [10] Motivointi aiheeseen on tärkeää. Eräs motivoiva esimerkki löytyy Farnellin & Snipesin artikkelista *Using the Pottery Wheel to Explore Topics in Calculus*. Artikkelissa esitellään projektia, jossa pyörähdyskappaleen tilavuuden opettamiseen käytettiin apuna savenvalantaa. Jokaiselle opiskelijalle annettiin pala savea, jota he pääsivät muotoilemaan. Valmiit savityöt halkaistiin tarkasti keskeltä kah-tia. Leikkauspintaa maalattiin, jotta leikkauspinnasta saatiin painettua kuva paperille. Kuvasta opiskelijat opettelivat määrittämään muotoilemansa savityön tilavuuden Riemannin summien avulla. Tutkijoiden mukaan parityö edisti ryhmätyötaitojen lisäksi opiskelijoiden matematiikan termistön käyttöä. Projektin aikana opiskelijat pääsivät tekemään käsillään, mikä auttoi joitakin opiskelijoita hahmottamaan pyörähdyskappaleen muodostumisen. Vaihtoehtona savenvalannalle mainittiin muun muassa symmetristen hedelmien tilavuuden tarkastelu. [3]

Oppikirjan tehtävässä 11 opiskelijat pääsevät määrittelemään kappaleen ääriiviivaa johdattelun funktion itse GeoGebran avulla. Tehtävän on tarkoitus motivoida laskemiseen eri tavoin, kuin perinteisesti on totuttu.

Pohdintatehtävässä B.1 geometriaa on koitettu yksinkertaistaa arkipäiväiseen asiaan,

rahaan. Opiskelijoiden on helppo ymmärtää kolikot, joilla on tietty paksuus ja leveys, sekä tilavuus. Vaikkei opiskelijalle tässä vaiheessa vielä kerrota Cavalierin periaatteesta, hän tulee pohtineeksi asiaa kolikoiden avulla.

3 Lähdeluettelo

- [1] Cuoco, A., Coldenberg, E.P. & Mark, J. (1996) Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 4, 375-402.
- [2] Dorko, A. Speer, N.M. (2013) Calculus Students' Understanding of Volume. *Investigations in Mathematics Learning*, The Research Council on Mathematics Learning Winter Edition 2013, 6, 2.
- [3] Farnell, E. & Snipes, M.A. (2015) Using Pottery Wheel to Explore Topics in Calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 25, 2, 170-180.
- [4] Haripersad, R. (2011) Deep and Surface Learning of Elementary Calculus Concepts in a Blended Learning Environment. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, 5, 4.
- [5] Hashemi, N., Abu, M.S., Kashefi, H., Mokhtar, M. & Rahimi, K. (2015) Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework. *Eurasia Journal of Mathematics, Science Technology Education*, 11, 2, 227-238.
- [6] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. & Lavicza, Z. (2008) Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus. ICME 11, Monterrey, Mexico 2008.
- [7] Kiat, S.E. (2005) Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems. *The Mathematics Educator*, 9, 1, 39-59.
- [8] Li V.L., Julaihi N.H. & Eng T.H. (2017) Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus. *Asian Journal of University Education*, 13, 2, 17-39.
- [9] Machromah, I.U., Purnomo, M.E.R. & Sari, C.K. (2019) Learning Calculus with Geogebra at College. *Journal of Physics: Conference Series* 1180 012008.
- [10] Mofolo-Mbokane, B.L.K. (2011) Learning Difficulties Involving Volumes of Solids of Revolution: A Comparative Study of Engineering Students at Two Colleges of Further Education and Training in South Africa. *Tohtorinväitöskirja*, University of Pretoria.
- [11] Muzangwa, J. & Chifamba, P. (2012) Analysis of Errors and Misconceptions in the Learning of Calculus by Undergraduate Students. *Acta Didactica Napocensia*, 5, 2.
- [12] Opetushallitus. (2019) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Helsinki: Opetushallitus. Määräykset ja ohjeet 2019:2a.
- [13] Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2019) PISA 2018: Suomi lukutaidossa parhaiden joukossa. Tiedote, julkaistu 3.12.2019. Luettu 2.2.2021. [<https://minedu.fi/-/pisa-2018-suomi-lukutaidossa-parhaiden-joukossa>].
- [14] Orton, A. (1983) Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.
- [15] Pyzdrowski, L.J., Sun, Y., Curtis, R., Miller, D., Winn, G. & Hensel R.A.M. (2013) Readiness And Attitudes As Indicators For Success In College Calculus. *International*

Journal of Science and Mathematics Education, 11, 529-554.

[16] Revina, S., Zulkardi, Darmawijoyo & van Galen, F. (2011) Spatial Visualization Tasks To Support Students' Spatial Structuring In Learning Volume Measurement. *IndoMS. J.M.E*, 2, 2, 135.

[17] Roddick, C.D. (2001) Differences in Learning Outcomes: Calculus Mathematica vs. Traditional Calculus. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. Jun 2001, 11, Vol. 2. ERIC.

[18] Swan, M. (2006) Collaborative Learning in Mathematics. Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham, England.

[19] Tall, D., Smith, D. & Piez, C. (2008) Technology and Calculus. In M. Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume 1: Research Syntheses*, 207-258.

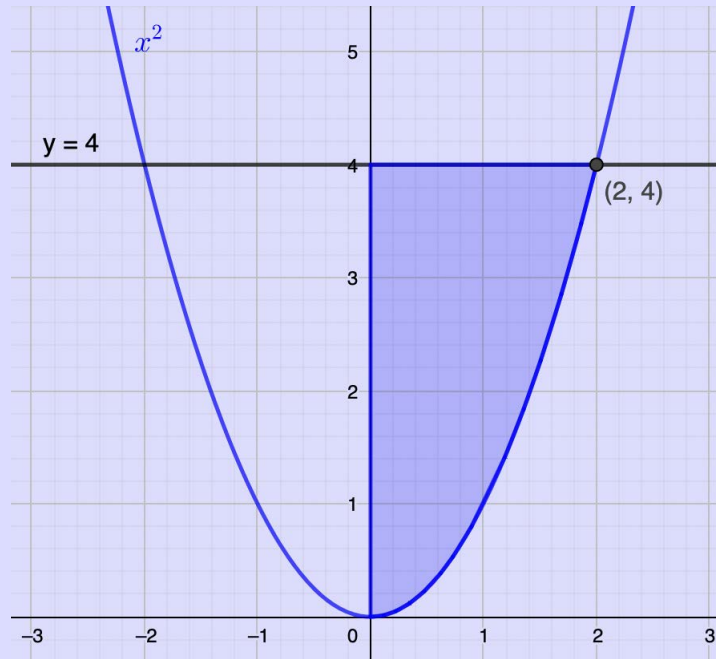
[20] Tall, D.O. (2009) Dynamic Mathematics and the Blending of Knowledge Structures in the Calculus. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41, 4, 481-492.

[21] Thompson, P.W. & Silverman, J. (2008) The Concept of Accumulation in Calculus, In M.P. Carlson Rasmussen (Eds.). Washington, DC: Mathematical Association of America. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics*, 43-52.

A Pinta-ala y -akselin suhteen

Pohdinta A.1

- a) Laske käyrän $y = x^2$, suoran $y = 4$ ja y -akselin väliin jäävän tummennetun alueen pinta-ala jo oppimiasi integrointitapoja hyödyntäen.



- b) Kun haluamme laskea käyrän ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-alan integraalin avulla, tarvitsemme käyrästä muodon, jossa y on ilmaistu x :n funktiona ($y = f(x)$). Pohdi, missä muodossa käyrän yhtälö on esitettävä, jotta voimme laskea käyrän ja y -akselin välissä olevan alueen pinta-alan?
- c) Esitä x y :n muuttujana, $x = g(y)$.
- d) Mitkä ovat tummennetun alueen ala- ja yläraja y -akselilla?
- e) Vertaa kohdissa b)-d) löytämiäsi vastauksia aiemmin oppimaasi tapaan laskea käyrän alapuolinen pinta-ala x -akselin suhteen. Saatko integroimalla y -akselin suhteen kuvan tummennetulle alueelle saman pinta-alan, kuin a)-kohdassa?

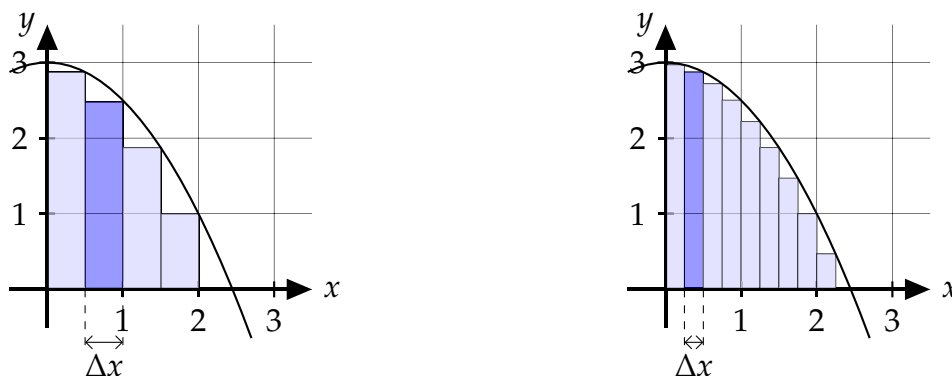
Aiemmissa kirjan osissa on jo opittu määräämään käyrän ja x -akselin välisen pinta-alan. Tässä osassa kirjaa opetellaan integroimaan y -akselin suhteen.

Käyrän ja akselin välinen pinta-ala tietyllä välillä (esim. välillä $y = 0$ ja $y = 2$) voidaan estimoida laskemalla annettujen rajojen väliin jäävien ruutujen määrä, summaamalla palkkien pinta-aloja tai määrittämällä pinta-ala tarkasti integroimalla. Integrointi itseasiassa tarkoittaa toisissaan kiinni olevien hyvin kapeiden palkkien pinta-alojen

summaamista.

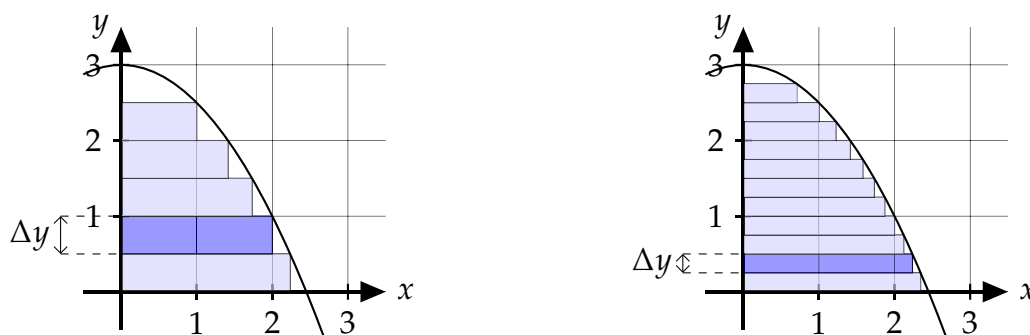
Tarkasteltava alue on jaettu suureen määrään (määrä lähestyy ääretöntä) äärettömän kapeita (leveys lähestyy nollaa) suorakulmioita. Kun aluetta tarkastellaan x -akselin suhteen (Kuva 1), palkin korkeus kohdassa x on funktion kuvaajan mukaan $f(x)$, kannan leveyden ollessa Δx .

Suorakulmaisen palkin pinta-ala on kannan leveys kerrottuna korkeudella, jolloin koko alueen pinta-ala on jokaisen palkin pinta-ala yhteen laskettuna. Pinta-alan arviosta saadaan tarkempi palkkien leveyttä pienentämällä, jolloin palkkien määrä alueen sisällä kasvaa.



Kuva 1: Alueen tarkastelu x -akselin suhteen.

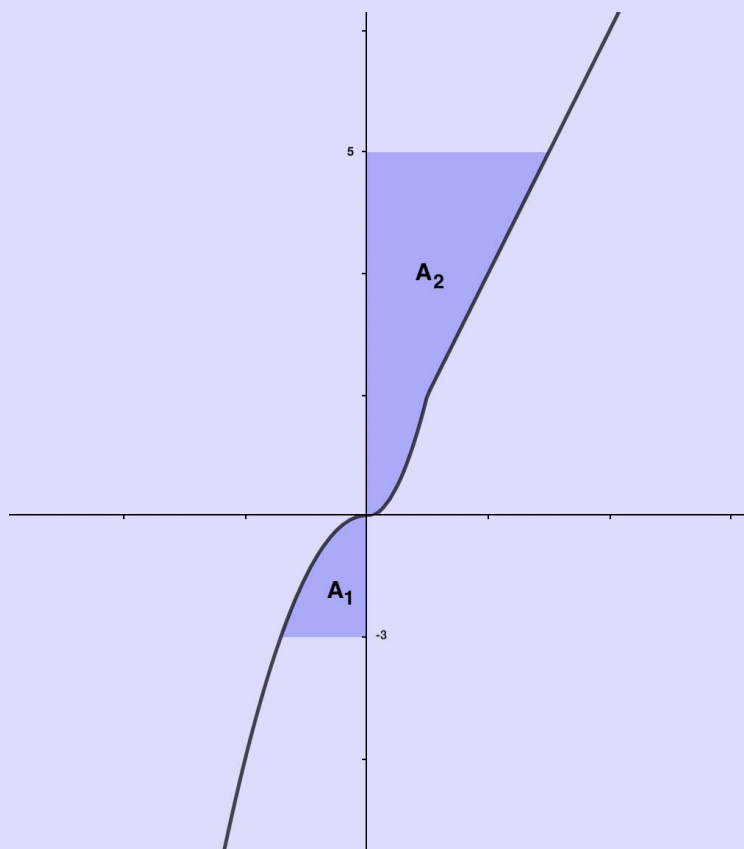
Tarkasteltaessa aluetta y -akselin suhteen (Kuva 2), vaakasuorien palkkien pituus kohdassa y on $f(y)$. Palkin kanta on Δy .



Kuva 2: Alueen tarkastelu y -akselin suhteen.

Jotta integrointi voidaan suorittaa y -akselin suhteen, joudutaan annettu yhtälö ratkaisemaan y :n suhteen.

Pohdinta A.2 Kuvassa on esitetty funktion $f(y)$ kuvaaja. Laske alueen A_2 pinta-ala, kun tiedetään, että $\int_{-3}^5 f(y) dy = 11$ ja $A_1 = 3$?

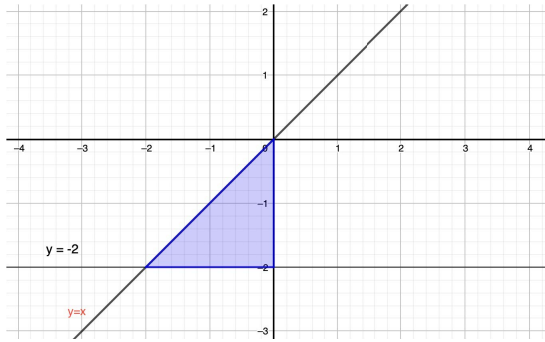


- a) 14
- b) 8
- c) jotain ihan muuta.

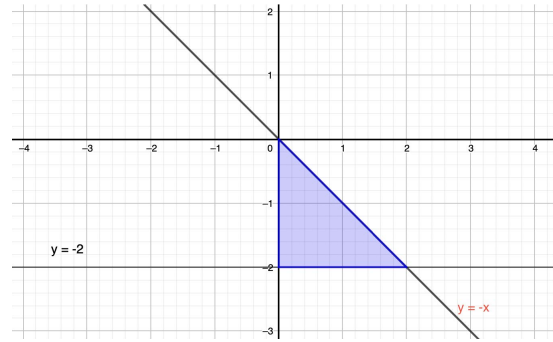
Määrätty integraali $\int_a^b f(y) dy$ voi saada positiivisia tai negatiivisia arvoja. Alueen pinta-ala on aina ≥ 0 .

Kun tarkasteltava alue on y -akselin negatiivisella puolella ($f(y) \leq 0$ tarkasteltavalla välillä $[a, b]$), alueen pinta-ala on $A = -\int_a^b f(y) dy$.

Kuvassa 3. on suoran $y = x$ ja kuvassa 4. suoran $y = -x$ kuvaaja. Kuvaajat rajaavat alueet y -akselin ja suoran $y = -2$ kanssa, kuitenkin eri puolilla y -akselia. Molempien alueiden pinta-ala $A = 2$.



Kuva 3: $A = -\int_{-2}^0 y \, dy = 2$.



Kuva 4: $A = \int_{-2}^0 (-y) \, dy = 2$.

Pohdinta A.3 Selmi ja Tuisku pähkäilevät kotitehtäviensä parissa. Selvitä, mikä laskussa on mennyt pieleen ja piirrä kuvaaja. Korjaa lasku oikeaan muotoon.

Tehtävä:

Laske suoran $y = 4x + 1$ ja y -akselin, sekä suorien $y = 0$ ja $y = 6$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

Ratkaisu:

$$y = 4x + 1$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 (4x + 1) \, dx = \int_0^6 \left(\frac{2}{1} \left(\frac{1}{2} \right) x^2 + x \right) = \int_0^6 (2x^2 + x) \\ &= (2 \cdot 6^2 + 6) - (2 \cdot 0^2 + 0) = (2 \cdot 36 + 6) - 0 \\ &= 72 + 6 = 78 \end{aligned}$$

Vastaus:

$$A = 78$$

Pohdinta A.4 Kaino kuvailee luokkakaverilleen matematiikan tunnilla läpikäytyä asiaa integraalilaskennasta. Asia on vielä Kainollekin uutta, joten muutamat sanat ovat unohtuneet. Täydennä lauseet.

Integroiminen y -akselin suhteen:

Alueen pinta-ala voidaan approksimoida piirtämällä alueen sisään _____ muotoisia palkkeja, joiden _____ pystytään laskemaan. Palkkien pinta-ala on _____ kertaa _____. Summaamalla jokaisen palkin pinta-ala yhteen, saadaan lopulta halutun alueen pinta-alan approksimaatio.

Approksimaatiota voidaan _____, eli virhettä pienentää, _____ suorakulmioiden leveyttä, jolloin palkkeja mahtuu alueelle lukumääräisesti _____.

Integraalimerkin alapuolelle merkitään tarkasteltavan muuttujan _____raja ja yläpuolelle muuttujan _____.

Kun halutaan laskea integroimalla käyrän ja y -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala, tulee käyrän yhtälö ratkaista _____:n funktiona. Muuttujana on siis _____. Perään merkitään vielä _____, mikä tarkoittaa palkin infinitesimaalisen pientä leveyttä.

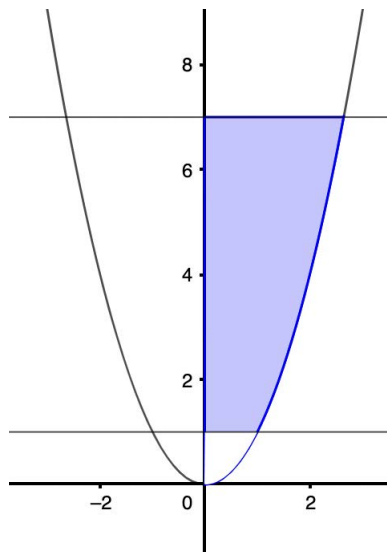
Integraalissa palkin korkeutta kerrotaan siis kannan hyvin pienellä leveydellä, jolloin saadaan suorakaiteen pinta-ala.

Mallitehtävä A.5 Laske käyrän $y = x^2$ ja y -akselin rajoittaman alueen pinta-ala koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä, kun aluetta rajoittaa alhaalta suora $y = 1$ ja ylhäältä suora $y = 7$.

Ratkaisu: Tarkasteltavan käyrän yhtälö on $y = x^2$, joka on esitetty x :n suhteen. Muuttujan y -suhteen yhtälö on seuraava: $x = \pm\sqrt{y}$. Käytetään laskussa muotoa $x = \sqrt{y}$, sillä haluttu pinta-ala on koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä, jolloin $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_1^7 \sqrt{y} \, dy &= \int_1^7 y^{\frac{1}{2}} \, dy = \int_1^7 \left(\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) = \int_1^7 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \int_1^7 \left(\frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \int_1^7 y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (7^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{343} - 1) = \frac{2\sqrt{343} - 2}{3} \approx 11,68 \end{aligned}$$

Yhtälön $y = x^2$, y -akselin, sekä suorien $y = 1$ ja $y = 7$ väliin jäävän alueen pinta-ala koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä on noin 11,68.



Pohdinta A.6 Yhdistä oikea lasku (1-3) ja kuva (a tai b). Piirrä jäljelle jääneelle laskulle kuva itse. Selitä parillesi, miksi kyseiset laskut ja kuvaajat liittyvät toisiinsa.

1.

$$A = \int_0^1 (2 - x^2) dx$$

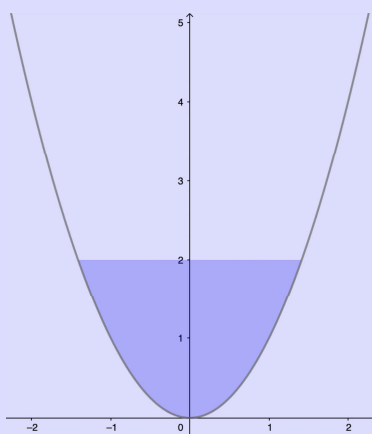
3.

$$A = \int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy$$

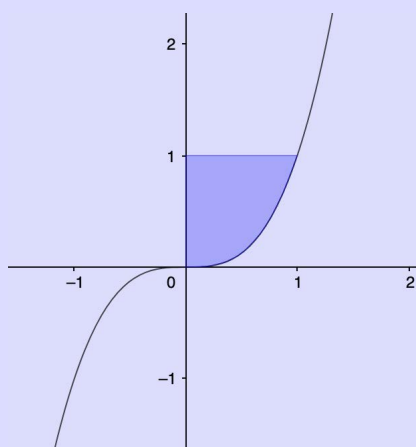
2.

$$A = - \int_0^2 -\sqrt{y} dy + \int_0^2 \sqrt{y} dy$$

a)

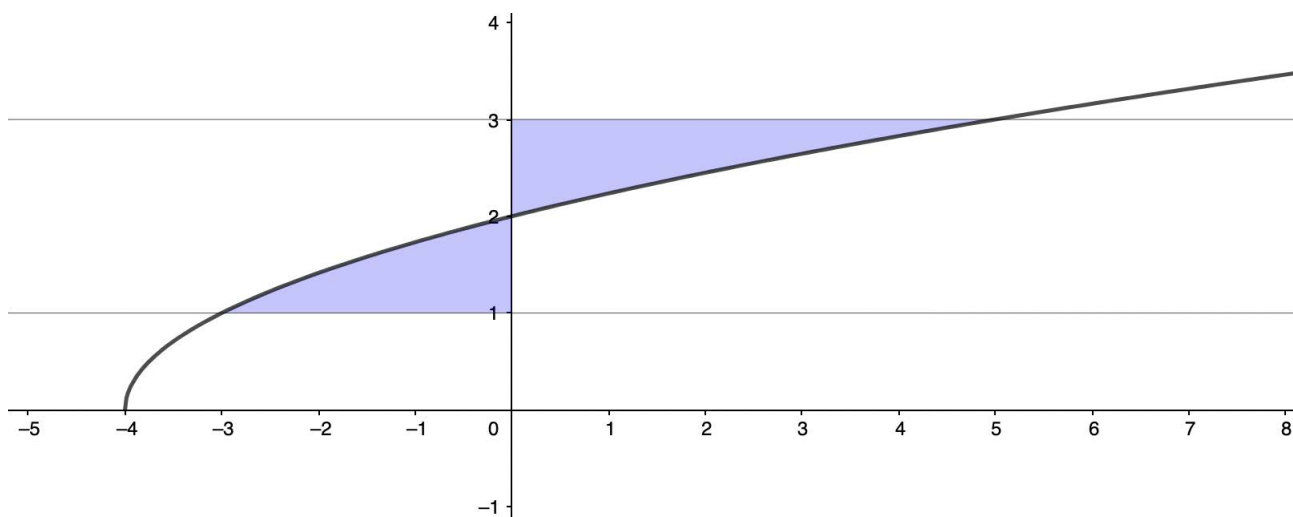


b)



A.1 Harjoitustehtävät

1. Laske funktion $y = \sqrt{x+4}$ ja y -akselin rajaaman alueen pinta-ala, kun aluetta rajoittaa alhaalta suora $y = 1$ ja ylhäältä suora $y = 3$.



2. Laske funktion $f(x) = 2x + 2$ ja y -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä, kun $3 \leq y \leq 5$.

Selitä tehtävän välivaiheet suullisesti parillesi. Parisi kirjoittaa ratkaisusi paperille kuulemansa perusteella. Korjatkaa lopuksi ratkaisua, jos huomaatte virheitä.

3. Mikä seuraavassa laskussa on mennyt pieleen? Korjaa tehtävän ratkaisu.

Tehtävä: Laske käyrän $y^2 = 3 - x$ sekä y -akselin ja suorien $y = -\frac{1}{2}$ ja $y = 1$ rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu:

$$y^2 = 3 - x$$

$$x = y^2 + 3$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (y^2 + 3) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{3}y^3 + 3y\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1\right) \\ &= \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3\right) \\ &= \left(\frac{1}{24} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{1 - 36}{24}\right) - \left(\frac{8}{3}\right) \\ &= \left(\frac{-35}{24}\right) - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{-35 - 64}{24} = \frac{-99}{24} = -4,125 \end{aligned}$$

Vastaus:

$$A = -4,125$$

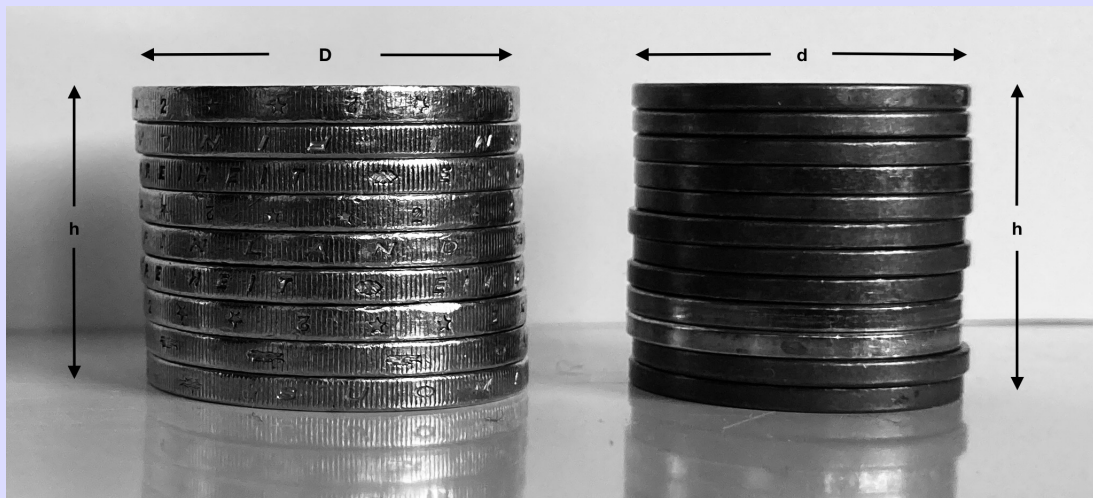
4. Laadi kaverillesi tehtävä, jossa hänen tulee ratkaista alueen pinta-ala y -akselin suhteen. Anna kaverisi ratkaista tehtävä. Tarkista ja korjaa tarvittaessa virheet. Selitä hänelle kohdat, joissa oli virheitä.

B Tilavuussovelluksia

B.1 Avaruuskappaleen tilavuus

Pohdinta B.1

- a) Kuvassa on kahden euron kolikoista ja viiden sentin kolikoista pinottu torni. Molempien tornien korkeus on sama, h . Viiden sentin kolikon halkaisija on $d = 21,25 \text{ mm}$ ja kahden euron kolikon halkaisija $D = 25,75 \text{ mm}$. Ovatko tornit tilavuudeltaan samat? Perustele vastauksesi.

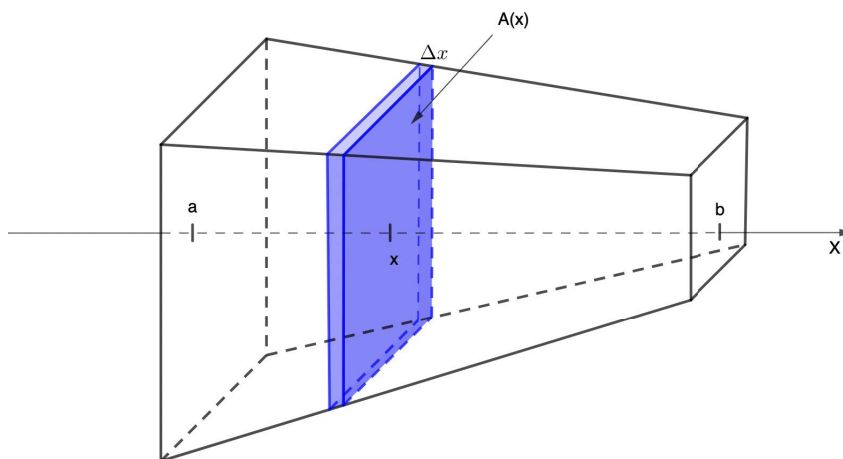


- b) Kuvassa olevien tornien korkeus on sama, h . Molemmat tornit on kasattu kahden euron kolikoista. Ovatko tornien tilavuudet samat? Perustele vastauksesi.



Cavalierin periaatteen mukaan kahden kappaleen tilavuus on sama, kun kappaleiden korkeus ja leikkauspintojen ala ovat samat. Pohdintatehtävän B.1 a)-kohdassa tornien korkeudet ovat samat, mutta kohtisuora leikkauspintojen ala ei tornien välillä ole missään kohtaa h sama. Näin ollen tornien tilavuudet eivät ole samat.

Kuvassa 5 on esitetty avaruuskappale. Kohdassa x on ohut siivu, jonka leveys on Δx ja pinta-ala $A(x)$. Siivulle voidaan laskea tilavuus. Avaruuskappale voidaan siivuttaa koko matkaltaan (välillä $x \in [a, b]$) samanleveyisiin siivuihin. Avaruuskappaleen tilavuus saadaan summaamalla nämä siivut yhteen (vrt. kolikot pohdintatehtävässä B.1).



Kuva 5: Avaruuskappale.

Kun avaruuskappaleen siivuja ohennetaan "loppuun asti" (välillä $x \in [a, b]$), päädytään lauseeseen B.2. Kaikilla siivuilla on tilavuus, jotka voidaan summata yhteen ja saadaan koko avaruuskappaleen tilavuus.

Lause B.2 Kappaleen tilavuus x -akselin suhteen

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

missä a ja b ovat tutkitun alueen ala- ja yläraja x -akselilla ja $A(x)$ kohdassa x kohtisuoraan kappaletta vasten leikatun leikkauskuvion pinta-ala.

B.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus

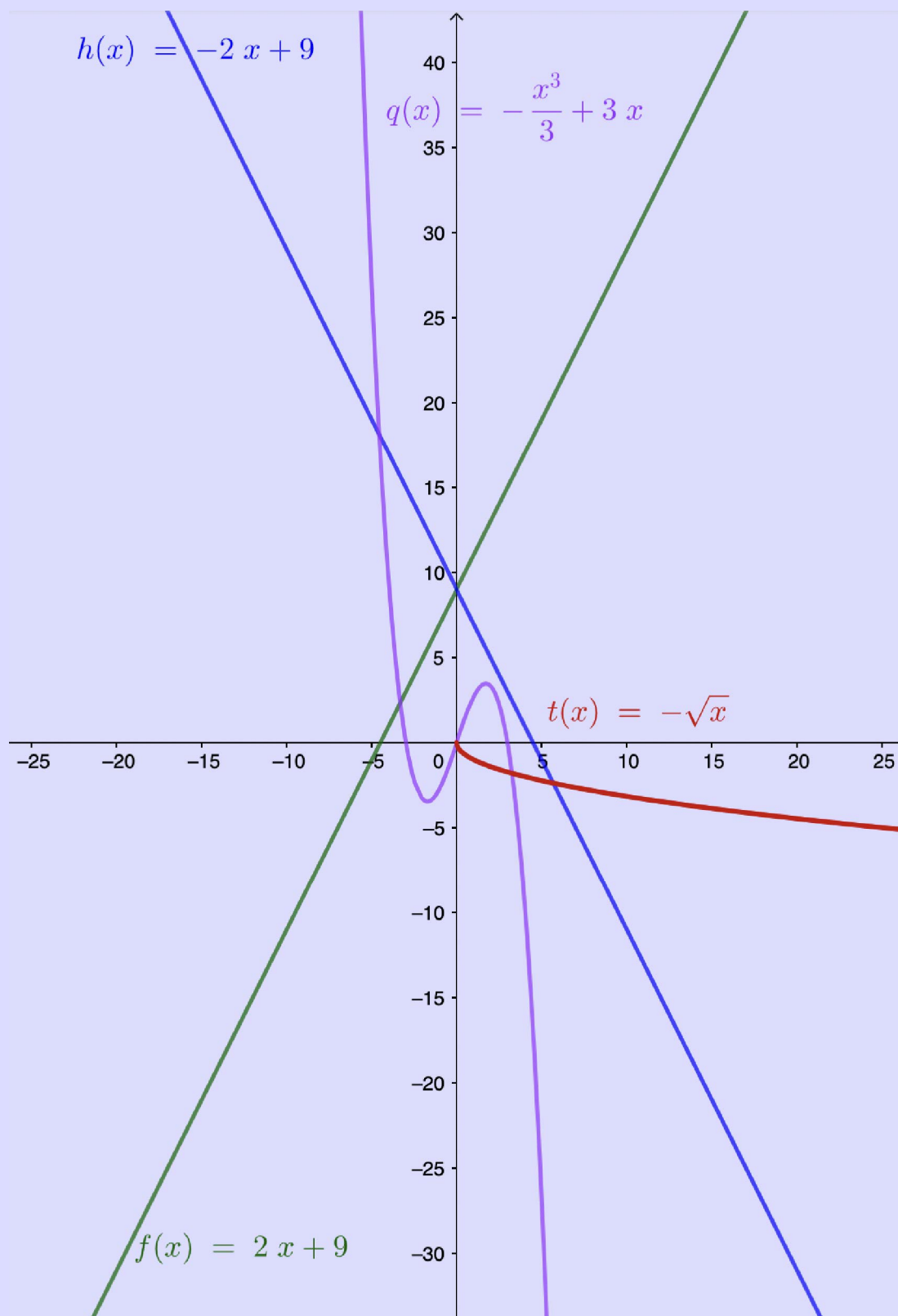
Tässä kappaleessa harjoittelempa piirtämään pyörähdyskappaleita ja selvittämään niiden tilavuuksia. Pyörähdyskappale syntyy, kun tarkasteltava suora tai käyrä pyörähtää pyörähdysakselinsa ympäri muodostaen samalla pyörähdyspinnan kolmiulotteiselle kappaleelle. Muodostuneen kappaleen tilavuus voidaan selvittää integraalin avulla.

Pyörähdyskappale muodostuu funktion kuvaajan pyörähtäessä symmetrisesti valitun pyörähdysakselin ympäri, jolloin muodostuu kolmiulotteinen pyörähdyspinta. Pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on ympyrä. Tuttuja pyörähdyskappaleita ovat lieriö ja kartio.

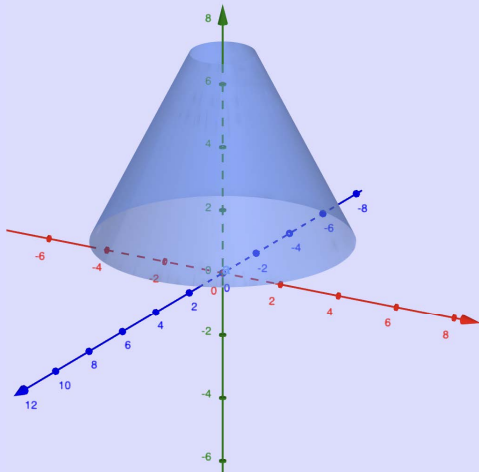
Pohdinta B.3 Hahmottele syntyvä pyörähdyskappale kynällä vihkoosi.

- a) Käyrä $y = x^2$ pyörähtää y -akselin ympäri, kun $0 \leq y \leq 4$.
- b) Käyrä $y = -x^2$ pyörähtää x -akselin ympäri, kun $-1 \leq x \leq 1$.
- c) Suora $y = x$ pyörähtää suoran $y = -2$ ympäri, kun $-2 \leq x \leq 2$.

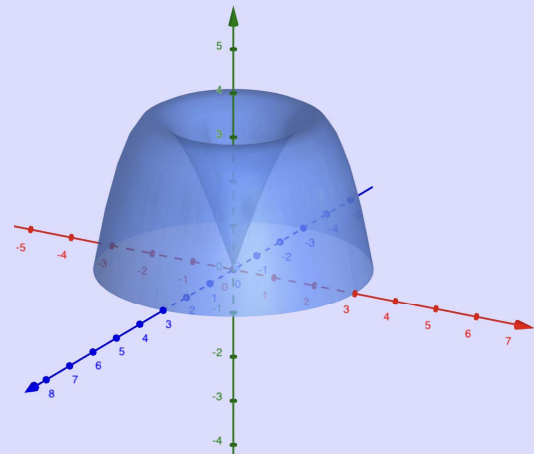
Pohdinta B.4 Millä koordinaatiston käyristä ja suorista saat muodostettua pyörähdyskappaleet a-d? Mikä on pyörähdyskappaleen pyörähdysakseli?



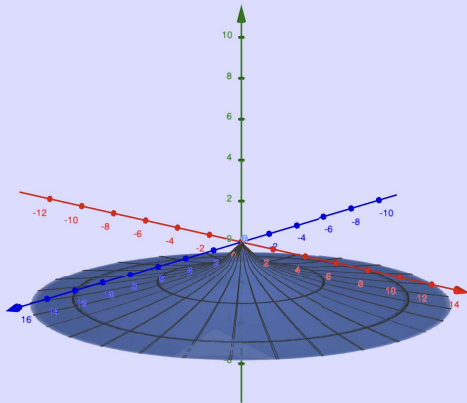
a)



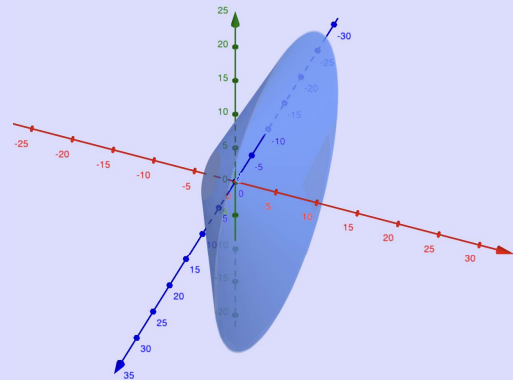
b)



c)



d)



Mallitehtävä B.5 Hahmottele syntyvä pyörähdyskappale GeoGebran avulla, kun käyrä $y = 3\sqrt{x}$ ja suora $y = x$ pyörähtävät x -akselin ympäri välillä $x = 0$ ja $x = 9$.

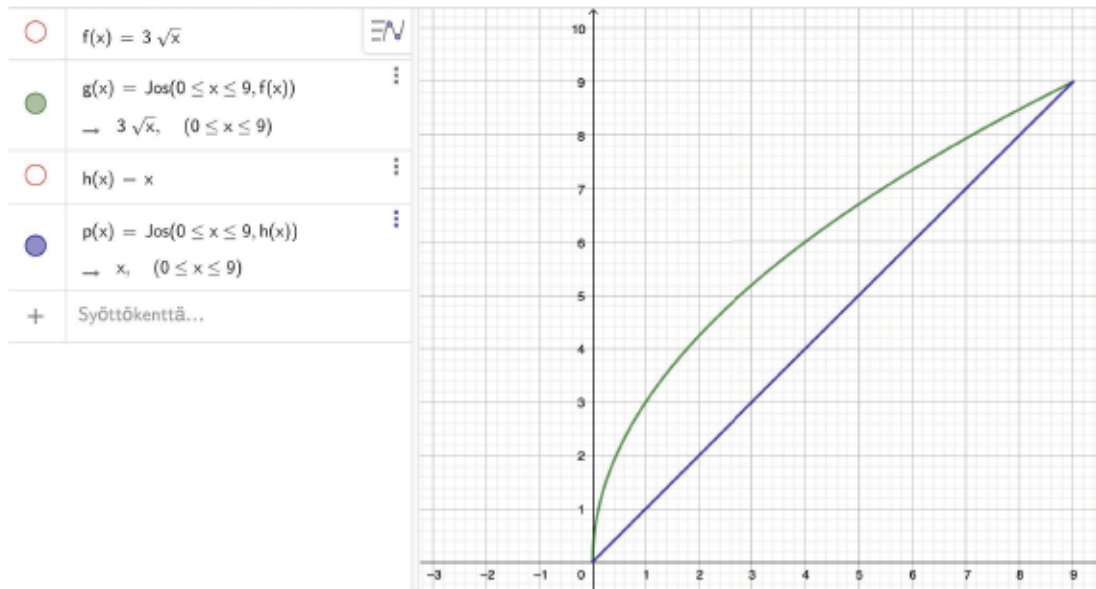
Ratkaisu: 1. Avataan GeoGebrassa näkymä *Kuvaajan piirtäminen*.

2. Kirjoitetaan syöttökenttään $3\text{sqrt}(x)$ ja painetaan Enteriä, jolloin ohjelma muuttaa halutun käyrän yhtälön muotoon $f(x) = 3\sqrt{x}$ muodostaen samalla funktion, tässä tapauksessa $f(x)$.

3. Komennolla *Funktio*(\langle Funktio \rangle , \langle x :n Alkuarvo \rangle , \langle x :n Loppuarvo \rangle) voidaan piirtää vain halutulla välillä kulkeva käyrä tai suora.

- \langle Funktio $\rangle = f(x)$,
- \langle x :n Alkuarvo $\rangle = 0$,
- \langle x :n Loppuarvo $\rangle = 9$.

- Suoritetaan samat komennot myös suoralle $y = x$.
- Voimme jättää näkyville vain kaksi viimeisintä funktiota, jolloin kuvaaja piirtää käyrän ja suoran vain välillä $0 \leq x \leq 9$.



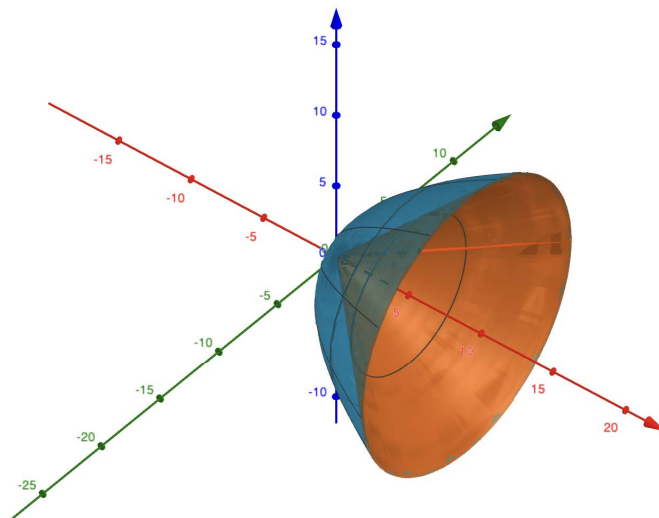
- Siirrytään GeoGebran 3D-grafiiikka -näkömään.
- Muodostetaan pyörähdyspinnat kirjoittamalla syöttökenttään komento *Pinta*(*<Käyrä>*,*<Kulma>*,*<Suora>*).
 - <Käyrä>* = $h(x)$ (funktion nimi)
 - <Kulma>* = 25 (Määrittää, kuinka tiheästi ohjelma piirtää viivoja pyörähdyskappaleeseen. Kokeile eri lukuja. Kokeile myös, mitä tapahtuu, jos kirjoitat luvun perään *deg*.)
 - <Suora>* = xAkseli (Akseli, jonka ympäri pyörähdyskappale muodostetaan.)

<input type="radio"/>	$a = \text{Pinta}(h, 25, \text{xAkseli})$	\vdots
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow \begin{pmatrix} \text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 3\sqrt{u}) \cos(v) \\ \text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 3\sqrt{u}) \sin(v) \end{pmatrix}$	
<input type="radio"/>	$b = \text{Pinta}(p, 25, \text{xAkseli})$	\vdots
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow \begin{pmatrix} \text{Jos}(0 \leq u \leq 9, u) \cos(v) \\ \text{Jos}(0 \leq u \leq 9, u) \sin(v) \end{pmatrix}$	
+	Syöttökenttä...	

- Kun pyörähdysakselina toimii y -akseli: $\langle \text{Suora} \rangle = y\text{Akseli}$.
- Jos pyörähdysakseli ei ole koordinaatiston akseli, piirretään haluttu suora GeoGebraan, esim. $y = 1$. GeoGebra nimeää suoran. Nyt $\langle \text{Suora} \rangle = q$.

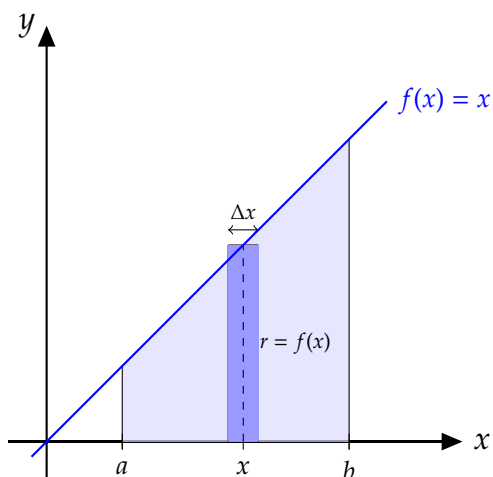
●	$q : y = 1$	⋮
	$b = \text{Pinta}(p, 25, q)$	⋮
●	$\rightarrow \begin{pmatrix} (\text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 1 \ u) - 1) \cos(v) + 1 \\ (\text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 1 \ u) - 1) \sin(v) (-1) \end{pmatrix}$	
	$a = \text{Pinta}(g, 25, q)$	⋮
●	$\rightarrow \begin{pmatrix} (\text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 3 \ \sqrt{u}) - 1) \cos(v) + 1 \\ (\text{Jos}(0 \leq u \leq 9, 3 \ \sqrt{u}) - 1) \sin(v) (-1) \end{pmatrix}$	

8. Syntyneitä pyörähdyskappaleita voidaan tarkastella eri kulmista hiirellä raa-
haamalla.

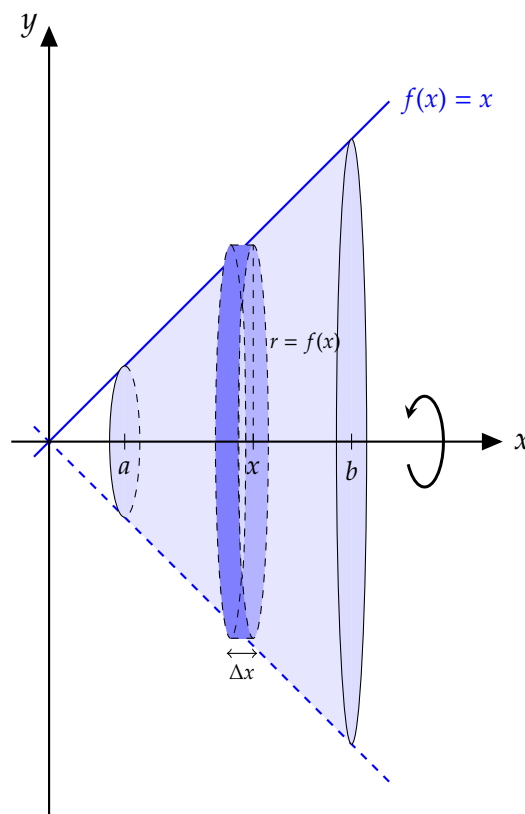


Olemme jo aiemmin tällä kurssilla oppineet laskemaan funktion $f(x)$ ja x -akselin välisen pinta-alan välillä $[a, b]$. Kuvassa 6 on esitetty pinta-alan laskeminen.

Kuvassa 7 pyörähdyskappale on syntynyt suoran $y = x$ pyörähdettyä x -akselin (l. suora $y = 0$) ympäri. Kun pyörähdyskappaletta leikataan kohtisuoraan pyörähdysakselia kohti, saadaan leikkauspinnaksi ympyrä, jonka säde on $r = f(x)$. Voimme kuvitella pyörähdyskappaleen muodostuvan hyvin ohuista jääkiekon tapaisista lieriöistä (tilavuusalkio, dV). Pystymme nyt laskemaan yhden lieriön tilavuuden $V = A \cdot h = \pi r^2 \cdot h$, missä lieriön korkeus $h = \Delta x$ (vrt. lause B.2).



Kuva 6: Suora $y = x$. Pinta-ala -alkion leveys kohdassa x on Δx ja korkeus $f(x)$.



Kuva 7: Suoran $y = x$ muodostama pyörähdyskappale välillä $[a, b]$ x -akselin ympäri.

Pyöreän poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on

$$A(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot |f(x)|^2 = \pi \cdot f(x)^2.$$

Lieriön tilavuus laskettiin kaavalla

$$V(x) = A(x) \cdot h,$$

missä $h = \Delta x$.

Kun summaamme äärettömän monen kiekon tilavuudet yhteen välillä a ja b , saamme kokonaisen kappaleen tilavuuden.

Näin ollen voimme laskea x -akselin ympäri muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuuden, kun $a \leq x \leq b$, seuraavalla kaavalla:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Lause B.6 Pyörähdyskappaleen tilavuus x -akselin suhteen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

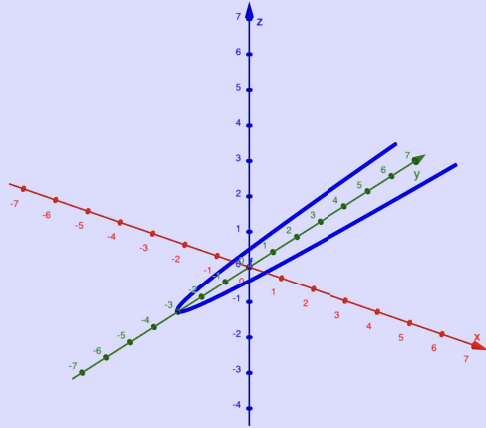
missä a ja b ovat tutkitun alueen ala- ja yläraja x -akselilla.

Yllä oleva kaava toimii myös tapauksessa, jossa funktio ei ole koko ajan positiivinen.

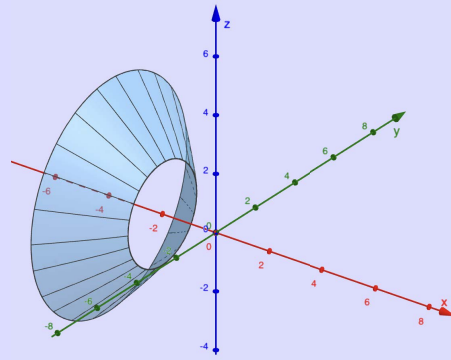
Huomaa, että pyörähdyskappale on erikoistapaus avaruuskappaleesta. Pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on aina ympyrä, jolloin sen pinta-ala on $A = \pi r^2$, missä säde $r = f(x)$. Avaruuskappaleella leikkauspinnan muoto voi olla abstraktimpi, jolloin sen pinta-alaa ei voida laskea ympyrän pinta-alana.

Pohdinta B.7 Yhdistä oikea kuvaaja (1-3), kuvaajassa esitetyn käyrän tai suoran avulla muodostettava pyörähdyskappale (a-c) sekä kyseisen pyörähdyskappaleen tilavuuden laskemiseen tarvittava yhtälö (i-iii). Perustele valintasi vierustoverillesi. Laske tilavuudet.

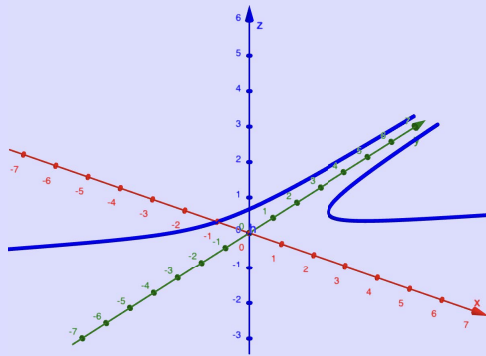
1.



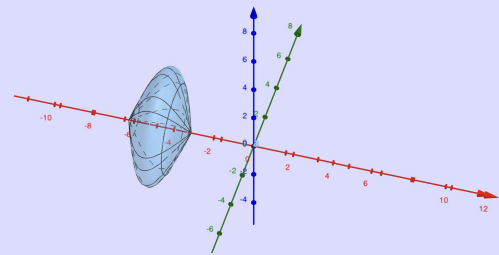
a)



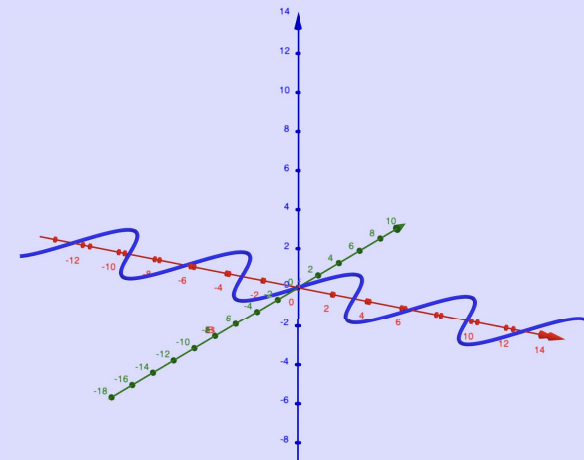
2.



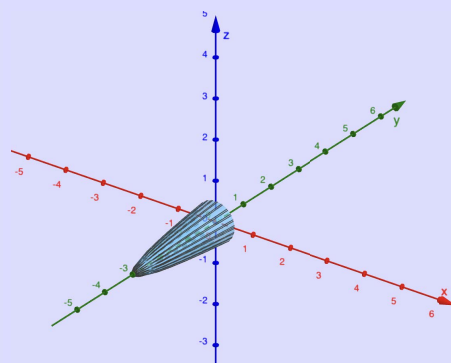
b)



3.



c)



i)

$$V = \pi \cdot \int_{-3}^0 \left(\sqrt{\frac{y+3}{12}} \right)^2 dy$$

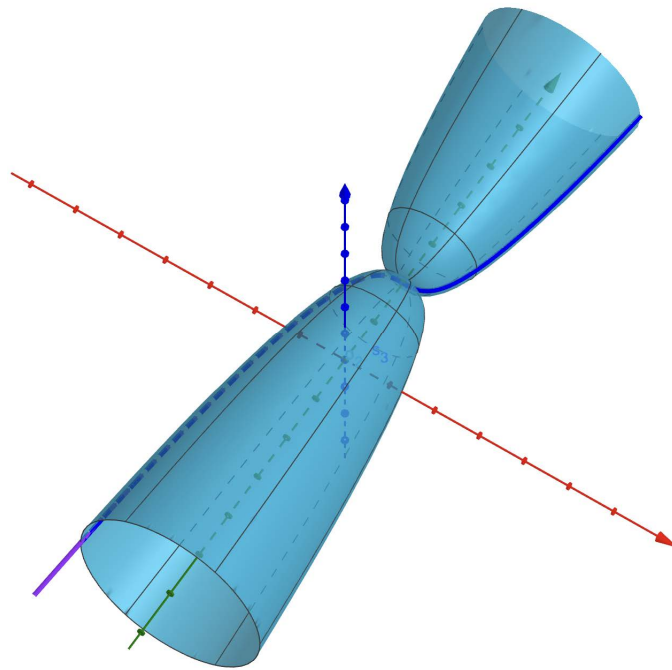
ii)

$$V = \pi \cdot \int_{-2\pi}^{-\pi} (3 \cdot \sin(x))^2 dx$$

iii)

$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{-2} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} \right)^2 dx$$

Mallitehtävä B.8 Käyrä $y = x^3 + 2$ pyörähtää y -akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus välillä $y = -6$ ja $y = 10$.



Ratkaisu: Tehtävässä halutaan selvittää pyörähdyskappaleen tilavuus, kun pyörähdyskappale muodostuu y -akselin ympärille.

Jotta voimme suorittaa integroinnin y -akselin suhteen, käyrä $y = x^3 + 2$ on ratkaistava niin, että muuttujana on y .

$$y = x^3 + 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

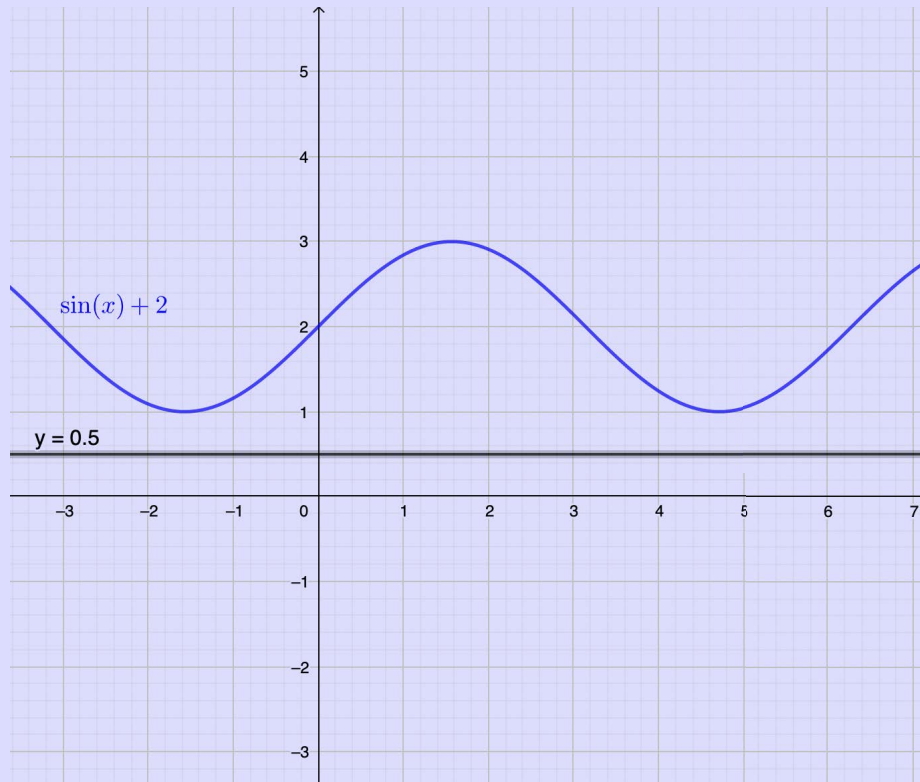
Tilavuus pyörähdyskappaleelle saadaan laskettua kaavan $V = \pi \int_a^b f(y)^2 dy$ avulla, missä alaraja $a = -6$, yläraja $b = 10$ ja $f(y) = \sqrt[3]{y-2}$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-6}^{10} f(y)^2 dy = \pi \int_{-6}^{10} (\sqrt[3]{y-2})^2 dy = \pi \int_{-6}^{10} (y-2)^{\frac{2}{3}} dy \\ &= \pi \int_{-6}^{10} \left(\frac{(y-2)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right) dy = \frac{3}{5} \pi \int_{-6}^{10} (y-2)^{\frac{5}{3}} dy = \frac{3}{5} \pi \left[(10-2)^{\frac{5}{3}} - (-6-2)^{\frac{5}{3}} \right] \\ &= \frac{3}{5} \pi \left[\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{(-8)^5} \right] = \frac{3}{5} \pi [32 - (-32)] = \frac{3}{5} \pi (64) = \frac{192}{5} \pi \approx 120,64 \end{aligned}$$

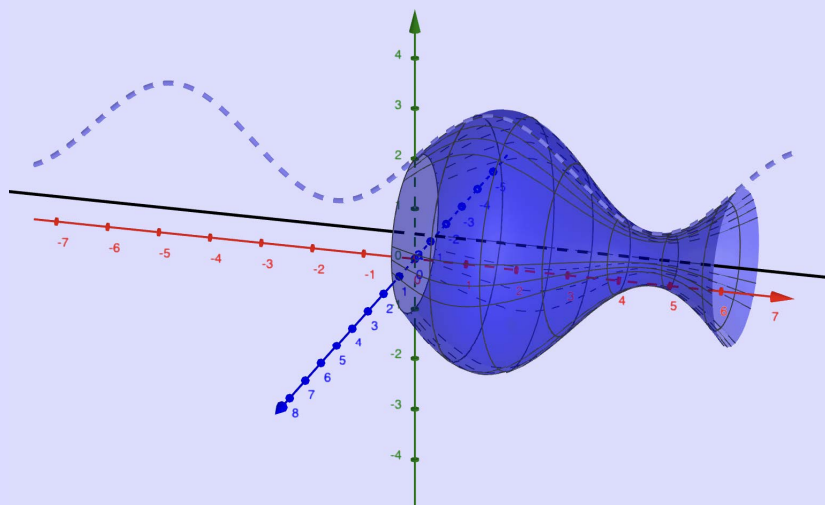
Vastaus: Kun käyrä $y = x^3 + 2$ välillä $y = -6$ ja $y = 10$ pyörähtää y -akselin ympäri, kappaleen tilavuudeksi saadaan $V = \frac{192}{5} \pi \approx 120,64$.

Pohdinta B.9

- a) Mikä on käyrän $y = \sin(x) + 2$ muodostaman pyörähdyskappaleen leikkauspinnan säde kohdassa x , kun pyörähdysakseli on $y = 0,5$? Voit selvittää sädettä myös piirtämällä kynällä tai tutkimalla GeoGebran avulla.

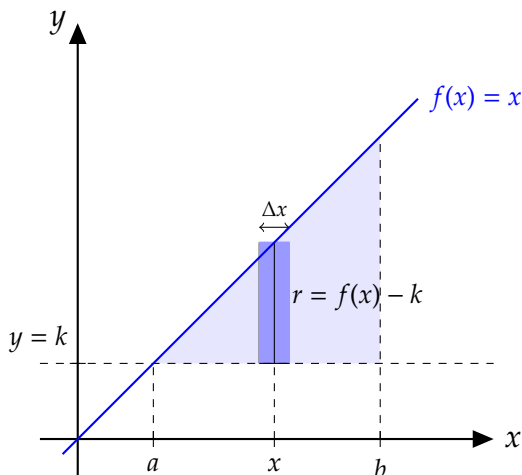


- b) Muodosta pyörähdysakselia vastaan kohtisuoran leikkauspinnan pinta-alan yhtälö.

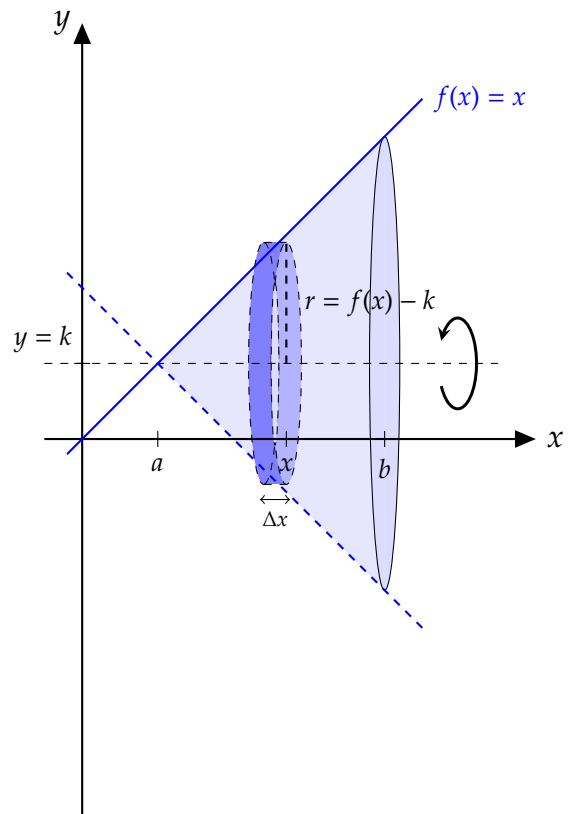


c) Laske GeoGebran avulla käyrän $y = \sin(x) + 2$ muodostama pyörähdyskappaleen tilavuus suoran $y = 0,5$ ympäri, kun $0 \leq x \leq 2\pi$.

Pyörähdyskappale voidaan muodostaa myös muiden suorien, kuin x - ja y -akselien ympäri pyöräyttäen (Kuva 8 ja 9). Kun pyörähdyskappale muodostuu suoran $x = k$ suhteen, muodostuneen ympyränmuotoisen leikkauspinnan säde muuttuu k :n verran. Muodostuneen pohjan säde on $r = |f(x) - k|$.



Kuva 8: Suoran $y = x$ ja suoran $y = k$ rajoittama alue välillä $[a, b]$.

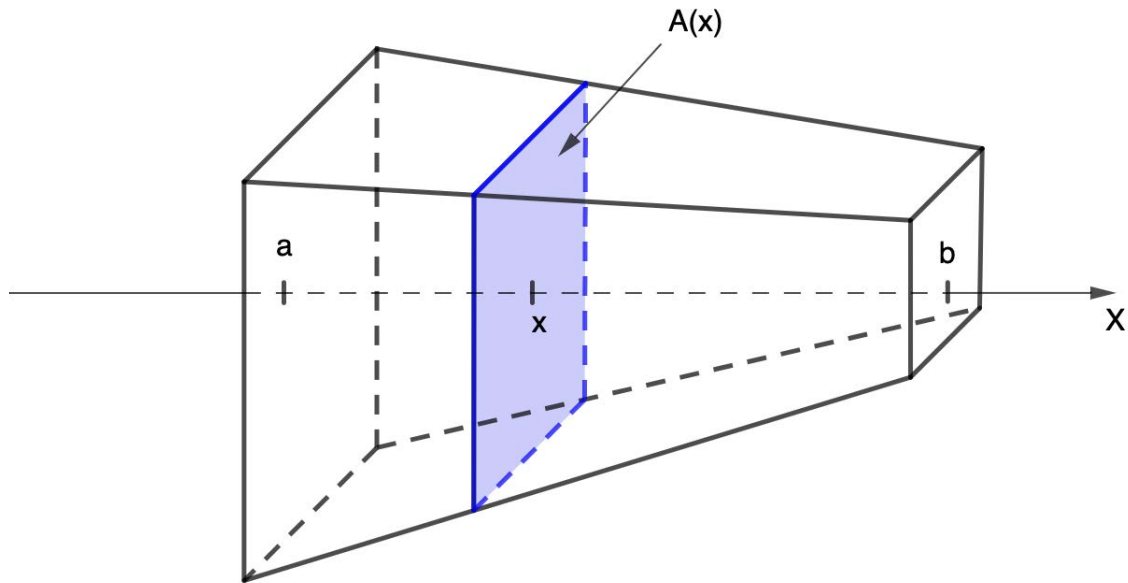


Kuva 9: Suoran $y = x$ muodostama pyörähdyskappale suoran $y = k$ ympäri välillä $[a, b]$.

B.3 Harjoitustehtävät

5.

a) Muodosta tilavuuden lauseke kuvassa näkyvälle kappaleelle, kun poikkileikkaus on neliö. Kappaleen päädyt leikkaavat x -akselin kohdissa a ja b .

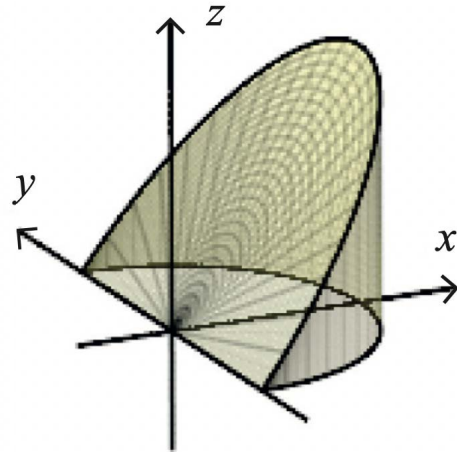


- b) Laske a)-kohdassa muodostamallasi lausekkeella tilavuus kuvan kappaleelle, kun tiedetään, että kappaleen x -akselia vastaan kohtisuora leikkauspinta on neliö ja sivun pituus kohdassa x on $(25 - 2x)$ cm. Kappaleen päädyt leikkaavat x -akselin kohdissa $a = 3$ ja $b = 6$.

6.

- a) Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r . Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtä suureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h .

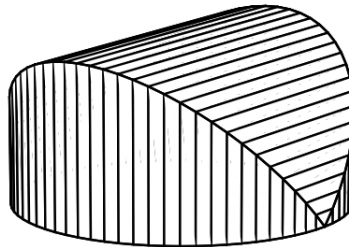
Mihin suuntaan siivuttaisit jäljelle jääneen juustopalan, jotta kaikista poikkileikkauksista tulisi yhdenmuotoisia?



<<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>>. Luettu 12.3.2013.

- b) Paljonko on suurimman leikkauspinnan ala?
- c) Paljonko on yleisen leikkauspinnan ala?
- d) Laske juustonpalan tilavuus integroimalla. [Mukaelma YO K14, t.10]

7. Nykyaikaisen museorakennuksen pohja on ympyrä, jonka halkaisija on 19,7 metriä. Jos rakennus leikataan pohjaympyrän tietyn halkaisijan suuntaisella pystysuoralla tasolla, leikkauskuvio on aina suorakulmio, jonka korkeus on puolet kannasta. Määritä rakennuksen tilavuus. [YO S02, t.12]



8. Suunnittele kaverillesi tehtävä pyörähdyskappaleen tilavuuden laskemisesta. Anna tehtävänanto kaverillesi suullisesti. Tarkista ja korjaa kaverisi ratkaisu. Selvennä kohdat, joissa on vielä harjoitettavaa.

9. Mikä ratkaisussa on mennyt pieleen? Mitä laskussa on oikeastaan ratkaistu? Korjaa ratkaisu tehtävänannon mukaiseksi ja selitä tekemäsi välivaiheet.

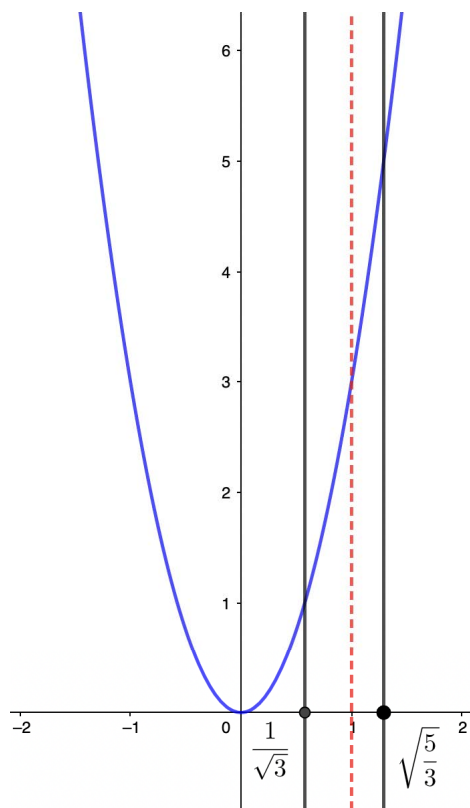
Laske pyörähdyskappaleen tilavuus välillä $x = 5$ ja $x = 6$, kun käyrä $y = \sqrt{x}$ pyörähtää x -akselin ympäri.

Ratkaisu:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_5^6 (\sqrt{x}) dx = \int_5^6 x^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_5^6 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \int_5^6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \int_5^6 x^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{2}{3} \cdot (6^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}) \approx 2,34
 \end{aligned}$$

10. Laske suoran $x = 1$ ympäri pyörähtävän funktion kuvaajan $f(x) = 3x^2$ tilavuus, kun pyörähdyskappaleen muodostaa kohtiin $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ piirrettyjen normaalien väliin jäävä käyrän osa.



11.

- i. Kopioi alla oleva kuva (Kuva 10.) pullosta koneellesi ja liitä se GeoGebran piirtoalueelle niin, että pullon pohjan keskikohta on origossa ja x -akseli kulkee pitkittäin pullon keskilinjaa.
- ii. Lukitse kuva paikoilleen ja aseta taustakuvaksi.
- iii. Hahmottele x -akselin yläpuolella oleva pullon reuna pisteitä piirtäen ja sovita pisteille käyrä.

iv. Poimi sovitetun käyrän yhtälö ja laske x -akselin ympäri syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

- Funktion kuvaajan yhtälö saadaan näkyviin seuraavasti:
 - Aktivoi kuvaajan käyrä.
 - Klikkaa oikealla hiiren painikkeella ja valitse "Asetukset".
 - Perusominaisuudet-välilehdellä klikkaa aktiiviseksi "Näytä nimi:" ja valikosta "Nimi ja arvo".
 - Jos haluat muuttaa desimaalien määrää, valitse GeoGebran Asetuksista (Yleinen-välilehti) "Pyöristä" -kohdasta suurempi määrä desimaaleja.

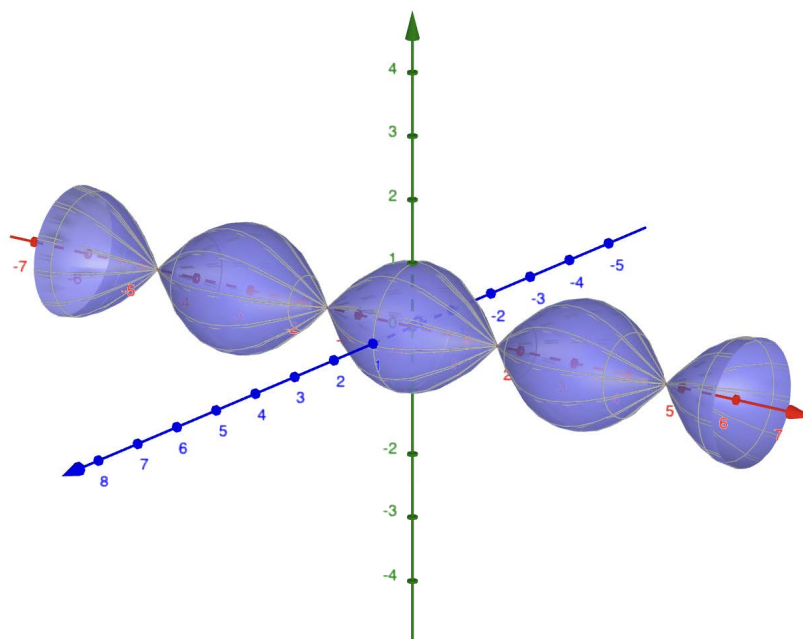
v. Muodosta kuvaajan avulla pyörähdyskappale x -akselin suhteen ja laske muodostuneen pullon tilavuus. Yksikkö koordinaatistossa vastaa luonnossa yhtä senttimetriä .



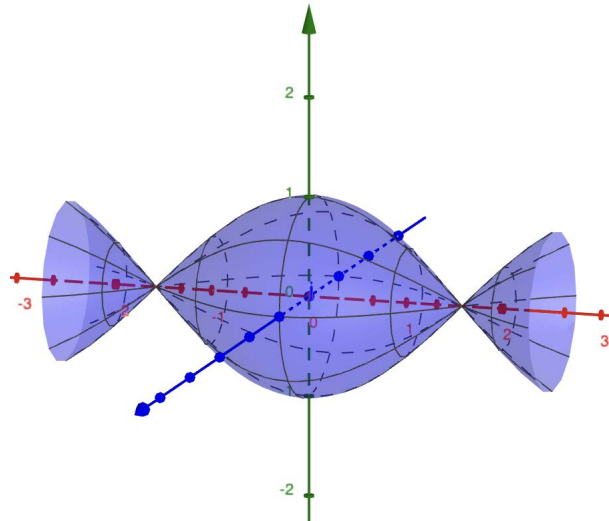
Kuva 10: Lasipullo. [<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Bouteille.jpg>, luetu 4.5.2021.]

12.

a) Tutki GeoGebran avulla, mikä käyrä muodostaa alla olevan pyörähdyskappaleen.



- b) Karkki Oy:n insinööri laskeskelee, kuinka suuren karkin heidän käyttämiensä karkkipapereiden sisään voi kääriä. Laske karkin tilavuus alla olevan kuvan perusteella. Karkin pituus keskikohdasta kärkeen on $\frac{\pi}{2}$ cm.



- c) Pyörähdyškappaleen pinta-ala voidaan laskea kaavalla

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

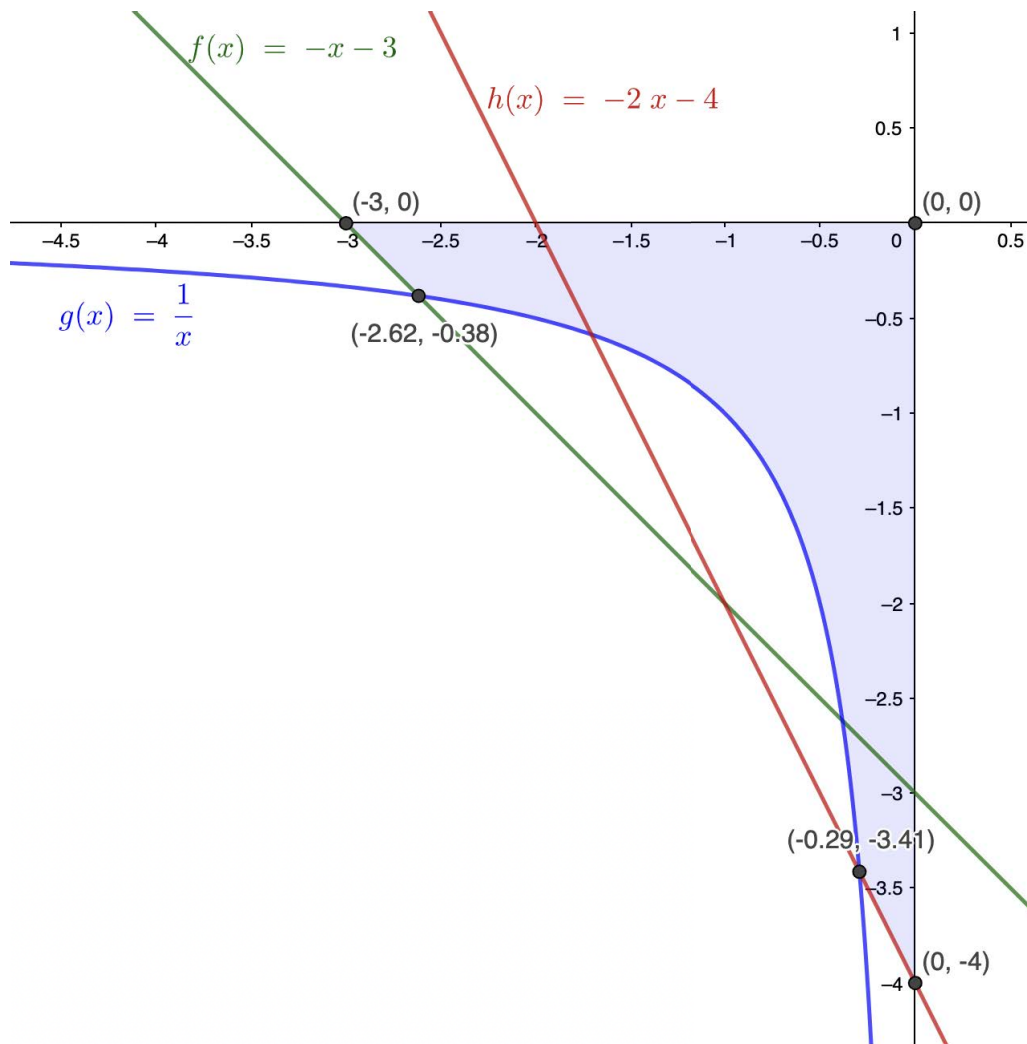
Laske GoeGebran avulla yhden paperin ympärille tarvittavan paperin pinta-ala, kun tiedetään, että paperin päät ovat kohdissa $x = -2,5$ ja $x = 2,5$. Solmukohtiin "kuluva" paperia ei tarvitse huomioida.

C Lisätehtäviä

13. Laske suoran $x = 1$ ja käyrän $x = \sqrt{y}$ väliin jäävän alueen pinta-ala, kun aluetta rajoittaa alhaalta suora $y = 1$ ja ylhäältä suora $y = 2$.

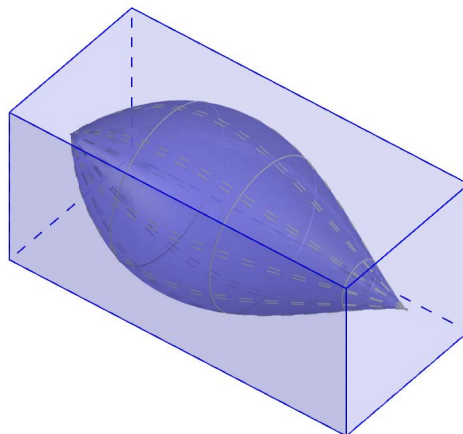
14. Laske järven rannalla olevan metsäkaistaleen pinta-ala y -akselin suhteen. Metsää rajoittavat koordinaatistossa kuvatulla tavalla suorat $x = 0$, $y = 0$, $f(x) = -x - 3$ ja $h(x) = -2x - 4$ sekä järven ranta, joka mukailee käyrää $g(x) = \frac{1}{x}$.

Yksi yksikkö koordinaatistossa vastaa metsässä 100 metriä.



15. Pakkausten suunnittelija pohtii sopivaa rasiaa salottisipulille, josta povataan uutta luksustuotetta. Salottisipulin vaipan muodostaa x - akselin ympäri pyörähtävä käyrä $y = 0.0012x^4 - 0.0006x^3 - 0.2245x^2 + 1.187x$ välillä $0 \leq x \leq 7$. Pohdinnan alla on suorakulmainen särmiö, jonka sisälle yksi salottisipuli mahtuu. Rasian pituus ja leveys vastaavat sipulin pituutta ja suurinta leveyttä. Kuinka monta prosenttia rasian tilavuudesta on ilmaa, kun salottisipuli on sen sisällä?

Voit tarkastella käyrää ja laskea laskut GeoGebran avulla.



16. Laske paljonko yhteen koristepalloon tarvittava materiaali maksaa, kun tiedetään, että materiaalin hinta on 3,30 €/kg. Koristepalloon käytettävän materiaalin tiheys on $0,73 \text{ g/cm}^3$. Pallon ulkokehä syntyy käyrän $y = -\sqrt{11,0^2 - x^2}$ pyörrähtäessä x -akselin ympäri. Sisäkehä syntyy käyrän $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pyörrähtäessä x -akselin ympäri, säteen (r) ollessa 10,6 cm.

17. Laske vaasin tilavuus, kun astian sisäpinta myötäilee käyrän $y = 0,1x^6$ kierähdyskappaletta y -akselin suhteen välillä $x = 0$ ja $x = 2$. Yksikkö koordinaatistossa vastaa kymmentä senttimetriä.

Vaasin suuaukosta oli lohjennut neliömäinen pala, jonka alareuna oli kohdassa $y = 4$. Lohjenneen palan kannan leveys oli 3 cm. Montako prosenttia vähemmän vaasissa voi olla vettä verrattuna ehjään vaasiin, kun astia lepää pystyssä tasaisella pöydällä?

18. Vanha suomalainen tilavuusmitta jumpru on enää harvojen tuntema mittayksikkö. Jumpru on vetoisuudeltaan 8,179 cl. Selvitä jumprun korkeus, kun tiedetään suoran ympyrälieriön pohjan halkaisijaksi 4,0 cm. Montako neliösenttiä materiaalia tarvitaan mittakupin tekemiseen?

19. Laske mallitehtävässä B.5 muodostetun pyörrähdyskappaleen tilavuus.

D Opettajan opas

Tämä opettajan opas sisältää ajankäyttöehdotuksen sekä pohdintatehtävien ajatuksen ja vastaukset *Pinta-ala y -akselin suhteen*, *Tilavuussovelluksia* sekä *Pyörähdyskappaleen tilavuus* kappaleisiin.

D.1 Tuntijako

Tuntijakoehdotus kirjan aiheisiin MAA7 -kurssilla:

- Pinta-alan laskeminen y -akselin suhteen: 2 x 45min tai 1 x 75min.
- Tilavuussovelluksia:
 - Avaruuskappaleen tilavuus: 1 x 45min tai 1 x 75min.
 - Pyörähdyskappaleen tilavuus: 2 x 45min tai 1 x 75min.

Oppikirjan lopusta löytyvät lisätehtävät soveltuvat esimerkiksi kotitehtäviksi.

D.2 Pinta-ala y -akselin suhteen

Kappaleen sisältö:

- Pinta-alan määrittäminen y -akselin suhteen.

Tavoitteet:

- Opiskelija ymmärtää yhteyden määrätyn integraalin ja pinta-alan välillä.
- Opiskelija oppii määrittämään annetun alueen pinta-alan y -akselin suhteen.
- Opiskelija oppii tutkimaan laskua myös GeoGebran avulla.
- Opiskelija oppii kuvailemaan sanallisesti, mitä on ratkaisussaan tehnyt.
- Opiskelijan yhteistyötaidot kehittyvät.

Tavoitteena on, että opiskelijat ymmärtävät pinta-alan laskemisen y -akselin suhteen. Tähän pyritään johdatteluvilla pohdintatehtävillä, mutta myös suoraan teoriaa läpi käyden. Pohdintatehtävien pohtiminen parityönä on suositeltavaa. Opiskelijoita kannustetaan GeoGebran käyttöön, jolloin he pääsevät pelkän teknisen laskemisen sijaan myös tutkimaan mitä laskussa tapahtuu.

Pohdintatehtävä A.1

Tehtävässä tutkitaan oppilaille tutun näköistä tilannetta, jossa käyrä koordinaatiston kanssa rajoittaa tummennettua aluetta. Nyt alue on kuitenkin y -akselia vasten, jolloin opiskelijat eivät pysty toimimaan suoraan vanhoilla tiedoilla. Pinta-alan laskemiseen y -akselin suhteen pyritään tutustuttamaan useiden pienempien kysymysten

kautta, jolloin opiskelijalla on mahdollisuus tehdä omia ajatusyhteyksiä aiemmin opittuun asiaan. a)-kohdassa opiskelijat voivat selvittää ensiksi suorakulmaisen alueen joko peruskoulusta tutuilla tiedoilla tai integroimalla. Tästä alueesta voidaan vähentää MAA7-kurssin alkupuoliskolla opitulla tavalla laskettu käyrän alapuolinen pinta-ala.

Vastaus: a) $A = \frac{16}{3} \approx 5,33$

b) $x = f(y)$

c) $f(y) = \sqrt{y}$

d) Alaraja $y = 0$, yläraja $y = 4$.

e) $\int_0^4 f(y) dy = 5,33$.

Pohdintatehtävä A.2

Tehtävän on tarkoitus muistuttaa, että pinta-ala on aina positiivinen luku, kun taas integraalin arvo voi olla miinusmerkkinen riippuen siitä, missä koordinaatiston osassa alue sijaitsee. Tavoitteena on, että opiskelijat oppisivat miettimään ratkaisujensa pitävyyttä todellisessa maailmassa. Opettaja voi esimerkiksi johdatella kysymyksillä "voiko pinta-ala olla miinusmerkkinen?" ja "mitä integroiminen tarkoittaa?".

Koska integraali $\int_a^b f(x) \geq 0$, funktiolla on tarkasteltavalla välillä enemmän pinta-alaa y -akselin oikealla puolella.

Vastaus: $A_2 = 14$

Pohdintatehtävä A.3

Tehtävässä opiskelijat etsivät virheet tehtävien ratkaisuksista ja korjaavat ratkaisut.

Vastaus: Tehtävässä on ratkaistu pinta-ala x -akselin suhteen y -akselin sijaan. Oikea vastaus laskuun on $A = 3$.

Pohdintatehtävä A.4 Tässä pohdintatehtävässä opiskelija pääsee harjoittelemaan ja käyttämään matemaattista termistöä sanallisesti. Kun opiskelija tietää oikean sanaston, hänen on helpompi seurata myös opetusta ja oppia itse lukemalla.

Vastaus:

1. suorakaiteen

2. pinta-ala

3. kanta

4. korkeus

5. tarkoittaa

6. kaventamalla

7. enemmän

8. ala

9. yläraja

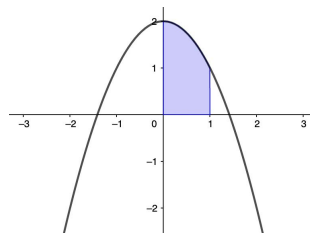
10. y

11. y

12. dy

Pohdintatehtävä A.6 Tehtävässä on tarkoitus yhdistää samaa asiaa tarkoittavat kuvat, eli kuvaaja ja siihen liittyvä lasku. Vaikka aiheena on pinta-ala y -akselin suhteen, seassa on myös yksi x -akselin suhteen laskettava integraali.

Vastaus: Laskulle 1. on piirrettävä kuvaaja itse.



Lasku 2. ja kuvaaja a).

Lasku 3. ja kuvaaja b).

D.3 Tilavuussovelluksia

D.3.1 Avaruuskappaleen tilavuus

Kappaleen sisältö:

- Yleisen avaruuskappaleen tilavuus.
- Cavalierin periaate.

Tavoitteet:

- Opiskelija ymmärtää yhteyden avaruuskappaleen tilavuuden ja pyörähdyskappaleen tilavuuden välillä.
- Opiskelija oppii määrittämään avaruuskappaleen tilavuuden.
- Opiskelija ymmärtää Cavalierin periaatteen.

Pohdintatehtävä B.1 Tehtävän a)-kohdassa on perusteltava, että kahden euron kolikoista kasattu pino on tilavuudeltaan suurempi, kuin yhtä korkea, viiden sentin kolikoista kasattu pino. Viiden sentin kolikon halkaisija on pienempi kuin kahden euron kolikon halkaisija, jolloin muodostunut kolikkotorni on tilavuudeltaan pienempi, vaikka tornien korkeudet ovat samat.

Vastaus: $V_{2e\ torni} = 165,8\pi h\text{ mm}^3$

$V_{5snt\ torni} = 112,9\pi h\text{ mm}^3$

Näin ollen $V_{2e\ torni} \neq V_{5snt\ torni}$.

Seuraavassa kohdassa on kaksi kahden euron kolikoista muodostettua pinoa. Tarkoituksena on havainnollistaa Cavalierin periaatetta, jossa todetaan, että kaksi yhtä korkea kappaleita ovat tilavuudeltaan samat, kun niiden vastaavat poikkileikkauspinnat ovat yhtä suuret.

D.3.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Kappaleen sisältö:

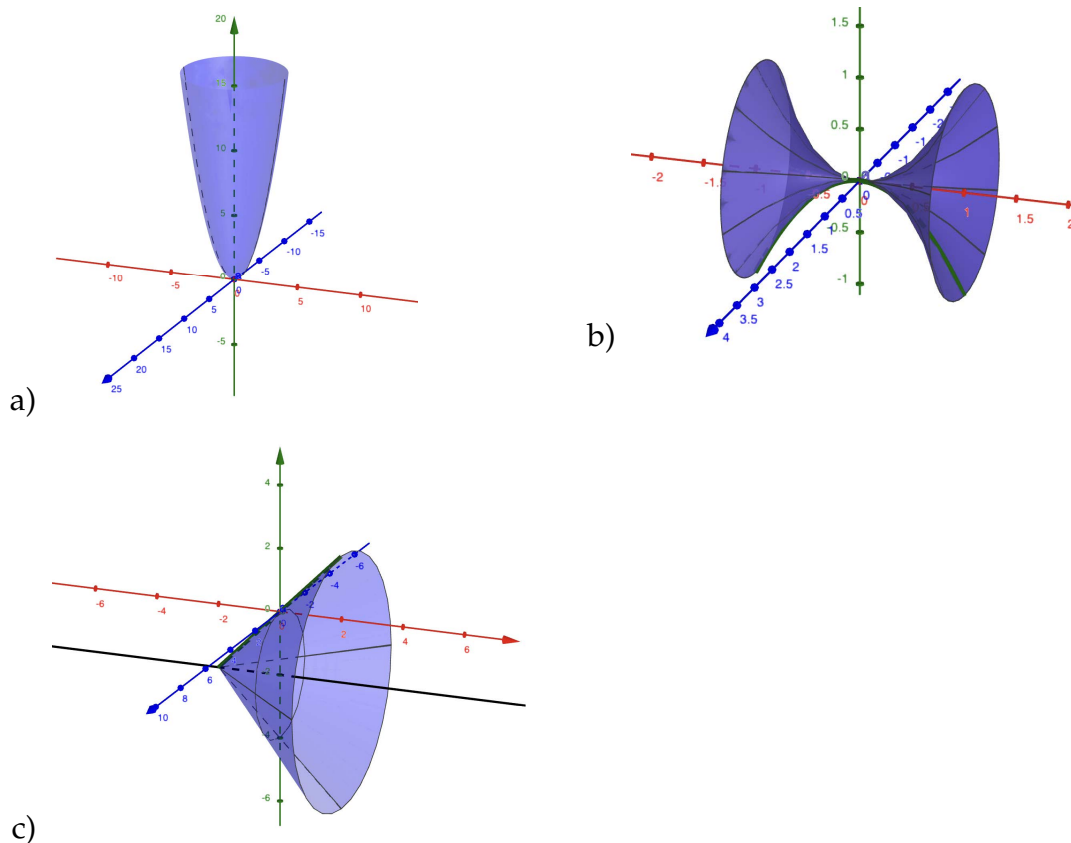
- Pyörähdyskappaleen muodostaminen piirtämällä ja GeoGebralla.
- Pyörähdyskappaleen tilavuuden määrittäminen.

Tavoitteet:

- Opiskelijat oppivat hahmottamaan ja piirtämään käyrän tai suoran pyörähtäessä syntyvän kolmiulotteisen kappaleen.
- Opiskelijat oppivat määrittämään pyörähdyskappaleen tilavuuden.
- Opiskelijat oppivat käyttämään GeoGebra -sovellusta apunaan kuvien tarkastelussa ja laskujen tarkastamisessa.

Pohdintatehtävä B.3 Tehtävän tarkoituksena on tutustuttaa opiskelijaa piirtämään pyörähdyskappaleita kynän ja paperin kanssa.

Vastaus:



Pohdintatehtävä B.4 Opiskelijat pääsevät pätkäilemään mikä funktion kuvaaja muodostaa minkäkin pyörähdyskappaleen.

Vastaus: Pyörähdyskappale a) saadaan muodostettua joko suoran $f(x) = 2x + 9$ tai $h(x) = -2x + 9$ pyöräyttäessä y -akselin ympäri.

Pyörähdyskappale b) muodostuu, kun käyrä $q(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x$ pyörähtää y -akselin ympäri.

Pyörähdyskappale c) muodostuu, kun käyrä $t(x) = -\sqrt{x}$ pyörähtää y -akselin ympäri.

Pyörähdyskappale d) muodostuu, kun suora $f(x) = 2x + 9$ pyörähtää x -akselin ympäri.

Pohdintatehtävä B.7

Tehtävässä opiskelijat saavat jälleen yhdistää erilaisia kuvauksia samasta asiasta toisiinsa. Opiskelijat joutuvat joko kuvittelemaan tai kokeilemaan tietokoneen avulla, minkälaisia pyörähdyskappaleita käyristä ja suorista voi muodostua. Yksi pyörähdyskappaleista on x -akselin suhteen, minkä voi huomata kuvasta tai yhtälöstä.

Vastaus:

- 1. - c) - i); $V_c = \frac{3\pi}{8}$
- 2. - a) - iii); $V_a = \frac{9}{2}\pi^2$
- 3. - b) - ii); $V_b = 17,33\pi$

Pohdintatehtävä B.9 Tehtävässä johdatellaan tulevaan teoriaan vaiheittain. Opiskelijoille annetaan mahdollisuus muodostaa pyörähdyskappaleen tilavuus itsenäisesti, kun pyörähdysakseli ei olekaan x - tai y -akseli.

Vastaus: a) Pyöreän pyörähdyspinnan säde on

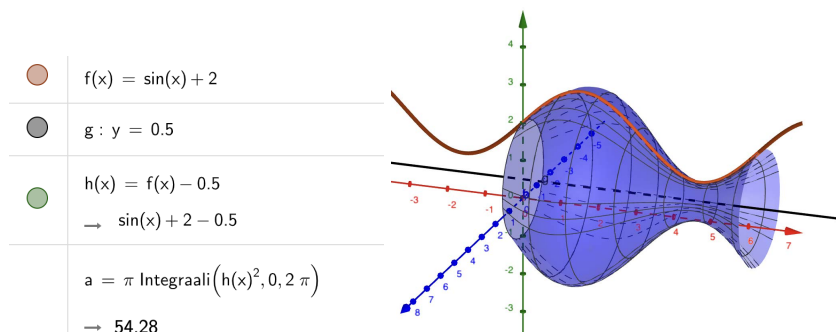
$$r = f(x) - 0,5 = \sin(x) + 2 - 0,5 = \sin(x) + 1,5.$$

b) Pyöreän pyörähdyspinnan ala

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sin(x) + \frac{3}{2})^2 = \pi \cdot (\sin^2(x) + 3 \cdot \sin(x) + \frac{9}{4})$$

c) Pyörähdyskappaleen tilavuus on $V = 54,28$.

Lasku GeoGebran avulla:



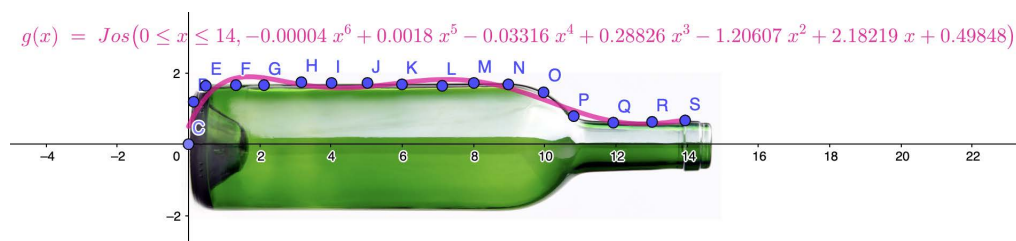
E Tehtävien vastaukset

Pinta-ala y-akselin suhteen:

1. $A = 4$
2. $A = 2$
3. $A = \frac{33}{8} \approx 4,13$
- 4.

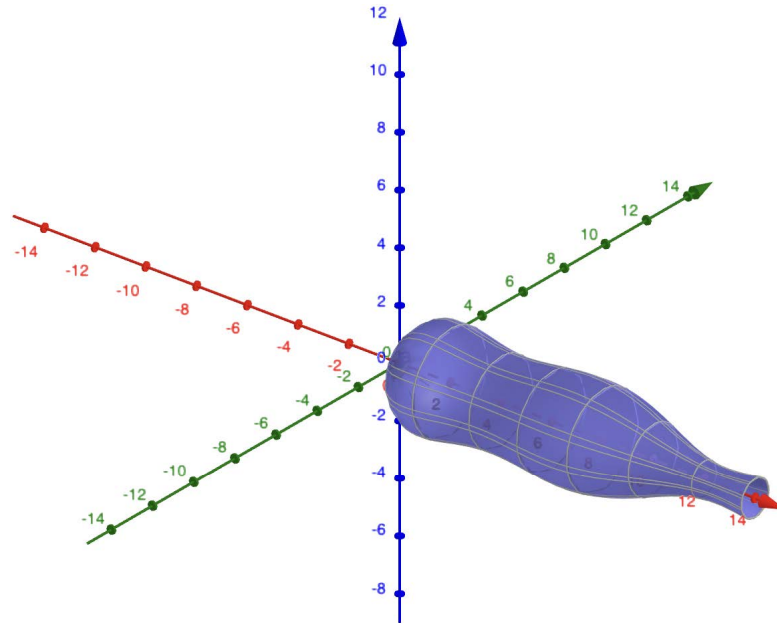
Tilavuussovelluksia:

5. a) $V = \int_a^b A(x) dx$
 b) $V = 777 \text{ cm}^3$
6. a) Siivuttamalla juustopalan z-akselin suuntaisesti, saadaan poikkileikkauspinnaksi yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita.
 b) $A_{\text{suurin kolmio}} = \frac{1}{2}rh$
 c) Kolmion pinta-ala kohdassa y on $A(x) = \frac{1}{2}xz = \frac{hx^2}{2r}$.
 d) $V_{\text{viipale}} = \frac{2}{3}hr^2$
7. $V_{\text{museo}} = \frac{8}{3}r^3 = 2550 \text{ m}^3$
- 8.
9. Tehtävässä oli ratkaistu pinta-ala välillä, kun $5 \leq x \leq 6$.
 Oikea vastaus $V = 5,5\pi \approx 17,28$.
10. $V = 4\pi \approx 12,57$
11. Esim.



$$V = \pi \int_0^{14} (-0,00004x^6 + 0,0018x^5 - 0,03316x^4 + 0,28826x^3 - 1,20607x^2 + 2,18219x + 0,49848)^2 dx$$

$$V = 1512,33 \text{ cm}^3 \approx 1,5 \text{ l}$$



12. a) $\sin(x)$ ja $\cos(x)$
 b) $V = 4,93 \text{ cm}^3$
 c) $A = 7,92$

Lisätehtäviä:

13. $\frac{4\sqrt{2}-5}{3} \approx 0,22$
 14. $A \approx 3,35$
 15. 61,66% rasian tilavuudesta on ilmaa.
 16. 1,41 euroa
 17. $V_{\text{vaasi}} = 1299,52 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{vaasirikki}} = 248,37 \text{ cm}^3$
 Rikkinäisessä vaasissa 80,9% vähemmän vettä verrattuna ehjään vaasiin.
 18. $h = 6,51 \text{ cm}$
 $A_{\text{mitta}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}} = 94,37 \text{ cm}^2$
 19. $V = \frac{243}{2}\pi \approx 381,7$