Ketjumurtoluvut

Pro gradu
Juha Rechardt
2435589
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Omistettu isäni Jukka Rechardtin muistolle.
Kiitos että aina autoit ja uskoit minuun.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä työssä ollaan käytetty Richard A Mollinin teoksen *”Fundamental number theory with applications”* [2] toista julkaisua. Julkaisusta on suomennettu työssä tarvittavia lauseita, todistuksia, seurauksia, huomautuksia ja määritelmiä. Muut yksittäiset määritelmät on poimittu eri luentomateriaaleista, joita on ollut vapaasti saatavilla ja ne on lähteissä eritelty erikseen.

Pro gradu tutkielmani käsittelee ketjumurtolukuja ja niiden ominaisuuksia. Ketjumurtoluvut voidaan jakaa äärellisiin ja äärettömiin ketjumurtolukuihin, eli päättyviin ja päättymättömiin ketjumurtolukuihin. Päättymättömät ketjumurtoluvut jakaantuvat jaksollisiin ja jaksottomiin.

Työn alussa käsitellään muutamia hyödyllisiä ja tarpeellisia lauseita sekä määritelmiä kuten lattiafunktio ja Eukleideen algoritmi, joita ketjumurtolukujen käsittelyssä tarvitaan. Esitieto-osuuden jälkeen aloitan määrittelemällä äärellisen ketjumurtoluvun sekä äärellisen yksinkertaisen ketjumurtoluvun. Kyseisessä kappaleessa myös todistetaan kuinka äärelliset ketjumurtoluvut kuuluvat rationaalilukuihin. Kappaleen loppuun määritellään vielä konvergentti ja todistetaan konvergentille muutamia hyödyllisiä ominaisuuksia.

Toisessa kappaleessa käsitellään vastaavasti päättymätön ketjumurtoluku ja myös sen yksinkertainen malli päättymätön yksinkertainen ketjumurtoluku. Kappaleessa todistetaan, että päättymätön yksinkertainen ketjumurtoluku on irrationaaliluku ja irrationaaliluvut ovat päättymättömiä ketjumurtolukuja.

Työn viimeinen osuus keskittyy määrittelemään jaksollisen ketjumurtoluvun. Kappaleen alkuun määritellään neliöityvät irrationaaliluvut ja todistetaan tähän liittyen muutama lause, jonka jälkeen todistetaan, että neliöityvät irrationaaliluvut ovat jaksollisia. Lopuksi määritellään vielä redusoitu irrationaaliluku ja puhdas jaksollisuus.

2 Esitietoja

Alkuun määritellään tarvittavia käsitteitä ja lauseita, mitä ketjumurtolukujen käsittelyssä tarvitaan. Lauseitten ja määritelmien tarkoituksena on selkeyttää myöhemmin esiintyviä lauseita ja luoda pohjaa niille, sekä lyhentää joitain pidempiä todistuksia.

2.1 Lattiafunktio

Määritelmä 1 (Lattiafunktio[1])**.** Olkoon luku x reaaliluku, tällöin suurinta kokonaislukua n, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin reaaliluku x, kutsutaan x:n *lattiafunktion* $\lfloor \cdot \rfloor$ arvoksi, eli

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Huomautus 1. [2] Positiivisen reaaliluvun lattiafunktio on sen kokonaisosa. Vastaavasti positiivisen reaaliluvun *desimaaliosa* $\{x\}$ saadaan reaaliluvun x ja sen lattiafunktion erotuksena

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Esimerkki 2.1. Lasketaan luvun $5,37$ lattiafunktio ja sen desimaaliosa. Lattiafunktioksi saadaan

$$\lfloor 5,37 \rfloor = 5$$

ja desimaaliosaksi

$$\{x\} = 5,37 - \lfloor 5,37 \rfloor = 5,37 - 5 = 0,37$$

Esimerkki 2.2. Luvun $-2,47$ lattiafunktio on

$$\lfloor -2,47 \rfloor = -3.$$

Negatiivisille reaaliluvuille desimaaliosan määrittäminen Huomautuksen 1 mukaisesti ei onnistu, sillä

$$\{x\} = -2,47 - \lfloor -2,47 \rfloor = -2,47 + 3 = 1,47.$$

[1] Lähde [2] Määritelmä 2.15 s. 108

[2] Lähde [2] Määritelmä 2.15 s. 108

2.2 Suurin yhteinen tekijä

Määritelmä 2 (Suurin yhteinen tekijä[3])**.** Kokonaislukujen a ja b joista kumpikaan ei ole nolla, *suurin yhteinen tekijä* eli $\mathrm{syt}(a, b)$ on positiivinen kokonaisluku q, joka toteuttaa seuraavat ehdot

1) luku q jakaa molemmat luvut a ja b,

2) mikä tahansa toinen yhteinen tekijä kokonaisluvuille a ja b on myös luvun q tekijä.

Määritelmä 3 (Keskenään jaottomat luvut[4])**.** Jos kahdesta kokonaisluvusta a ja b otettu suurin yhteinen tekijä on yksi

$$\mathrm{syt}(a, b) = 1,$$

niin kokonaislukujen sanotaan olevan *keskenään jaottomia*, eli niillä ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin kokonaisluku yksi.

Esimerkki 2.3. Laske seuraavien lukujen $\mathrm{syt}(a, b)$

a) Luvut $a = 13$ ja $b = 29$. Nyt $\mathrm{syt}(13, 29) = 1$. Lukujen 13 ja 29 suurin yhteinen tekijä on yksi, sillä molemmat luvut kuuluvat alkulukuihin, jolloin ne ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla yksi.

b) Luvut $a = 14$ ja $b = 35$. Nyt $\mathrm{syt}(14, 35) = 7$. Lukujen 14 ja 35 suurin yhteinen tekijä on 7, koska luku $14 = 7 \cdot 2$ ja luku $35 = 7 \cdot 5$. Tällöin luvuilla on yhteinen tekijä luku 7.

2.3 Kantaesitys ja jakoalgoritmi

Lause 2.1 (Kantaesitys[5])**.** Olkoon kokonaisluku $b > 1$. Tällöin jokaisella $n \geq 1$ on olemassa ei-negatiiviset kokonaisluvut m siten, että

$$n = \sum_{j=0}^{m} a_j b^j, \qquad 0 \leq a_j < b,$$

Lisäksi tulee olla $a_m \neq 0$. Edellä ollut esitys on yksikäsitteinen ja sitä kutsutan b-kantaesitykseksi. Esitykselle käytetään merkintää

$$n = (a_m a_{m-1} a_{m-1} .... a_0)_b.$$

[3]Lähde [2] Määritelmä 1.5 s.18
[4]Lähde [2] Määritelmä 1.10 s. 30
[5]Lähde [2] Lause 1.5 s. 8 - 9

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 2.2 (Jakoalgoritmi[6]). Olkoot $a, b \geq 1$ kokonaislukuja. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut p ja r siten, että

$$0 \leq r < a,$$

ja

$$b = ap + r.$$

Todistus. Tutkitaan aluksi tapausta $a = 1$. Tällöin $b = p$ ja $r = 0$, koska

$$b = 1 \cdot p + 0 = 1 \cdot p + r.$$

Mutta, jos luku $a > 1$, niin tutkittavalla luvulla b on yksikäsitteinen esitysmuoto,

$$b = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j a^j, \qquad 0 \leq b_j < a$$

kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Tällöin

$$b = b_0 + a \sum_{j=1}^{m} b_j a^{j-1} = ap + b_0, \qquad 0 \leq b_0 < a.$$

Jotta lukujen r ja p yksikäsitteisyys voidaan todentaa tarvitaan apuna edellä ollutta esitystä. Olkoon

$$b = ap_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 \leq a - 1,$$

missä luvulla p_1 on yksikäsitteinen esitystapa,

$$p_1 = c_0 + \sum_{j=1}^{m_1} c_j a^j, \qquad 0 \leq c_j < a$$

kaikilla j:n arvoilla $j = 0, 1, 2, \ldots, m_1$. Täten

$$b = ap_1 + r_1 = \sum_{j=0}^{m_1} c_j a^{j+1} + r_1 = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j a^j.$$

Yksikäsitteisen esitystavan voimme päätellä, että $m_1 = m - 1$ ja $b_j = c_{j-1}$, kun $j = 1, 2, \ldots, m$, sekä $r_1 = b_0 = r$. Tällöin

$$p_1 = \sum_{j=0}^{m_1} c_j a^j = \sum_{j=1}^{m} b_j a^{j-1} = p.$$

□

[6]Lähde [2] Lause 1.7 s. 16 - 17

Määritelmä 4 (Eukleideen algoritmi[7]). Olkoot $a \geq 0$ ja b kokonaislukuja. Tällöin *Eukleideen algoritmi* saadaan toistamalla Lauseen 2.2 jakoalgoritmia niin kauan, että viimeinen termi saadaan kahden luvun tulolla ilmaistuna, eli seuraavasti

$$\begin{aligned} b &= ap_1 + r_1, \qquad 0 < r_1 < a, \\ a &= r_1 p_2 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 p_3 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2, \\ &\dots \\ r_{n-3} &= r_{n-2} p_{n-1} + r_{n-1}, \qquad 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} p_n \end{aligned}$$

jossa $r_n = 0$.

Huomautus 2. Suurin yhteinen tekijä Määritelmän 2 mukaan Eukleideen algoritmissa on $\mathrm{syt}(a, b) = r_{n-1}$.

Esimerkki 2.4. Olkoon $a = 136$ ja $b = 758$. Etsi Eukleideen algoritmia hyödyntäen lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä.

$$\begin{aligned} 758 = b = a \cdot p_1 + r_1 &= 136 \cdot 5 + 78 \\ 136 = a = r_1 \cdot p_1 + r_2 &= 78 \cdot 1 + 58 \\ 78 = r_1 = r_2 \cdot p_2 + r_3 &= 58 \cdot 1 + 20 \\ 58 = r_2 = r_3 \cdot p_3 + r_4 &= 20 \cdot 2 + 18 \\ 20 = r_3 = r_4 \cdot p_4 + r_5 &= 18 \cdot 1 + 2 \\ 18 = r_4 = r_5 \cdot p_5 + r_6 &= 2 \cdot 9 + 0 \end{aligned}$$

Siis $\mathrm{syt}(136, 758) = r_5 = 2$.

2.4 Fibonaccin luku

Määritelmä 5 (Fibonaccin luku[8]). *Fibonaccin luvut* F_n muodostuvat luvuista $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$, sekä palautuskaavasta

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esimerkki 2.5. Fibonaccin lukuja ovat

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots .$$

[7] Lähde [2] (EA) s. 19

[8] Lähde luentomateriaali [1] Määritelmä 5 s. 11-12

2.5 Reaalilukujonojen ominaisuuksia

Lause 2.3 (Jonojen ominaisuuksia[9]). Olkoon $\{a_n\}$ sekä $\{b_n\}$ reaalilukujonoja. Tällöin on voimassa

a) Jos jono $\{a_n\}$ on rajoitettu sekä monotoninen, niin se konvergoi.

b) Oletetaan, että raja-arvoille pätee

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$$

ja on olemassa jono $\{c_n\}$ siten, että on olemassa sellainen N, että

$$a_n < c_n < b_n$$

kaikilla n joille pätee, että $n > N$. Siten saadaan

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

c) Jos

$$\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = 0,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2.6 Jälki ja normi toisen asteen polynomille

Määritelmä 6 (Toisen asteen polynomin jälki ja normi[10]). Olkoon $f(x)$ toisen asteen polynomi, jolloin sen *polynomiaste* on $deg(f) = d = 2$. Sekä olkoon α ja sen konjugaatti α' polynomifunktion $f(x)$ *nollakohtia*. Tällöin

$$f(x) = x^2 - Tr(\alpha)x + N(\alpha),$$

missä

$$Tr(\alpha) = \alpha + \alpha'$$

jota kutsutaan nollakohdan α *jäljeksi*, ja

$$N(\alpha) = \alpha\alpha'$$

kutsutaan juuren α *normiksi*.

[9] Lähde [2] Lause A.14 s. 307

[10] Lähde [2] Lause A.9 s. 301 ja Huomautus 5.1 s. 222. Määritelmä sovellettu

3 Äärellinen ketjumurtoluku

Määritelmä 7 (Äärellinen ketjumurtoluku[11]). Olkoon q_k reaaliluku, kun $k = 0, 1, 2, \dots, l$. Jossa $l > 0$ ja $q_k \in \mathbb{R}^+$, kun $k > 0$. Tällöin *äärelliseksi ketjumurtoluvuksi* sanotaan lauseketta

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{l-1} + \frac{1}{q_l}}}}. \tag{1}$$

Kokonaisluku l ilmaisee äärellisen ketjumurtoluvun α pituuden, jolle käytetään myös merkintää

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_l \rangle.$$

Määritelmä 8 (Äärellinen yksinkertainen ketjumurtoluku[12]). Olkoon kokonaisosa q_0 luonnollinen luku ja osanimittäjät q_k positiivisia kokonaislukuja, kun $k > 0$. Tällöin äärellistä ketjumurtolukua sanotaan *yksinkertaiseksi.*

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{l-1} + \frac{1}{q_l}}}}.$$

Huomautus 3. Äärellisessä ketjumurtoluvussa ensimmäinen kokonaisluku q_0 on kokonaisosa reaaliluvusta α, lattiafunktion määritelmän nojalla

$$\lfloor \alpha \rfloor = q_0.$$

Kokonaisosa erotetaan puolipisteen avulla muista kokonaisluvuista q_k, jotka vastaavasti ovat osanimittäjiä äärellisessä ketjumurtoluvussa.

Lause 3.1 (Äärellinen yksinkertainen ketjumurtoluku on rationaalinen[13]). *Olkoon α reaaliluku. Se kuuluu myös rationaalilukuihin jos ja vain jos α voidaan esittää äärellisenä yksinkertaisena ketjumurtolukuna.*

Todistus. Jos ketjumurtoesitys on muotoa $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_l \rangle$, jossa q_k kuuluu kokonaislukuihin, todistuksessa voidaan ilmaista tutkittava ketjumurtoluku yhtälön (1) mukaisesti. Desimaaliosaa käsiteltäessä pyöritetään ketjumurtoluku muotoon, jossa desimaaliosalla on vain yksi osoittaja ja yksi nimittäjä. Lavennetaan tämän jälkeen kokonaisosa saman nimiseksi kuin desimaaliosa, jolloin kokonaisosa ja desimaaliosa voidaan yhdistää yhdeksi murtoluvuksi. Tällöin ketjumurtolukuesitys α kuuluu rationaalilukuihin.

[11]Lähde [2] Määritelmä 1.6 s.23-24
[12]Lähde [2] Määritelmä 1.6 s.23-24
[13]Lähtde [2] Lause 1.11 s. 24

Käänteisesti voidaan olettaa, että b/a on rationaaliluku, kun $a > 0$ ja b ovat kokonaislukuja. Tällöin voimme asettaa $a = r_0$ ja $b = r_{-1}$ ja voimme hyödyntää Määritelmän 4 Eukleideen algoritmiä, jonka avulla saadaan rekursiivinen relaatio

$$\begin{aligned} r_{j-1} &= r_j q_j + r_{j+1}, \\ 0 &< r_{j+1} < r_j, \end{aligned} \tag{2}$$

jollain $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, missä viimeinen arvo n eli $r_n = 0$ ja vastaavasti r_{n-1} saa arvokseen suurimman yhteisen tekijän luvuista a ja b eli $\mathrm{syt}(a, b)$. Samoin ketjumurtoluvun tapauksessa, kun

$$\alpha_j = r_{j-1}/r_j,$$

niin sijoittamalla yhtälön (2) aiempaan yllä olevaan yhtälöön ja tekemällä kaksi erillistä murtolukua saadaan

$$\alpha_j = q_j + \frac{r_{j+1}}{r_j} = q_j + \frac{1}{\frac{r_j}{r_{j+1}}} = q_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}},$$

kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Täten

$$b/a = \alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}, \alpha_{n-1} \rangle = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \rangle.$$

Koska $\alpha_{n-1} = q_{n-1}$, niin viimeinen yhtäsuuruus pitää paikkansa ja siten todistus on selvä. $\square$

Esimerkki 3.1. Määrätään luvun $\alpha = 11/8$ äärellinen yksinkertainen ketjumurtolukuesitys.

Määritelmän 1 avulla

$$\lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor \frac{11}{8} \right\rfloor = 1 = q_0$$

ja Huomautuksen 1 mukaan

$$\{\alpha\} = \frac{11}{8} - \left\lfloor \frac{11}{8} \right\rfloor = \frac{11}{8} - 1 = \frac{11}{8} - \frac{8}{8} = \frac{3}{8}.$$

Tällöin

$$\alpha = 1 + \frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Jossa $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$ ja $q_3 = 2$. Eli $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, q_3 \rangle = \langle 1; 2, 1, 2 \rangle$.

Esimerkki 3.2. Esitetään $\alpha = \langle 3; 7, 2 \rangle$ rationaalilukuna.

Nyt $q_0 = 3$, $q_1 = 7$ ja $q_2 = 2$. Ketjumurtoluku on muotoa

$$\begin{aligned}
\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} &= 1 + \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = q_0 + \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} \\
&= \frac{q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{(q_1 q_2 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan nyt yhtälöön q_0, q_1 ja q_2

$$= \frac{(3 \cdot 7 + 1) \cdot 2 + 3}{2 \cdot 7 + 1} = \frac{47}{15}.$$

Siis $\langle 3; 7, 2 \rangle$ on rationaalilukuna $47/15$.

3.1 Konvergentti

Määritelmä 9 (Konvergentti[14])**.** Olkoon α äärellinen yksinkertainen ketjumurtoluku $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_l \rangle$, missä $q_k > 0$ on kokonaisluku ja $l > 0$. Tällöin α:n K. *konvergentti* on $C_K = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_K \rangle$, kaikilla $K \leq l$.

[14] Lähde [2] Määritelmä 1.12 s. 25

Lause 3.2 (Konvergentin uusi esitysmuoto [15]). Olkoon $l > 0$ kokonaisluku ja olkoon α äärellisen yksinkertaisen ketjumurtoluvun esitysmuoto $\alpha = \langle q_0, q_1, q_2, \ldots, q_l\rangle$. Määritellään jonot $\{A_K\}$ ja $\{B_K\}$ seuraavilla palautuskaavoilla

$$A_{-2} = 0, \qquad A_{-1} = 1, \qquad A_K = q_K A_{K-1} + A_{K-2} \tag{3}$$

ja

$$B_{-2} = 1, \qquad B_{-1} = 0, \qquad B_K = q_K B_{K-1} + B_{K-2}, \tag{4}$$

kun $K \geq 2$. Tällöin

$$C_K = \frac{A_K}{B_K} = \frac{q_K A_{K-1} + A_{K-2}}{q_K B_{K-1} + B_{K-2}}$$

on α:n K. konvergentti, kun $K \leq l$.

Todistus. Käytetään todistuksessa apuna induktiotodistusta K:n suhteen. Tutkitaan ensin tapausta $K = 0$, siten $C_0 = q_0$ eli

$$C_0 = \frac{A_0}{B_0} = \frac{q_0 A_{0-1} + A_{0-2}}{q_0 B_{0-1} + B_{0-2}} = \frac{q_0 A_{-1} + A_{-2}}{q_0 B_{-1} + B_{-2}} = \frac{q_0 \cdot 1 + 0}{q_0 \cdot 0 + 1} = \frac{q_0}{1} = q_0.$$

Oletetaan, että

$$C_L = \frac{A_L}{B_L} = \frac{q_L A_{L-1} + A_{L-2}}{q_L B_{L-1} + B_{L-2}}.$$

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, kun $K = L + 1$. Nyt

$$C_{L+1} = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{L+1}\rangle = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{L-1}, q_L + 1/q_{L+1}\rangle.$$

Täten on mahdollista käyttää induktio-oletusta. Tällöin

$$C_{L+1} = \frac{(q_L + 1/q_{L+1})A_{L-1} + A_{L-2}}{(q_L + 1/q_{L+1})B_{L-1} + B_{L-2}} = \frac{(q_L q_{L+1} + 1)A_{L-1} + q_{L+1}A_{L-2}}{(q_L q_{L+1} + 1)B_{L-1} + q_{L+1}B_{L-2}}.$$

Alkuun poistetaan murtolukumuodot osoittajasta ja nimittäjästä ja kerrotaan sulkeet auki. Tämän jälkeen yhdistetään samankertoimiset tekijät yhteen, jolloin

$$C_{L+1} = \frac{A_{L-1} + q_{L+1}q_L A_{L-1} + q_{L+1}A_{L-2}}{B_{L-1} + q_{L+1}q_L B_{L-1} + q_{L+1}B_{L-2}} = \frac{A_{L-1} + q_{L+1}(q_L A_{L-1} + A_{L-2})}{B_{L-1} + q_{L+1}(q_L B_{L-1} + B_{L-2})}.$$

Käyttämällä palautuskaavoja (3) ja (4) saadaan sievennettyä yhtälöä muotoon

$$C_{L+1} = \frac{A_{L-1} + q_{L+1}A_L}{B_{L-1} + q_{L+1}B_L} = \frac{A_{L+1}}{B_{L+1}}.$$

Eli $C_{L+1} = A_{L+1}/B_{L+1}$. Induktiotodistus on valmis ja todistus on selvä. $\square$

[15] Lähde [2] Lause 1.12 s. 25.

Lause 3.3 (Konvergentin ominaisuuksia[16]). Olkoon α äärellinen yksinkertainen ketjumurtoluku $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_l \rangle$, kun $l > 0$ on kokonaisluku. Sekä olkoon kaksi jonoa $\{A_K\}$ ja $\{B_K\}$ määritelty samalla tavalla kuin edellisessä Lauseessa 3.2. Tällöin seuraavat ominaisuudet pitävät paikkansa:

1. $$A_K B_{K-1} - A_{K-1} B_K = (-1)^{K-1} \qquad (K \geq 1),$$

2. $$A_K B_{K-2} - A_{K-2} B_K = (-1)^K q_K \qquad (K \geq 2),$$

3. $B_K \geq F_{K+1}$ kaikilla $K \in \mathbb{N}$, jossa F_{K+1} on $(K+1)$. Fibonaccin luku,

4. $$C_K - C_{K-1} = (-1)^{K-1}/(B_k B_{K-1}) \qquad (K \geq 1),$$

5. $$C_K - C_{K-2} = (-1)^K q_k/(B_k B_{K-2}) \qquad (K \geq 2).$$

Todistus ehto 1). Todistetaan ensimmäinen ehto induktiotodistuksella K:n suhteen

$$A_K B_{K-1} - A_{K-1} B_K = (-1)^{K-1}.$$

Tutkitaan tilannetta $K = 1$. Tämä vastaa perusaskelta. Lasketaan väitteen vasenpuoli käyttämällä alkuarvoja, jotka on annettu lauseessa 3.2

$$\begin{aligned}
&A_1 B_{1-1} - A_{1-1} B_1 \\
=&A_1 B_0 - A_0 B_1 \\
=&(q_1 A_0 + A_{-1})(q_0 B_{-1} + B_{-2}) - (q_0 A_{-1} + A_{-2})(q_1 B_0 + B_{-1}) \\
=&(q_0 q_1 + 1)(q_0 \cdot 0 + 1) - (q_0 \cdot 1 + 0)(q_1 \cdot 1 + 0) \\
=&(q_0 q_1 + 1) - q_0 q_1 = 1.
\end{aligned}$$

Vastaavasti yhtälön oikeapuoli

$$(-1)^{K-1} = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1.$$

Tämän jälkeen tehdään induktio-oletus, jossa $K = L - 1$ ja

$$A_{L-1} B_{L-2} - A_{L-2} B_{L-1} = (-1)^{L-2}.$$

Käytetään Lauseen 3.2 palautuskaavoja

$$A_L = q_L A_{L-1} + A_{L-2} \quad \text{ja} \quad B_L = q_L B_{L-1} + B_{L-2}.$$

[16] Lähde [2] Lause 5.1 s. 209 - 210.

Sijoitetaan arvot yhtälöön ja avataan sulkeet, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}A_L B_{L-1} - A_{L-1} B_L &= (q_L A_{L-1} + A_{L-2}) B_{L-1} - A_{L-1}(q_L B_{L-1} + B_{L-2}) \\ &= q_L A_{L-1} B_{L-1} + A_{L-2} B_{L-1} - q_L A_{L-1} B_{L-1} - A_{L-1} B_{L-2} \\ &= q_L A_{L-1} B_{L-1} - q_L A_{L-1} B_{L-1} + A_{L-2} B_{L-1} - A_{L-1} B_{L-2} \\ &= A_{L-2} B_{L-1} - A_{L-1} B_{L-2} = (-1)^{L-1}.\end{aligned}$$

Induktiotodistus on valmis ja todistus on selvä. □

Todistus ehto 2). Käytetään apuna Lauseen 3.2 palautuskaavoja:

$$A_L B_{L-2} - A_{L-2} B_L = (q_L A_{L-1} + A_{L-2}) B_{L-2} - A_{L-2}(q_L B_{L-1} + B_{L-2}).$$

Poistetaan sulkeet ja sijoitetaan samankertoimiset tekijät yhteen:

$$\begin{aligned}A_L B_{L-2} - A_{L-2} B_L &= q_L A_{L-1} B_{L-2} + A_{L-2} B_{L-2} - q_L A_{L-2} B_{L-1} - A_{L-2} B_{L-2} \\ &= q_L A_{L-1} B_{L-2} - q_L A_{L-2} B_{L-1} + A_{L-2} B_{L-2} - A_{L-2} B_{L-2} \\ &= q_L (A_{L-1} B_{L-2} - A_{L-2} B_{L-1}).\end{aligned}$$

Ehdon 1 nojalla saadaan

$$A_L B_{L-2} - A_{L-2} B_L = q_L (-1)^{L-2} = q_L (-1)^L.$$

Todistus on siten selvä. □

Todistus ehto 3). Kolmannen ehdon todistamisessa hyödynnetään induktiotodistusta. Tutkitaan induktioaskel $K = 1$, joten

$$B_1 = q_1, \qquad F_2 = 1$$

ja

$$q_1 \geq 1.$$

Siten

$$B_1 \geq F_2.$$

Oletetaan, että

$$B_K \geq F_{K+1}$$

kaikilla $K \leq n$. Tällöin

$$B_{n+1} = q_n B_{n-1} + B_n \geq q_n F_n + F_{n+1} \geq F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

Näin ollen todistus on selvä. □

Todistus ehto 4). Neljännen ehdon todistamisessa käytetään hyödyksi ensimmäistä ehtoa,

$$A_K B_{K-1} - A_{K-1} B_K = (-1)^{K-1}.$$

Jaetaan koko yhtälöä lausekkeella $B_K B_{K-1}$. Tällöin siis saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{A_K B_{K-1}}{B_K B_{K-1}} - \frac{A_{K-1} B_K}{B_K B_{K-1}} &= \frac{(-1)^{K-1}}{B_K B_{K-1}} \\
\frac{A_K}{B_K} - \frac{A_{K-1}}{B_{K-1}} &= \frac{(-1)^{K-1}}{B_K B_{K-1}} \\
C_K - C_{K-1} &= \frac{(-1)^{K-1}}{B_K B_{K-1}}.
\end{aligned}$$

Todistus on siten selvä. □

Todistus ehto 5). Todistetaan viides ehto

$$C_K - C_{K-2} = (-1)^K q_k/(B_k B_{K-2}) \qquad (K \geq 2).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
C_K - C_{K-2} &= \frac{A_K}{B_K} - \frac{A_{K-2}}{B_{K-2}} \\
&= \frac{A_K B_{K-2}}{B_K B_{K-2}} - \frac{A_{K-2} B_K}{B_K B_{K-2}} \\
&= \frac{A_K B_{K-2} - A_{K-2} B_K}{B_K B_{K-2}} \\
&= \frac{(-1)^K q_K}{B_K B_{K-2}}.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa suoraan ehdosta kaksi, jossa

$$A_K B_{K-2} - A_{K-2} B_K = (-1)^K q_K.$$

Todistus on siis selvä. □

Lause 3.4 (Konvergentin määrittäminen[17])**.** Jos ketjumurtoluvun esitysmuodolle $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \cdots, q_k \rangle$ on olemassa K. konvergentti C_K, niin silloin

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots > C_{2K-1} > C_{2K} > C_{2K-2} > \cdots > C_4 > C_2 > C_0.$$

Tämä pätee kaikilla kokonaisluvuilla $0 \leq K$.

[17] Lähde [2] Lause 5.2 s. 211

Todistus. Lauseen 3.3 ehdolla 5 tiedetään

$$C_K - C_{K-2} = (-1)^K q_K/(B_K B_{K-2}).$$

Tutkitaan seuraavaksi K:ta, kun se on parillinen tai pariton. Kun K on pariton saadaan

$$C_K < C_{K-2},$$

joka tarkoittaa sitä, että paritonta kokonaislukua K kasvatettaessa konvergentin arvo pienenee, siten siis

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots .$$

Vastaavasti, jos teemme saman parillisilla kokonaisluvuilla K, niin saamme

$$C_K > C_{K-2}.$$

Tällöin arvo lähtee kasvamaan kasvatettaessa parillista kokonaislukua K, eli

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots .$$

Lisäksi pystymme käyttämään apuna myös Lauseen 3.3 ehtoa 4

$$C_K - C_{K-1} = (-1)^{K-1}/(B_k B_{K-1}).$$

Ehdon avulla voimme todistaa, että parittomat konvergentin arvot ovat suurempia, kuin parilliset konvergentit kaikilla kokonaisluvuilla $K \geq 0$. Voimme esittää parittomat konvergentit muodossa C_{2j-1} ja parilliset vastaavasti muodolla C_{2j}, kun $j \geq 0$ on kokonaisluku. Joten

$$C_{2j-1} > C_{2j}.$$

Tällöin

$$C_{2j-1} > C_{2j+2K-1} > C_{2j+2K} > C_{2K}.$$

Tämä pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla j ja K. □

Lause 3.5 (Konvergentin suurin yhteinen tekijä)**.** Konvergentille $C_K = A_K/B_K$ sen kokonaislukujen suurin yhteinen tekijä on

$$\text{syt}(A_K, B_K) = 1$$

kaikilla kokonaisluvuilla K.

Todistus. Lähdetään todistuksessa liikkeelle Lauseen 3.3 ensimmäisestä ehdosta

$$A_K B_{K-1} - A_{K-1} B_K = (-1)^{K-1} \qquad (K \geq 1). \tag{5}$$

Koska ehdon yhtäsuuruus on jo todistettu, niin tästä seuraa se että, jos luvuilla A_K ja B_K on yhteinen tekijä, joka jakaa molemmat luvut, niin sen pitäisi jakaa myös yhtälön (5) vasen puoli. Tämän perusteella lukujen suurin yhteinen tekijä on yksi. Näin todistus on selvä. □

4 Päättymätön ketjumurtoluku

Määritelmä 10 (Päättymätön ketjumurtoluku)**.** Olkoon q_k reaaliluku, kun $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tällöin *päättymättömäksi ketjumurtoluvuksi* sanotaan lauseketta

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \ddots}}}}.$$

Päättymättömän ketjumurtolukua merkitään seuraavasti

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_l, q_{l+1}, \ldots \rangle.$$

Määritelmä 11 (Päättymätön yksinkertainen ketjumurtoluku)**.** Päättymätöntä ketjumurtolukua sanotaan *yksinkertaiseksi*, kun ketjumurtoluvun kokonaisosa $q_0 \geq 0$ ja osanimittäjät $q_k > 0$, kun $k > 0$, ovat kokonaislukuja.

Lause 4.1 (Konvergentin rajat ja päättymätön ketjumurtoluku[18])**.** Olkoon $q_k > 0$ kokonaisluku, kun $k > 0$. Jos $q_0, q_1, q_2, \ldots$ on kokonaisluvuista koostuva jono ja jos $C_K = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_K \rangle$ on K. konvergentti, niin tällöin konvergentilla on raja-arvo äärettömyydessä

$$\lim_{K \to \infty} C_K = \alpha.$$

Saatua raja-arvoa α kutsutaan äärettömän ketjumurtoluvun arvoksi

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots \rangle.$$

Todistus. Lauseen 3.4 nojalla tiedämme, että parittomilla kokonaisluvuilla konvergentit C_{2j+1} muodostavat monotonisesti vähenevän jonon, joka on alhaalta rajoitettu. Samalla tiedetään, että parillisilla kokonaisluvuilla, konvergentti C_{2j} on monotonisesti kasvava sekä rajoitettu. Tämän lisäksi saamme Lauseen 2.3 a-kohdan nojalla, että on olemassa reaaliluku α_1 siten, että

$$\lim_{j \to \infty} C_{2j+1} = \alpha_1,$$

ja jokin toinen reaaliluku siten, että

$$\lim_{j \to \infty} C_{2j} = \alpha_2.$$

[18] Lähde [2] Lause 5.3 s. 211 - 212

Lauseen 3.3 ehtoa 4 apuna käyttäen tiedetään

$$C_{2j+1} - C_{2j} = \frac{1}{B_{2j+1}B_{2j}}.$$

Hyödyntämällä saman lauseen ehtoa 3 saadaan

$$\frac{1}{B_{2j+1}B_{2j}} \leq \frac{1}{(2j+1)(2j)}.$$

Siten konvergenttien erotuksen raja-arvo äärettömyydessä suppenee kohti nollaa. Tällöin siis

$$\lim_{j\to\infty} (C_{2j+1} - C_{2j}) = 0.$$

Täten

$$\alpha_1 = \lim_{j\to\infty} C_{2j+1} = \lim_{j\to\infty} C_{2j} = \alpha_2$$

Siis, koska $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, niin ketjumurtolukuesitys α voidaan esittää konvergentin raja-arvon avulla

$$\alpha = \lim_{j\to\infty} C_j = \lim_{j\to\infty} \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_j\rangle = \langle q_0; q_1, q_2, \dots q_j, q_{j+1}, \dots \rangle.$$

Todistus on täten selvä. □

4.1 Irrationaaliluvut päättymättöminä ketjumurtolukuina

Lause 4.2 (Päättymätön yksinkertainen ketjumurtoluku on irrationaalinen[19]). Olkoon $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k$ kokonaislukuja, joista $q_k > 0$, kun $k > 0$. Tällöin yksinkertainen päättymätön ketjumurtolukuesitys

$$\langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots \rangle$$

vastaa irrationaalilukua α. Lisäksi mikään toinen yksinkertainen päättymätön ketjumurtolukuesitys ei voi kuvautua samaksi irrationaaliluvuksi.

Todistus. Olkoon päättymättömän ketjumurtoluvun esitysmuoto

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_K, q_{K+1}, \dots \rangle,$$

sekä olkoon tällä ketjumurtoluvulla K. konvergentti

$$C_K = \frac{A_K}{B_K} = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_K\rangle.$$

[19] Lähde [2] Lause 5.4 s. 212-213

Lauseen 4.1 nojalla, kaikilla kokonaisluvuilla $K > 0$ pätee

$$C_{2K} < \alpha < C_{2K+1}.$$

Lisäksi käyttämällä Lauseen 3.3 ehtoa 4, saadaan

$$0 < \alpha - C_{2K} < C_{2K+1} - C_{2K} = \frac{1}{B_{2K+1}B_{2K}},$$

josta seuraa

$$0 < \alpha - C_{2K} = \alpha - \frac{A_{2K}}{B_{2K}} < \frac{1}{B_{2K+1}B_{2K}}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi edellä ollutta epäyhtälöä tarkemmin. Kerrotaan epäyhtälöä puolittain termillä B_{2K}, jolloin

$$0 < \alpha B_{2K} - A_{2K} < \frac{1}{B_{2K+1}}.$$

Tehdään todistus loppuun vastaoletuksella. Oletetaan, että $\alpha = a/b$, missä a ja $b \neq 0$ ovat kokonaislukuja. Tällöin

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{aB_{2K}}{b} - A_{2K} < \frac{1}{B_{2K+1}} \qquad\qquad | \cdot b \\
0 &< \frac{aB_{2K}b}{b} - A_{2K}b < \frac{b}{B_{2K+1}} \\
0 &< aB_{2K} - A_{2K}b < \frac{b}{B_{2K+1}}.
\end{aligned}$$

Tiedetään, että $aB_{2K} - A_{2K}b$ on kokonaisluku, kun $K > 0$. Kuitenkin Lauseen 3.3 ehdosta 3. saamme, että

$$B_{2K+1} > 2K + 1,$$

kun $K > 0$. Ehdosta seuraa, että on pakko olla olemassa jokin luonnollinen luku L siten, että

$$B_{2L+1} > b.$$

Näin ollen

$$0 < aB_{2L} - A_{2L}b < \frac{b}{B_{2L+1}} < 1.$$

Tämä on mahdotonta, sillä ei ole olemassa sellaista kokonaislukua, joka kuuluisi lukujen 0 ja 1 välille. Tästä seuraa ristiriita, jonka johdosta tiedämme nyt, että ketjumurtoluku esitys α on irrationaalinen. Seuraavaksi täytyy vielä todistaa, että irrationaaliluku voidaan esittää vain yhden päättymättömän yksinkertaisen ketjumurtolukuesityksen avulla.

Tehdään oletus, että on löytyy jokin päättymätön yksinkertainen ketjumurtolukuesitys a siten, että

$$a = \langle a_0; a_1, a_2, \ldots \rangle = \alpha.$$

Nyt

$$\alpha_0 = C_0 < \alpha < C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \leq a_0 + 1.$$

Koska Määritelmien 1 ja 7 nojalla tiedetään, kuinka ketjumurtolukuesitys muodostuu, niin

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor.$$

Koska myös

$$q_0 = \lfloor \alpha \rfloor,$$

niin a_0 ja q_0 tulee olla samat

$$a_0 = q_0. \tag{6}$$

Tällöin induktiotodistusta hyödyntämällä tutkitaan molempien ketjumurtolukujen esityksiä a_k ja q_k. Nyt oletuksen nojalla

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}, \qquad q = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}},$$

joka on sama kuin

$$a = a_0 + \frac{1}{\langle a_1, a_2, \ldots \rangle}, \qquad q = q_0 + \frac{1}{\langle q_1, q_2, \ldots \rangle}.$$

Yhtälön (6) nojalla

$$a_0 + \frac{1}{\langle a_1, a_2, \ldots \rangle} = a_0 + \frac{1}{\langle q_1, q_2, \ldots \rangle},$$

joten

$$\langle a_1, a_2, \ldots \rangle = \langle q_1, q_2, \ldots \rangle.$$

Toistamalla edellä ollut määrittely, jotta saadaan $a_1 = q_1$. Voidaan tämän jälkeen hyödyntämällä induktiota todistaa α:n esityksen yksikäsitteisyys, jolloin $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots q_j, q_{j+1}, \ldots \rangle$. Näin todistus on selvä.

Tämä todistaa vuorostaan sen, että ei ole olemassa toista ketjumurtolukuesitystä, joka kuvautuisi samaksi irrationaaliluvuksi. Tämän seurauksena voimme todeta, että todistus on selvä ja päättymätön yksinkertainen ketjumurtoluku on irrationaalinen. □

Seuraus 1. Jos $\alpha = \langle \alpha_0; \alpha_1, \dots \rangle$ ja $\beta = \langle \beta_0; \beta_1, \dots \rangle$ ovat erillisiä päättymättömiä ketjumurtolukuja, niin ne ovat kaksi eri irrationaalilukua.

Seuraus 2. [20]Jos kaksi päättymätöntä yksinkertaista ketjumurtolukua $\alpha = \langle \alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$ ja $\beta = \langle \beta_0; \beta_1, \beta_2, \dots \rangle$ kuvautuvat irrationaaliluvuiksi a ja b ja nämä irrationaaliluvut ovat samat $a = b$. Tällöin päättymättömät yksinkertaiset ketjumurtoluvut α ja β ovat samat $\alpha = \beta$.

Lause 4.3 (Ketjumurtoluvun osamäärän esitystapa[21])**.** Olkoon $\alpha_K > 0$ reaaliluku ja olkoon päättymätön ketjumurtoluku $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots \rangle$ irrationaaliluku. Tällöin

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_{K-1}, \alpha_K \rangle = \frac{\alpha_K A_{K-1} + A_{K-2}}{\alpha_K B_{K-1} + B_{K-2}},$$

missä A_K/B_K on α:lle sen K. konvergentti.

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 4.4 (Irrationaaliluvut ovat päättymättömiä ketjumurtolukuja[22])**.** Olkoon irrationaaliluku α_0 rekursiivisesti määritetty, kun $k \geq 0$,

$$q_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$$

ja

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - q_k}.$$

Tällöin päättymätöntä yksinkertaista ketjumurtolukua α_0 voidaan pitää yksikäsitteisenä esityksenä

$$\langle q_0; q_1, q_2, \dots \rangle.$$

Todistus. Määritelmän nojalla tiedetään, että q_k on kokonaisluku, kun $k \geq 0$. Lisäksi, koska α_0 on irrationaaliluku, niin $\alpha_0 \neq q_0$. Induktion nojalla tiedämme, että α_k on olemassa ja se on irrationaaliluku kaikilla $k \geq 0$, koska

$$\alpha_k = q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}. \tag{7}$$

Siten kaikilla kokonaisluvulla $k \geq 0$ pätee, että $\alpha_k \neq q_k$. Määritelmästä saadaan

$$q_k < \alpha_k < q_k + 1,$$

[20]Lähde [2] Seuraus 5.2 s. 213
[21]Lähde [2] Lause 5.5 s. 214 sekä hyödynnetty Lauseen 3.2 todistusta.
[22]Lähde [2] Lause 5.6 s. 214 - 215

joten

$$0 < \alpha_k - q_k < 1.$$

Näin ollen saadaan kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 0$ Määritelmän 1 mukaan, että

$$q_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\alpha_k - q_k} \right\rfloor \geq 1.$$

Käyttämällä yhtälöä (7) ja hyödyntämällä sitä jokaisella askeleella q_k:lle saadaan

$$\alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\alpha_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\alpha_3}}} = \cdots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}}}.$$

Tämä on sama kuin

$$\langle q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_{k+1} \rangle.$$

Lauseen 4.3 nojalla voidaan kirjoittaa

$$\alpha_0 = \langle q_0; q_1, q_2, \ldots \alpha_{K+1} \rangle = \frac{\alpha_{K+1} A_{K+1-1} + A_{K+1-2}}{\alpha_{K+1} B_{K+1-1} + B_{K+1-2}} = \frac{\alpha_{K+1} A_K + A_{K-1}}{\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}}.$$

Koska esitysmuodolle $\langle q_0; q_1, q_2, \ldots \rangle$ on olemassa K. konvergentti $C_K = A_K / B_K$, niin

$$\alpha_0 - C_K = \frac{\alpha_{K+1} A_K + A_{K-1}}{\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}} - \frac{A_K}{B_K}.$$

Lavennetaan murtolukuesitykset nyt samannimisiksi

$$\alpha_0 - C_K = \frac{(\alpha_{K+1} A_K + A_{K-1}) B_K}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K} - \frac{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) A_K}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K}$$

$$= \frac{(\alpha_{K+1} A_K + A_{K-1}) B_K - (\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) A_K}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K}.$$

Avataan seuraavaksi osoittajasta sulkeet auki ja sievennetään yhtälöä

$$\alpha_0 - C_K = \frac{\alpha_{K+1} A_K B_K + A_{K-1} B_K - \alpha_{K+1} B_K A_K - B_{K-1} A_K}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K}$$

$$= \frac{A_{K-1} B_K - B_{K-1} A_K}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K} = \frac{-(B_{K-1} A_K - A_{K-1} B_K)}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K}.$$

Lauseen 3.3 ehdon 1 nojalla saadaan

$$\alpha_0 - C_K = \frac{-(-1)^{K-1}}{(\alpha_{K+1} B_K + B_{K-1}) B_K}.$$

Kuitenkin

$$\alpha_{K+1}B_K + B_{K-1} > q_{K+1}A_K + B_{K-1} = B_{K+1},$$

siten

$$| \alpha_0 - C_K |< \frac{1}{B_K B_{K+1}}.$$

Näin ollen Lauseen 3.3 ehdon 3 nojalla saadaan

$$| \alpha_0 - C_K |< \frac{1}{K(K+1)}.$$

Täten esityksen konvergentin C_K raja-arvo äärettömyydesssä on sama kuin α_0

$$\lim_{K\to\infty} C_K = \alpha_0 = \langle q_0, q_1, q_2, \ldots \rangle.$$

Esityksen yksikäsitteisyys saadaan Seurauksen 2 nojalla. Näin ollen todistus on selvä. □

Seuraus 3. [23]Jos C_K on K. konvergentti irrationaaliluvulle α, kun $C_K = A_K/B_K$, kokonaisluvulla $K \geq 0$. Tällöin

$$\left| \alpha - \frac{A_K}{B_K} \right| < \frac{1}{B_K^2}.$$

Esimerkki 4.1. Määrätään luvun $\sqrt{12}$ päättymätön ketjumurtolukuesitys.

Nyt

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sqrt{12}, & q_0 &= \lfloor \alpha_0 \rfloor = \underline{3},\\
\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - q_0} = \frac{1}{\sqrt{12}-3}, & q_1 &= \lfloor \alpha_1 \rfloor = \underline{2},\\
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{12}-3} - 2} = 2\cdot\sqrt{3}+3, & q_2 &= \lfloor \alpha_2 \rfloor = \underline{6},\\
\alpha_3 &= \frac{1}{\alpha_2 - q_2} = \frac{1}{(2\cdot\sqrt{3}+3)-2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{3}, & q_3 &= \lfloor \alpha_3 \rfloor = \underline{2} = q_1,\\
\alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 - q_3} = \frac{1}{\frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{3} - 2} = 2\cdot\sqrt{3}+3, & q_4 &= \lfloor \alpha_4 \rfloor = \underline{6} = q_2.
\end{aligned}$$

Huomataan alkanut toisto $q_1 = q_3$ ja $q_2 = q_4$, joten esitys saadaan määrättyä muotoon $\sqrt{12} = \langle 3; 2, 6, 2, 6, \ldots \rangle$.

[23]Lähde [2] Seuraus 5.3 s. 215

Lemma 4.1. [24]Olkoon A_K/B_K K. konvergentti päättymättömälle yksinkertaiselle ketjumutoluvulle, joka on esitys irrationaaliluvusta α, kun kokonaisluku $K \geq 0$. Jos on olemassa kaksi kokonaislukua r ja $s > 0$ siten, että

$$| s\alpha - r | < | B_K\alpha - A_K | . \tag{8}$$

Tällöin s:lle pätee $s \geq B_{K+1}$.

Todistus. Tehdään Lemman todistus vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että yhtälö (8) pitää paikkansa, sekä oletetaan, että kokonaisluvulle s pätee

$$s < B_{K+1}. \tag{9}$$

Käsitellään yhtälöparia

$$A_K x + A_{K+1} y = r, \tag{10}$$

ja

$$B_K x + B_{K+1} y = s. \tag{11}$$

Tarkastellaan ensin yhtälöä (10). Kerrotaan alkuun yhtälöä B_K:lla molemminpuolin, jonka jälkeen uudelleen järjestetään yhtälön termit, jolloin saadaan

$$A_K B_K x + A_{K+1} B_K y - B_K r = 0. \tag{12}$$

Vastaavasti yhtälöä (11) kerrotaan A_K:lla, jonka jälkeen termejä uudelleen järjestellään muotoon

$$A_K B_K x + A_K B_{K+1} y - A_K s = 0. \tag{13}$$

Sijoitetaan nyt yhtälöt (12) ja (13) keskenään yhtäsuuriksi. Vähennetään ensin puolittain $A_K B_K x$, jonka jälkeen vähennetään puolittain $A_K B_{K+1} y$:llä ja lisätään puolittain $B_K r$ sekä otetaan yhtälön vaemmalle puolelle yhteiseksi tekijäksi y, niin saadaan

$$(A_{K+1} B_K - A_K B_{K+1}) y = B_K r - A_K s.$$

Lauseen 3.3 ehdon 1 nojalla tiedetään, että

$$A_{K+1} B_K - A_K B_{K+1} = (-1)^K,$$

joten

$$(-1)^K y = B_K r - A_K s \qquad | \cdot (-1)^K,$$

[24]Lähde [2] Lemma 5.7 s. 217 - 218.

$$y = (-1)^K (B_K r - A_K s). \tag{14}$$

Tehdään seuraavaksi samanlainen uudelleen järjestely, jossa yhtälöä (11) kerrotaan A_{K+1}:llä ja yhtälöä (10) kerrotaan B_{K+1}:llä, jonka jälkeen yhtälöt uudelleen järjestellään. Yhtälöstä (11) saadaan

$$A_{K+1}B_K x + A_{K+1}B_{K+1}y - sA_{K+1} = 0 \tag{15}$$

ja vastaavasti yhtälöstä (10) tulee uudelleen järjestelyn jälkeen

$$A_K B_{K+1} x + A_{K+1}B_{K+1}y - rB_{K+1} = 0. \tag{16}$$

Sijoitetaan nyt yhtälöt (15) ja (16) keskenään yhtäsuuriksi

$$A_{K+1}B_K x + A_{K+1}B_{K+1}y - sA_{K+1} = A_K B_{K+1}x + A_{K+1}B_{K+1}y - rB_{K+1}.$$

Vähennetään molemmin puolin $A_{K+1}B_{K+1}y$ ja otetaan yhtälön vasemmalle puolelle kertoimeksi x. Yhtälö saadaan muotoiltua seuraavanlaiseksi

$$(A_{K+1}B_K - A_K B_{K+1})x = sA_{K+1} - rB_{K+1}.$$

Lauseen 3.3 nojalla, kun

$$A_{K+1}B_K - A_K B_{K+1} = (-1)^K,$$

niin

$$\begin{aligned} (-1)^K x &= sA_{K+1} - rB_{K+1} \qquad \mid \cdot(-1)^K \\ x &= (-1)^K (sA_{K+1} - rB_{K+1}). \end{aligned} \tag{17}$$

Nyt sekä x:lle, että y:lle on samankaltaiset esitysmuodot (14) ja (17) laadittuna. Osoitetaan seuraavaksi, että $x(B_K\alpha - A_K)$ ja $y(B_{K+1}\alpha - A_{K+1})$ ovat saman merkkiset.

Todistetaan tämä osoittamalla, että sekä luvut x ja y, että luvut $B_{K+1}\alpha - A_{K+1}$ ja $B_K\alpha - A_K$ ovat keskenään erimerkkiset. Tarkastellaan tapausta $x = 0$, tällöin yhtälöstä (17) saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^K (sA_{K+1} - rB_{K+1}) \qquad \mid \cdot(-1)^K \\ 0 &= sA_{K+1} - rB_{K+1} \qquad \mid -A_{K+1} \\ sA_{K+1} &= rB_{K+1}. \end{aligned}$$

Tiedetään

$$\mathrm{syt}(A_{K+1}, B_{K+1}) = 1.$$

Lisäksi $B_{K+1} \mid s$, jolloin $s \geq B_{K+1}$. Tämä on ristiriidassa oletuksen (9) kanssa ja $x \neq 0$. Tutkitaan seuraavana tapausta $y = 0$, niin yhtälöistä (10) ja (11) saadaan

$$\begin{aligned} A_K x + A_{K+1} y &= r \\ A_K x + A_{K+1} \cdot 0 &= r \\ A_K x &= r \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} B_K x + B_{K+1} y &= s \\ B_K x + B_{K+1} \cdot 0 &= s \\ B_K x &= s. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadut s:n ja r:n arvot yhtälön (8) vasemmalle puolelle saadaan

$$\mid s\alpha - r \mid = \mid B_K x\alpha - A_K x \mid = \mid x \mid\mid B_K\alpha - A_K \mid \geq \mid B_K\alpha - A_K \mid,$$

joka on vastaavasti

$$\mid s\alpha - r \mid \geq \mid B_K\alpha - A_K \mid .$$

Koska tämä on ristiriidassa yhtälön (8) kanssa, niin $y \neq 0$. Tutkitaan seuraavaksi yhtälöä (11), kun $y < 0$ ja järjestellään se muotoon

$$B_K x = s - B_{K+1} y > 0.$$

Tästä seuraa se, että $x > 0$, koska

$$x = \frac{s - B_{K+1} y}{B_K}.$$

Jos vastaavasti tutkitaan tapausta $y > 0$ tällöin yhtälöstä (10), saadaan

$$B_K x = s - B_{K+1} y$$

ja

$$B_K x = s - B_{K+1} y < s - B_{K+1} < 0.$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa yhtälöstä (9), joten $x < 0$. Siten x ja y ovat erimerkkiset keskenään. Lauseen 3.4 nojalla kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla $K > 0$ pätee

$$\frac{A_K}{B_K} < \alpha < \frac{A_{K+1}}{B_{K+1}}.$$

Kun vastaavasti parittomilla kokonaisluvuilla K pätee

$$\frac{A_K}{B_K} > \alpha > \frac{A_{K+1}}{B_{K+1}}.$$

Tällöin luvut $B_K\alpha - A_K$ ja $B_{K+1}\alpha - A_{K+1}$ ovat keskenään erimerkkiset.

Todistus saatetaan loppuun yhtälöiden (10) ja (11) avulla. Tutkitaan epäyhtälön (8) vasenta puolta, johon sijoitetaan yhtälöt (10) ja (11). Järjestetään yhtälö uudelleen. Tällöin siis saadaan

$$\begin{aligned}
\mid s\alpha - r \mid &= \mid (B_K x + B_{K+1} y)\alpha - (A_K x + A_{K+1} y) \mid \\
&= \mid B_K x\alpha + B_{K+1} y\alpha - A_K x - A_{K+1} y \mid \\
&= \mid (B_K\alpha - A_K)x + (B_{K+1}\alpha - A_{K+1})y \mid .
\end{aligned}$$

Otetaan seuraavaksi x:n ja y:n sisältävät termit omiksi kokonaisuuksikseen

$$\begin{aligned}
\mid s\alpha - r \mid &= \mid (B_K\alpha - A_K)x \mid + \mid (B_{K+1}\alpha - A_{K+1})y \mid \\
&= \mid x \mid\mid B_K\alpha - A_K \mid + \mid y \mid\mid B_{K+1}\alpha - A_{K+1} \mid .
\end{aligned}$$

Edellä ollut ensimmäinen yhtäsuuruus pätee, koska itseisarvomerkkien sisäpuolella olevat termit ovat samanmerkkiset. Tehdään arvio alaspäin

$$\mid x \mid\mid B_K\alpha - A_K \mid + \mid y \mid\mid B_{K+1}\alpha - A_{K+1} \mid \geq \mid x \mid\mid B_k\alpha - A_k \mid \geq \mid B_k\alpha - A_k \mid .$$

Nyt

$$\mid s\alpha - r \mid \geq \mid B_k\alpha - A_k \mid . \tag{18}$$

Päädyttiin siis ristiriitaan epäyhtälön (8) kanssa. Täten lauseen todistus on valmis ja lause pitää paikkansa. □

4.2 Approksimaatioita

Lause 4.5 (Parhaan approksimaation laki[25]). Olkoon konvergentti $C_K = A_K/B_K$ päättymättömälle yksinkertaiselle ketjumurtoluvulle, joka on esitys irrationaaliluvusta α, kokonaisluvulla $K > 0$. Olkoon lisäksi olemassa kokonaisluvut r ja $s > 0$. Jos kokonaisluku $K > 0$ ja yhtälö

$$\mid \alpha - r/s \mid < \mid \alpha - A_K/B_K \mid \tag{19}$$

pitää paikkansa, niin tällöin $s > B_K$.

Todistus. Oletetaan, että epäyhtälö (19), sekä ehto $s \leq B_K$ pitävät paikkansa. Tutkitaan Lemman 4.1 epäyhtälön (8) vasenta puolta, jolloin saadaan

$$\mid \alpha s - r \mid = s \mid \alpha - r/s \mid \leq B_K \mid \alpha - r/s \mid .$$

Arvio ylöspäin seuraa ehdosta $s \leq B_K$. Nyt

$$B_K \mid \alpha - A_K/B_K \mid = \mid B_K\alpha - A_K \mid,$$

[25]Lähde [2] Lause 5.7 s. 217.

joten saadaan

$$| s\alpha - r |<| B_K\alpha - A_K | \, .$$

Tämä on ristiriidassa Lemman 4.1 ehdon kanssa, koska $s < B_{K+1}$. Näin ollen todistus on selvä. $\square$

Seuraus 4. [26] Jos $s \geq 0$ ja $K \geq 0$ ovat kokonaislukuja siten, että $s \leq B_K$. Missä K. konvergentti irrationaaliluvulle α on A_K/B_K. Tällöin pätee r:n ollessa kokonaisluku, että

$$\left|\alpha - \frac{A_K}{B_K}\right| \leq \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|.$$

Lause 4.6 (Rationaalinen approksimaatio[27]). Olkoon irrationaaliluku α ja kokonaisluvut r ja $s > 0$, joille pätee $\mathrm{syt}(r, s) = 1$. Jos

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{(2s^2)}, \tag{20}$$

niin päättymättömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun esitysmuodolle irrationaaliluvusta α on olemassa konvergentti r/s.

Todistus. Tehdään oletus, että murtoluku r/s ei ole konvergentti ketjumurtolukuesitykselle irrationaaliluvusta α. Koska kokonaisluvut B_K muodostavat kasvavan jonon, kun $K > 0$, niin on olemassa sellainen kokonaisluku L, että

$$B_L \leq s < B_{L+1}. \tag{21}$$

Lemmasta 4.1 saadaan

$$| B_L\alpha - A_L |\leq| s\alpha - r |= s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right|.$$

Käyttämällä yhtälöä (20) voimme tehdä arvion ylöspäin

$$s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s}.$$

Tällöin siis saadaan

$$| B_L\alpha - A_L |< \frac{1}{2s}. \tag{22}$$

Nyt jakamalla yhtälöä (22) molemmin puolin B_L:llä saadaan

$$\left|\alpha - \frac{A_L}{B_L}\right| < \frac{1}{2sB_L}.$$

[26] Lähde [2] Seuraus 5.4 s. 218

[27] Lähde [2] Lause 5.8 s. 218 - 219

Annettujen ehtojen nojalla tiedetään $r/s \neq A_L/B_L$. Tämän perusteella kokonaisluku $|\ sA_L - rB_L\ |$ on positiivinen. Siten

$$\begin{aligned}\frac{1}{sB_L} &\leq \Big|\frac{sA_L - rB_L}{sB_L}\Big| = \Big|\frac{sA_L}{sB_L} - \frac{rB_L}{sB_L}\Big| \\ &= \Big|\frac{A_L}{B_L} - \frac{r}{s}\Big| = \Big|(\frac{A_L}{B_L} - \alpha) + (\alpha - \frac{r}{s})\Big| \\ &\leq \Big|\frac{A_L}{B_L} - \alpha\Big| + \Big|\alpha - \frac{r}{s}\Big| \\ &< \frac{1}{2sB_L} + \frac{1}{2s^2}. \qquad (23)\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö saadaan lauseen todistuksen aiemmista kohdista sekä yhtälöstä (20). Nyt vähentämällä puolittain $1/2sB_L$:llä yhtälössä (23) ja sen jälkeen ensin ristiinkertomalla ja sitten jakamalla molemminpuolin s:llä saadaan

$$s < B_L. \qquad (24)$$

Yhtälö (24) on ristiriidassa oletuksen (21) kanssa, joten lauseen todistus on valmis ja lause pitää paikkansa. □

5 Jaksollinen ketjumurtoluku

Määritelmä 12 (Jaksollinen ketjumurtoluku[28])**.** Yksinkertaista ja ääretöntä ketjumurtolukua $\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \cdots \rangle$ kutsutaan *jaksolliseksi ketjumurtoluvuksi*, jos esiintyy sellaiset positiiviset kokonaisluvut k ja l, että $q_n = q_{n+l}$, kaikilla kokonaisluvuilla n, jotka ovat vähintään yhtäsuuria kuin k. Tällöin käytetään merkintää jaksolliselle ketjumurtoluvulle

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, \overline{q_k, q_{k+1}, \cdots, q_{l+k-1}} \rangle.$$

Pienintä mahdollista luonnollista lukua $l = l(\alpha)$, sanotaan ketjumurtoluvun α *jaksonpituudeksi*. *Esijaksoksi* jaksolliselle ketjumurtoluvulle α kutsutaan osaa $q_0, q_1, \cdots, q_{k-1}$.

5.1 Neliöityvät irrationaaliluvut

Määritelmä 13 (Neliöityvät irrationaaliluvut[29])**.** Luku α kuuluu reaalilukuihin ja sitä kutsutaan *neliöityväksi irrationaaliluvuksi*, jos se on irrationaaliluku ja se on nollakohta funktiolle

$$f(x) = a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

missä luvut a, b ja c kuuluvat kokonaislukuihin ja luku $a \neq 0$.

Huomautus 4. Määritelmän 13 mukaan on olemassa sellaiset kokonaisluvut a, b ja c, jotka toteuttavat yhtälön

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{25}$$

ehdolla, että $a \neq 0$ ja α on yhtälön juuri.

Huomautus 5. Jos yhtälön (25) α:n kerroin on -1 niin Lauseen 6 mukaan α:n jälki saadaan α:n konjugaatin kanssa, kun $-Tr(\alpha) = \alpha + \alpha'$. Vastaavasti yhtälön vakiolle normi α:lle on muotoa $N(\alpha) = \alpha\alpha'$, kun polynomiaste on kaksi.

Lause 5.1 (Neliöityvän irrationaaliluvun muoto[30])**.** Jos luku α kuuluu reaalilukuihin, niin luku α on neliöityvä irrationaaliluku jos ja vain jos löytyy sellaiset kokonaisluvut P, Q ja D siten, että seuraavat ehdot pätevät. Kokonaisluku $D > 0$ on neliöitymätön ja $Q \neq 0$, sekä α voidaan esittää muodossa

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}. \tag{26}$$

[28]Lähde [2] Määritelmä 5.1 s. 221
[29]Lähde [2] Määritelmä 5.2 s. 222
[30]Lähde [2] Lause 5.9 s. 222 - 223

Jos luku α on neliöityvä irrationaali, niin

$$Q \mid (D - P^2).$$

Lisäksi sekä luku α, että sen kunjugaatti α'

$$\alpha' = \frac{P - \sqrt{D}}{Q}, \tag{27}$$

ovat juuria funktiolle

$$f(x) = x^2 - Tr(\alpha)x + N(\alpha). \tag{28}$$

Todistus. Jos reaaliluku α on neliöityvä irrationaaliluku, niin tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut $a \neq 0$, b ja c siten, että

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

josta

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Koska α on irrationaalinen, niin sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Täten

$$b^2 - 4ac > 0$$

ja $b^2 - 4ac$ ei ole myöskään neliöityvä, joten lauseen määrittelyn nojalla saadaan

$$D = b^2 - 4ac$$

ja

$$P = \pm b.$$

Tällöin

$$Q = \mp 2a.$$

Siten irrationaaliluku α voidaan esittää muodossa

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}.$$

Lisäksi tiedetään, että $P^2 - D = 4ac$ on jaollinen Q:lla.

Tarkastellaan todistusta nyt toiselta suunnalta, jos reaaliluku α voidaan ilmaista yhtälön (26) muodossa voidaan α:n sanoa olevan irrationaalinen, koska on olemassa neliöitymätön $D > 0$. Yhtälöstä (26) saadaan

$$Q^2\alpha^2 - 2PQ\alpha + (P^2 - D) = 0,$$

näin ollen α on neliöityvä irrationaaliluku. Viimeisenä huomiona, jos

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q},$$

niin

$$\alpha^2 - Tr(\alpha)\alpha + N(\alpha)) = \alpha^2 - (\alpha+\alpha')\alpha + (\alpha\alpha')$$

$$= \Big(\frac{(P+\sqrt{D})}{Q}\Big)^2 - Tr\Big(\frac{(P+\sqrt{D})}{Q}\Big)\Big(\frac{(P+\sqrt{D})}{Q}\Big) + N\Big(\frac{(P+\sqrt{D})}{Q}\Big).$$

Lasketaan jälki ja normi:

$$\begin{aligned}
Tr\Big(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\Big) &= \frac{P+\sqrt{D}}{Q} + \frac{P-\sqrt{D}}{Q}\\
&= \frac{P+P+\sqrt{D}-\sqrt{D}}{Q}\\
&= \frac{2P}{Q},\\
N\Big(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\Big) &= \Big(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\cdot\frac{P-\sqrt{D}}{Q}\Big)\\
&= \frac{P\cdot P + P\cdot\sqrt{D} - P\cdot\sqrt{D} + \sqrt{D}\cdot(-\sqrt{D})}{Q\cdot Q}\\
&= \frac{P^2-D}{Q^2}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan jälki ja normi paikoilleen

$$f(x) = \frac{(P+\sqrt{D})^2}{Q^2} - \Big(\frac{2P}{Q}\Big)\Big(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\Big) + \frac{P^2-D}{Q^2}.$$

Avataan sulkeet tekemällä tarvittavat kertolaskut. Yhdistetään murtoluvut yhdeksi isoksi murtoluvuksi, koska nimittäjäksi jokaiselle saadaan Q^2. Tällöin saadaan murtoluku muoto

$$f(x) = \frac{P^2 + D + 2P\sqrt{D} - 2P^2 - 2P\sqrt{D} + P^2 - D}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = 0.$$

Näin on saatu loppuun α:n todistaminen.

Todistetaan vielä sama konjugaatin α' tapauksessa. Koska aiemmin tässä todistuksessa on todistettu, että α on irrationaaliluku, niin ottamalla α:sta konjugaatin saadaan

$$\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}.$$

Nyt

$$\alpha'^2 - Tr(\alpha')\alpha, +N(\alpha')) = \alpha^2 - (\alpha' + \alpha)\alpha + (\alpha'\alpha)$$

$$= \Big(\frac{(P-\sqrt{D})}{Q}\Big)^2 - Tr\Big(\frac{(P-\sqrt{D})}{Q}\Big)\Big(\frac{(P-\sqrt{D})}{Q}\Big) - N\Big(\frac{(P-\sqrt{D})}{Q}\Big).$$

Lasketaan jälki ja normi:

$$\begin{aligned}
Tr\Big(\frac{P-\sqrt{D}}{Q}\Big) &= \frac{P-\sqrt{D}}{Q} + \frac{P+\sqrt{D}}{Q}\\
&= \frac{P+P+\sqrt{D}-\sqrt{D}}{Q}\\
&= \frac{2P}{Q},\\
N\Big(\frac{P-\sqrt{D}}{Q}\Big) &= \Big(\frac{P-\sqrt{D}}{Q}\cdot\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\Big)\\
&= \frac{P\cdot P + P\cdot\sqrt{D} - P\cdot\sqrt{D} + \sqrt{D}\cdot(-\sqrt{D})}{Q\cdot Q}\\
&= \frac{P^2-D}{Q^2}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan jälki ja normi paikoilleen

$$f(x) = \frac{(P+\sqrt{D})^2}{Q^2} - \Big(\frac{2P}{Q}\Big)\Big(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\Big) + \frac{P^2-D}{Q^2}.$$

Avataan sulkeet tekemällä tarvittavat kertolaskut. Yhdistetään murtoluvut yhdeksi isoksi murtoluvuksi, koska nimittäjäksi jokaiselle saadaan Q^2. Tällöin saadaan murtoluku muoto

$$f(x) = \frac{P^2+D+2P\sqrt{D}-2P^2-2P\sqrt{D}+P^2-D}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = 0.$$

Näin on saatu loppuun α':n todistaminen. Sekä α, että sen konjugaatti α' ovat yhtälön (28) juuria. Tämän johdosta todistus on selvä. □

Lause 5.2 (Algoritmi neliöityville irrationaaliluvuille[31])**.** Olkoon α neliöityvä irrationaaliluku muotoa $\alpha = (P_0 + \sqrt{D})/Q_0$, jossa neliöitymätön $D > 0$, $Q_0 \neq 0$ sekä P_0 ovat kokonaislukuja ja luku Q_0 jakaa luvun $(D - P_0^2)$. Määritetään rekursiivisesti kaikille kokonaisluvuille $j > 0$

$$\alpha_j = \frac{(P_j + \sqrt{D})}{Q_j}, \tag{29}$$

[31]Lähde [2] Lause 5.10 s. 223 - 224

$$q_j = \lfloor \alpha_j \rfloor,$$
$$P_{j+1} = q_j Q_j - P_j, \tag{30}$$
$$Q_{j+1} = \frac{(D - P_{j+1}^2)}{Q_j}. \tag{31}$$

Tällöin

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \cdots \rangle.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 5.1. Etsitään jaksollisen ketjumurtoluvun esitysmuoto, kun $D = 15$, $P_0 = 1$ ja $Q_0 = 2$ ja

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k}.$$

Käytetään hyödyksi Lauseita 5.2 ja 5.3. Nyt

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1+\sqrt{15}}{2}, & q_0 &= \lfloor \alpha_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{15}}{2} \right\rfloor = \underline{2},\\
P_1 &= q_0 Q_0 - P_0, & Q_1 &= \frac{D - P_1^2}{Q_0},\\
&= 2\cdot 2 - 1 = 3, & &= \frac{15-3^2}{2} = 3,\\
\alpha_1 &= \frac{3+\sqrt{15}}{3}, & q_1 &= \lfloor \alpha_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{15}}{3} \right\rfloor = \underline{2},\\
P_2 &= q_1 Q_1 - P_1, & Q_2 &= \frac{D - P_2^2}{Q_1},\\
&= 2\cdot 3 - 3 = 3, & &= \frac{15-3^2}{3} = 2,\\
\alpha_2 &= \frac{3+\sqrt{15}}{2}, & q_2 &= \lfloor \alpha_2 \rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{15}}{2} \right\rfloor = \underline{3},\\
P_3 &= q_2 Q_2 - P_2, & Q_3 &= \frac{D - P_3^2}{Q_2},\\
&= 3\cdot 2 - 3 = 3, & &= \frac{15-3^2}{2} = 3,\\
\alpha_3 &= \frac{3+\sqrt{15}}{3}, & q_3 &= \lfloor \alpha_3 \rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{15}}{3} \right\rfloor = \underline{2} = q_1,\\
P_4 &= q_3 Q_3 - P_3, & Q_4 &= \frac{D - P_4^2}{Q_3},\\
&= 2\cdot 3 - 3 = 3, & &= \frac{15-3^2}{3} = 2,\\
\alpha_4 &= \frac{3+\sqrt{15}}{2}, & q_4 &= \lfloor \alpha_2 \rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{15}}{2} \right\rfloor = \underline{3} = q_2.
\end{aligned}$$

Huomataan toiston alku, kun $q_1 = q_3$ ja $q_2 = q_4$, joten jaksollisen ketjumrtoluvun esitykseksi saadaan $\alpha = \langle 2; \overline{2, 3} \rangle$.

Lemma 5.1. [32]Jos luku α on neliöityvä irrationaaliluku sekä a, b, c ja d kuuluvat kokonaislukuihin, ja jos

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \tag{32}$$

ei ole rationaalinen, niin se on neliöityvä irrationaaliluku.

Todistus. Lauseen 5.1 nojalla on olemassa kokonaisluvut P, D ja Q, siten, että on neliöitymätön kokonaisluku $D > 0$, sekä $Q \neq 0$. Näiden kokonaislukujen avulla neliöityvä irrationaaliluku

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}.$$

Sijoitetaan α yhtälöön (32)

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \frac{a(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}) + b}{c(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}) + d}.$$

Lavennetaan Q:lla ja poistetaan sulkeet tekemällä tarvittavat kertolaskutoimenpiteet

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \frac{aP + a\sqrt{D} + Qb}{cP + c\sqrt{D} + Qd} = \frac{(aP + Qb) + a\sqrt{D}}{(cP + Qd) + c\sqrt{D}}.$$

Lavennetaan $((cP + Qd) - c\sqrt{D})$:llä ja poistetaan sulkeet tekemällä tarvittavat kertolaskutoimenpiteet. Ryhmitellään tämän jälkeen termit siten, että saman kertoimiset termit laitetaan yhteen, niin saadaan

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \frac{((aP + Qb)(cP + Qd) - acD) + (a(cP + Qd) - c(aP + Qb))\sqrt{D}}{(cP + Qd)^2 - c^2 D}.$$

Lauseen 5.1 nojalla saamme, että yhtälö ei kuulu rationaalilukuihin ja on neliöityvä irrationaaliluku

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \notin \mathbb{Q}.$$

Näin ollen todistus on selvä. □

[32]Lähde [2] Lemma 5.2 s. 225

5.2 Jaksollisuus ja redusointi

Lause 5.3 (Neliöityvät irrationaaliluvut ovat jaksollisia[33]). Olkoon α reaaliluku. Tällöin sillä on esitys jaksollisena päättymättömänä yksinkertaisena ketjumurtolukuna jos ja vain jos reaaliluku α on neliöityvä irrationaaliluku.

Todistus. Oletetaan, että α:lla on esitys jaksollisena päättymättömänä yksinkertaisena ketjumurtolukuna, joka on

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, \overline{q_k, q_{k+1}, \dots, q_{k+l-1}} \rangle,$$

Esityksessä olevaa jaksoa voidaan merkitä toisella ketjumurtolukuesityksellä

$$\beta = \langle \overline{q_k; q_{k+1}, \dots, q_{k+l-1}} \rangle.$$

Se voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\beta = \langle q_k; q_{k+1}, \dots, q_{k+l-1}, \beta \rangle.$$

Lauseen 4.3 nojalla β:lla on olemassa konvergentti $C_K = A_K/B_K$, kun lisäksi β:lla on olemassa esitys

$$\beta = \frac{A_{l-1}\beta + A_{l-2}}{B_{l-1}\beta + B_{l-2}},$$

jota ensin kertomalla vasemman puolen nimittäjällä molemmin puolin ja järjestämällä termit siten, että oikealle puolelle yhtäsuuruusmerkkiä jää vain nolla, saadaan yhtälö

$$B_{l-1}\beta^2 + (B_{l-2} - A_{l-1})\beta - A_{l-2} = 0.$$

Koska saatu yhtälö on toista astetta, voimme aiempien todistusten perusteella sanoa, että β on neliöityvä irrationaaliluku

$$\beta = \frac{-(B_{l-2} - A_{l-1}) \pm \sqrt{(B_{l-2} - A_{l-1})^2 - 4B_{l-1}A_{l-2}}}{2B_{l-1}}.$$

Tutkimalla varsinaista yksinkertaista päättymätöntä ketjumurtolukuesitystä luvulle α Lauseen 4.3 avulla saadaan

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, \beta \rangle = \frac{A_{k-1}\alpha_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\alpha_k + B_{k-2}}.$$

Missä A_K/B_K on konvergentti α:lle, indeksien ollessa $K = k-1$ ja $K = k-2$. Koska tiedämme α:n olevan päättymätön, sen täytyy olla irrationaalinen, ja

[33]Lähde [2] Lause 5.11 s. 225 - 227

koska äsken todistimme, että β on neliöityvä irrationaaliluku niin Lemman 5.1 nojalla myös α:n täytyy olla neliöityvä irrationaaliluku.

Toisaalta, jos α on neliöityvä irrationaaliluku, niin Lauseen 5.1 mukaan

$$\alpha_0 = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} \tag{33}$$

ja Lauseen 5.2 nojalla

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \dots \rangle, \tag{34}$$

missä

$$\alpha_j = \frac{P_j + \sqrt{D}}{Q_j}, \tag{35}$$

$$q_j = \lfloor \alpha_j \rfloor, \tag{36}$$

$$P_{j+1} = q_j Q_j - P_j, \tag{37}$$

$$Q_{j+1} = \frac{D - P_{j+1}^2}{Q_j}. \tag{38}$$

Koska

$$\alpha = \langle q_0; q_1, \dots, \alpha_j \rangle,$$

niin Lauseen 4.3 perusteella

$$\alpha = \frac{A_{j-1}\alpha_j + A_{j-2}}{B_{j-1}\alpha + B_{j-2}}.$$

Otetaan konjugaatti molemmilta puolilta, jolloin saadaan

$$\alpha' = \frac{A_{j-1}\alpha'_j + A_{j-2}}{B_{j-1}\alpha'_j + B_{j-2}}.$$

Kerrotaan yhtälöä molemmin puolin nimittäjällä $B_{j-1}\alpha'_j + B_{j-2}$. Avataan vasemmalta puolelta sulkeet kertomalla kertolaskut pois. Tämän jälkeen ryhmitellään termit siten, että oikealle puolelle tulee indeksiä $j-2$ sisältävät termit ja vasemmalle puolelle indeksin $j-2$ sisältävät termit, jolloin saadaan

$$(B_{j-1}\alpha' - A_{j-1})\alpha'_j = -B_{j-2}\alpha' + A_{j-2}.$$

Jaetaan sitten yhtälöä molemmin puolin $(B_{j-1}\alpha' - A_{j-1})$:llä. Kun otetaan osoittajaan yhteiseksi tekijäksi $-B_{j-2}$ ja nimittäjään B_{j-1} yhteiseksi tekijäksi, saadaan

$$\alpha'_j = \frac{-B_{j-2}(\alpha' - \frac{A_{j-2}}{B_{j-2}})}{B_{j-1}(\alpha' - \frac{A_{j-1}}{B_{j-1}})}.$$

Yhtälön eteen voidaan ottaa kerroin $-B_{j-2}/B_{j-1}$. Koska konvergentit ovat muotoa $C_{j-1} = A_{j-1}/B_{j-1}$ ja $C_{j-2} = A_{j-2}/B_{j-2}$, niin sijoitetaan konvergentit murtolukujen paikalle, jolloin saadaan yhtälöksi

$$\alpha'_j = -\frac{B_{j-2}}{B_{j-1}}\left(\frac{\alpha' - C_{j-2}}{\alpha' - C_{j-1}}\right).$$

Ottamalla Lauseen 4.1 mukaisen kovergentin raja-arvon, niin saadaan

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\alpha' - C_{j-2}}{\alpha' - C_{j-1}}\right) = \left(\frac{\alpha' - \lim_{j\to\infty}(C_{j-2})}{\alpha' - \lim_{j\to\infty}(C_{j-1})}\right).$$

Lauseen 4.1 nojalla raja-arvo äärettömyydessä suppenee ketjumurtoluvuksi itsekseen, jolloin

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\alpha' - C_{j-2}}{\alpha' - C_{j-1}}\right) = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha}\right) = 1,$$

sillä $\alpha' \neq \alpha$. Täten merkittävän isolla kokonaisluvulla $j > M$, missä luonnollinen luku M on fiksattu $\alpha'_j < 0$ ja

$$\left(\frac{\alpha' - C_{j-2}}{\alpha' - C_{j-1}}\right) > 0.$$

Koska $\alpha_k > 0$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k, niin

$$\alpha_k - \alpha'_k > 0,$$

kaikilla $k > M$. Siten

$$\alpha_k - \alpha'_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} = \frac{P_k - P_k + \sqrt{D} + \sqrt{D}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{D}}{Q_k} > 0,$$

joten kaikilla $k > M$ saadaan

$$Q_k > 0.$$

Lisäksi käyttämällä yhtälöä (38) saadaan

$$Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = D - P_{k+1}^2 < D$$

ja

$$P_{k+1}^2 < P_{k+1}^2 + Q_k Q_{k+1} = D,$$

joten

$$| P_{k+1} |< \sqrt{D} \text{ ja } 0 < Q_k \leq D.$$

Nyt, koska luonnollinen luku D on fiksattu, niin sekä Q_k että P_{k+1}voivat saada äärellisen määrän mahdollisia arvoja. Täten on olemassa sellaiset kokonaisluvut i ja k, että

$$P_i = P_k \text{ ja } Q_i = Q_k, \text{ missä } i < k.$$

Nyt todistuksen yhtälöiden (33) - (38) nojalla saadaan

$$q_i = q_k \text{ ja } q_{i+1} = q_{k+1}, \cdots,$$

joten tästä saadaan

$$\alpha = \langle q_o; q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, \overline{q_k, q_{k+1}, \cdots, q_{k+l-1}} \rangle.$$

Näin ollen todistus on selvä. □

Seuraus 5. [34]Jos luku

$$\alpha_0 = \alpha = \langle q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}, \overline{q_k, q_{k+1}, \cdots, q_{k+l-1}} \rangle,$$

on neliöityvä irrationaaliluku, niin kaikilla $j \geq 0$ pätee, että

$$\alpha_{lj+n} = \alpha_n$$

kaikilla $n \geq k$.

Määritelmä 14 (Redusoitu irrationaaliluku[35])**.** Neliöityvää irrationaalilukua α sanotaan *redusoiduksi*, jos α:lle ja sen konjugaattille α' pätee $\alpha > 1$ ja $-1 < \alpha' < 0$.

Määritelmä 15 (Puhdas jaksollisuus)**.** Yksinkertainen päättymätön ketjumurtolukuesitys irrationaaliluvusta α on *puhtaasti jaksollinen*, kun sen jakso alkaa kokonaisosasta. Jos jakson pituus on K, niin

$$\alpha = \langle \overline{q_0; q_1, q_2, \cdots, q_{K-1}} \rangle.$$

[34]Lähde [2] Seuraus 5.5 s. 227
[35]Lähde [2] Määritelmä 5.3 s. 227

Lause 5.4 (Puhdas jaksollisuus vastaa redusoitua lukua[36]). Neliöityvällä irrationaaliluvulla α on yksinkertainen ketjumurtoluvunesitysmuoto ja se on puhtaasti jaksollinen jos ja vain jos α on redusoitu.

Todistus. Oletetaan, että yksinkertainen päättymätön ketjumurtolukuesitys irrationaaliluvusta α on puhtaasti jaksollinen eli

$$\alpha = \langle \overline{q_0; q_1, q_2, \cdots, q_{K-1}} \rangle.$$

Nyt, koska $q_0 > 0$, myös $\alpha > 1$. Lauseen 4.3 nojalla, kun ketjumurtolukuesitys on muotoa

$$\alpha = \langle q_0; q_1, q_2, \cdots, q_{K-1}, \alpha \rangle,$$

saadaan

$$\alpha = \frac{\alpha A_{K-1} + A_{K-2}}{\alpha B_{K-1} + B_{K-2}},$$

missä $C_j = A_j/B_j$ indekseillä $j = K-1$ ja $j = K-2$ on α:n j. konvergentti. Muotoillaan edellä ollutta yhtälöä uudelleen siten, että yhtälön oikealle puolelle jää vain nolla. Kerrotaan alkuun molemmin puolin yhtälöä nimittäjällä $\alpha B_{K-1} + B_{K-2}$ ja vähennetään sitten yhtälön molemmilta puolilta $(-\alpha A_{K-1} - A_{K-2})$, jolloin saadaan

$$B_{K-1}\alpha^2 + (B_{K-2} - A_{K-1})\alpha - A_{K-2} = 0. \tag{39}$$

Olkoon β sellainen, että

$$\beta = \langle \overline{q_{K-1}; q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0} \rangle, \tag{40}$$

joka saadaan muotoon

$$\beta = \langle q_{K-1}; q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0, \beta \rangle.$$

Lauseen 4.3 nojalla

$$\beta = \frac{\beta A'_{K-1} + A'_{K-2}}{\beta B'_{K-1} + B'_{K-2}}, \tag{41}$$

missä A'_j/B'_j on j. konvergentti, kun $j = K-1$ ja $j = K-2$. Osoitetaan seuraavaksi, että kun $q_0 > 0$, niin tällöin

$$\frac{A_{K-1}}{A_{K-2}} = \langle q_{K-1}; q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0 \rangle$$

sekä

$$\frac{B_{K-1}}{B_{K-2}} = \langle q_{K-1}; q_{K-2}, \cdots, q_1 \rangle.$$

[36] Lähde [2] Lause 5.12 s. 228 - 230

Tehdään todistus käyttämällä induktiotodistusta K:n suhteen. Lauseen 3.2 määritysten nojalla, kun otetaan perusaskel $K = 1$, saadaan

$$\frac{A_{K-1}}{A_{K-2}} = \frac{A_{1-1}}{A_{1-2}} = \frac{A_0}{A_{-1}}.$$

Lauseen 3.2 nojalla $A_0 = q_0$ ja $A_{-1} = 1$, joten

$$\frac{A_0}{A_{-1}} = \frac{q_0}{1} = q_0 = \langle q_0 \rangle.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $A_{l-1}/A_{l-2} = \langle q_{l-1}; q_{l-2}, \dots, q_1, q_0 \rangle$. Nyt todistetaan induktioväite $K = l + 1$

$$\frac{A_{l+1-1}}{A_{l+1-2}} = \frac{A_l}{A_{l-1}}.$$

Tiedetään, että $A_l = q_l A_{l-1} + A_{l-2}$, joten

$$\frac{A_l}{A_{l-1}} = \frac{q_l A_{l-1} + A_{l-2}}{A_{l-1}} = \frac{q_l A_{l-1}}{A_{l-1}} + \frac{A_{l-2}}{A_{l-1}} = q_l + \frac{1}{\frac{A_{l-1}}{A_{l-2}}}$$

$$= q_l + \frac{1}{\langle q_{l-1}, q_{l-2}, \dots, q_0 \rangle}.$$

Täten $A_l/A_{l-1} = \langle q_l; q_{l-1}, q_{l-2}, \dots, q_0 \rangle$.

Tehdään todistus myös B_{K-1}/B_{K-2}:lle. Perusaskeleena on $K = 2$. Tällöin

$$\frac{B_{K-1}}{B_{K-2}} = \frac{B_{2-1}}{B_{2-2}} = \frac{B_1}{B_0} = q_1.$$

Näin ollen perusaskel on kunnossa. Todistetaan seuraavaksi induktioväite, jossa $K = l + 1$. Tällöin

$$\frac{B_{l+1-1}}{B_{l+1-2}} = \frac{B_l}{B_{l-1}},$$

missä $B_l = q_l B_{l-1} + B_{l-2}$. Täten

$$\frac{B_l}{B_{l-1}} = \frac{q_l B_{l-1} + B_{l-2}}{B_{l-1}} = \frac{q_l B_{l-1}}{B_{l-1}} + \frac{B_{l-2}}{B_{l-1}} = q_l + \frac{1}{\frac{B_{l-1}}{B_{l-2}}}$$

$$\frac{B_l}{B_{l-1}} = q_l + \frac{1}{\langle q_{l-1}, q_{l-2}, \dots, q_1 \rangle}, \quad \text{joka on } \langle q_l; q_{l-1}, q_{l-2}, \dots, q_1 \rangle.$$

Edellä olevan nojalla

$$\frac{A_{K-1}}{A_{K-2}} = \langle q_{K-1}; q_{K-2}, \dots, q_1, q_0 \rangle = \frac{A'_{K-1}}{B'_{K-1}}$$

ja

$$\frac{B_{K-1}}{B_{K-2}} = \langle q_{K-1}; q_{K-2}, \dots, q_2, q_1 \rangle = \frac{A'_{K-2}}{B'_{K-2}}.$$

Koska Lauseen 3.5 mukaan

$$\operatorname{syt}(A_{K-1}, A_{K-2}) = \operatorname{syt}(A'_{K-1}, B'_{K-1})$$
$$= \operatorname{syt}(B_{K-1}, B_{K-2}) = \operatorname{syt}(A'_{K-2}, B'_{K-2}) = 1,$$

niin

$$A_{K-1} = A'_{K-1}, \quad A_{K-2} = B'_{K-2}, \quad B_{K-1} = A'_{K-2}, \quad B_{K-2} = B'_{K-2}.$$

Sijoitetaan arvot yhtälöön (41)

$$\beta = \frac{\beta A_{K-1} + B_{K-1}}{\beta A_{K-2} + B_{K-2}}.$$

Kerrotaan alkuun molemmin puolin yhtälöä nimittäjällä $(\beta A_{K-2} + B_{K-2})$ ja vähennetään puolittain $(\beta A_{K-1} + B_{K-1})$:lla, jolloin saadaan

$$\beta^2 A_{K-2} + (B_{K-2} - A_{K-1})\beta - B_{K-1} = 0.$$

Kerrotaan nyt yhtälöä $-1/\beta^2$:llä ja supistamalla ylimääräiset β:t pois, jolloin saadaan

$$B_{K-1}(-1/\beta^2) + (B_{K-2} - A_{K-1})(-1/\beta) - A_{K-2} = 0. \tag{42}$$

Yhtälöiden (39) ja (42) avulla tiedetään, että α ja $1/\beta$ ovat juuria funktiolle

$$f(x) = B_{k-1}x^2 + (B_{K-2} - A_{K-1})x - A_{K-2}.$$

Lisäksi Lauseen 5.1 perusteella konjugaatille α' pätee

$$\alpha' = -1/\beta, \qquad \beta = \langle \overline{q_{K-1}; q_{K-2}, \dots, q_1, q_0} \rangle. \tag{43}$$

Nyt $\beta > 1$, joten tästä seuraa $-1 < \alpha' = 1/\beta < 0$. Tämä siis tarkoittaa, että α on redusoitu neliömäinen irrationaaliluku. Toisaalta oletetaan, että α on redusoitu neliöityvä irrationaaliluku. Lauseen 5.2 nojalla löytyy α:lle osittaisnimittäjät siten, että

$$q_K = \lfloor \alpha_K \rfloor$$

kokonaisluvuilla $K \geq 0$, missä

$$\alpha_{K+1} = \frac{1}{(\alpha_K - q_K)}.$$

Otetaan tästä konjugaatti ja saadaan

$$\frac{1}{\alpha'_{K+1}} = \alpha'_K - q_K. \tag{44}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$-1 < \alpha'_K < 0,$$

kun $K \geq 0$. Käytetään induktiotodistusta. Nyt koska $\alpha = \alpha_0$ on redusoitu, niin konjugaatille α'_0 pätee

$$-1 < \alpha'_0 < 0,$$

tämä vastaa perusaskelta. Tehdään induktio-oletus, että $-1 < \alpha'_l < 0$, ja induktioväite, että sama pätee, kun $K = l + 1$. Koska luku $\alpha > 1$, niin $q_K > 0$, kun $K \geq 0$. Tällöin yhtälön (44) nojalla

$$\frac{1}{\alpha'_{l+1}} < -1.$$

Täten $-1 < \alpha'_{l+1} < 0$.Tämä todistaa väitteen. Yhtälöön (44) lisäämällä q_K saadaan

$$\alpha'_K = q_K + \frac{1}{\alpha'_{K+1}}.$$

Koska

$$-1 < \alpha'_K < 0,$$

niin saadaan

$$-1 < q_K + \frac{1}{\alpha'_{K+1}} < 0.$$

Puolittain vähentämällä $1/\alpha'_{K+1}$:llä saadaan

$$-1 - 1/\alpha_{K+1} < q_K < -1/\alpha_{K+1}.$$

Nyt lattiafunktion Määritelmän 1 mukaan saadaan $q_K = \lfloor -1/\alpha'_{K+1} \rfloor$. Lauseen 5.3 nojalla on olemassa kokonaisluvut i ja j, että $0 < i < j$, kun $\alpha_i = \alpha_j$. Tämä pätee myös konjugaatille $\alpha'_i = \alpha'_j$. Tästä saadaan myös

$$q_{i-1} = \lfloor -1/\alpha'_i \rfloor = \lfloor -1/\alpha'_j \rfloor = q_{j-1},$$

joten

$$\alpha_{i-1} = q_{i-1} + 1/\alpha_i = q_{j-1} + 1/\alpha_j = \alpha_{j-1}.$$

Toistamalla tätä nyt i kertaa saadaan

$$\alpha_0 = \alpha_{j-1}.$$

Tästä seuraa, että

$$\alpha = \alpha_0 = \langle \overline{q_0; q_1, \cdots, q_{j-i-1}} \rangle.$$

Näin todistus on saatu loppuun. $\square$

Seuraus 6. [37]Jaksollinen yksinkertainen päättymätön ketjumurtoluku

$$\alpha = \langle \overline{q_0; q_1, \cdots, q_{K-1}} \rangle$$

on esitys neliöityvälle ja redusoidulle irrationaaliluvulle α. Tällöin α:n konjugaatin avulla saadaan

$$\frac{-1}{\alpha'} = \langle \overline{q_{K-1}, q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0} \rangle.$$

Todistus. Edellisen lauseen todistuksen yhtälön (43) nojalla α:n konjugaatille pätee

$$\alpha' = -1/\beta \Leftrightarrow -1/\alpha' = \beta, \text{ jossa } \beta = \langle \overline{q_{K-1}; q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0} \rangle.$$

Tämä siis vastaa samaa kuin

$$\frac{-1}{\alpha'} = \langle \overline{q_{K-1}, q_{K-2}, \cdots, q_1, q_0} \rangle.$$

Näin todistus on selvä. $\square$

[37]Lähde [2] Seuraus 5.6 s. 230

Lähdeluettelo

[1] Matala-aho Tapani, Lukuteorian perusteet osa III (luentomateriaali 2016)

[2] Richard A. Mollin, Fundamental number theory with applications. Second edition (2008)