Puoliryhmät

Pro Gradu -tutkielma
Anita Väärä
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisältö

Johdanto

Suuremmalle yleisölle ryhmät ovat varmasti tunnetumpi algebrallinen rakenne, kuin puoliryhmät. Puoliryhmät toteuttavat nimensä mukaisestikin puolet ryhmän neljästä ominaisuudesta. Puoliryhmät ovat siis binäärisellä ja assosiatiivisella operaatiolla varustettuja epätyhjiä joukkoja. Puoliryhmiä voidaan tarkastella sekä topologisesta, että algebrallisesta näkökulmasta. Näillä on kuitenkin paljon yhtäläisyyksiä. Topologisia puoliryhmiä on tutkittu enemmänkin, mutta algebrallisen teorian kannalta puoliryhmät on melko uusi asia matematiikan historiassa.

Tutkielma käsittelee puoliryhmiä enimmäkseen algebrallisesta näkökulmasta, mutta lopussa esitellään myös topologiset puoliryhmät. Tutkielma alkaa puoliryhmän määrittelyllä sekä esittelemällä muutamia esimerkkejä yksinkertaisimmista puoliryhmistä. Puoliryhmiin liittyy ryhmäteoriastakin tutut alkiot ideaali, käänteisalkio ja peruuttava. Uudempana asiana esitellään idempotentit, joiden olemassaolo on tärkeä osa puoliryhmiä tutkittaessa. Idempotentti on sellainen alkio x, että $xx = x$. Jotta idempotentit eivät jäisi vain teorian tasolle, on tutkielmassa esitetty esimerkkejä puoliryhmistä, joissa on yksi tai useampi idempotentti. Tutkielman yksi tärkeimmistä tuloksista on Lause 3.2. Tässä lauseessa todistetaan induktiivisesti, että äärellinen puoliryhmä sisältää aina idempotentin.

Lukijalle ideaalit saattavat olla rengasteoriasta tuttu käsite. Kappaleissa 6 ja 7 käsitellään puoliryhmiä, jotka sisältävät minimaalisen vasemman ideaalin. Yksi tutkielman tärkeimmistä lauseista on Rakennelause (Lause 7.10), joka käsittelee puoliryhmän, joka sisältää idempotentin sisältävän minimaalisen vasemman ideaalin, ja sen ideaalien rakenteita.

Lopuksi tutustutaan vielä topologisiin puoliryhmiin, joiden ymmärtämiseksi oletetaan, että lukija on tutustunut topologiaan aikaisemmin. Tarvittavat topologiset käsitteet ja tulokset määritellään kuitenkin kappaleessa 8. Topologisiin puoliryhmiin liittyvistä tuloksista tärkein on Lause 9.17, jossa todistetaan, että kompakti puoliryhmä sisältää idempotentin. Todistus tehdään Zornin Lemman avulla. Lopussa esitetään Lauseet 9.23 ja 9.24, jotka todistavat, että idempotenttien joukko $E(S)$ on suljettu tietyissä puoliryhmän S oloissa. Aina kuitenkaan $E(S)$ ei ole suljettu. Tämä on mielenkiintoinen aihe, jota voi tutkielman tulosten pohjalta lähteä tutkimaan tarkemmin.

Tutkielman päälähteinä käytetään Berglundin, Junghennin ja Milnesin teosta *Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compactifications, Representations* sekä Hindmanin ja Straussin teosta *Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications*.

1 Puoliryhmät

Määritelmä 1.1. *Puoliryhmä* on pari $(S, *)$, missä S on epätyhjä joukko ja $*$ on binäärinen ja assosiatiivinen operaatio joukossa S.

Binäärinen operaatio joukossa S on funktio $* : S \times S \to S$. Eli $x * y \in S$, kaikilla $x, y \in S$. Jos operaatio $*$ on binäärinen joukossa S, niin usein sanotaan, että "S on suljettu operaation $*$ suhteen". Operaatio on assosiatiivinen, jos ja vain jos $*(*(x, y), z) = *(x, *(y, z))$ kaikilla $x, y, z \in S$. Eli yleisemmin $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Esimerkki 1.2. Seuraavat parit ovat puoliryhmiä:

a) $(\mathbb{N}, +)$

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$

c) $(\mathbb{R}, +)$

d) $(\mathbb{R}, \cdot)$.

e) $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.

f) $(\mathbb{R}^+, +)$

g) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

h) $(\mathbb{N}, \vee)$, missä $x \vee y = \max\{x, y\}$.

i) $(\mathbb{N}, \wedge)$, missä $x \wedge y = \min\{x, yx\}$.

j) $(\mathbb{R}, \wedge)$, missä $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

k) $(S, *)$, missä S on epätyhjä joukko ja $x * y = y$, kaikilla $x, y \in S$.

l) $(S, *)$, missä S on epätyhjä joukko ja $x * y = x$, kaikilla $x, y \in S$.

m) $(S, *)$, missä S on epätyhjä joukko ja $a \in S$ ja $x * y = a$, kaikilla $x, y \in S$.

n) $(X_X, \circ)$, missä $X_X = \{f \mid f : X \to X\}$ ja operaatio $\circ$ on funktioiden yhdiste.

Määritelmä 1.3. Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $z \in S$.

a) Alkio z on *oikea nolla-alkio*, jos $xz = z$ kaikilla $x \in S$.

b) Jos puoliryhmän S jokainen alkio on oikea nolla-alkio, niin S on *oikea nollapuoliryhmä*.

c) Alkio z on *vasen nolla-alkio*, jos $zx = z$ kaikilla $x \in S$.

d) Jos puoliryhmän S jokainen alkio on vasen nolla-alkio, niin S on *vasen nollapuoliryhmä*.

e) Jos oikea nolla-alkio on myös vasen nolla-alkio, kutsutaan sitä *nolla-alkioksi*. Nolla-alkiota merkitään $\mathbf{0}$.

f) Jos puoliryhmässä S on nolla-alkio ja $st = \mathbf{0}$ kaikilla $s, t \in S$, niin puoliryhmää S kutsutaan *nollapuoliryhmäksi*.

Esimerkin 1.2 kohdan k) puoliryhmä on oikea nollapuoliryhmä ja kohdan l) puoliyhmä on vasen nollapuoliryhmä.

Määritelmä 1.4. Olkoon A epätyhjä joukko. *Vapaa puoliryhmä* aakkostossa A on joukko

$$S = \{f \mid f\colon B \to C,\ \text{missä } C \subseteq A \text{ ja } B = \{0, 1, 2 \ldots, n-1\} \text{ jollakin } n \in \mathbb{N}\}.$$

Olkoon f ja g joukon S alkioita. Operaatiota $^\frown$ kutsutaan *ketjutukseksi* ja se on määritelty seuraavasti. Oletetaan, että funktion f määrittelyjoukko on $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ja funktion g määrittelyjoukko on $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Tällöin funktion $f^\frown g$ määrittelyjoukko on $\{0, 1, \ldots, m+n-1\}$. Jos $i \in \{0, 1, \ldots, m+n-1\}$, niin

$$f^\frown g(i) = \begin{cases} f(i), & \text{kun } i < n \\ g(i-n), & \text{kun } i \geq n. \end{cases}$$

Identiteetillä varustettu aakkoston A vapaa puoliryhmä on $S \cup \{\emptyset\}$, missä S on aakkoston A vapaa puoliryhmä ja, jos $f \in S \cup \{\emptyset\}$, niin $f^\frown\emptyset = \emptyset^\frown f = f$.

Yleensä vapaan puoliryhmän alkioita kutsuaan *sanoiksi*, joita kirjoitetaan listaamalla funktion arvot järjestyksessä. Sanan *a pituus* on n, kun sanan määrittelyjoukko on $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Esimerkiksi jos $A = \{2, 4\}$ ja $f = \{(0, 4), (1, 2), (2, 2)\}$, niin sanan f pituus on 3 ja $f = 422$. Lisäksi annetuille sanoille 422 ja 24424 saadaan $422^\frown 24424 = 42224424$.

Määritelmä 1.5. Olkoon $(S, *)$ ja $(T, \cdot)$ puoliryhmiä.

a) Kuvaus $\varphi\colon S \to T$ on *homomorfismi*, jos $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ kaikilla $x, y \in S$.

b) Kuvaus $\varphi\colon S \to T$ on *isomorfismi*, jos φ on bijektiivinen homomorfismi.

c) Joukot S ja T ovat *isomorfisia*, jos ja vain jos on olemassa isomorfismi joukolta S joukkoon T. Jos S ja T ovat isomorfisia, merkitään $S \cong T$.

d) Kuvaus $\varphi\colon S \to T$ on *anti-homomorfismi*, jos $\varphi(x * y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$ kaikilla $x, y \in S$.

e) Kuvaus $\varphi\colon S \to T$ on *anti-isomorfismi*, jos φ on bijektiivinen antihomomorfismi.

f) Joukot S ja T ovat *anti-isomorfisia*, jos ja vain jos on olemassa antiisomorfismi joukolta S joukkoon T.

Määritelmä 1.6. Olkoon $(S, *)$ puoliryhmä ja $a \in S$.

a) Alkio a on joukon S *vasen identiteetti*, jos ja vain jos $a * x = x$ kaikilla $x \in S$.

b) Alkio a on joukon S *oikea identiteetti*, jos ja vain jos $x * a = x$ kaikilla $x \in S$.

c) Alkio a on joukon S *identiteetti*, jos ja vain jos a on sekä oikea, että vasen identiteetti.

Vasemmassa nollapuoliryhmässä jokainen alkio on oikea identiteetti ja oikeassa nollapuoliryhmässä jokainen alkio on vasen identiteetti.

Esimerkki 1.7. Puoliryhmässä voi olla monta oikeaa identiteettiä. Esimerkiksi puoliryhmässä, jonka kaikki alkiot ovat matriiseja, jotka ovat muotoa

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ missä } x \in \mathbb{R},$$

jokainen alkio on oikea identiteetti.

Jos puoliryhmä S ei sisällä identiteettiä, niin joukoksi S^1 kutsutaan joukkoa S, johon on lisätty identiteetti. Jos S sisältää identiteetin, niin $S^1 = S$.

Huomautus 1.8. Olkoon $(S, *)$ puoliryhmä. Jos e on joukon S vasen identiteetti ja f oikea identiteetti, niin $f = e$. Puoliryhmässä voi siis olla vain yksi kaksipuolinen identiteetti.

Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ joukko puoliryhmiä. Tällöin *Karteesinen tulo*

$$S = \prod \{S_i \mid i \in I\}$$

on puoliryhmä annetuilla joukkojen operaatioilla $*_i$.

Määritelmä 1.9. a) Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ indeksoitu joukko puoliryhmiä ja olkoon $S = \prod\{S_i \mid i \in I\}$. Operaatiolla $*$, joka on määritelty $(\vec{x} * \vec{y})_i = x_i *_i y_i$, varustettu puoliryhmä $(S, *)$ on puoliryhmien $(S_i, *_i)$ *suora tulo*.

b) Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ indeksoitu puoliryhmien joukko, jossa jokaisella puoliryhmällä S_i on kaksipuolinen identiteetti e_i. Tällöin puoliryhmien $(S_i, *_i)$ suora summa on $\bigoplus_{i\in I} S_i = \{\vec{x} \in \prod\{S_i \mid i \in I\} \mid \{i \in I \mid x_i \neq e_i\}$ on äärellinen$\}$.

Määritelmä 1.10. Olkoon $(S, *)$ puoliryhmä ja olkoon $a, b, c \in S$.

a) Alkio c on alkion b *vasen a-käänteisalkio*, jos ja vain jos $c * b = a$.

b) Alkio c on alkion b *oikea a-käänteisalkio*, jos ja vain jos $b * c = a$.

c) Alkio c on alkion b *a-käänteisalkio*, jos ja vain jos c on alkion b oikea sekä vasen a-käänteisalkio.

Termit vasen a-käänteisalkio, oikea a-käänteisalkio ja a-käänteisalkio korvataan yleensä vasemmalla käänteisalkiolla, oikealla käänteisalkiolla ja käänteisalkiolla.

Määritelmä 1.11. Pari $(S, *)$ on *ryhmä*, jos

a) $(S, *)$ on puoliryhmä ja

b) on olemassa sellainen alkio $e \in S$, että

  i) e on joukon S vasen identiteetti.

  ii) jokaiselle alkiolle $x \in S$ on olemassa sellainen $y \in S$, että y on alkion x vasen e-käänteisalkio, eli $y * x = e$.

Lause 1.12. *Olkoon $(S, *)$ puoliryhmä. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) $(S, *)$ on ryhmä.

b) On olemassa sellainen joukon S kaksipuolinen identitieetti e, että jokaiselle $x \in S$ on olemassa jokin $y \in S$, joka on alkion x kaksipuolinen e-käänteisalkio.

c) On olemassa joukon S vasen identiteetti ja mille tahansa joukon S vasemmalle identiteetille e ja mille tahansa $x \in S$ on olemassa jokin $y \in S$, joka on alkion x vasen e-käänteisalkio.

d) On olemassa sellainen joukon S oikea identiteetti e, että jokaiselle $x \in S$ on olemassa jokin $y \in S$, joka on alkion x oikea e-käänteisalkio.

e) On olemassa joukon S oikea identiteetti ja mille tahansa oikealle identiteetille $e \in S$ ja mille tahansa $x \in S$ on olemassa jokin $y \in S$, joka on alkion x oikea e-käänteisalkio.

Todistus. $a) \Rightarrow b)$ Olkoon e joukon S vasen identiteetti. Osoitetaan ensin, että jokaisella joukon S alkiolla on olemassa kaksipuolinen e-käänteisalkio. Olkoon $x \in S$ annettu ja olkoon $y \in S$ alkion x vasen e-käänteisalkio. Olkoon $z \in S$ alkion y vasen e-käänteisalkio. Tällöin $x{*}y = e{*}(x{*}y) = (z{*}y){*}(x{*}y) = z{*}((y{*}x){*}y) = z{*}(e{*}y) = z{*}y = e$, joten y on alkion x oikea e-käänteisalkio ja näin ollen y on alkion x kaksipuolinen e-käänteisalkio.

Osoitetaan sitten, että e on joukon S oikea identiteetti. Olkoon $x \in S$ annettu ja valitaan alkion x e-käänteisalkio $y \in S$. Tällöin $x{*}e = x{*}(y{*}x) = (x * y) * x = e * x = x$, joten e on joukon S oikea identiteetti ja näin ollen se on joukon S kaksipuolinen identiteetti.

$b) \Rightarrow c)$ Olkoon e joukon S kaksipuolinen identiteetti. Olkoon f mikä tahansa joukon S identiteetti. Tällöin Huomautuksen 1.8 nojalla $e = f$. Näin ollen jokaiselle joukon S alkiolle on olemassa vasen f-käänteisalkio.

$c) \Rightarrow a)$ Koska joukossa S on vasen identiteetti e ja jokaisella joukon S alkiolla on olemassa vasen e-käänteisaklio joukossa S, niin S on ryhmä.

$d) \Rightarrow b)$ Olkoon e joukon S oikea identiteetti. Osoitetaan ensin, että jokaisella joukon S alkiolla on kaksipuolinen e-käänteisalkio. Olkoon $x \in S$ annettu ja olkoon $y \in S$ alkion x oikea e-käänteisalkio. Olkoon $z \in S$ alkion y oikea e-käänteisalkio. Tällöin $y * x = (y * x) * e = (y * x) * (y * z) = (y * (x * y)) * z = (y * e) * z = y * z = e$, joten y on alkion x vasen e-käänteisalkio. Näin ollen y on alkion x kaksipuolinen e-käänteisalkio.

Osoitetaan sitten, että e on joukon S kaksipuolinen identiteetti. Olkoon $x \in S$ annettu ja valitaan alkion x e-käänteisalkio $y \in S$. Tällöin $e * x = (x * y) * x = x * (y * x) = x * e = x$, joten e on joukon S vasen identiteetti ja näin ollen e on joukon S kaksipuolinen identiteetti.

$b) \Rightarrow e)$ Olkoon e joukon S kaksipuolinen identiteetti. Olkoon f mikä tahansa joukon S oikea identiteetti. Tällöin Huomautuksen 1.8 nojalla $e = f$. Näin ollen jokaiselle joukon S alkiolle on olemassa oikea f-käänteisalkio.

$e) \Rightarrow d)$ Koska joukossa S on oikea identiteetti e, niin jokaiselle joukon S alkiolle x on olemassa oikea e-käänteisalkio $y \in S$. □

Kun käsitellään satunnaisia puoliryhmiä, on tavallista, että operaationa käytetään merkkiä $\cdot$. Lisäksi puoliryhmässä $(S, \cdot)$ käytetään usein merkintää xy merkinnän $x \cdot y$ tilalla. Kun kirjoitetaan ”Olkoon S puoliryhmä”, tarkoitetaan "Olkoon $(S, \cdot)$ puoliryhmä" ja kun kirjoitetaan "xy", niin tarkoitetaan "$x \cdot y$".

Määritelmä 1.13. Olkoon S puoliryhmä.

a) S on *kommutatiivinen*, jos ja vain jos $xy = yx$ kaikilla $x, y \in S$.

b) Joukon S *keskus* on joukko $\{x \in S \mid xy = yx, \text{ kaikilla } y \in S\}$.

c) Olkoon $x \in S$. Kuvaus $\lambda_x \colon S \to S$ on määritelty $\lambda_x(y) = xy$.

d) Olkoon $x \in S$. Kuvaus $\rho_x \colon S \to S$ on määritelty $\rho_x(y) = yx$.

e) $L(S) = \{\lambda_x \mid x \in S\}$.

f) $R(S) = \{\rho_x \mid x \in S\}$.

Joukon S keskus koostuu kaikista joukon S alkioista, jotka kommutoivat jokaisen joukon S alkion kanssa.

Ryhmää, jonka kaikki alkiot kommutoivat, kutsutaan *kommutatiiviseksi ryhmäksi* tai *Abelin ryhmäksi.*

Huomautus 1.14. Olkoon $(S, *)$ puoliryhmä. Tällöin myös joukot $(R(S), \circ)$ ja $(L(S), \circ)$ ovat puoliryhmiä.

Koska kaikki puoliryhmät eivät aina ole kommutatiivisia, täytyy määritellä mitä tarkoitetaan merkinnällä $\prod_{i=1}^{n} x_i$. Määritellään se tavalla, joka tulee luonnollisimmin.

Määritelmä 1.15. Olkoon S puoliryhmä. Määritellään $\prod_{i=1}^{n} x_i$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq S$, induktiivisesti.

a) $\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1$.

b) Annetulle $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = (\prod_{i=1}^{n} x_i) \cdot x_{n+1}$.

Määritelmä 1.16. Puoliryhmän S ekvivalenssirelaatio R on *kongruenssi*, jos $(s, t) \in R$ ja $u \in S$ seuraa, että $(us, ut), (su, tu) \in R$.

Lause 1.17. *Olkoon R kongruenssi puoliryhmässä S. Kaikilla $s \in S$, olkoon $\pi(s)$ ekvivalenssiluokka, joka sisältää alkion s, ja määritellään $S/R = \{\pi(s) \mid s \in S\}$. Jos operaatio joukossa S/R on määritelty seuraavasti: $\pi(s)\pi(t) = \pi(st)$, niin joukko S/R on puoliryhmä ja $\pi \colon S \to S/R$ on homomorfismi.*

Määritelmä 1.18. Jos R on kongruenssi puoliryhmässä S, niin joukkoa S/R varustettuna operaatiolla, joka on määritelty kohdassa 1.17, kutsutaan joukon S *tekijäpuoliryhmäksi* modulo R, ja kuvausta $\pi \colon S \to S/R$ kutsutaan *tekijäkuvaukseksi.*

Lause 1.19. *Olkoon $\theta\colon S \to T$ homomorfismi ja olkoon $R = \{(s,s') \in S \times S \mid \theta(s) = \theta(s')\}$. Tällöin R on joukon S kongruenssi ja on olemassa sellainen yksikäsitteinen isomorfismi $\psi\colon S/R \to T$, että seuraavat kuvaukset kommutoivat: $\theta\colon S \to T$, $\psi\colon S/R \to T$ ja $\pi\colon S \to S/R$.*

Todistus. R on selvästi kongruenssi, koska jos $(s,s') \in R$ ja $u \in S$, niin $\theta(us) = \theta(u)\theta(s) = \theta(u)\theta(s') = \theta(us')$ ja $\theta(su) = \theta(s)\theta(u) = \theta(s')\theta(u) = \theta(s'u)$, joten $(us, us'), (su, s'u) \in R$. Kuvaus $\psi\colon S/R \to T$, $\psi(\pi(s)) = \theta(s)$ kaikilla $s \in S$, on hyvin määritelty ja näin ollen ψ on yksikäsitteinen isomorfismi, joka toteuttaa lauseen ehdot. □

Määritelmä 1.20. Olkoon S puoliryhmä.

a) Alkio $x \in S$ on *oikea peruuttava*, jos ja vain jos aina, kun $y, z \in S$ ja $yx = zx$, niin $y = z$.

b) Alkio $x \in S$ on *vasen peruuttava*, jos ja vain jos aina, kun $y, z \in S$ ja $xy = xz$, niin $y = z$.

c) S on *oikea peruuttava*, jos ja vain jos jokainen $x \in S$ on oikea peruuttava.

d) S on *vasen peruuttava*, jos ja vain jos jokainen alkio $x \in S$ on vasen peruuttava.

e) S on *peruuttava*, jos ja vain jos S on sekä oikea, että vasen peruuttava.

Lause 1.21. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Funktio $\lambda\colon S \to L(S)$ on surjektiivinen homomorfismi.

b) Funktio $\rho : S \to R(S)$ on surjektiivinen anti-homomorfismi.

c) Jos S on oikea peruuttava, niin S ja $L(S)$ ovat isomorfisia.

d) Jos S on vasen peruuttava, niin S ja $R(S)$ ovat anti-isomorfisia.

Todistus. *a*) Olkoon $x, y, z \in S$. Olkoon kuvaus $\lambda(x) = \lambda_x$. Tällöin

$$\lambda_x \circ \lambda_y(z) = \lambda_x(\lambda_y(z)) = \lambda_x(yz) = x(yz) = (xy)z = \lambda_{xy}(z),$$

joten λ on homomorfismi. Koska λ_x on määritelty siten, että $x \in S$, niin jokaiselle maalijoukon $L(S)$ alkiolle λ_x on olemassa alkujoukon alkio $x \in S$. Näin ollen λ on surjektio.

b) Olkoon $x, y, z \in S$. Olkoon kuvaus $\rho(x) = \rho_x$. Tällöin

$$\rho_x \circ \rho_y(z) = \rho_x(\rho_y(z)) = \rho_x(zy) = (zy)x = z(yx) = \rho_{yx}(z),$$

joten ρ on anti-homomorfismi. Koska ρ_x on määritelty siten, että $x \in S$, niin jokaiselle maalijoukon $R(S)$ alkiolle ρ_x on olemassa alkujoukon alkio $x \in S$. Näin ollen ρ on surjektio.

c) Koska *a*)-kohdan perusteella $\lambda \colon S \to L(S)$ on surjektiivinen homomorfismi, niin riittää todistaa, että λ on injektio. Olkoon $x, y, z \in S$. Olkoon $\lambda_x = \lambda_y$. Tällöin $\lambda_x(z) = \lambda_y(z)$, joten $xz = yz$. Koska S on oikea peruuttava, niin $x = y$. Näin ollen λ on injektio.
Koska λ on bijektio ja homomorfismi, niin joukot S ja $L(S)$ ovat isomorfiset.

d) Koska *b*)-kohdan nojalla kuvaus $\rho \colon S \to R(S)$ on surjektiivinen antihomomorfismi, niin riittää todistaa, että ρ on injektio. Olkoon $x, y, z \in S$. Olkoon $\rho_x = \rho_y$. Tällöin $\rho_x(z) = \rho_y(z)$, joten $zx = zy$. Koska S on vasen peruuttava, niin $x = y$. Näin ollen ρ on injektio.
Koska ρ on bijektio ja anti-homomorfismi, niin S ja $R(S)$ ovat anti-isomorfiset.

$\square$

2 Idempotentit ja aliryhmät

Määritelmä 2.1. Olkoon S puoliryhmä.

a) Alkio $x \in S$ on *idempotentti*, jos ja vain jos $xx = x$.

b) $E(S) = \{x \in S \mid x \text{ on idempotentti}\}$.

c) T on joukon S *alipuoliryhmä*, jos ja vain jos $T \subseteq S$ ja T on puoliryhmä saman operaation suhteen, kuin S.

d) T on joukon S *aliryhmä*, jos ja vain jos $T \subseteq S$ ja T on ryhmä saman operaation suhteen, kuin S.

e) Olkoon $e \in E(S)$. Tällöin $H(e) = \bigcup\{G \mid G \text{ on joukon } S \text{ aliryhmä ja } e \in G\}$.

Jos $E(S) = S$, kutsutaan puoliryhmää S *idempotenttipuoliryhmäksi*.

Esimerkki 2.2. Jos S_1 ja S_2 ovat satunnaisia, epätyhjiä puoliryhmiä, niin Karteesinen tulo $S_1 \times S_2$ on idempotenttipuoliryhmä operaatiolla

$$(s_1, s_2)(t_1, t_2) = (s_1, t_2).$$

Esimerkki 2.3. Joukko $\{0, 1\}$, missä 0 on nolla-alkio ja 1 on identiteetti, on esimerkki kommutatiivisesta identiteettipuoliryhmästä.

Lemma 2.4. *Olkoon G ryhmä, jonka identiteetti on e. Tällöin $E(G) = \{e\}$.*

Todistus. Oletetaan, että $f \in E(G)$. Tällöin $ff = f$. Kun tätä operoidaan vasemmalta alkion f käänteisalkiolla, saadaan $f = e$. Näin ollen $E(G) = \{e\}$. □

Lemman 2.4 seurauksena joukon $H(e)$ määritelmässä toteamus ”$e \in G$” tarkoittaa samaa, kuin ”e on joukon G identiteetti”.

Lause 2.5. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $e \in E(S)$. Tällöin $H(e)$ on joukon S suurin aliryhmä, jonka identiteetti on e.*

Todistus. Koska e on luonnollisesti joukon $H(e)$ identiteetti ja $H(e)$ sisältää kaikki joukon S aliryhmät, jotka sisältävät alkion e, niin riittää osoittaa, että $H(e)$ on ryhmä. Täytyy siis osoittaa, että $H(e)$ on suljettu.
Olkoon $x, y \in H(e)$ ja valitaan sellaiset joukon S aliryhmät G_1 ja G_2, että $e \in G_1 \cap G_2$, $x \in G_1$ ja $y \in G_2$. Olkoon $G = \{\prod_{i=1}^{n} x_i \mid n \in \mathbb{N} \text{ ja } \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq G_1 \cup G_2\}$. Tällöin $xy \in G$ ja $e \in G$, joten riittää osoittaa, että G on ryhmä. Ainoa ryhmän edellytys, joka ei ole ilmeinen, on käänteisalkioiden olemassaolo. Olkoon $\prod_{i=1}^{n} x_i \in G$. Valitaan sellaiset y_i, missä $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, että $x_{n+1-i}y_i = e$. Tällöin $\prod_{i=1}^{n} y_i \in G$ ja

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right) &= (x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n) \cdot (y_1 y_2 \ldots y_{n-1} y_n) \\
&= x_1 x_2 \ldots x_{n-1} (x_n y_1) y_2 \ldots y_{n-1} y_n \\
&= x_1 x_2 \ldots x_{n-1} e y_2 y_3 \ldots y_{n-1} y_n \\
&= x_1 x_1 \ldots x_{n-2} (x_{n-1} y_2) y_3 \ldots y_{n-1} y_n \\
&\vdots \\
&= e,
\end{aligned}$$

joten G on ryhmä. Näin ollen $G \subseteq H(e)$, joten $H(e)$ on joukon S suurin aliryhmä, jonka identiteetti on e. □

Ryhmiä $H(e)$ kutsutaan *maksimaalisiksi ryhmiksi*, koska millä tahansa ryhmällä $G \subseteq S$, on identiteetti e ja näin ollen $G \subseteq H(e)$.

Lemma 2.6. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon $e \in E(S)$ ja olkoon $x \in S$. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) $x \in H(e)$

b) $xe = x$ *ja on olemassa sellainen* $y \in S$*, että* $ye = y$ *ja* $xy = yx = e$.

c) $ex = x$ *ja on olemassa sellainen* $y \in S$*, että* $ey = y$ *ja* $xy = yx = e$.

Todistus. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Olkoon $x \in H(e)$ ja $e \in E(S)$. Tällöin e on joukon $H(e)$ identiteetti, joten $xe = x$. Koska $H(e)$ on ryhmä, niin on olemassa jokin $y \in S$ siten, että $ye = y$ ja $xy = yx = e$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Olkoon $G = \{x \in S \mid xe = x$ ja on olemassa sellainen $y \in S$, että $ye = y$ ja $xy = yx = e\}$. Jotta x kuuluisi joukkoon $H(e)$, niin täytyy osoittaa, että G on ryhmä, jonka identiteetti on e. Olkoon $x, z \in G$. Tällöin $(xz)e = x(ze) = xz$. Valitaan sellaiset$y, w \in S$, että $ye = y$, $we = w$, $yx = xy = e$ ja $wz = zw = e$. Tällöin $(wy)e = w(ye) = wy$ ja $(xz)(wy) = x(zw)y = (xe)y = xy = e = wz = (we)z = w(yx)z = (wy)(xz)$. Näin ollen $xz \in G$, joten G on suljettu.

Koska e on joukon G oikea identiteetti, niin täytyy osoittaa, että jokaisella joukon G alkiolla on oikea e-käänteisalkio joukossa G. Olkoon $x \in G$ ja valitaan sellainen $y \in G$, että $ye = y$ ja $yx = xy = e$. Näin ollen G on ryhmä, jonka käänteisalkio on e, ja $x \in H(e)$.

a) $\Rightarrow$ *c)* Olkoon $x \in H(e)$ ja $e \in E(S)$. Tällöin e on joukon $H(e)$ identiteetti, joten $ex = x$. Koska $H(e)$ on ryhmä, niin on jokaiselle alkiolle $x \in H(e)$ on olemassa sellainen $y \in H(e)$, että $ey = y$ ja $xy = yx = e$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Olkoon $G = \{x \in S \mid ex = x$ ja on olemassa sellainen $y \in S$, että $xy = yx = e\}$. Jotta x olisi joukon $H(e)$ alkio, täytyy osoittaa, että G on ryhmä, jonka identiteetti on e. Olkoon $x, z \in G$. Tällöin $e(xz) = (ex)z$. Valitaan sellaiset $y, w \in S$, että $ey = y$, $ew = w$, $xy = yx = e$ ja $wz = zw = e$. Tällöin $e(wy) = (ew)y = wy$ ja $(xz)(wy) = x(zw)y = x(ey) = ey = e = wz = w(ez) = w(yx)z = (wy)(xz)$. Näin ollen $xz \in G$, joten G on suljettu.

Koska e on joukon G vasen identiteetti, niin täytyy osoittaa, että jokaisella joukon G alkiolla on vasen e-käänteisalkio joukossa G. Olkoon $x \in G$ ja valitaan sellainen $y \in G$, että $ey = y$ ja $xy = yx = e$. Eli G on ryhmä, jonka käänteisalkio on e ja näin ollen $x \in H(e)$. $\square$

Esimerkki 2.7. Olkoon X mikä tahansa joukko. Tällöin parin $(X_X, \circ)$ idempotentteja ovat funktiot $f \in X_X$, joilla on ominaisuus $f(x) = x$ kaikilla $x \in f[X]$.

Määritelmä 2.8. Olkoon S identiteetin sisältävä vapaa puoliryhmä aakkostossa $A \times \{1, -1\}$ ja olkoon

$$G = \{g \in S \mid \text{ei ole olemassa alkion } g \text{ määrittelyjoukon alkioita } t \text{ ja } t+1, \\ a \in A \text{ ja } i \in \{1,-1\}, \text{ joille } g(t) = (a,i) \text{ ja } g(t+1) = (a,-i)\}.$$

Annetuille $f, g \in G \setminus \{\emptyset\}$, joiden määrittelyjoukot ovat

$$f: \ \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ ja}$$
$$g: \ \{0, 1, \dots, m-1\},$$

määritellään $f \cdot g = f^\frown g$, ellei ole olemassa $a \in A$ ja $i \in \{1, -1\}$, joilla $f(n-1) = (a, i)$ ja $g(0) = (a, -i)$.
Jos näin on, niin valitaan sellainen suurin $k \in \mathbb{N}$, että kaikille $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ on olemassa sellaiset $b \in A$ ja $j \in \{1, -1\}$, että $f(n-t) = (b, j)$ ja $g(t-1) = (b, -j)$. Jos $k = m = n$, niin $f \cdot g = \emptyset$. Muuten alkion $f \cdot g$ määrittelyjoukko on $\{0, 1, \dots, n+m-2k-1\}$ ja kaikille $t \in \{1, 2, \dots, n+m-2k-1\}$.

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{kun } t < n-k \\ g(t+2k-n) & \text{kun } t \geq n-k \end{cases}.$$

Tällöin $(G, \cdot)$ on *aakkoston A generoima vapaa ryhmä.*

Joukko G yllä määritellyllä operaatiolla on ryhmä.
Tavallisesti kirjoitetaan $(a, 1)$ tilalla a ja $(a, -1)$ tilalla a^{-1}. Jos otetaan esimerkiksi sana $ab^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}bb$, voidaan se kirjoittaa muodossa $ab^{-2}a^{-2}b^2$. Nyt myös esimerkiksi $(ab^{-3}a^{-2}b^2) \cdot (b^{-2}a^3b^{-4}) = ab^{-3}ab^{-4}$.

3 Yhden alkion potenssit

Olkoon x jokin joukon S alkio. Määritellään $x^n \in S$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$, induktiivisesti. Aloitetaan siitä, että $x^1 = x$ ja $x^{n+1} = xx^n$, kun x^n on jo määritelty. Myös $x^n x^m = x^{n+m}$, kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$. Näin ollen joukko $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on puoliryhmän S kommutatiivinen alipuoliryhmä. Jos tämä alipuoliryhmä on äärellinen, niin sanotaan, että alkioilla x on *äärellinen järjestys*, ja *ääretön järjestys*, jos alipuoliryhmä on ääretön.

Jos joukossa S on identiteetti e, voidaan määritellä x^0 kaikilla $x \in S$ siten, että $x^0 = e$. Jos alkiolla x on käänteisalkio joukossa S, merkitään sitä x^{-1} ja määritellään x^{-n} kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että $x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n$. Jos alkiolla x on käänteisalkio, niin $x^m x^n = x^{m+n}$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Täten $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ muodostaa puoliryhmän S aliryhmän.

Lause 3.1. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon alkioilla $x \in S$ ääretön järjestys. Tällöin joukon S alipuoliryhmä $T = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on isomorfinen joukkoon $(\mathbb{N}, +)$.*

Todistus. Täytyy osoittaa, että on olemassa bijektiokuvaus $f\colon (\mathbb{N}, +) \to T$. Kuvaus $f(n) = x^n$ on surjektiivinen homomorfismi, sillä $f\left(m+n\right) = x^{m+n} =$

$x^m x^n$. Täytyy vielä osoittaa, että kuvaus on injektio. Oletetaan, että $x^m = x^n$ joillakin $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m < n$. Tällöin x^{n-m} on alkion x^m identiteetti, sillä $x^{n-m}x^m = x^{n-m+m} = x^n = x^m$, joten myös $x^{q(n-m)}$, missä q on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, on alkion x^m identiteetti. Oletetaan, että s on mikä tahansa sellainen kokonaisluku, että $s > m$. Voidaan kirjoittaa $s - m = q(n - m) + r$, missä q ja r ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja $r < (n - m)$. Tällöin $x^s = x^{s-m}x^m = x^{q(n-m)+r}x^m = x^r x^m$. Tästä seuraa, että $\{x^s \mid s > m\}$ on äärellinen ja täten myös T on äärellinen. Tämä on ristiriidassa oletuksen, että x:llä on ääretön järjestys, kanssa. Näin ollen kuvaus on injektio ja $T \cong \mathbb{N}$. □

Lause 3.2. *Jokainen äärellinen puoliryhmä S sisältää idempotentin.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla joukon S alkioiden lukumäärän suhteen.

i) Alkuaskel: Olkoon $S = \{x\}$, eli joukossa S on yksi alkio. Koska S on puoliryhmä, niin $xx \in S$, joten $xx = x$. Eli x on joukon S idempotentti.

ii) Induktio-oletus: Väite pätee, kun puoliryhmässä on vähemmän alkioita, kuin puoliryhmässä S.
Induktioväite: Väite pätee puoliryhmälle S.

Valitaan mikä tahansa $x \in S$. Koska puoliryhmä S on äärellinen, on olemassa jotkin sellaiset positiiviset kokonaisluvut m ja n, että $x^m = x^n$ ja $m < n$. Tällöin $x^{n-m}x^m = x^n = x^m$. Tarkastellaan joukon S alipuoliryhmää $\{y \in S \mid x^{n-m}y = y\}$. Jos tämä alipuoliryhmä on koko joukko S, niin $x^{n-m} \in S$, joten x^{n-m} on idempotentti. Jos alipuoliryhmässä on vähemmän alkioita, kuin puoliryhmässä S, niin induktio-oletuksen nojalla se sisältää idempotentin.

□

4 Ideaalit

Olkoon A ja B puoliryhmän S osajoukkoja. Nyt AB tarkoittaa joukkoa

$$\{ab \mid a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

Määritelmä 4.1. Olkoon S puoliryhmä.

a) L on joukon S *vasen ideaali*, jos ja vain jos $\emptyset \neq L \subseteq S$ ja $SL \subseteq L$.

b) R on joukon S *oikea ideaali*, jos ja vain jos $\emptyset \neq R \subseteq S$ ja $RS \subseteq R$.

c) I on joukon S *ideaali*, jos ja vain jos I on joukon S sekä oikea, että vasen ideaali.

Joukon S *aidoksi ideaaliksi* kutsutaan sellaista ideaalia I, että $I \neq S$.

Määritelmä 4.2. Olkoon S puoliryhmä.

a) L on jouokon S *minimaalinen vasen ideaali*, jos ja vain jos L on joukon S vasen ideaali ja aina, kun J on joukon S vasen ideaali ja $J \subseteq L$, niin $J = L$.

b) R on joukon S *minimaalinen oikea ideaali*, jos ja vain jos R on joukon S oikea ideaali ja aina, kun J on joukon S oikea ideaali ja $J \subseteq R$, niin $J = R$.

c) S on *vasen yksinkertainen puoliryhmä*, jos ja vain jos S on joukon S minimaalinen vasen ideaali.

d) S on *oikea yksinkertainen puoliryhmä*, jos ja vain jos S on joukon S minimaalinen oikea ideaali.

e) S on *yksinkertainen puoliryhmä*, jos ja vain jos S on joukon S ainut ideaali.

Minimaalista ideaalia ei määritellä. Alla olevan Lemman 4.5 seurauksena nähdään, että puoliryhmässä voi olla vain yksi minimaalinen kaksipuolinen ideaali. Nimitystä *pienin ideaali* käytetään, kun viitataan ideaaliin, joka ei sisällä muita ideaaleja.

Nyt siis S on vasen yksinkertainen puoliryhmä, jos ja vain jos sillä ei ole vasempia aitoja ideaaleja. Samoin S on oikea yksinkertainen puoliryhmä, jos sillä ei ole oikeita aitoja ideaaleja.

Puoliryhmässä ei välttämättä ole yhtään minimaalista oikeaa tai vasenta ideaalia eikä pienintä ideaalia. Esimerkiksi puoliryhmä $(\mathbb{N}, +)$ ei näitä sisällä. Puoliryhmällä voi kuitenkin ollan useampi minimaalinen oikea tai vasen ideaali. Esimerkiksi vasemman nollapuoliryhmän L ja oikean nollapuoliryhmän R Karteesisessa tulossa $L \times R$ jokainen muotoa $L \times \{b\}$ oleva joukko on minimaalinen vasen ideaali ja jokainen muotoa $\{a\} \times R$ oleva joukko on minimaalinen oikea ideaali.

Esimerkki 4.3. Olkoon $S = \{a, b, c, d\}$, missä a, b, c ja d ovat mitä tahansa eri alkioita ja olkoon joukolla S seuraava taulukko operaation $\cdot$ suhteen. Tällöin S on yksinkertainen puoliryhmä, mutta se ei ole oikea eikä vasen yksinkertainen puoliryhmä.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Taulukosta nähdään, että joukon S operaatio on binäärinen, koska operaatio minkä tahansa kahden alkion välillä tuottaa jonkin joukon S alkion. Operaatio on myös assosiatiivinen, mutta sen osoittaminen vaatisi 128 laskutoimitusta. Tutkitaan 3×3 matriisien muodostamaa puoliryhmää S, missä

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avulla. Huomataan, että $\{a, b\}$ ja $\{c, d\}$ ovat joukon S oikeita ideaaleja ja $\{a, c\}$ ja $\{b, d\}$ ovat joukon S vasempia ideaaleja. Näin ollen S ei ole minimaalisin oikea eikä minimaalinen vasen ideaali.

Esimerkki 4.4. Olkoon S joukko matsiiseja, jotka ovat muotoa

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, \text{ missä } x, y \in [0, \infty[\,.$$

Matriisin kertolaskun suhteen S on yksinkertainen puoliryhmä, mutta ei vasen eikä oikea yksinkertainen puoliryhmä.

Tarkastellaan esimerkiksi joukon S osajoukkoa L, missä on ehto $y > 1$. Olkoon $\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} \in S$ ja olkoon $\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} \in L$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ y_1x_2 + y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt koska $y_1x_2 + y_2 > 0$, niin $\begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ y_1x_2 + y_2 & 1 \end{bmatrix} \in L$, joten L on joukon S vasen ideaali.

Tarkastellaan esimerkiksi joukon S osajoukkoa R, missä on ehto $y > 2x$. Olkoon $\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} \in S$ ja olkoon $\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} \in R$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2x_1 & 0 \\ y_2x_1 + y_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt koska $y_2x_1 + y_2 > 2x_2x_1 + y_2 > 2(x_2x_1)$, niin $\begin{bmatrix} x_2x_1 & 0 \\ y_2x_1 + y_2 & 1 \end{bmatrix} \in R$, joten R on joukon S oikea ideaali.

Lemma 4.5. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Olkoon L_1 ja L_2 joukon S vasempia ideaaleja. Tällöin $L_1 \cap L_2$ on joukon S vasen ideaali, jos ja vain jos $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

b) Olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon R joukon S oikea ideaali. Tällöin $L \cap R \neq \emptyset$.

Todistus. *a*) "$\Rightarrow$" Olkoon $L_1 \cap L_2$ joukon S vasen ideaali. Ideaalin määritelmän mukaan $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Olkoon $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Olkoon $x \in L_1 \cap L_2$. Koska L_1 ja L_2 ovat joukon S vasempia ideaaleja, niin $Sx \subseteq L_1$ ja $Sx \subseteq L_2$, joten $Sx \subseteq L_1 \cap L_2$. Näin ollen $L_1 \cap L_2$ on joukon S vasen ideaali.

b) Olkoon $x \in L$ ja olkoon $y \in R$. Tällöin ideaalin määritelmän mukaan $yx \in L$, koska $x \in L$ ja $yx \in R$, koska $y \in R$. Eli $yx \in L \cap R$, joten $L \cap R \neq \emptyset$. □

Lemma 4.6. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Olkoon $x \in S$. Tällöin xS on oikea ideaali, Sx on vasen ideaali ja SxS on ideaali.

b) Olkoon $e \in E(S)$. Tällöin e on joukon eS vasen identiteetti, joukon Se oikea identiteetti ja joukon eSe identiteetti.

Todistus. *a*) Olkoon $x \in S$. Koska S on puoliryhmä, niin $(xS)S = x(SS) \subseteq xS$. Näin ollen xS on oikea ideaali.

Olkoon $x \in S$. Koska S on puoliryhmä, niin $S(Sx) = (SS)x \subseteq Sx$. Näin ollen Sx on on vasen ideaali.

Olkoon $x \in S$. Koska S on puoliryhmä, niin $S(SxS) = (SS)xS \subseteq SxS$ ja $(SxS)S = Sx(SS) \subseteq SxS$, joten SxS on ideaali.

b) Olkoon $e \in E(S)$. Olkoon $x \in eS$ ja valitaan sellainen $t \in S$, että $x = et$. Tällöin $ex = e(et) = (ee)t = et = x$. Joten e on joukon eS vasen identiteetti.

Olkoon $e \in E(S)$. Olkoon $x \in Se$ ja valitaan sellainen $t \in S$, että $x = te$. Tällöin $xe = (te)e = t(ee) = te = x$, joten e on joukon Se oikea identiteetti.

Olkoon $e \in E(S)$ ja olkoon $x \in eSe$. Valitaan sellainen $t \in S$, että $x = ete$. Tällöin $ex = e(ete) = (ee)te = ete = x$ ja $xe = (ete)e = et(ee) = ete = x$, joten e on joukon eSe identiteetti. □

Lause 4.7. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) S on vasen yksinkertainen, jos ja vain jos $Sx = S$ kaikilla $x \in S$.

b) S on oikea yksinkertainen, jos ja vain jos $xS = S$ kaikilla $x \in S$.

c) S on yksinkertainen, jos ja vain jos $SxS = S$ kaikilla $x \in S$.

Todistus. a) "$\Rightarrow$" Olkoon S vasen yksinkertainen ja olkoon $x \in S$. Lemman 4.6 a)-kohdan nojalla Sx on vasen ideaali, joten koska $Sx \subseteq S$, niin $Sx = S$.
"$\Leftarrow$" Olkoon $Sx = S$ kaikilla $x \in S$. Olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon $x \in L$, joten $Sx \subseteq L$. Kuitenkin $L \subseteq S = Sx$, joten $L = S$ ja näin ollen S on vasen yksinkertainen.

b) "$\Rightarrow$" Olkoon S oikea yksinkertainen ja olkoon $x \in S$. Lemman 4.6 a)-kohdan nojalla xS on oikea ideaali, joten koska $xS \subseteq S$, niin $xS = S$.
"$\Leftarrow$" Olkoon $xS = S$ kaikilla $x \in S$. Olkoon R joukon S oikea ideaali ja olkoon $x \in R$, joten $xS \subseteq R$. Kuitenkin $R \subseteq S = xS$, joten $R = S$ ja näin ollen S on oikea yksinkertainen.

c) "$\Rightarrow$" Olkoon S yksinkertainen ja olkoon $x \in S$. Lemman 4.6 a)-kohdan nojalla SxS on ideaali, joten koska $SxS \subseteq S$, niin $SxS = S$.
"$\Leftarrow$" Olkoon $SxS = S$ kaikilla $x \in S$. Olkoon I joukon S ideaali ja olkoon $x \in I$, joten $SxS \subseteq I$. Kuitenkin $I \subseteq S = SxS$, joten $I = S$ ja näin ollen S on yksinkertainen. $\square$

Lause 4.8. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Jos S on vasen yksinkertainen puoliryhmä ja $e \in E(S)$, niin e on joukon S oikea identiteetti.

b) Jos L on joukon S vasen ideaali ja $s \in L$, niin $Ss \subseteq L$.

c) Olkoon $\emptyset \neq L \subseteq S$. Tällöin L on joukon S minimaalinen vasen ideaali, jos ja vain jos $Ss = L$, kaikilla $s \in L$.

Todistus. a) Lemman 4.6 a)-kohdan nojalla, koska $e \in S$, niin Se on joukon S vasen ideaali, joten $Se = S$. Näin ollen Lemman 4.6 b)-kohdan mukaan, e on joukon S oikea ideaali.

b) Tämä seuraa suoraan vasemman ideaalin määritelmästä.

c) "$\Rightarrow$" Olkoon $\emptyset \neq L \subseteq S$, olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali ja olkoon $s \in L$. Tällöin Lemman 4.6 a)-kohdan mukaan Ss on joukon S vasen ideaali ja b)-kohdan mukaan $Ss \subseteq L$, joten koska L on minimaalinen, niin $Ss = L$.
"$\Leftarrow$" Olkoon $Ss = L$ jollakin $s \in L$, joten L on joukon S vasen ideaali. Olkoon $J \subseteq L$ joukon S vasen ideaali ja valitaan $s \in J$. b)-kohdan nojalla $Ss \subseteq J$, joten $J \subseteq L = Ss \subseteq J$, joten $J = L$ ja näin ollen L on joukon S minimaalinen vasen ideaali. $\square$

Määritelmä 4.9. Olkoon S puoliryhmä.

a) Joukon S pienintä ideaalia, joka sisältää alkion $x \in S$, kutsutaan *alkion x generoimaksi pääideaaliksi.*

b) Joukon S pienintä vasenta ideaalia, joka sisältää alkion $x \in S$, kutsutaan *alkion x generoimaksi vasemmaksi pääideaaliksi.*

c) Joukon S pienintä oikeaa ideaalia, joka sisältää alkion $x \in S$, kutsutaan *alkion x generoimaksi oikeaksi pääideaaliksi.*

Lause 4.10. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $x \in S$.*

a) Alkion x generoima pääideaali on $SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$.

b) Jos joukossa S on identiteetti, niin alkion x generoima pääideaali on SxS.

c) Alkion x generoima vasen pääideaali on $Sx \cup \{x\}$ ja alkion x generoima oikea pääideaali on $xS \cup \{x\}$.

Todistus. a) Olkoon I joukon S alkion x generoima pääideaali. Tällöin $x \in I$, $xS \subseteq I$, $Sx \subseteq I$ ja $SxS \subseteq I$, joten $SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\} \subseteq I$. Täytyy osoittaa, että $SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$ on ideaali. Olkoon $s, t \in S$ jotkin joukon S alkiot, joten $tx \in Sx$, $xt \in xS$ ja $sxt \in SxS$. Tällöin $S(tx) = (St)x \subseteq Sx$, koska $St \subseteq S$, $(tx)S = txS \subseteq SxS$, $(xt)S = x(tS) \in xS$, koska $tS \subseteq S$, $S(xt) = Sxt \subseteq SxS$, $S(sxt) = (Ss)xt \subseteq SxS$, koska $Ss \subseteq S$, ja $(sxt)S = sx(tS) \subseteq SxS$, koska $tS \subseteq S$. Näin ollen $S(Sx) \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$, $(Sx)S \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$, $S(xS) \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$, $(xS)S \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$, $S(SxS) \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$ ja $(SxS)S \subseteq SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$, joten $SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$ on ideaali, ja koska I on pienin alkion x sisältävä ideaali, niin $I = SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$.

b) Olkoon $e \in S$ joukon S identiteetti. a)-kohdan mukaan joukon S alkion x generoima pääideaali on $SxS \cup Sx \cup xS \cup \{x\}$. Koska nyt joukossa S on identiteetti, niin $xS = exS \subseteq SxS$, $Sx = Sxe \subseteq SxS$ ja $x = exe \subseteq SxS$, joten alkion x generoima pääideaali on SxS.

c) Olkoon L joukon S alkion x generoima vasen pääideaali. Tällöin $Sx \cup \{x\} \subseteq L$. Olkoon $t \in S$, joten $tx, x \in Sx \cup \{x\}$. Tällöin $S(tx) = (St)x \subseteq Sx \cup \{x\}$, koska $St \subseteq S$, ja $Sx \subseteq Sx \cup \{x\}$, joten $Sx \cup \{x\}$ on vasen ideaali. Koska L on pienin alkion x sisältävä vasen ideaali, niin $L = Sx \cup \{x\}$.
Olkoon R joukon S alkion x generoima oikea pääideaali. Tällöin $xS \cup \{x\} \subseteq R$. Olkoon $t \in S$, joten $xt, x \in xS \cup \{x\}$. Tällöin $(xt)S = x(tS) \subseteq xS \cup \{x\}$, koska $tS \subseteq S$, ja $xS \subseteq xS \cup \{x\}$, joten $xS \cup \{x\}$ on oikea ideaali. Koska R on pienin alkion x sisältävä oikea ideaali, niin $R = xS \cup \{x\}$. □

5 Idempotenttien järjestys

Määritelmä 5.1. Olkoon S puoliryhmä ja $e, f \in E(S)$. Tällöin

a) $e \leq_L f$, jos ja vain jos $e = ef$,

b) $e \leq_R f$, jos ja vain jos $e = fe$ ja

c) $e \leq f$, jos ja vain jos $e = ef = fe$.

Huomautus 5.2. Olkoon S puoliryhmä. Tällöin $\leq_L$ ja $\leq_R$ ja $\leq$ ovat transitiivisia ja refleksiivisiä relaatioita joukossa $E(S)$. Lisäksi $\leq$ on antisymmetrinen.

Kun sanotaan, että e on minimaalinen relaation $\preceq$ suhteen joukossa B, tarkoitetaan, että jos $f \in B$ ja $f \preceq e$, niin $e \preceq f$. (Jos $\preceq$ on antisymmetrinen, niin tästä seuraa, että $e = f$.)

Lause 5.3. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $e \in E(S)$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) Alkio e on minimaalinen järjestyksen $\leq$ suhteen.

b) Alkio e on minimaalinen järjestyksen $\leq_R$ suhteen.

c) Alkio e on minimaalinen järjestyksen $\leq_L$ suhteen.

Todistus. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Olkoon e minimaalinen järjestyksen $\leq$ suhteen ja olkoon $f \leq_R e$. Olkoon $g = fe$. Tällöin $gg = (fe)(fe) = f(ef)e = (ff)e = fe = g$, joten $g \in E(S)$. Nyt myös $g = fe = (ef)e$, joten $eg = e((ef)e) = (ee)(fe) = e(fe) = (ef)e = g = (ef)e = (ef)(ee) = ((ef)e)e = ge$. Näin ollen $g \leq e$, joten $g = e$ alkion e minimaalisuuden nojalla. Näin ollen $e = fe$, joten $e \leq_R f$. Eli e on minimaalinen järjestyksen $\leq_R$ suhteen.

a) $\Rightarrow$ *c)* Olkoon e minimaalinen järjestyksen $\leq$ suhteen ja olkoon $f \leq_L e$. Olkoon $g = ef$. Tällöin $gg = (ef)(ef) = e(fe)f = (ee)f = ef = g$, joten $g \in E(S)$. Nyt myös $g = ef = e(fe)$, joten $eg = e(e(fe)) = (ee)(fe) = e(fe) = g = e(fe) = (e(fe))e = (ef)(ee) = (e(fe))e = ge$. Näin ollen $g \leq e$, joten alkion e minimaalisuuden nojalla $g = e$. Näin ollen $e = ef$, joten $e \leq_L f$. Eli e on minimaalinen järjestyksen $\leq_L$ suhteen.

b) $\Rightarrow$ *a)* Olkoon e minimaalinen järjestyksen $\leq_R$ suhteen ja olkoon $f \leq e$. Tällöin $f = ef$, joten $f \leq_R e$ ja alkion e minimaalisuuden nojalla $e \leq_R f$. Tällöin $e = fe = f$, joten $e \leq f$ ja e on minimaalinen järjestyksen $\leq$ suhteen.

c) $\Rightarrow$ *a)* Olkoon e minimaalinen järjestyksen $\leq_L$ suhteen ja olkoon $f \leq e$. Tällöin $f = fe$, joten $f \leq_L e$ ja alkion e minimaalisuuden nojalla $e \leq_L f$. Tällöin $e = fe = f$, joten $e \leq f$ ja e on minimaalinen järjestyksen $\leq$ suhteen. □

Lauseen 5.3 seurauksena voidaan tehdä seuraava määritelmä.

Määritelmä 5.4. Olkoon S puoliryhmä. Tällöin e on *minimaalinen idempotentti*, jos ja vain jos $e \in E(S)$ ja e on minimaalinen minkä tahansa järjestyksen, $\leq$, $\leq_R$ tai $\leq_R$, suhteen.

Lause 5.5. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $e \in E(S)$.*

a) Jos e on jonkin minimaalisen vasemman ideaalin jäsen, niin e on minimaalinen idempotentti.

b) Jos S on yksinkertainen puoliryhmä ja e on minimaalinen, niin Se on minimaalinen vasen ideaali.

c) Jos jokainen joukon S vasen ideaali sisältää idempotentin ja e on minimaalinen, niin Se on minimaalinen vasen ideaali.

d) Jos S on yksinkertainen puoliryhmä tai jokainen joukon S vasen ideaali sisältää idempotentin, seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.

i) e on minimaalinen.

ii) e on jonkin joukon S minimaalisen vasemman ideaalin jäsen.

iii) Se on joukon S minimaalinen vasen ideaali.

Todistus. *a*) Olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali ja olkoon $e \in L$. Tällöin $L = Se$. Olkoon $f \in E(S)$, jolle $f \leq e$. Tällöin $f = fe$, joten $f \in L$. Nyt lauseen 4.8 *c*)-kohdan nojalla $L = Sf$, joten $e \in Sf$ ja lemman 4.6 *b*)-kohdan nojalla f on joukon Sf oikea identiteetti, eli $e = ef = f = fe$. Näin ollen $e \leq f$ ja e on minimaalinen idempotentti.

b) Olkoon L sellainen joukon S vasen ideaali, että $L \subseteq Se$. Täytyy osoittaa, että $Se \subseteq L$. Valitaan jokin $s \in L$. Tällöin $s \in Se$ ja lemman 4.6 *b*)-kohdan nojalla $s = se$. Koska S on yksinkertainen, niin myös $SsS = S$, joten valitaan $u, v \in S$ siten, että $e = vsu$. Olkoon $r = eue$ ja olkoon $t = ev$. Tällöin $tsr = (ev)s(eue) = (ev)(se)(ue) = e(vsu)e = eee = ee = e$ ja $er = e(eue) = (ee)(ue) = eue = r$. Olkoon $f = rts$. Tällöin $ff = (rts)(rts) = r(tsr)ts = rets = re(ev)s = r(ee)vs = r(ev)s = rts = f$, joten $f \in E(S)$. Nyt myös $fe = (rts)e = rt(se) = rts = f$ ja $ef = e(rts) = (er)ts = rts = f$, joten $f \leq e$ ja koska e on minimaalinen, niin $f = e$. Näin ollen $Se = Sf = Srts \subseteq Ss \subseteq L$. Eli Se on minimaalinen vasen ideaali.

c) Olkoon L sellainen joukon S vasen ideaali, että $L \subseteq Se$. Osoitetaan, että $e \in L$, jolloin $Se \subseteq L$ ja näin ollen $Se = L$. Valitaan idempotentti $t \in L$, ja olkoon $f = et$. Tällöin $f \in L$. Koska $t \in Se$, niin $t = te$. Näin ollen $f = et = ete$, joten $ff = (et)(et) = e(te)t = ett = et = f$, joten $f \in E(S)$.

Nyt myös $ef = e(ete) = (ee)te = ete = f$ ja $fe = (ete)e = et(ee) = ete = f$, joten $f \leq e$ ja koska e on minimaalinen, niin $f = e$. Näin ollen $e \in L$, joten $L = Se$ ja Se on minimaalinen vasen ideaali.

d) *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Tämä seuraa suoraan kohdista *b*) ja *c*).

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Tämä seuraa suoraan *c*)-kohdasta.

iii) $\Rightarrow$ *i*) Tämä seuraa suoraan *a*)-kohdasta. □

Lause 5.5 pätee myös vastaaville oikeille ideaaleille.

Lause 5.6. *Olkoon S puoliryhmä. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) S on peruuttava ja yksinkertainen puoliryhmä, ja $E(S) \neq \emptyset$.

b) S on sekä oikea, että vasen yksinkertainen puoliryhmä.

c) Kaikilla $a, b \in S$, yhtälöillä $ax = b$ ja $ya = b$ on ratkaisut $x, y \in S$.

d) S on ryhmä.

Todistus. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Valitaan idempotentti e joukosta S. Osoitetaan ensin, että e on joukon S kaksipuolinen identiteetti. Olkoon $x \in S$. Tällöin $ex = eex$, joten vasemmalla mitätöinnillä saadaan $x = ex$. Samalla tavalla $xe = xee$, joten oikealla mitätöinnillä saadaan $x = xe$. Olkoon L joukon S vasen ideaali. Tällöin LS on joukon S ideaali, joten koska S on yksinkertainen, niin $LS = S$. Täten voidaan valita $t \in L$ ja $s \in S$ siten, että $e = ts$. Tällöin $sts = se = s = es$. Oikealla mitätöinnillä saadaan $st = e$. Näin ollen $e \in L$ ja siten $S = SL \subseteq L$. Eli $L = S$ ja näin ollen S on vasen yksinkertainen puoliryhmä. Oikean yksinkertaisen puoliryhmän tapaus osoitetaan samalla tavalla.

b) $\Rightarrow$ *c*) Olkoon $a, b \in S$. Tällöin aS on oikea ideaali, joten koska S on oikea yksinkertainen puoliryhmä, niin $aS = S$. Näin ollen on olemassa jokin $x \in S$ siten, että $ax = b$. Nyt Sa on vasen ideaali, joten koska S on vasen yksinkertainen puoliryhmä, niin $Sa = S$. Näin ollen on olemassa jokin $y \in S$ siten, että $ya = b$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Valitaan sellaiset $a, e \in S$, että $ea = a$. Osoitetaan, että e on joukon S vasen identiteetti. Olkoon $b \in S$. Osoitetaan, että $eb = b$. Valitaan sellainen $y \in S$, että $ay = b$. Tällöin $eb = e(ay) = (ea)y = ay = b$. Eli e on joukon S vasen identiteetti.

Nyt mille tahansa $x \in S$ on olemassa sellainen $y \in S$, että $yx = e$, joten jokaisella joukon S alkiolla on vasen e-käänteisalkio.

d) $\Rightarrow$ *a*) Koska S on ryhmä, niin se on myös peruuttava ja $E(S) \neq \emptyset$. Olkoon I joukon S ideaali. Valitaan $x \in I$. Olkoon $y \in S$ alkion x käänteisalkio, eli $xy = yx = e$. Nyt $xy \in I$, joten $I = S$. □

Lause 5.7. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon e sellainen joukon S vasen identiteetti, että kaikille $x \in S$ on olemassa sellainen $y \in S$, että $xy = e$. Olkoon $Y = E(S)$ ja $G = Se$. Tällöin Y on oikea nollapuoliryhmä, G on ryhmä ja $S = GY \cong G \times Y$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$\text{kaikilla } x \in Y \text{ ja kaikilla } y \in S,\ xy = y. \qquad (*)$$

Olkoon $x \in Y$ ja $y \in S$ annettu. Valitaan sellainen $z \in S$, että $xz = e$. Tällöin $xe = xxz = xz = e$. Näin ollen $xy = x(ey) = (xe)y = ey = y$.
Tästä seuraa, että kaikilla $x, y \in Y$, $xy = y$ ja $Y \neq \emptyset$, koska $e \in Y$. Jotta nähtäisiin, että Y on oikea nollapuoliryhmä, on osoitettava, että se on puoliryhmä, eli joukon Y tulee olla suljettu. Tämä seuraa myös $(*)$:sta, koska jos $x, y \in Y$, niin $xy = y \in Y$.

Seuraavaksi osoitetaan, että $G = Se$ on ryhmä. Lemman 4.6 b)-kohdan nojalla e on joukon G oikea identiteetti. Jokaisella joukon S alkiolla on oikea e-käänteisalkio joukossa S, joten jokaisella joukon G alkiolla on oikea e-käänteisalkio joukossa S. Lauseen 1.12 nojalla täytyy osoittaa, että jokaisella joukon G alkiolla on oikea e-käänteisalkio joukossa G. Olkoon $x \in G$ annettu ja valitaan $y \in S$ siten, että $xy = e$. Tällöin $ye \in G$ ja $xye = ee = e$, joten ye on alkion x oikea e-käänteisalkio. Koska myös $GG = SeSe \subseteq SSSe \subseteq Se = G$, niin G on ryhmä.

Osoitetaan sitten, että joukot S ja $G \times Y$ ovat isomorfisia. Määritellään sellainen kuvaus $\varphi \colon G \times Y \to S$, että $\varphi(g, y) = gy$. Osoitetaan ensin, että φ on homomorfismi, joten olkoon $(g_1, y_1), (g_2, y_2) \in G \times Y$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1, y_1)\varphi(g_2, y_2) &= (g_1y_1)(g_2y_2) \\
&= g_1(y_1g_2)y_2 \\
&= g_1g_2y_2 && ((*) : y_1g_2 = g_2) \\
&= (g_1g_2)(y_1y_2) && ((*) : y_2 = y_1y_2) \\
&= \varphi(g_1g_2, y_1y_2),
\end{aligned}$$

joten φ on homomorfismi.

Osoitetaan seuraavaksi, että φ on surjektio. Olkoon $s \in S$ annettu. Tällöin $se \in Se = G$, ja näin ollen on olemassa sellainen $x \in Se$, että $x(se) = (se)x = e$. Nyt $xs \in Y$, koska

$$\begin{aligned}
(xs)(xs) &= xs(ex)s && (x \in G, \text{ joten } x = ex) \\
&= x((se)x)s \\
&= (xe)s \\
&= xs && (x \in G, \text{ joten } xe = x).
\end{aligned}$$

Näin ollen $(se, xs) \in G \times Y$ ja $\varphi(se, xs) = (se)(xs) = ((se)x)s = es = s$, joten φ on surjektio ja sen vuoksi $S = GY$.

Osoitetaan vielä, että φ on injektio. Olkoon $(g, y) \in G \times Y$ ja olkoon $s = \varphi(g, y)$. Osoitetaan, että $g = se$ ja $y = xs$, missä x on alkion se yksikäsitteinen käänteisalkio joukossa Se. Nyt $s = gy$, joten

$$\begin{aligned} se &= gye \\ &= ge \qquad ((*) : ye = y) \\ &= g \qquad (\text{koska } g \in Se). \end{aligned}$$

Myös

$$\begin{aligned} xs &= xgy \\ &= xgyey \qquad (ye \in Y, \text{ joten } (*) : yey = y) \\ &= xsey \\ &= ey \qquad (xs \in Y, \text{ joten } xsey = ey) \\ &= y. \end{aligned}$$

Näin ollen φ on injektio. Koska φ on homomorfismi ja bijektio, ovat joukot $G \times Y$ ja S isomorfiset, eli $S \cong G \times Y$. □

Seuraus 5.8. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että joukossa S on yksikäsitteinen vasen identiteetti e ja jokaisella joukon S alkiolla on oikea käänteisalkio. Tällöin S on ryhmä.*

Todistus. Olkoon e joukon S yksikäsitteinen vasen identiteetti. Tällöin $e \in E(S) = Y$, koska $ee = e$. Koska jokaisella joukon S alkiolla on oikea käänteisalkio, niin Lauseen 5.7 $(*)$ mukaan $xs = s$ kaikilla $s \in S$ ja $x \in Y$. Koska e on yksikäsitteinen vasen identiteetti, niin $Y = \{e\}$. Näin ollen $S = GY = Ge = See = Se = G$ on ryhmä. □

6 Minimaaliset vasemmat ideaalit

Tässä kappaleessa huomataan, että moni tarpeellinen tulos seuraa minimaalisten vasempien (tai oikeiden) ideaalien olemassaolosta, varsinkin jos ne sisältävät idempotentin.

Lause 6.1. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali L, jossa on idempotentti e. Tällöin $L = XG \cong X \times G$, missä X on joukon L idempotenttien muodostama (vasen nolla) puoliryhmä, ja $G = eL = eSe$ on ryhmä.*

Todistus. Olkoon $x \in L$. Tällöin Lx on joukon S vasen ideaali, koska $SLx \subseteq Lx$, ja $Lx \subseteq L$, joten koska L on minimaalinen, niin $Lx = L$, ja näin ollen on olemassa sellainen $y \in L$, että $yx = e$. Nyt e on jouokon $Le = L$ oikea identiteetti. Täten Lause 5.7 pätee vasen-oikea vaihdoilla, kun korvataan joukko S joukolla L. □

Lemma 6.2. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon T joukon L vasen ideaali.*

a) Kaikilla $t \in T$, Lt on joukon S vasen ideaali ja $Lt \subseteq T$.

b) Jos L on joukon S minimaalinen vasen ideaali, niin $T = L$.

c) Jos T on joukon L minimaalinen vasen ideaali, niin T on joukon S minimaalinen vasen ideaali.

Todistus. *a*) Koska L on joukon S vasen ideaali, niin $S(Lt) = (SL)t \subseteq Lt$, joten Lt on joukon S vasen ideaali. Nyt myos koska T on joukon L vasen ideaali, niin $Lt \subseteq LT \subseteq T$.

b) Valitaan mikä tahansa $t \in T$. *a*)-kohdan nojalla Lt on joukon S vasen ideaali ja $Lt \subseteq T \subseteq L$, joten koska L on minimaalinen ideaali, niin $Lt = L$, joten $T = L$.

c) Valitaan mikä tahansa $t \in T$. *a*)-kohdan nojalla Lt on joukon S vasen ideaali, joten Lt on joukon L vasen ideaali. Koska $Lt \subseteq T$, niin $Lt = T$. Näin ollen $ST = S(Lt) = (SL)t \subseteq Lt = T$, joten T on joukon S vasen ideaali. Olkoon J sellainen joukon S vasen ideaali, että $J \subseteq T$. Tällöin J on joukon L vasen ideaali, joten $J = T$. Näin ollen T on joukon S minimaalinen vasen ideaali. □

Lemman 6.2 seurauksena, jos L on joukon S vasen ideaali ja T joukon L vasen ideaali ja joko L on minimaalinen joukossa S tai T on minimaalinen joukossa L, niin T on joukon S vasen ideaali. Tämä pätee myös oikeille ideaaleille. Seuraavasta esimerkistä huomataan, että ilman tiettyjä oletuksia joukko T ei ole joukon S oikea ideaali.

Esimerkki 6.3. Olkoon $X = \{0, 1, 2\}$ ja olkoon $S = X_X$. Olkoon $R = \{f \in S \mid \text{ alkion } f \text{ arvojoukko on } \{0, 1\}\}$ ja olkoon $T = \{\overline{0}, a\}$, missä $\overline{0}$ on vakiofunktio ja $a\colon 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 0,\ 2 \mapsto 1$. Tällöin R on joukon S oikea ideaali ja T on joukon R oikea ideaali, mutta T ei ole jouokon S oikea ideaali.

Lemma 6.4. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon I joukon S ideaali ja olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali. Tällöin $L \subseteq I$.*

Todistus. Olkoon $x \in L$, joten Lauseen 4.8 c)-kohdan nojalla $Sx = L$. I on ideaali, joten se on joukon S oikea sekä vasen ideaali. Tällöin $IS \subseteq I \subseteq S$. Näin ollen myös $(IS)x \subseteq Sx = L$. Nyt ISx on joukon S vasen ideaali, koska $S(ISx) = (SI)Sx \subseteq ISx$. Koska L on minimaalinen vasen ideaali, niin $ISx = L$, ja koska $Sx \subseteq S$, niin $I(Sx) \subseteq I$. Näin ollen $ISx = L \subseteq I$. □

Lause 6.5. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali ja olkoon $T \subseteq S$. Tällöin T on joukon S minimaalinen vasen ideaali, jos ja vain jos on olemassa jokin sellainen $a \in S$, että $T = La$.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Olkoon T joukon S minimaalinen vasen ideaali. Valitaan $a \in T$. Tällöin koska L on vasen ideaali, niin $SL \subseteq L$. Tällöin $SLa \subseteq La$ ja koska $L \subseteq S$, niin $La \subseteq ST \subseteq T$, joten La on joukon S vasen ideaali. Koska T on minimaalinen, niin $La = T$.

"$\Leftarrow$" Koska $SLa \subseteq La = T$, niin La on joukon S vasen ideaali. Oletetaan, että B on joukon S vasen ideaali ja $B \subseteq La$. Olkoon $A = \{s \in L \mid sa \in B\}$. Tällöin $A \subseteq L$ ja $A \neq \emptyset$. Olkoon $s \in A$ ja olkoon $t \in S$. Tällöin $sa \in B$, joten $tsa \in B$ ja koska $s \in L$, $ts \in L$, joten $ts \in A$. Näin ollen $AL = L$, joten $La \subseteq B$, joten $La = B$ ja näin ollen $La = T$ on joukon S minimaalinen vasen ideaali. □

Seuraus 6.6. *Olkoon S puoliryhmä. Jos joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, niin jokainen joukon S vasen ideaali sisältää minimaalisen vasemman ideaalin.*

Todistus. Olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali ja olkoon J joukon S vasen ideaali. Valitaan $a \in J$. Tällöin Lauseen 6.5 nojalla La on minimaalinen vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon J. □

Lause 6.7. *Olkoon S puoliryhmä ja $e \in E(S)$. Väitteet a-f ovat ekvivalentteja ja niistä seuraa väite g. Jos joko S on yksinkertainen tai jokaisella joukon S vasemmalla ideaalilla on idempotentti, niin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) Se on minimaalinen vasen ideaali.

b) Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä.

c) eSe on ryhmä.

d) $eSe = H(e)$.

e) eS on minimaalinen oikea ideaali.

f) eS on oikea yksinkertainen puoliryhmä.

g) e on minimaalinen idempotentti.

Todistus. $a) \Rightarrow b)$ Koska Se on minimaalinen vasen ideaali, niin Lemman 6.3 b)-kohdan nojalla joukolla Se ei ole muita vasempia ideaaleja, kuin se itse, joten Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä.

$b) \Rightarrow c)$ Joukko eSe on selvästi suljettu. Lemman 4.6 nojalla e on joukon eSe kaksipuolinen identiteetti. Olkoon $x = ese \in eSe$. Tällöin $x \in Se$, joten Sx on joukon Se vasen ideaali ja näin ollen $Se = Sx$, koska Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä. Näin ollen $e \in Sx$, joten valitaan sellainen $y \in S$, että $e = yx$. Tällöin $eye \in eSe$ ja $eyex = eyx = ee = e$, joten alkiolla x on vasen e-käänteisalkio joukossa eSe. Näin ollen eSe on ryhmä.

$c) \Rightarrow d)$ Koska eSe on ryhmä ja $e \in eSe$, niin $eSe \subseteq H(e)$. Nyt myös Lauseen 2.5 nojalla e on joukon $H(e)$ identiteetti, joten jos $x \in H(e)$, niin $x = exe \in eSe$, joten $H(e) \subseteq eSe$. Näin ollen $eSe = H(e)$.

$d) \Rightarrow a)$ Olkoon L sellainen joukon S vasen ideaali, että $L \subseteq Se$ ja valitaan $t \in L$. Tällöin $t \in Se$, joten $et \in eSe$. Valitaan sellainen $x \in eSe$, että $x(et) = e$. Tällöin $xt = (xe)t = x(et) = e$, joten $e \in L$, joten $Se \subseteq SL \subseteq L$. Näin ollen $Se = L$, joten Se on minimaalinen vasen ideaali.

$d) \Rightarrow e)$ Olkoon R sellainen joukon S oikea ideaali, että $R \subseteq eS$. Valitaan $t \in R$. Tällöin $t \in eS$, joten $te \in eSe$. Valitaan sellainen $x \in eSe$, että $(te)x = e$. Tällöin $tx = t(ex) = (te)x = e$, joten $e \in R$ ja $eS \subseteq RS \subseteq R$. Näin ollen $eS = R$, joten eS on minimaalinen oikea ideaali.

$e) \Rightarrow f)$ Lemma 6.2 on voimassa myös oikeille ideaaleille, joten koska eS on minimaalinen oikea ideaali, niin se on oikea yksinkertainen puoliryhmä.

$f) \Rightarrow c)$ eSe on suljettu. Lemman 4.6 nojalla e on joukon eSe kaksipuolinen identiteetti. Olkoon $x = ese \in eSe$ annettu. Nyt $x \in eS$, joten xS on joukon eS oikea ideaali ja näin ollen $xS = eS$, koska eS on oikea yksinkertainen puoliryhmä. Näin ollen $e \in eS$, joten valitaan sellainen $y \in S$, että $e = xy$. Tällöin $eye \in eSe$ ja $eyex = eyx = ee = e$, joten alkiolla x on oikea e-käänteisalkio. Näin ollen eSe on ryhmä.

$a) \Rightarrow g)$ Jos Se on minimaalinen vasen ideaali, niin Lauseen 5.5 a)-kohdan nojalla e on minimaalinen idempotentti.

Jos S on yksinkertainen tai jokaisella joukon S vasemmalla ideaalilla on idempotentti, niin Lauseen 5.5 d)-kohdan nojalla $g) \Rightarrow a)$, joten $a) - g)$ ovat ekvivalentteja. $\square$

Lemma 6.8. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon K joukon S ideaali. Jos K on minimaalinen joukossa $\{J \mid J \text{ on joukon } S \text{ ideaali}\}$, ja jos I on joukon S ideaali, niin $K \subseteq I$.*

Todistus. Lemman 4.5 b)-kohdan nojalla $K \cap I \neq \emptyset$, joten $K \cap I$ on ideaali, joka sisältyy joukkoon K. Koska K on minimaalinen ideaalien joukossa, niin $K \cap I = K$, joten $K \subseteq I$. $\square$

Termin ”minimaalinen ideaali” sijasta käytetään ”pienintä ideaalia”, koska Lemman 6.8 nojalla puoliryhmässä voi olla vain yksi minimaalinen ideaali.

Määritelmä 6.9. Olkoon S puoliryhmä. Jos joukossa S on pienin ideaali, niin $K(S)$ on tämä pienin ideaali. $K(S)$ on joukon S kaikkien ideaalien leikkaus.

Lause 6.10. *Olkoon S puoliryhmä. Jos joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, niin $K(S)$ on olemassa ja*

$$K(S) = \bigcup\{L \mid L \textit{ on joukon } S \textit{ minimaalinen vasen ideaali}\}.$$

Todistus. Olkoon $I = \bigcup\{L \mid L \text{ on joukon } S \text{ minimaalinen vasen ideaali}\}$. Lemman 6.4 mukaan jos J on joukon S mikä tahansa ideaali, niin $I \subseteq J$, joten riittää todistaa, että I on joukon S ideaali. Oletuksen nojalla $I \neq \emptyset$, joten olkoon $x \in I$ ja olkoon $s \in S$. Valitaan sellainen joukon S minimaalinen vasen ideaali L, että $x \in L$. Tällöin $sx \in L \subseteq I$. Lauseen 6.5 nojalla Ls on joukon S minimaalinen vasen ideaali, joten $Ls \subseteq I$. Näin ollen $IS \subseteq I$, joten I on ideaali. Olkoon J mikä tahansa joukon S ideaali ja olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali. Tällöin $L \cap J \neq \emptyset$, koska $JL \subseteq L \cap J$, joten $L \cap J$ on ideaali, ja koska L on minimaalinen, niin $L = L \cap J$. Täten $L \subseteq J$ ja näin ollen $K(S) = I$. □

Lemma 6.11. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) *Olkoon L joukon S vasen ideaali. Tällöin L on minimaalinen, jos ja vain jos $Lx = L$ kaikilla $x \in L$.*

b) *Olkoon I joukon S ideaali. Tällöin I on joukon S pienin ideaali, jos ja vain jos $IxI = I$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. *a)* ”$\Rightarrow$” Olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali ja olkoon $x \in S$. Tällöin Lx on joukon S vasen ideaali ja $Lx \subseteq L$, joten joukon L minimaalisuuden nojalla $Lx = L$.
”$\Leftarrow$” Oletetaan, että $Lx = L$ kaikilla $x \in L$. Olkoon J sellainen joukon S vasen ideaali, että $J \subseteq L$. Valitaan $x \in J$. Tällöin $L = Lx \subseteq LJ \subseteq J \subseteq L$, joten $J = L$ ja näin ollen L on minimaalinen.

b) ”$\Rightarrow$” Olkoon I joukon S pienin ideaali, joten $IS \subseteq I$ ja $SI \subseteq I$. Olkoon $x \in I$. Tällöin $S(IxI) = (SI)xI \subseteq IxI$ ja $(IxI)S = Ix(IS) \subseteq IxI$, joten IxI on joukon S ideaali. Koska I on joukon S pienin ideaali ja $IxI \subseteq I$, niin $IxI = I$.
”$\Leftarrow$” Olkoon $IxI = I$ kaikilla $x \in I$. Olkoon J sellainen joukon S ideaali, että $J \subseteq I$. Valitaan $x \in J$. Tällöin $I = IxI \subseteq IJI \subseteq IJ \subseteq J \subseteq I$, joten $J = I$ ja näin ollen I on joukon S pienin ideaali. □

Lause 6.12. *Olkoon S puoliryhmä. Jos L on joukon S minimaalinen vasen ideaali ja R on joukon S minimaalinen oikea ideaali, niin $K(S) = LR$.*

Todistus. Koska L on joukon S minimaalinen vasen ideaali ja R minimaalinen oikea ideaali, niin LR on joukon S ideaali, koska $S(LR)S = (SL)(RS) \subseteq LR$. Olkoon $x \in LR$. Tällöin $LRxL \subseteq SL \subseteq L$ ja $S(LRxL) = (SL)RxL \subseteq LRxL$, joten $LRxL$ on joukon S vasen ideaali. Koska L on minimaalinen, niin $LRxL = L$ ja näin ollen $LRxLR = LR$, joten Lemman 6.11 b)-kohdan mukaan LR on joukon S pienin ideaali, ja näin ollen $K(S) = LR$. $\square$

Lause 6.13. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että $K(S)$ on olemassa ja että $e \in E(S)$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja ja ne seuraavat mistä tahansa Lauseen 6.7 ekvivalentista väitteestä $a) - f)$.*

h) $e \in K(S)$.

i) $K(S) = SeS$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla Se on joukon S minimaalinen ideaali, joten Lauseen 6.10 nojalla $Se \in K(S)$. Näin ollen myös $e \in K(S)$.

$h) \Rightarrow i)$ Koska $e \in E(S)$, niin SeS on joukon S ideaali, joten $K(S) \subseteq SeS$, koska $K(S)$ on joukon S kaikkien ideaalien leikkaus. Koska $e \in K(S)$, niin $SeS \subseteq K(S)$, joten $SeS = K(S)$.

$i) \Rightarrow h)$ Koska $e \in S$, niin $e = ee = eee \in SeS = K(S)$. $\square$

Lauseista 6.10 ja 6.13 nousee esiin kaksi kysymystä: Jos $K(S)$ on olemassa, onko se kaikkien minimaalisten vasenten ideaalien unioni vai onko se joko kaikkien minimaalisten vasenten tai kaikkien minimaalisten oikeiden ideaalien unioni? Jos oletetaan, että $K(S)$ on olemassa ja e on idempotentti joukossa $K(S)$, niin pitääkö joukon Se olla minimaalinen vasen ideaali tai pitääkö alkion e olla minimaalinen idempotentti? Seuraava esimerkki vastaa molempiin kysymyksiin. Esimerkissä $\omega = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Esimerkki 6.14. Olkoon $S = \omega \times \omega$ ja määritellään operaatio $\cdot$ joukossa S seuraavasti:

$$(m, n) \cdot (r, s) = \begin{cases} (m, s + n - r), & \text{jos } n \geq r \\ (m + r - n, s), & \text{jos } n < r. \end{cases}$$

Tällöin S on yksinkertainen puoliryhmä (eli $K(S) = S$), joukossa S ei ole minimaalista vasenta eikä oikeaa ideaalia, $E(S) = \{(n, n) \mid n \in \omega\}$, ja jokaisella $n \in \omega$, $(n + 1, n + 1) \leq (n, n)$.

Mille tahansa Esimerkin 6.14 puoliryhmän alkioille $(m, n), (k, r) \in S$, $(k, m) \cdot (m, n) \cdot (n, r) = (k, r)$. Olkoon L joukon S vasen ideaali ja valitaan $(m, n) \in L$. Tällöin $\{(k, r) \in S \mid r > n\}$ on joukon S vasen ideaali, joka on joukon L osajoukko. Samalla tavalla olkoon R joukon S oikea ideaali ja olkoon $(m, n) \in R$. Tällöin $\{(k, r) \in S \mid k > m\}$ on joukon S oikea ideaali, joka on joukon R osajoukko. Näin ollen joukossa S ei ole minimaalisia vasempia eikä oikeita ideaaleja.

7 Minimaaliset, idempotentin sisältävät vasemmat ideaalit

Lause 7.1. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että joukossa S on idempotentin sisältävä minimaalinen vasen ideaali. Tällöin jokainen minimaalinen vasen ideaali sisältää idempotentin.*

Todistus. Olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin e ja olkoon J joukon S minimaalinen vasen ideaali. Lauseen 6.5 nojalla on olemassa sellainen $x \in S$, että $J = Lx$. Lauseen 6.1 nojalla $eL = eSe$ on ryhmä, joten olkoon $y = eye$ alkion exe käänteisalkio tässä ryhmässä. Tällöin $yx \in Lx = J$ ja $yxyx = (ye)x(ey)x = y(exe)yx = eyx = yx$, joten yx on idempotentti joukossa J. □

Lemma 7.2. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että joukossa S on idempotentin sisältävä minimaalinen vasen ideaali. Tällöin joukossa S on idempotentin sisältävä minimaalinen oikea ideaali.*

Todistus. Valitaan joukon S minimaalinen vasen ideaali L ja idempotentti $e \in L$. Lauseen 4.8 c)-kohdan mukaan Se on joukon S minimaalinen vasen ideaali, joten Lauseen 2.5 nojalla eS on joukon S minimaalinen oikea ideaali ja e on idempotentti joukossa eS. □

Lause 7.3. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Olkoon $T \subseteq S$.*

a) T on joukon S minimaalinen vasen ideaali, jos ja vain jos on olemassa jokin sellainen $e \in E(K(S))$, että $T = Se$.

b) T on joukon S minimaalinen oikea ideaali, jos ja vain jos on olemassa jokin sellainen $e \in E(K(S))$, että $T = eS$.

Todistus. Valitaan joukon S minimaalinen vasen ideaali L ja idempotentti $f \in L$.

a) ”⇒” Olkoon T joukon S minimaalinen vasen ideaali. Nyt Sf on joukon S vasen ideaali, joten $Sf = L$, koska $Sf \subseteq L$ ja L on minimaalinen. Lauseen 6.7 nojalla fSf on ryhmä. Valitaan mikä tahansa $a \in T$. Tällöin $faf \in fSf$, joten valitaan sellainen $x \in fSf$, että $x(faf) = f$. Tällöin

$$\begin{aligned} xaxa &= (xf)a(fx)a \\ &= x(faf)xa \\ &= fxa \\ &= xa. \end{aligned}$$

Näin ollen xa on idempotentti. Koska T on minimaalinen vasen ideaali, niin Lauseen 6.10 nojalla $T \subseteq K(S)$. Koska $xa \in T$, niin $xa \in E(K(S))$. Koska xa on idempotentti, niin Sxa on joukon S vasen ideaali ja $Sxa \subseteq T$, joten koska T on minimaalinen, niin $T = Sxa$.
”⇐” Koska $e \in K(S)$, niin valitaan Lauseen 6.10 mukainen joukon S minimaalinen vasen ideaali L, missä $e \in L$. Tällöin Lauseen 4.8 *c*)-kohdan mukaan $Se = L$.

b) Koska joukossa S on idempotentin f sisältävä minimaalinen vasen ideaali, niin Lemman 7.2 nojalla joukossa S on idempotentin f sisältävä minimaalinen oikea ideaali R.
”⇒” Nyt fS on joukon S oikea ideaali, joten koska $fS \subseteq R$, niin $fS = R$. Näin ollen Lauseen 6.7 nojalla fSf on ryhmä. Valitaan mikä tahansa $a \in T$. Tällöin $faf \in fSf$, joten valitaan sellainen $x \in fSf$, että $(faf)x = f$. Tällöin

$$\begin{aligned} axax &= a(xf)a(fx) \\ &= ax(faf)x \\ &= axf \\ &= ax. \end{aligned}$$

Näin ollen ax on idempotentti, joten axS on joukon S oikea ideaali. Koska $ax \in T$, niin $axS \subseteq T$, joten $T = axS$. Lauseen 2.5 nojalla Sax on minimaalinen vasen ideaali, joten $Sax \subseteq K(S)$ ja näin ollen $ax \in E(K(S))$.
”⇐” Koska $e \in E(K(S))$, niin voidaan valita Lauseen 6.10 mukainen minimaalinen vasen ideaali I, joka sisältää idempotentin e. Tällöin $Se \subseteq I$, joten $I = Se$, joten Lauseen 6.7 nojalla $eS = T$ on minimaalinen oikea ideaali. □

Lause 7.4. *Olkoon S puoliryhmä. Oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin, ja olkoon $e \in E(S)$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) Se on minimaalinen vasen ideaali.

b) Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä.

c) eSe on ryhmä.

d) $eSe = H(e)$.

e) eS on minimaalinen oikea ideaali.

f) eS on oikea yksinkertainen puoliryhmä.

g) e on minimaalinen idempotentti.

h) $e \in K(S)$.

i) $K(S) = SeS$.

Todistus. Koska joukossa S on idempotentin sisältävä minimaalinen vasen ideaali, niin Seurauksen 6.6 ja Lauseen 7.2 nojalla jokainen joukon S vasen ideaali sisältää idempotentin sisältävän minimaalisen vasemman ideaalin. Tällöin Lauseen 6.7 nojalla väitteet $a) - g)$ ovat ekvivalentteja. Lauseen 6.10 nojalla $K(S)$ on olemassa, koska joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, niin Lauseen 6.13 nojalla $h)$ ja $i)$ ovat ekvivalentteja ja ne seuraavat mistä tahansa väitteestä $a) - g)$. Nyt koska $e \in K(S)$, niin Lauseen 7.3 nojalla Se on minimaalinen vasen ideaali, joten $h) \Rightarrow a)$. Näin ollen väitteet $a) - i)$ ovat ekvivalentteja. □

Lause 7.5. *Olkoon S puoliryhmä. Oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin, ja olkoon e idempotentti joukossa S. Tällöin on olemassa sellainen joukon S minimaalinen idempotentti f, että $f \leq e$.*

Todistus. Koska $s \in E(S)$, niin Se on joukon S vasen ideaali, joten Seurauksen 6.6 ja Lauseen 7.1 mukaan Se sisältää idempotentin g sisältävän minimaalisen vasemman ideaalin L. Nyt $g \in Se$, joten Lemman 4.6 nojalla $ge = g$. Olkoon $f = eg$. Tällöin $ff = egeg = egg = eg = f$, joten f on idempotentti. Nyt koska $f \in L$, niin $L = Sf$, joten Lauseen 7.4 nojalla f on minimaalinen idempotentti. Lopuksi vielä $ef = eeg = eg = f$ ja $fe = ege = eg = f$, joten $f \leq e$. □

Lause 7.6. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Tällöin millä tahansa joukon S minimaalisella vasemmalla ideaalilla L ja millä tahansa joukon S minimaalisella oikealla ideaalilla R on olemassa sellainen idempotentti $e \in R \cap L$, että $R \cap L = RL = eSe$ ja eSe on ryhmä.*

Todistus. Olkoon R ja L annettu. Valitaan sellainen Lauseen 7.3 mukainen idempotentti $f \in K(S)$, että $L = Sf$. Lauseen 2.5 mukaan fSf on ryhmä. Valitaan $a \in R$ ja olkoon x alkion faf käänteisalkio joukossa fSf. Tällöin $x \in Sf = L$, joten $ax \in R \cap L$ ja Lauseen 6.10 mukaan $ax \in K(S)$. Nyt myös

$$\begin{aligned} axax &= a(xf)a(fx) \\ &= a(xfaf)x \\ &= afx \\ &= ax. \end{aligned}$$

Eli ax on idempotentti. Olkoon $e = ax$. Tällöin $eSe \subseteq Sx \subseteq L$ ja $eSe \subseteq aS \subseteq R$, joten $eSe \subseteq R \cap L$. Olkoon $b \in R \cap L$. Lauseen 4.8 mukaan $L = Se$ ja $R = eS$, joten Lemman 4.6 mukaan $b = eb = be$. Näin ollen $b = eb = ebe \in eSe$, joten $R \cap L \subseteq eSe$.

Nyt $RL = eSSe \subseteq eSe \subseteq RL$, joten $RL = eSe$.

Koska $e \in K(S)$, niin Lauseen 7.4 nojalla eSe on ryhmä. □

Lemma 7.7. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon R joukon S oikea ideaali.*

a) On olemassa joukon L minimimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin.

b) On olemassa joukon $L \cap R$ minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Oikeastaan jos J on sellainen joukon S minimaalinen vasen ideaali, että $J \subseteq L$, niin $R \cap J$ on joukon $R \cap L$ minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin.

c) On olemassa joukon R minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin.

Todistus. Valitaan sellainen Seurauksen 6.6 mukainen minimaalinen vasen ideaali J , että $J \subseteq L$.

a) Jos I on sellainen joukon L vasen ideaali, että $I \subseteq J$, niin I on joukon J vasen ideaali, joten Lemman 6.2 *b*)-kohdan mukaan $I = J$. Tällöin Lauseen 7.1 mukaan joukossa J on idempotentti.

b) Valitaan sellainen Lemman 7.2 mukainen joukon S minimaalinen oikea ideaali M, joka sisältää idempotentin, että $M \subseteq R$. Valitaan Lauseen 7.6 mukainen idempotentti $e \in M \cap J$. Olkoon I sellainen joukon $R \cap L$ vasen ideaali, että $I \subseteq R \cap J$. Olkoon $u \in R \cap J$. Valitaan $x \in I$. Nyt $e \in J$ ja

Lemman 6.11 a)-kohdan mukaan $J = Jx$, joten valitaan sellainen $y \in J$, että $e = yx$. Tällöin $e = ee = eyx$. Nyt $e \in R$ ja $y \in L$, joten $eyx \in (R \cap L)x \subseteq I$, joten $e \in I$. Nyt $u \in J = Je$, joten $u = ue$. Nyt myös $u \in R \cap L$, joten $u \in (R \cap L)e \subseteq I$. Näin ollen $I = R \cap J$ ja sen vuoksi $R \cap J$ on joukon $R \cap L$ minimaalinen vasen ideaali.

c) b)-kohdan nojalla $R \cap J$ on joukon $R \cap L$ minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Nyt myös $R \cap J$ on joukon R vasen ideaali, joten Lemman 6.2 c)-kohdan nojalla $R \cap J$ on joukon R minimaalinen vasen ideaali.

□

Lemma 7.8. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Tällöin kaikki joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit ovat isomorfisia.*

Todistus. Olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin e. Tällöin $L = Se$, joten Lauseen 7.4 mukaan eSe on ryhmä.

Osoitetaan ensin, että mille tahansa $s \in K(S)$ ja $t \in S$ $s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}$, missä käänteisalkiot on joukosta eSe. Nyt koska e on joukon eSe identiteetti, niin $(ese)^{-1}e = e(ese)^{-1} = (ese)^{-1}$, joten

$$s(ese)^{-1}s(ese)^{-1} = s(ese)^{-1}ese(ese)^{-1} = s(ese)^{-1}e = s(ese)^{-1}.$$

Vastaavasti $st(este)^{-1}st(este)^{-1} = st(este)^{-1}$, joten $s(ese)^{-1}$ ja $st(este)^{-1}$ ovat idempotentteja. Lemman 7.2 ja Lauseen 6.10 mukaan $K(S) = \bigcup\{R \mid R \text{ on joukon } S \text{ oikea ideaali}\}$. Valitaan sellainen joukon S minimaalinen ideaali R, että $s \in R$. Tällöin $s(ese)^{-1}$ ja $st(este)^{-1}$ ovat molemmat idempotentteja joukossa $R \cap L$. Koska $R \cap L$ on Lauseen 7.6 mukaan ryhmä, niin $s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}$.

Olkoon nyt L' mikä tahansa muu joukon S minimaalinen vasen ideaali. Lauseen 7.4 mukaan eS on joukon S minimaalinen oikea ideaali, joten Lauseen 7.6 mukaan $L' \cap eS$ on ryhmä, joten voidaan valita idempotentti $d \in L' \cap eS$. Tällöin $L' = Sd$ ja $dS = eS$. Lemman 4.6 c)-kohdan nojalla $de = e$, $ed = d$ ja mille tahansa $s \in L'$, $sd = s$.

Määritellään seuraavaksi sellainen kuvaus $\psi\colon Sd \to Se$, että $\psi(s) = s(ese)^{-1}dse$, missä käänteisalkio on ryhmästä eSe. Osoitetaan ensin, että ψ on homomorffismi. Olkoon $s, t \in Sd$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\psi(s)\psi(t) &= s(ese)^{-1}dset(ete)^{-1}dte \\
&= s(ese)^{-1}dsete(ete)^{-1}dte && \big(e(ete)^{-1} = (ete)^{-1}\big) \\
&= s(ese)^{-1}dsedte \\
&= s(ese)^{-1}dste && (ed = d \text{ ja } sd = s) \\
&= st(este)^{-1}dste && \big(s(ese)^{-1} = st(este)^{-1}\big) \\
&= \psi(st),
\end{aligned}$$

joten ψ on homomorfismi.

Määritellään $\gamma\colon Se \to Sd$ siten, että $\gamma(t) = t(dtd)^{-1}etd$, missä käänteisalkio on joukosta dSd, joka on Lauseen 7.4 mukaan ryhmä. Osoitetaan, että γ on kuvauksen ψ käänteiskuvaus, jolloin ψ olisi bijektio. Olkoon $s \in L'$. Tällöin $ds \in L'$, joten Sds on joukon S vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon L', ja näin ollen $L' = Sds$. Valitaan sellainen $x \in S$, että $s = xds$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\gamma(\psi(s)) &= \psi(s)(d\psi(s)d)^{-1}e\psi(s)d \\
&= s(ese)^{-1}dse(ds(ese)^{-1}dsed)^{-1}es(ese)^{-1}dsed \\
&= xds(ese)^{-1}dsed(ds(ese)^{-1}dsed)^{-1}ese(ese)^{-1}dsed \\
&= xdedsed \\
&= xddsd \\
&= xds \\
&= s.
\end{aligned}$$

Samalla tavalla, jos $t \in L'$, niin $\psi(\gamma(t)) = t$.

Näin ollen joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit ovat isomorfisia. $\square$

Lause 7.9. *Olkoon X vasen nollapuoliryhmä, olkoon Y oikea nollapuoliryhmä ja olkoon G ryhmä. Olkoon e joukon G identiteetti, $u \in X$ ja $v \in Y$ ja olkoon $[\ ,\ ]\colon Y \times X \to G$ sellainen funktio, että $[y,u] = [v,x] = e$ kaikilla $y \in Y$ ja kaikilla $x \in X$. Olkoon $S = X \times G \times Y$ ja määritellään sellainen operaatio $\cdot$, että $(x,g,y) \cdot (x',g',y') = (x, g[y,x']g', y')$. Tällöin S on yksinkertainen puoliryhmä (missä $K(S) = S = X \times G \times Y$) ja seuraavat väitteet pätevät.*

a) Kaikilla $(x,y) \in X \times Y$, $(x,[y,x]^{-1},y)$ on idempotentti ja kaikki idempotentit ovat tätä muotoa. Idempotentit joukossa $X \times G \times \{v\}$ ovat muotoa (x,e,v) ja idempotentit joukossa $\{u\} \times G \times Y$ ovat muotoa (u,e,y).

b) Kaikilla $y \in Y$, $X \times G \times \{y\}$ on joukon S minimaalinen vasen ideaali ja kaikki joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit ovat tätä muotoa.

c) Kaikilla $x \in X$, $\{x\} \times G \times Y$ on joukon S minimaalinen oikea ideaali ja kaikki joukon S minimaaliset oikeat ideaalit ovat tätä muotoa.

d) Kaikilla $(x,y) \in X \times Y$, $\{x\} \times G \times \{y\}$ on joukon S maksimaalinen ryhmä ja kaikki joukon S maksimaaliset ryhmät ovat tätä muotoa.

e) Minimaalinen vasen ideaali $X \times G \times \{v\}$ on joukkojen X, G ja $\{v\}$ suora tulo ja minimaalinen oikea ideaali $\{u\} \times G \times Y$ on joukkojen $\{u\}$, G ja Y suora tulo.

f) Kaikki joukon S maksimaaliset ryhmät ovat isomorfisia joukkoon G.

g) Kaikki joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit ovat isomorfisia joukkoon $X \times G$ ja kaikki joukon S minimaaliset oikeat ideaalit ovat isomorfisia joukkoon $G \times Y$.

Todistus. Operaatio $\cdot$ on selvästi binäärinen, koska $(x, g, y) \cdot (x', g', y') = (x, g[y, x']g', y') \in S$ kaikilla $(x, g, y), (x', g', y') \in S$.

Olkoon $(x, g, y), (x', g', y'), (x'', g'', y'') \in S$. Tällöin

$$\begin{aligned}((x, g, y) \cdot (x', g', y')) \cdot (x'', g'', y'') &= (x, g[y, x']g', y') \cdot (x'', g'', y'') \\ &= (x, g[y, x']g'[y', x'']g'', y'') \\ &= (x, g, y) \cdot (x', g'[y', x'']g'', y'') \\ &= (x, g, y) \cdot ((x', g', y') \cdot (x'', g'', y'')),\end{aligned}$$

joten operaatio $\cdot$ on assosiatiivinen ja näin ollen S on puoliryhmä.

Olkoon $(x, g, y), (x', g', y') \in S$. Jotta S olisi yksinkertainen puoliryhmä, riittää Lemman 6.11 nojalla osoittaa, että $(x', g', y') \in S(x, g, y)S$. Olkoon $h = g'g^{-1}[y, x]^{-1}g^{-1}\,[y, x]^{-1} \in G$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x', h, y) \cdot (x, g, y) \cdot (x, g, y') &= (x', h[y, x]g, y) \cdot (x, g, y') \\ &= (x', h[y, x]g[y, x]g, y') \\ &= (x', g'g^{-1}[y, x]^{-1}g^{-1}[y, x]g[y, x]g, y') \\ &= (x', g', y'),\end{aligned}$$

joten $(x', g', y') \in S(x, g, y)S$ ja näin ollen S on yksinkertainen puoliryhmä.

a) Koska $(x, [x, y]^{-1}, y) \cdot (x, [y, x]^{-1}, y) = (x, [y, x]^{-1}[y, x][y, x]^{-1}, y) = (x, [y, x]^{-1}, y)$, niin $(x, [y, x]^{-1}, y)$ on idempotentti kaikilla $(x, y) \in X \times Y$. Olkoon (x, g, y) idempotentti. Tällöin $g[x, y]g = g$, joten $g = [y, x]^{-1}$. Joukon $\{u\} \times G \times Y$ idempotentit ovat muotoa (u, e, y), koska jotta olisi $(u, g, y) \cdot (u, g, y) = (u, g[y, u]g, y) = (u, gg, y) = (u, g, y)$, tulee olla $g = e$. Samalla tavalla joukon $X \times G \times \{v\}$ idempotentit ovat muotoa (y, e, v).

b) Olkoon $y \in Y$. Olkoon $(x', g', y') \in S$ ja olkoon $(x, g, y) \in X \times G \times \{y\}$. Tällöin $(x', g', y') \cdot (x, g, y) = (x', g'[y', x]g, y) \in X \times G \times \{y\}$, joten $X \times G \times \{y\}$ on joukon S vasen ideaali. Olkoon $(x, g), (x', g') \in X \times G$. Jotta $X \times G \times \{y\}$ olisi minimaalinen, riittää Lemman 6.11 mukaan todeta, että $(x', g', y) = (x', g'g^{-1}[y, x]^{-1}, y) \cdot (x, g, y)$. Nyt valitaan minkä tahansa joukon S vasemman ideaalin L alkio $(x, g, y) \in L$. Tällöin $L \cap X \times G \times \{y\} \neq \emptyset$, joten $L = X \times G \times \{y\}$.

c) Vastaavasti kuin kohta *b*), mutta käytetään joukkoa $\{x\} \times G \times Y$.

d) Koska $H(e)$ on maksimaalinen ryhmä, niin Lauseen 7.4 yhtäpitävien kohtien *d*) ja *e*) mukaan joukon S maksimaaliset ryhmät ovat muotoa fSf, missä $f \in K(S) = S$ on idempotentti. a)-kohdan mukaan joukon S idempotentti on $f = (x, [y,x]^{-1}, y)$. Nyt

$$\begin{aligned}(x,[y,x]^{-1},y)S(x,[y,x]^{-1},y) &= (x,[y,x]^{-1},y)(X \times G \times Y)(x,[y,x]^{-1},y)\\ &= (x,[y,x]^{-1}[y,X]G,Y)(x,[y,x]^{-1},y)\\ &= (x,[y,x]^{-1}[y,X]G[Y,x][y,x]^{-1},y)\\ &= \{x\} \times G \times \{y\},\end{aligned}$$

joten joukon S maksimaaliset ryhmät ovat tätä muotoa.

e) Olkoon $(x,g),(x',g') \in X \times G$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x,g,v)\cdot(x',g',v) &= (x,g[v,x']g',v)\\ &= (x,geg',v)\\ &= (xx',gg',vv),\end{aligned}$$

joten $X \times G \times \{v\}$ on joukkojen X, G ja $\{v\}$ suora tulo.

Olkoon $(g,y),(g',y') \in G \times Y$. Tällöin

$$\begin{aligned}(u,g,y)\cdot(u,g',y') &= (u,g[y,u]g',y')\\ &= (u,geg',y')\\ &= (u,gg',y')\\ &= (uu,gg',yy'),\end{aligned}$$

joten $\{u\} \times G \times \{v\}$ on joukkojen $\{u\}$, G ja Y suora tulo.

f) $\{u\} \times G \times Y$ on isomorfinen joukkoon G. Nyt $(x,y) \in X \times Y$. Tällöin $\{x\} \times G \times \{v\}$ ja $\{u\} \times G \times \{v\}$ ovat maksimaalisia ryhmiä minimaalisessa vasemmassa iseaalissa $X \times G \times \{v\}$, joten Lauseen 6.1 mukaan ne ovat myös isomorfisia. Myös $\{x\} \times G \times \{v\}$ ja $\{x\} \times G \times \{y\}$ ovat maksimaalisia ryhmiä minimaalisessa oikeassa ideaalissa $\{x\} \times G \times Y$, joten koska Lausetta 6.1 voidaan käyttää myös oikeisiin ideaaleihin, niin ne ovat isomorfisia.

g) Lemman 7.8 nojalla kaikki joukon S minimaaliset ideaalit ovat isomorfisia joukkoon S ja e)-kohdan nojalla $X \times G \times \{v\}$ on isomorfinen joukkoon $X \times G$. Samalla tavalla kaikki minimaaliset oikeat ideaalit ovat isomorfisia joukkoon $G \times Y$. □

Lauseen 7.9 joukko S on joukkojen X, G ja Y Karteesinen tulo, mutta se ei ole Karteesinen tulo, ellei $[y,x] = e$, kaikilla $(y,x) \in Y \times X$.

Lauseen 7.9 seurauksena myös millä tahansa $y \in Y$, $X \times G \times \{y\} \cong X \times G$, mutta näin on vain, jos $[y,x] = e$ kaikilla $x \in X$, kun $y = v$.

Lause 7.9 muodostaa yksityiskohtaisen joukon $X \times G \times Y$ rakenteen. Nyt huomataan, että tämä on oikeastaan sellaisen puoliryhmän, joka sisältää idempotentin sisältävän minimaalisen vasemman ideaalin, pienimmän ideaalin rakenne.

Lause 7.10. (Rakennelause) *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Olkoon R joukon S minimaalinen oikea ideaali ja olkoon L joukon S minimaalinen vasen ideaali, olkoon $X = E(L)$, $Y = E(R)$ ja olkoon $G = RL$. Määritellään sellainen operaatio $\cdot$ joukossa $X \times G \times Y$, että $(x, g, y) \cdot (x', g', y') = (x, gyx'g', y')$. Tällöin $X \times G \times Y$ toteuttaa Lauseen 7.9 (missä $[y, x] = yx$) johtopäätökset ja $K(S) \cong X \times G \times Y$. Erityisesti:*

a) Joukon S minimaaliset oikeat ideaalit jakavat joukon $K(S)$ ja joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit jakavat joukon $K(S)$.

b) Joukon $K(S)$ maksimaaliset ryhmät jakavat joukon $K(S)$.

c) Kaikki joukon S minimaaliset oikeat ideaalit ovat isomorfisia ja kaikki joukon S minimaaliset vasemmat ideaalit ovat isomorfisia.

d) Kaikki joukon $K(S)$ maksimaaliset ryhmät ovat isomorfisia.

Todistus. Lemman 6.2 ja Lauseen 6.10 nojalla joukkojen S ja $K(S)$ minimaaliset vasemmat ideaalit ovat identtisiä sekä joukkojen S ja $K(S)$ minimaaliset oikeat ideaalit ovat identtisiä, joten kohdat $a) - d)$ seuraavat suoraan Lauseesta 7.9. Riittää osoittaa, että joukko $X \times G \times Y$ toteuttaa Lauseen 7.9 oletukset, että $[y, x] = yx$ ja $K(S) \cong X \times G \times Y$.

Lemman 7.2 nojalla tiedetään, että koska joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin, niin joukossa S on myös minimaalinen oikea ideaali, joka sisältää idempotentin. Näin ollen joukossa R on Lauseen 7.1 nojalla idempotentti. Lauseen 7.6 mukaan RL on ryhmä ja Lauseen 6.1 mukaan X on joukon S vasen nollapuoliryhmä ja Y on joukon S oikea nollapuoliryhmä. Olkoon e joukon $RL = R \cap L$ identiteetti ja olkoon $u = v = e$. Jos $y \in Y$, niin koska Y on oikea nollapuoliryhmä, niin $[y, u] = yu = u = e$. Samalla tavalla, jos $x \in X$, niin $[v, x] = e$, joten $[y, x] = e$ kaikilla $(y, x) \in Y \times X$.

Määritellään sellainen kuvaus $\varphi\colon X \times G \times Y \to S$, että $\varphi(x, g, y) = xgy$. Joukon X, G, Y operaation määrittelystä huomataan suoraan, että φ on homomorfismi. Lauseen 6.1 nojalla $L = XG$ ja $R = GY$. Lauseen 6.12 nojalla $K(S) = LR = XGGY = XGY = \varphi[X \times G \times Y]$, joten riittää muodostaa kuvauksen φ käänteiskuvaus osoittamaan, että φ on bijektio.

Olkoon $\gamma(t)$, kaikilla $t \in K(S)$, alkion ete käänteisalkio joukossa $eSe = G$. Tällöin $t\gamma(t) = t\gamma(t)e \in Se = L$ ja

$$\begin{aligned} t\gamma(t)t\gamma(t) &= t\gamma(t)ete\gamma(t) \\ &= te\gamma(t) \\ &= t\gamma(t), \end{aligned}$$

joten $t\gamma(t) \in X$. Samalla tavalla $\gamma(t)t \in Y$.

Määritellään sellainen kuvaus $\tau\colon K(S) \to X \times G \times Y$, että $\tau(t) = (t\gamma(t), ete, \gamma(t)t)$. Olkoon $(x, g, y) \in X \times G \times Y$. Tällöin

$$\tau(\varphi(x, y, g)) = (xgy\gamma(xgy), exgye, \gamma(xgy)xgy)$$

. Nyt

$$\begin{aligned}
xgy\gamma(xgy) &= xxgy\gamma(xgy) && (x = xx)\\
&= xexgye\gamma(xgy) && (x = xe \text{ ja } \gamma(xgy) = e\gamma(xgy))\\
&= xe\\
&= x.
\end{aligned}$$

Samalla tavalla $\gamma(xgy)xgy = y$. Koska $exgye = ege = g$, niin $\tau = \varphi^{-1}$. Näin ollen φ on isomorfismi, joten $K(S) \cong X \times G \times Y$. □

Lause 7.11. *Olkoon S puoliryhmä, jossa on idempotentin sisältävä minimaalinen vasen ideaali. Olkoon T joukon S alipuoliryhmä, joka myös sisältää idempotentin sisältävän minimaalisen vasemman ideaalin, ja oletetaan, että $T \cap K(S) \neq \emptyset$. Tällöin seuraavat väitteet pitävät:*

a) $K(T) = T \cap K(S)$.

b) Joukon T minimaaliset vasemmat ideaalit ovat muotoa $T \cap L$ olevat epätyhjät joukot, missä L on joukon S minimaalinen vasen ideaali.

c) Joukon T minimaaliset oikeat ideaalit ovat muotoa $T \cap R$ olevat epätyhjät joukot, missä R on joukon S minimaalinen oikea ideaali.

d) Jos T on joukon S ideaali, niin $K(T) = K(S)$.

Todistus. *a*) Lauseen 6.10 mukaan $K(T)$ on olemassa. Koska $K(S) \cap T$ on joukon T ideaali, niin $K(T) \subseteq K(S) \cap T$. Olkoon $x \in K(S) \cap T$. Tällöin Tx on joukon T vasen ideaali, joten Seurauksen 6.6 ja Lauseen 7.1 nojalla Tx sisältää joukon T minimaalisen vasemman ideaalin Te jollakin idempotentilla $e \in T$. Olkoon $x \in K(S)$, joten Lauseen 6.10 nojalla voidaan valita sellainen joukon S minimaalinen ideaali L, että $x \in L$. Tällöin $L = Sx$ ja $e \in Tx \subseteq Sx$, joten $L = Se$ ja $x \in Se$. Näin ollen Lemman 4.6 nojalla $x = xe \in Te \subseteq K(T)$ ja $K(T) = K(S) \cap T$.

b) Osoitetaan ensin, että kaikille idempotenteille $e \in T$, $Se \cap T = Te$. Olkoon $x \in Se \cap T$. Tällöin $x = xe \in Te$, joten $Se \cap T \subseteq Te$. Nyt koska $Te \subseteq Se \cap T$, niin $Se \cap T = Te$.

Oletetaan, että L on joukon S minimaalinen vasen ideaali ja oletetaan, että $T \cap L \neq \emptyset$. Seurauksen 6.6 nojalla $T \cap L$ sisältää joukon T minimaalisen vasemman ideaalin M ja Lauseen 7.1 nojalla on olemassa idempotentti $e \in M$. Nyt Se on joukon S vasen ideaali ja Te on joukon T vasen ideaali, joten $Se = L$ ja $Te = M$. Näin ollen $L \cap T = Se \cap T = Te = M$.

Oletetaan, että M on joukon T minimaalinen vasen ideaali. Tällöin M sisältää idempotentin $e \in K(S)$. Koska $e \in K(S)$, niin kohdan a) nojalla Se on joukon S minimaalinen vasen ideaali ja Lauseen 7.4 nojalla $Se \cap T = Te = M$.

c) Todistus tehdään samalla tavalla, kuin kohdassa b).

d) Jos T on joukon S ideaali, niin $K(S) \subseteq T$, joten $K(T) \subseteq T \cap K(S) = K(S)$. □

Lause 7.12. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Olkoon $e, f \in E(K(S))$. Jos g on alkion efe käänteisalkio joukossa eSe, niin funktio φ: $eSe \to fSf$, joka on määritelty $\varphi(x) = fxgf$, on isomorfismi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että φ on homomorfismi. Olkoon $x, y \in eSe$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\varphi(x)\varphi(y) &= fxgffygf \\
&= fxgfygf \\
&= fxgefeygf \qquad (ge = g, ey = y) \\
&= fxeygf \\
&= fxygf \\
&= \varphi(xy).
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että φ on injektio. Olkoon x kuvauksen φ ytimen alkio. Tällöin

$$\begin{aligned}
fxgf &= f \\
efxgfe &= efe \\
efexgefe &= efe \qquad (ex = x, ge = g) \\
efexe &= efe \\
efex &= efe \\
efex &= efee \\
x &= e \qquad \text{(mitätöinti vasemmalta joukossa } eSe\text{)}.
\end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että φ on surjektio. Olkoon $y \in fSf$ ja olkoon h ja k

alkioden fgf ja fef käänteisalkiot joukossa fSf. Tällöin $ekyhe \in eSe$ ja

$$\begin{aligned}
\varphi(ekyhe) &= fekyhegf \\
&= fefkyhgf && (fk = k, eg = g) \\
&= fyhgf && (fefk = f) \\
&= fyhfgf && (h = hf) \\
&= fyf && (hfgf = f) \\
&= y.
\end{aligned}$$

Näin ollen φ on isomorfismi. □

Lause 7.13. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältää idempotentin. Olkoon $s \in S$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) $s \in K(S)$.

b) Kaikilla $t \in S$, $s \in Sts$.

c) Kaikilla $t \in S$, $s \in stS$.

d) Kaikilla $t \in S$, $s \in stS \cap Sts$.

Todistus. *a)* $\Rightarrow$ *d)* Valitaan Lauseen 6.10 ja Lemman 7.2 mukainen joukon S sellainen minimaalinen vasen ideaali L ja sellainen minimaalinen oikea ideaali R, että $s \in L \cap R$. Olkoon $t \in S$ Tällöin $ts \in L$, joten Sts on joukon S vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon L. Näin ollen $Sts = L$. Samalla tavalla $stS = R$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Valitaan $t \in K(S)$. Tällöin $s \in Sts \subseteq K(S)$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Valitaan $t \in K(S)$. Tällöin $s \in stS \subseteq K(S)$.

d) $\Rightarrow$ *b)* ja *d)* $\Rightarrow$ *c)* ovat triviaaleja. □

8 Topologiaa

Tässä kappaleessa tutustutaan muutamiin topologisiin käsitteisiin, joita tarvitaan, kun käsitellään topologisia puoliryhmiä.

Määritelmä 8.1. Olkoon X joukko. Joukon X *topologia* on kokoelma T joukon X osajoukkoja, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

i) T sisältää joukkojensa äärelliset leikkaukset, eli jos $U_1, \ldots, U_n \in T$, niin $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T$.

ii) T sisältää joukkojensa mielivaltaiset yhdisteet, eli jos $U_i \in T$ kaikilla $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$, missä I on mikä tahansa mielivaltainen indeksoitu joukko.

iii) T sisältää tyhjän joukon ja perusjoukon X, eli $\emptyset, X \in T$.

Topologian T alkioita $U \in T$ kutsutaan *joukon X avoimiksi joukoiksi.*

Määritelmä 8.2. *Topologinen avaruus* on pari (X, T), joka koostuu joukosta X ja sen topologiasta T.

Esimerkki 8.3. Jokaiselle joukolle X voidaan määritellä kaksi äärimmäistä topologiaa. *Diskreetissä topologiassa* on kaikki joukon X avoimet osajoukot. *Minimitopologiassa* ovat vain joukot $\emptyset$ ja X itse.

Määritelmä 8.4. a) Topologian T osajoukko $V \subseteq T$ on *suljettu*, kun $X \backslash V$ on avoin.

b) Jos $x \in X$ ja $\mathcal{U} \in T$ ovat sellaisia, että $x \in \mathcal{U}$, joukko $\mathcal{U}$ on alkion x *ympäristö*.

Määritelmä 8.5. Osajoukko $\mathcal{B} \subseteq T$ on joukon X *kanta*, jos jokainen $U \in T$ on unioni joukon $\mathcal{B}$ joukoista.

Huomautus 8.6. Joukko $\mathcal{B}$ on joukon X kanta, jos ja vain jos kaikilla $x \in X$ ja jokaisella alkion x ympäristöllä $\mathcal{U}_x$ on olemassa sellainen $B \in \mathcal{B}$, että $x \in B \subseteq \mathcal{U}_x$.

Määritelmä 8.7. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $U \subseteq X$. Tällöin joukon U *sulkeuma* on joukko

$$\overline{U} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ on suljettu ja } U \subseteq F\}.$$

Huomautus 8.8. $\overline{U}$ on suljettu, ja $\overline{U}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon U.

Määritelmä 8.9. Piste $x \in X$ on joukon $A \subseteq X$ *kasautumispiste*, jos jokainen pisteen x ympäristö sisältää jonkin joukon $A \backslash \{x\}$ pisteen.

Määritelmä 8.10. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $f \colon X \to Y$ kuvaus. Kuvaus f on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos jokaiselle pisteen $f(x)$ ympäristölle $\mathcal{V} \in Y$ on olemassa sellainen pisteen x ympäristö $\mathcal{U} \in X$, että $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$. f on jatkuva joukossa X, kun f on jatkuva jokaisessa joukon X pisteessä.

Lause 8.11. *Olkoon T_1, T_2 ja T_3 topologisia avaruuksia. Jos $f\colon T_1 \to T_2$ ja $g\colon T_2 \to T_3$ ovat jatkuvia kuvauksia, niin niiden yhdistetty kuvaus $g\circ f\colon T_1 \to T_3$ on jatkuva.*

Todistus. Oletetaan, että T_1, T_2 ja T_3 ovat topologisia avaruuksia ja $f\colon T_1 \to T_2$ ja $g\colon T_2 \to T_3$ ovat jatkuvia kuvauksia. Valitaan mikä tahansa avoin $\mathcal{U} \subseteq T_3$. Koska $\mathcal{U}$ on selvästi avoin joukossa T_3 ja $g\colon T_2 \to T_3$ on jatkuva, saadaan että $g^{-1}(\mathcal{U})$ on avoin joukossa T_2. Koska $g^{-1}(\mathcal{U})$ on avoin joukossa T_2 ja $f\colon T_1 \to T_2$ on jatkuva, saadaan että $f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{U})\right)$ on avoin joukossa T_1, eli $f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{U})\right) = (g\circ f)^{-1}(\mathcal{U})$ on avoin joukossa T_1. Näin ollen $g\circ f$ on jatkuva. □

Lause 8.12. *Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon f kuvaus joukolta X joukkoon Y. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) Kuvaus f on jatkuva joukossa X.

b) Kaikilla joukon Y avoimilla joukoilla $\mathcal{V}$, $f^{-1}(\mathcal{V})$ on avoin joukossa X.

c) Kaikilla joukon Y suljetuilla joukoilla F, $f^{-1}(F)$ on suljettu joukossa X.

d) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, kaikilla $A \subseteq X$.

Todistus. Lähde [2, s. 20]. □

Määritelmä 8.13. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *homeomorfismi*, kun

i) f on bijektio,

ii) f on jatkuva ja

ii) $f^{-1}\colon Y \to X$ on jatkuva.

Jos on olemassa tällainen homeomorfismi, niin X ja Y ovat *homeomorfisia.*

Määritelmä 8.14. Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus*, jos kaikilla $x \neq y \in X$ on olemassa sellaiset erilliset avoimet joukot $U, V \subseteq X$, että $x \in U$ ja $y \in V$.

Määritelmä 8.15. Topologisen avaruuden X osajoukko E on *tiheä*, jos $\overline{E} = X$.

Määritelmä 8.16. Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ joukko epätyhjiä joukkoja. Joukkojen X_α *Karteesinen tulo* on

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \{x\colon I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha, x(\alpha) \in X_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in I\}.$$

Kuvaus $\pi_\beta\colon \prod X_\alpha \to X_\beta$, joka on määritelty $\pi_\beta(x) = x_\beta$, on β:s projektio.

Määritelmä 8.17. Olkoon X topologinen avaruus, jossa on topologiat T_1 ja T_2. Sanotaan, että T_1 on *hienompi* kuin T_2 tai T_2 on *karkeampi* kuin T_1, kun $T_1 \subseteq T_2$.

Määritelmä 8.18. *Tychonoffin topologia* eli *tulotopologia* joukossa $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ saadaan, kun otetaan muotoa $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ oleva kanta, missä

a) A_α on avoin joukossa X_α kaikilla $\alpha \in I$.

b) $A_\alpha \neq X_\alpha$ vain äärellisellä määrällä indeksejä $\alpha \in I$.

Lause 8.19. *Jokainen projektio $\pi_\beta\colon \prod X_\alpha \to X_\beta$ on jatkuva ja avoin. Tulotopologia on joukon $\prod X_\alpha$ hienoin topologia, ja siinä jokainen projektio on jatkuva.*

Todistus. Lähde [2, s.28]. $\square$

Lause 8.20. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\prod X_\alpha$ varustettu tulotopologialla. Tällöin $f\colon X \to \prod X_\alpha$ on jatkuva, jos ja vain jos $\pi_\alpha \circ f$ on jatkuva kaikilla $\alpha \in I$.*

Todistus. Lähde [2, s.28]. $\square$

Määritelmä 8.21. Olkoon X avaruus ja olkoon R ekvivalenssirelaatio avaruudessa X. Tekijäjoukko X/R (eli ekvivalenssiluokkien joukko) sisältää topologian nimeltä *tekijätopologia*. Olkoon $q\colon X \to X/R$ tekijäkuvaus, joka kuvaa alkion x sen ekvivalenssiluokkaan $[x]$. Tekijätopologia on se topologia joukossa X/R, jossa on suurin määrä avoimia joukkoja, ja jossa q on jatkuva.

Määritelmä 8.22. Epätyhjä joukko Λ on *suunnattu* relaation $\leqslant$ suhteen, jos

a) $\lambda \leqslant \lambda$ kaikilla $\lambda \in \Lambda$,

b) $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ ja $\lambda_2 \leqslant \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_3$,

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \Rightarrow$ on olemassa sellainen $\lambda_3 \in \Lambda$, että $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ ja $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Paria $(\Lambda, \leqslant)$ kutsutaan *suunnatuksi joukoksi.*

Määritelmä 8.23. *Verkko* joukossa X on kuvaus $x \colon \Lambda \to X$, missä Λ on suunnattu joukko. Yleensä käytetään merkintää x_λ, kun tarkoitetaan $x(\lambda)$, ja puhutaan verkosta $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tai yksinkertaisemmin $\{x_\lambda\}$.

Määritelmä 8.24. Verkon $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *aliverkko* on yhdistetty kuvaus $x \circ \varphi$, missä $\varphi \colon M \to \Lambda$, M on suunnattu joukko ja

i) $\varphi(\mu_1) \leqslant \varphi(\mu_2)$ joukossa Λ aina kun $\mu_1 \leqslant \mu_2$ joukossa M,

ii) kaikilla $\lambda \in \Lambda$ on olemassa sellainen $\mu \in M$, että $\lambda \leqslant \varphi(\mu)$.

Määritelmä 8.25. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\{x_\lambda\}$ verkko joukossa X. $\{x_\lambda\}$ suppenee pisteeseen $x \in X$, jos jokaiselle alkion x ympäristölle $\mathcal{U}$ on olemassa sellainen $\lambda_0 \in \Lambda$, että $x_\lambda \in \mathcal{U}$ aina, kun $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Piste $x \in X$ on verkon $\{x_\lambda\}$ *kasautumispiste*, kun pisteen x kaikille ympärstöille $\mathcal{U}$ ja kaikille $\lambda_0 \in \Lambda$, on olemassa sellainen $\lambda \geqslant \lambda_0$, että $x_\lambda \in \mathcal{U}$.

Lause 8.26. *Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\{x_\lambda\}$ verkko joukossa X. Tällöin verkolla $\{x_\lambda\}$ on kasautumispiste x, jos ja vain jos sillä on aliverkko, joka suppenee pisteeseen x.*

Todistus. Lähde [2, s.32]. □

Lause 8.27. *Olkoon E topologisen avaruuden X osajoukko. Tällöin $x \in \overline{E}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen joukon E verkko $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, että $x_\lambda \to x$.*

Todistus. Lähde [2, s.33]. □

Lause 8.28. *Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Tällöin $f \colon X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x \in X$, jos ja vain jos $f(x_\lambda) \to f(x)$ joukossa Y aina, kun $x_\lambda \to x$ joukossa X.*

Todistus. Lähde [2, s.33]. □

Lause 8.29. *Verkko $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ joukossa $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ suppenee kohti pistettä x, jos ja vain jos $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$ kaikissa tekijöissä X_α.*

Todistus. Lähde [2, s.33]. □

Määritelmä 8.30. Olkoon X topologinen avaruus. Tällöin joukon X *peite* C on joukko joukon X osajoukkoja U_λ, joiden unioni on koko avaruus X. Sanotaan, että C *peittää* joukon X.

Määritelmä 8.31. Topologinen avaruus X on *kompakti*, jos jokaisella joukon X avoimella peitteellä on äärellinen alipeite. Eli jos $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, missä $\mathcal{U}_i$ on avoin peite kaikilla $i \in I$, on olemassa sellainen äärellinen joukko $\mathcal{U}_{i_1}, \mathcal{U}_{i_2}, \ldots, \mathcal{U}_{i_n}$, että $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{i_k}$.

Määritelmä 8.32. Avaruus X on *paikallisesti kompakti*, kun kaikilla sen pisteillä on ympäristö, jolla on kompakti sulkeuma.

Määritelmä 8.33. Joukossa $\mathcal{C}$ joukon X osajoukkoja on *äärellisten leikkausten ominaisuus*, jos jokainen joukon $\mathcal{C}$ äärellinen osajoukko sisältää epätyhjän leikkauksen, eli kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, $\bigcap_{k=1}^{n} C_k \neq \emptyset$.

Lause 8.34. *Olkoon X topologinen avaruus. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

a) X on kompakti.

b) Jokainen joukon X suljettujen osajoukkojen, joissa on äärellisten leikkausten ominaisuus, joukko sisältää ei-tyhjän leikkauksen.

c) Jokainen verkko joukossa X sisältää kasaantumispisteen.

d) Jokainen verkko joukossa X sisältää suppenevan aliverkon.

Todistus. Lähde [2, s.44-45]. □

Lause 8.35. *Kompaktin avaruuden X suljettu aliavaruus Y on kompakti.*

Todistus. Lähde [2, s.46]. □

Lause 8.36. *Hausdorffin avaruuden X kompakti osajoukko Y on suljettu.*

Todistus. Lähde [2, s.46]. □

Lause 8.37. *Kompaktin avaruuden X jatkuva kuva $f(X)$ on kompakti.*

Todistus. Lähde [2, s.46]. □

Lause 8.38. (Tychonoffin Lause) *Epätyhjä tulo $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ on kompakti, jos ja vain jos jokainen X_α on kompakti.*

Todistus. Lähde [2, s.46]. □

Lause 8.39. *Jos f on jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta X Hausdorffin avaruuteen Y, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Lähde [2, s.47]. □

Lemma 8.40. *Oletetaan, että X ja Y ovat topologisia avaruuksia ja R on ekvivalenssirelaatio joukossa X. Olkoon joukossa X/R tekijätopologia, jossa on tekijäkuvaus $\pi\colon X \to X/R$. Tällöin kuvaus $f\colon X/R \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos yhdistetty kuvaus $f \circ \pi\colon X \to Y$ on jatkuva.*

Todistus. "$\Leftarrow$" Oletetaan, että kuvaus $f \circ \pi\colon X \to Y$ on jatkuva, ja olkoon U avoin joukko joukossa Y. Tällöin joukko $(f \circ \pi)(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ on avoin joukossa x. Tekijätopologian määritelmän mukaan joukko $f^{-1}(U)$ on avoin joukossa X/R, joten kuvaus f on jatkuva.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että kuvaus $f\colon X/R \to Y$ jatkuva. Koska myös tekijäkuvaus $\pi\colon X \to X/R$ on jatkuva, niin myös yhdistetty kuvaus $f \circ \pi\colon X \to Y$ on jatkuva. □

Lause 8.41. *Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus, ja olkoon R ekvivalenssirelaatio joukossa X. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

i) Joukko R on suljettu joukossa $X \times X$.

ii) Tekijäkuvaus $\pi\colon S \to S/R$ on suljettu.

iii) Tekijäavaruus X/R on Hausdorffin avaruus.

Todistus. Lähde [4, s.10-11]. □

Määritelmä 8.42. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja olkoon $Y \subseteq X$. Tällöin joukko $\mathcal{T}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$ on topologia joukossa Y. Tätä topologiaa kutsutaan *indusoiduksi topologiaksi* tai *relatiivitopologiaksi* joukossa Y, ja $(Y, \mathcal{T}')$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ aliavaruus.

9 Topologiset puoliryhmät

Tässä kappaleessa käsitellään puoliryhmiä S, joilla on topologia, jossa kuvaukset $\rho_s\colon S \to S$, $\rho_s(t) = ts$, tai $\lambda_s\colon S \to S$, $\lambda_s(t) = st$, ovat jatkuvia. Tässä kappaleessa tullaan huomaamaan, että tällaisten puoliryhmien algebrallisilla ja topologisilla rakenteilla on yhteys.

Määritelmä 9.1. Olkoon S puoliryhmä ja topologinen avaruus. S on

a) *oikea topologinen puoliryhmä*, jos $\rho_s\colon S \to S$ on jatkuva kaikilla $s \in S$.

b) *vasen topologinen puoliryhmä*, jos $\lambda_s\colon S \to S$ on jatkuva kaikilla $s \in S$.

c) *puolitopologinen puoliryhmä*, jos $\rho_s\colon S \to S$ ja $\lambda_s\colon S \to S$ ovat jatkuvia kaikilla $s \in S$.

d) *topologinen puoliryhmä*, jos operaatio $(s,t) \to st\colon S \times S \to S$ on jatkuva.

e) *oikea topologinen ryhmä*, jos S on ryhmä ja oikea topologinen puoliryhmä.

f) *vasen topologinen ryhmä*, jos S on ryhmä ja vasen topologinen puoliryhmä.

g) *puolitopologinen ryhmä*, jos S on ryhmä ja puolitopologinen puoliryhmä.

h) *topologinen ryhmä*, jos S on ryhmä ja topologinen puoliryhmä ja jos käänteiskuvaus $s \to s^{-1}\colon S \to S$ on jatkuva.

Määritelmä 9.2. Oikean topologisen puoliryhmän S *topologinen keskus* on joukko

$$\Lambda(S) = \{s \in S \mid \lambda_s \text{ on jatkuva}\}.$$

Vasemman topologisen puoliryhmän S *topologinen keskus* on joukko

$$\Lambda(S) = \{s \in S \mid \rho_s \text{ on jatkuva}\}.$$

Määritelmä 9.3. Jos S on kompakti avaruus ja S on topologinen puoliryhmä, niin S on *kompakti puoliryhmä*.

Esimerkki 9.4. a) Joukot $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat topologisia ryhmiä yhteenlaskun suhteen ja topologisia puoliryhmiä kertolaskun suhteen.

b) Joukko $M(n, \mathbb{C})$ $n \times n$ matriiseja, joiden alkiot ovat kompleksisia, on topologinen puoliryhmä matriisien kertolaskun suhteen. Aliryhmä $GL(n, \mathbb{C})$ ei-singulaarisia matriiseja on topologinen ryhmä, ja aliryhmä $U(n)$ unitaarisia matriiseja on kompakti topologinen ryhmä.

c) Jokainen oikea nollapuoliryhmä, vasen nollapuoliryhmä ja nollapuoliryhmä on topologinen puoliryhmä missä tahansa topologiassa.

Propositio 9.5. Oikean topologisen (vastaavasti puolitopologisen tai topologisen) puoliryhmän alipuoliryhmä on oikea topologinen (vastaavasti puolitopologinen tai topologinen) puoliryhmä relatiivitopologiassa. Topologisen ryhmän aliryhmä on topologinen ryhmä.

Todistus. Olkoon S oikea topologinen puoliryhmä ja olkoon T sen alipuoliryhmä. Jotta T olisi oikea topologinen puoliryhmä, niin tulee todistaa, että $\rho_s\colon T \to T$ on jatkuva. Olkoon $s \in T$ ja olkoon A avoin joukossa T. Tällöin

$\rho_s^{-1}(T) = T$ ja $A = U \cap T$ jollain joukossa S avoimella joukolla U. Tästä seuraa, että

$$\rho_s^{-1}(A) = \rho_s^{-1}(U \cap T) = \rho_s^{-1}(U) \cap \rho_s^{-1}(T) = \rho_s^{-1}(U) \cap T$$

on avoin joukossa T, koska $\rho_s^{-1}(U)$ on avoin joukossa S. Näin ollen ρ_s on jatkuva ja T on oikea topologinen puoliryhmä.

Olkoon S nyt topologinen ryhmä ja olkoon T sen aliryhmä. Edellisen perusteella kuvaus $(s,t) \to st\colon T \to T$ on jatkuva, joten tulee vielä osoittaa, että kuvaus $s \to s^{-1}\colon T \to T$ on jatkuva. Olkoon A avoin joukossa T. Tällöin $T^{-1} = T$ ja $A = U \cap T$ jollakin joukossa S avoimella joukolla U. Tästä seuraa, että

$$A^{-1} = (U \cap T)^{-1} = U^{-1} \cap T^{-1} = U^{-1} \cap T$$

on avoin joukossa T, koska U^{-1} on avoin joukossa S. Näin ollen kuvaus $s \to s^{-1}\colon T \to T$ on jatkuva ja T on topologinen ryhmä. □

Propositio 9.6. Olkoon T oikean topologisen puoliryhmän S osajoukko.

a) Jos T on joukon S oikea ideaali, niin myös $\overline{T}$ on joukon S oikea ideaali.

b) Jos T on joukon S vasen ideaali (vastaavasti ideaali) ja jos $\Lambda(S)$ on tiheä joukossa S, niin $\overline{T}$ on joukon S vasen ideaali (vastaavasti ideaali).

c) Jos T on joukon S alipuoliryhmä ja jos $T \subseteq \Lambda(S)$, niin $\overline{T}$ on joukon S alipuoliryhmä.

d) Jos S on kompakti, Hausdorff, topologinen puoliryhmä ja jos T on joukon S aliryhmä, niin $\overline{T}$ on topologinen ryhmä.

Todistus. Olkoon A ja B joukon S osajoukkoja ja olkoon C joukon $\Lambda(S)$ osajoukko. Koska kuvaukset ρ_s ja λ_t ovat jatkuvia kaikilla $s \in B$ ja $t \in C$, niin $\overline{A}B \subseteq \overline{AB}$ ja $C\overline{B} \subseteq \overline{CB}$, joten $\left(\overline{C}\right)\left(\overline{B}\right) \subseteq \overline{CB}$.

a) Olkoon nyt $A = T$ ja $B = S$, joten $\overline{T}S \subseteq \overline{TS}$. Koska T on joukon S oikea ideaali, niin $\overline{TS} \subseteq \overline{T}$. Näin ollen $\overline{T}$ on joukon S oikea ideaali.

b) Olkoon $C = \Lambda(S)$ ja $B = T$, joten $\left(\overline{\Lambda(S)}\right)\left(\overline{T}\right) \subseteq \overline{\Lambda(S)T}$. Koska $\Lambda(S)$ on tiheä, niin sen sulkeuma $\overline{\Lambda(S)}$ on joukko S. Näin ollen $S\overline{T} \subseteq \overline{ST} \subseteq \overline{T}$, joten $\overline{T}$ on joukon S vasen ideaali.

c) Olkoon nyt $C = B = T$, joten $\left(\overline{T}\right)\left(\overline{T}\right) \subseteq \overline{TT} \subseteq \overline{T}$.

d) Koska T on joukon S aliryhmä, sisältää se identiteetin e. Tällöin e on myös joukon $\overline{T}$ identiteetti. Olkoon $t \in T$ ja olkoon $\{t_\alpha\}$ verkko joukossa T, joka suppenee kohti alkiota t. Koska $\overline{T}$ on kompakti, voidaan olettaa, että $\{t_\alpha^{-1}\}$ suppenee kohti alkiota $s \in \overline{T}$. Koska S on topologinen puoliryhmä, niin

$\{t_\alpha^{-1}t_\alpha\}$ suppenee alkioon st, joten $st = e$. Samalla tavalla $\{t_\alpha t_\alpha^{-1}\}$ suppenee kohti alkiota ts, joten $ts = e$. Näin ollen $\overline{T}$ on ryhmä. Joukon $\overline{T}$ käänteiskuvaus $s \to s^{-1}\colon \overline{T} \to \overline{T}$ on jatkuva, joten $\overline{T}$ on topologinen ryhmä. □

Edellisen lauseen kohtien *b*) ja *c*) yhteydessä tulee huomioida, että on mahdollista kompaktille oikealle topologiselle puoliryhmälle S, että sillä on vasen ideaali, jonka sulkeuma ei ole edes joukon S alipuoliryhmä. Esimerkiksi, jos S on väli $[0,1]$, jonka operaatio on määritelty seuraavasti:

$$st = \begin{cases} t, \text{ jos } 0 \leq t < 1/2 \\ 1, \text{ jos } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tällöin S on kompakti oikea topologinen puoliryhmä, missä $\Lambda(S) = \emptyset$, ja $T = [0, 1/2[$ on vasen ideaali, jonka sulkeuma ei ole joukon S alipuoliryhmä, koska jos $t = 1/2 \in \overline{T}$, niin $st = 1 \notin \overline{T}$.

Propositio 9.7. Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ joukko oikeita topologisia puoliryhmiä. Tällöin suora tulo $S = \prod\{S_i \mid i \in I\}$ on oikea topologinen puoliryhmä. Sama pätee myös vasemmille topologisille puoliryhmille.

Todistus. Olkoon $s \in S$. Kuvaukset $\rho_{s_i}\colon S_i \to S_i$ ovat jatkuvia kaikilla $i \in I$, koska joukot S_i ovat oikeita topologisia puoliryhmiä. Projektiokuvaus $\pi_i\colon S \to S_i$ on myös jatkuva. Osoitetaan, että kuvaus $\rho_s\colon S \to S$ on jatkuva. Olkoon $t \in S$, joten koska $(\rho_s(t))_i = t_i s_i$, niin

$$(\rho_{s_i} \circ \pi_i)(t) = \rho_{s_i}(\pi_i(t)) = \rho_{s_i}(t_i) = t_i s_i = \pi_i(ts) = \pi_i(\rho_s(t)) = (\pi_i \circ \rho_s)(t).$$

Koska kuvaus $\rho_{s_i} \circ \pi_i(t)$ on jatkuva, niin myös $\pi_i \circ \rho_s$ on jatkuva. Näin ollen myös kuvaus ρ_s on jatkuva ja S on oikea topologinen puoliryhmä. □

Seuraus 9.8. *Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ joukko puolitopologisia puoliryhmiä. Tällöin suora tulo $S = \prod\{S_i \mid i \in I\}$ on puolitopologinen puoliryhmä.*

Propositio 9.9. Olkoon $\{S_i \mid i \in I\}$ joukko topologisia puoliryhmiä. Tällöin suora tulo $S = \prod\{S_i \mid i \in I\}$ on topologinen puoliryhmä.

Todistus. Olkoon $i \in I$. Kuvaukset

$$(s,t) \mapsto (s_i, t_i)\colon S \times S \to S_i \times S_i$$

ja

$$(s_i, t_i) \mapsto s_i t_i\colon S_i \times S_i \to S_i$$

ovat jatkuvia, joten niiden yhdistetty kuvaus $(s,t) \mapsto \pi_i(st)$ on jatkuva. Tästä seuraa, että operaatio $(s,t) \mapsto st\colon S \times S \to S$ on jatkuva. □

Propositio 9.10. Olkoon $\{G_i \mid i \in I\}$ joukko topologisia ryhmiä. Tällöin suora tulo $G = \prod\{G_i \mid i \in I\}$ on topologinen ryhmä.

Todistus. Edellisten propositioiden nojalla riittää osoittaa, että kääteiskuvaus $x \to x^{-1} \colon G \to G$ on jatkuva. Merkitään tätä kuvausta g:llä ja merkitään samaa kuvausta joukossa G_i, missä $i \in I$, g_i:llä. Koska projektiokuvaus $\pi_i \colon G \to G_i$ ja käänteiskuvaukset g_i ovat jatkuvia, niin myös kuvaus $\pi_i \circ g = g_i \circ \pi_i$ on jatkuva. Tästä seuraa, että kuvaus g on jatkuva. $\square$

Propositio 9.11. Olkoon S kompakti oikea topologinen puoliryhmä ja olkoon T puoliryhmä, jolla on kompakti Hausdorffin topologia. Jos $\theta \colon S \to T$ on jatkuva surjektiivinen homomorfismi, niin seuraavat väitteet pätevät.

a) T on oikea topologinen puoliryhmä.

b) $\theta\,(\Lambda(S)) \subseteq \Lambda(T)$.

c) Jos S on puolitopologinen puoliryhmä, niin myös T on puolitopologinen puoliryhmä.

d) Jos S on topologinen puoliryhmä, niin myös T on topologinen puoliryhmä.

e) Jos S on oikea topologinen ryhmä (tai topologinen ryhmä), niin myös T on oikea topologinen ryhmä (tai topologinen ryhmä).

Todistus. *a*) Olkoon $s \in S$ ja olkoon $t = \theta(s) \in T$. Jos $x \in S$, niin $(\rho_t \circ \theta)(x) = \rho_t(\theta(x)) = \theta(x)t = \theta(x)\theta(s) = \theta(xs) = \theta(\rho_s(x)) = (\theta \circ \rho_s)(x)$. Koska θ ja ρ_s ova jatkuvia, niin $\theta \circ \rho_s$ on myös jatkuva. Näin ollen $\rho_t \circ \theta$ on jatkuva. Jos C on joukon T suljettu osajoukko, niin myös

$$\theta[(\rho_t \circ \theta)^{-1}(C)] = \theta[(\theta^{-1} \circ \rho_t^{-1})(C)] = \rho_t^{-1}(C).$$

Näin ollen $\rho_t \colon T \to T$ on jatkuva.

b) Olkoon $s \in \Lambda(S)$ ja olkoon $t = \theta(s) \in T$. Jos $x \in S$, niin $(\lambda_t \circ \theta)(x) = \lambda_t(\theta(x)) = t\theta(x) = \theta(s)\theta(x) = \theta(sx) = \theta(\lambda_s(x)) = (\theta \circ \lambda_s)(x)$. Koska θ ja λ_s ovat jatkuvia, niin myös $\theta \circ \lambda_s$ on jatkuva. Näin ollen $\lambda_t \circ \theta$ on jatkuva. Jos C on joukon T suljettu osajoukko, niin

$$\theta[(\lambda_t \circ \theta)^{-1}(C)] = \theta[(\theta^{-1} \circ \lambda_t)(C)] = \lambda_t^{-1}(C).$$

Näin ollen $\lambda_t \colon T \to T$ on jatkuva ja näin ollen $t \in \Lambda(T)$, joten $\theta(\Lambda(S)) \subseteq \Lambda(T)$.

c) Koska S on puolitopologinen puoliryhmä, niin $\Lambda(S) = S$. *b*)-kohdan nojalla $\theta(\Lambda(S)) = \theta(S) \subseteq \Lambda(T)$. Koska θ on homomorfismi, niin $\theta(S) =$

T. Näin ollen $T = \theta(S) \subseteq \Lambda(T)$, joten $\Lambda(T) = T$. Näin ollen T on myös puolitopologinen puoliryhmä.

d) Olkoon m operaatiokuvaus joukossa S ja olkoon μ operaatiokuvaus joukossa T. Tällöin $\mu\left((\theta \times \theta)(s,t)\right) = \mu\left((\theta(s), \theta(t)\right) = \theta\left(m(s,t)\right)$, missä $s, t \in S$. Koska S on topologinen puoliryhmä, niin $\mu \circ (\theta \times \theta) \colon S \to S$ on jatkuva. Kuten *a*)-kohdassa, tästä seuraa, että μ on jatkuva, joten T on topologinen puoliryhmä.

e) *a*)-kohdan nojalla T on oikea topologinen puoliryhmä (ja *d*)-kohdan nojalla topologinen puoliryhmä). Tulee osoittaa, että T on ryhmä, jos S on oikea topologinen ryhmä. Olkoon $e \in S$ joukon S identiteetti. Olkoon $ts = st = e$, kun $s, t \in S$. Nyt koska θ on homomorfismi, niin $\theta(s)\theta(t) = \theta(st) = \theta(e)$, joten $\theta(e)$ on joukon T identiteetti. Näin ollen T on ryhmä. □

Lause 9.12. *Olkoon S oikea topologinen puoliryhmä, olkoon R kongruenssi joukossa S ja olkoon tekijäpuoliryhmässä S/R tekijätopologia. Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

i) S/R on oikea topologinen puoliryhmä.

ii) Jos S on puolitopologinen, niin myös S/R on puolitopologinen.

iii) Jos S on kompakti oikea topologinen (vastaavasti puolitopologinen tai topologinen) puoliryhmä ja jos R on suljettu (joukossa $S \times S$), niin S/R on kompakti, Hausdorff, oikea topologinen (vastaavasti puolitopologinen tai topologinen) puoliryhmä.

Todistus. *i*) Olkoon $\pi \colon S \to S/R$ tekijäkuvaus. Koska tekijäkuvaus on surjektiivinen, riittää osoittaa, että $\rho_{\pi(s)}$ on jatkuva mielivaltaisella $s \in S$. Jos $t \in S$, niin

$$(\rho_{\pi(s)} \circ \pi)(t) = \pi(s)\pi(t) = \pi(st) = (\pi \circ \rho_s)(t).$$

Koska S on oikea topologinen puoliryhmä, niin kuvaus ρ_s on jatkuva. Näin ollen yhdistetty kuvaus $\rho_{\pi(s)} \circ \pi$ on jatkuva. Lemman 8.40 mukaan kuvaus $\rho_{\pi(s)}$ on jatkuva.

ii) *a*)-kohdan nojalla ρ_s on jatkuva, joten riittää osoittaa, että λ_s on jatkuva mielivaltaisella $s \in S$. Jos $t \in S$, niin

$$(\lambda_{\pi(s)} \circ \pi)(t) = \pi(t)\pi(s) = \pi(ts) = (\pi \circ \lambda_s)(t).$$

Koska S on puolitopologinen puoliryhmä, niin kuvaus λ_s on jatkuva. Näin ollen yhdistetty kuvaus $\lambda_{\pi(s)} \circ \pi$ on jatkuva, joten kuvaus $\lambda_{\pi(s)}$ on jatkuva.

iii) Lauseen 8.41 nojalla kompaktin topologisen avaruuden, jossa on suljettu ekvivalenssirelaatio, tekijäpuoliryhmä S/R on Hausdorff. Tämän ja Proposition 9.11 nojalla S/R on kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä. □

Määritelmä 9.13. Kuvausta oikealta topologiselta puoliryhmältä S oikeaan topologiseen puoliryhmään T, joka on sekä homeomorfismi että isomorfismi, kutsutaan *topologiseksi isomorfismiksi*. Jos tällainen kuvaus on olemassa, niin S ja T ovat *topologisesti isomorfisia.*

Määritelmään 9.13 liittyen on hyödyllistä todeta, että jos S ja T ovat kompakteja oikeita topologisia puoliryhmiä ja T on Hausdorff, niin mikä tahansa injektiivinen, jatkuva, surjektiivinen homomorfismi joukolta S joukkoon T on topologinen isomorfismi.

Lause 9.14. *Olkoon S ja T kompakteja oikeita topologisia puoliryhmiä, missä T on Hausdorff, ja olkoon $\theta\colon S \to T$ jatkuva, surjektiivinen homomorfismi. Tällöin kuvaus ψ, kuten Lauseessa 1.19, on topologinen isomorfismi.*

Todistus. Määritelmän 9.13 perusteella riittää osoittaa, että ψ on jatkuva, koska se on isomorfismi ja homeomorfismi. Jatkuvuus seuraa suoraan siitä, että θ ja π ovat jatkuvia kuvauksia ja $\psi \circ \pi = \theta$. □

Seuraavaa määritelmää ja Zornin Lemmaa tarvitaan Lauseen 9.17 todistamiseen.

Määritelmä 9.15. Binäärinen relaatio $\leq$ joukossa S on osittainen järjestys epätyhjässä joukossa S, jos

i) $x \leq x$ kaikilla $x \in S$,

ii) $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$, ja

iii) $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \leq z$.

Joukko S, jossa on osittainen järjestys, on *osittain järjestetty joukko*, ja sen osajoukko C on *ketju*, jos $x \leq y$ tai $y \leq x$ kaikilla $x, y \in C$.

Joukon S alkio x_0 on osajoukon $A \subseteq S$ *yläraja*, jos $x \leq x_0$ kaikilla $x \in A$. Joukon S alkio x_0 on osajoukon $A \subseteq S$ *alaraja*, jos $x_0 \leq x$ kaikilla $x \in A$.

Joukon S osajoukon A alkio x_0 on joukon A *maksimaalinen alkio*, jos $x \leq x_0$ kaikilla $x \in A$, ja *minimaalinen alkio*, jos $x_0 \leq x$ kaikilla $x \in A$.

Lause 9.16. (Zornin Lemma) *Jos jokainen epätyhjän, osittain järjestetyn joukon S ketju sisältää ylärajan, niin joukossa S on maksimaalinen alkio. Vastaavasti jos jokainen epätyhjän, osittain järjestetyn joukon S ketju sisältää alarajan, niin joukossa S on minimaalinen alkio.*

Todistus. Lähde [5, s.3-4]. □

Lause 9.17. *Olkoon S kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä. Tällöin joukossa S on idempotentti, eli $E(S) \neq \emptyset$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{A} = \{T \subseteq S \mid T \neq \emptyset, T \text{ on kompakti, ja } TT \subseteq T\}$. $\mathcal{A}$ on siis joukon S kompaktien alipuoliryhmien joukko. Joukko $\mathcal{A}$ on osittain järjestetty joukkoon kuulumisen $\subseteq$ mukaan. Osoitetaan Zornin Lemman avulla, että osittain järjestetty joukko $\mathcal{A}$ sisältää minimaalisen alkion.

Joukko $\mathcal{A}$ on epätyhjä, koska $S \in \mathcal{A}$. Olkoon $\mathcal{C}$ ketju joukossa $\mathcal{A}$. Joukossa $\mathcal{C}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Koska S on Hausdorff ja kompakti, niin joukon $\mathcal{C}$ alkiot ovat suljettuja joukon S osajoukkoja. Tällöin $\mathcal{C}$ on kokoelma suljettuja kompaktin avaruuden S osajoukkoja, joilla on äärellisten leikkausten ominaisuus. Näin ollen $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$ ja $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ on joukon S kompakti alipuoliryhmä. Näin ollen $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{A}$, ja tämä on joukon $\mathcal{C}$ alaraja. Zornin Lemman nojalla voidaan valita joukon $\mathcal{A}$ minimaalinen alkio A.

Valitaan alkio $x \in A$ ja merkitään $B = \rho_x(A) = Ax$. Tällöin B on epätyhjä ja kompakti, koska se on kompaktin joukon A jatkuva kuva. Nyt $BB = AxAx \subseteq AAAx \subseteq Ax = B$, joten $B \in \mathcal{A}$. Koska $B = Ax \subseteq AA \subseteq A$ ja A on minimaalinen, joten $B = A$.

Olkoon $C = \{y \in A \mid yx = x\}$. Nyt $C \neq \emptyset$ ja $C = A \cap \rho_x^{-1}(\{x\})$ on suljettu ja näin ollen kompakti. Jos $y, x \in C$, niin $yz \in AA \subseteq A$ ja $yzx = yx = x$. Joten $yz \in C$ ja $CC \subseteq C$, joten $C \in \mathcal{A}$. Koska $C \subseteq A$ ja A on minimaalinen, niin $C = A$ ja näin ollen $x \in C$. Näin ollen $xx = x$, joten x on joukon S idempotentti. □

Lause 9.18. *Olkoon S kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä. Tällöin jokainen joukon S vasen ideaali sisältää minimaalisen vasemman ideaalin. Minimaaliset vasemmat ideaalit ovat suljettuja, ja jokainen minimaalinen vasen ideaali sisältää idempotentin.*

Todistus. Olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon $x \in L$. Koska Sx on kompaktin, Hausdorffin avaruuden S jatkuva kuva, niin Sx on kompakti ja suljettu vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon L. Täten jokainen vasen ideaali sisältää suljetun vasemman ideaalin. Näin ollen jos L on joukon S minimaalinen ideaali, niin $Sx = L$, joten L on kompakti. Koska S on Hausdorffin avaruus, niin L on suljettu ja näin ollen mikä tahansa minimaalinen vasen ideaali on suljettu. Koska vasen ideaali on myös alipuoliryhmä, niin Lauseen 9.17 nojalla mikä tahansa vasen ideaali sisältää idempotentin.

Jotta voidaan osoittaa, että S sisältää minimaalisen vasemman ideaalin, olkoon L joukon S vasen ideaali ja olkoon

$$\mathcal{A} = \{T \subseteq L \mid T \text{ on joukon } S \text{ suljettu vasen ideaali}\}.$$

Koska L sisältää joukon S vasemman ideaalin, osittain järjestetty joukko $\mathcal{A}$ on epätyhjä. Olkoon $\mathcal{C}$ ketju joukossa $\mathcal{A}$. Joukossa $\mathcal{C}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Tällöin $\mathcal{C}$ on kokoelma kompaktin avaruuden S suljettuja osajoukkoja, joilla on äärellisten laikkauksien ominaisuus. Täten $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$

on joukon S suljettu vasen ideaali. Näin ollen $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}} C \in \mathcal{A}$, ja Zornin Lemman nojalla joukossa $\mathcal{A}$ on olemassa minimaalinen alkio M. Näin ollen vasen ideaali M on minimaalinen joukon S suljettujen vasempien ideaalien L joukossa.

Jotta voidaan osoittaa M puoliryhmän S minimaaliseksi vasemmaksi ideaaliksi, joka sisältyy joukkoon L, olkoon K puoliryhmän S vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon M. Koska jokainen vasen ideaali sisältää suljetun vasemman ideaalin ja M on puoliryhmän S minimaalinen suljettu vasen ideaali, niin $K = M$. Näin ollen M on joukon S minimaalinen vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon L. □

Seuraus 9.19. *Kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä on vasen (vastaavasti oikea) yksinkertainen puoliryhmä, jos ja vain jos se on oikea (vastaavasti vasen) peruuttava.*

Todistus. Koska kompakti oikea topologinen puoliryhmä sisältää Lauseen 9.17 mukaan idempotentin, niin Lauseen 5.6 mukaan jos S on vasen yksinkertainen puoliryhmä, niin se on myös oikea peruuttava. Väite pätee myös toiseen suuntaan, eli jos S on oikea peruuttava ja se sisältää minimaalisen idempotentin, niin se on myös vasen yksinkertainen puoliryhmä ja se sisältää idempotentin. Tämä toimii myös oikealle yksinkertaisille puoliryhmälle ja vasemmalle peruuttavalle. □

Seuraus 9.20. *Kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä on ryhmä, jos ja vain jos se on peruuttava.*

Todistus. Seurauksen 9.19 ja Lauseen 5.6 mukaan, jos S on ryhmä, niin se on myös peruuttava. Jos taas S on peruuttava, niin saman Lauseen ja Seurauksen mukaan S on ryhmä. □

Seuraus 9.21. *Olkoon T kompaktin, Hausdorffin, oikean topologisen puoliryhmän S suljettu alipuoliryhmä. Jos S on vasen yksinkertainen, oikea yksinkertainen tai yksinkertainen puoliryhmä, niin myös T on.*

Todistus. Lauseen 9.17 mukaan S sisältää idempotentin, joten koska T on suljettu, niin se on kompakti ja näin ollen se sisältää idempotentin. Tällöin, jos S on yksinkertainen, niin $T \cap K(S) = T \cap S = T$, joten Lauseen 7.11 nojalla $T = K(T)$, eli T on yksinkertainen. Jos taas S on vasen yksinkertainen, niin $se = s$ kaikilla $s \in S$ ja $e \in E(S)$, joten myös $te = t$ kaikilla $t \in T$ ja $e \in E(T)$. Näin ollen T on vasen yksinkertainen. Jos S on oikea yksinkertainen, niin $es = s$ kaikilla $s \in S$ ja $e \in E(S)$, joten myös $et = t$ kaikilla $t \in T$ ja $e \in E(T)$, joten T on oikea yksinkertainen. □

Seuraus 9.22. *Olkoon S ja T kompakteja, Hausdorffeja, oikeita topologisia puoliryhmiä ja olkoon $\theta\colon S \to T$ jatkuva homomorfismi. Merkitään, että $\mathcal{L}_S$ on joukko joukon S minimaalisia vasempia ideaaleja, $\mathcal{R}_S$ on joukko joukon S minimaalisia oikeita ideaaleja ja $\mathcal{G}_S$ on joukko joukon $K(S)$ maksimaalisia aliryhmiä, ja olkoon $\mathcal{L}_T$, $\mathcal{R}_T$ ja $\mathcal{G}_T$ vastaavat joukot joukolle T. Tällöin seuraavat väitteet pitävät.*

i) $\theta(K(S)) = K(T)$.

ii) $\theta(E(K(S))) = E(K(T))$.

iii) $\mathcal{L}_T = \{\theta(L) \mid L \in \mathcal{L}_S\}$, $\mathcal{R}_T = \{\theta(R) \mid R \in \mathcal{R}_S\}$ *ja* $\mathcal{G}_T = \{\theta(G) \mid G \in \mathcal{G}_S\}$.

Todistus. *i)* $\theta(K(S))$ on joukon T vasen ideaali, koska

$$T\theta(K(S)) = \theta(S)\theta(K(S)) = \theta(SK(S)) \subseteq \theta(K(S)).$$

Nyt koska $Ss = K(S)$ kaikilla $s \in K(S)$, niin $Tt = \theta(K(S))$ kaikilla $t \in \theta(K(S))$, joten $\theta(K(S))$ on minimaalinen. Eli $\theta(K(S)) = K(T)$.

ii) *i)*-kohdasta seuraa, että $\theta(E(K(S))) \subseteq E(K(T))$. Olkoon nyt $e \in E(K(T))$. Tällöin $\theta^{-1}(e)$ on joukon S suljettu alipuoliryhmä. Olkoon L mikä tahansa joukon S oikea ideaali, joka sisältyy joukkoon $S\theta^{-1}(e)$ (Seuraa Seurauksesta 9.19).Tällöin $\theta(L)$ on joukon T vasen ideaali, joka sisältyy joukkoon $\theta(S\theta^{-1}(e)) = Te$, joten $\theta(L) = Te$. Tästä seuraa, että $S_1 = L \cap \theta^{-1}(e)$ on epätyhjä ja se on näin ollen joukon S alipuoliryhmä. Koska S_1 on suljettu, niin se sisältää idempotentin d_1. Tällöin $d_1 \in K(S)$ ja $\theta(d_1) = e$. Näin ollen $\theta(E(K(S))) = E(K(T))$.

iii) Tämä seuraa suoraan kohdasta *ii)* sekä siitä, että $\{Se \mid e \in E(K)\}$ on joukko joukon S minimaalisia vasempia ideaaleja, $\{eS \mid e \in E(K)\}$ on joukko joukon S minimaalisia oikeita ideaaleja ja $\{eSe \mid e \in E(K)\}$ on joukko joukon K maksimaalisia aliryhmiä, koska S ja T sisältävät minimaalisen idmepotentin. □

Idempotenttien joukon $E(S)$ ei tarvitse olla äärellinen. Palataan Esimerkin 1.7 puoliryhmään S, joka sisältää matriiseja, jotka ovat muotoa $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, missä $x \in \mathbb{R}$. Joukon S kaikki alkiot ovat idempotentteja, koska

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ja joukko S on ääretön, joten $E(S)$ on ääretön.

Lause 9.23. *Olkoon S oikea yksinkertainen, kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä. Tällöin $E(S)$ ja kaikki joukon S maksimaaliset aliryhmät ovat suljettuja.*

Todistus. Joukon S maksimaaliset aliryhmät ovat myös minimaalisia vasempia ideaaleja ja näin ollen ne ovat suljettuja. Olkoon $\{e_\alpha\}$ verkko joukossa $E(S)$, joka suppenee kohti alkiota $e \in S$. Olkoon d alkion e sisältävän maksimaalisen aliryhmän identiteetti. Koska $E(S)$ on oikea nollapuoliryhmä, niin saadaan $e_\alpha d = d$ kaikilla α, joten $e = ed = d$. Näin ollen $e \in E(S)$ ja $E(S)$ on suljettu. □

Lause 9.24. *Olkoon S vasen yksinkertainen, kompakti, Hausdorff, oikea topologinen puoliryhmä, missä $\Lambda(S) \neq \emptyset$. Tällöin seuraavat väitteet pitävät.*

i) *$E(S)$ on suljettu.*

ii) *Maksimaalinen aliryhmä G on suljettu, jos ja vain jos $G \cap \Lambda(S) \neq \emptyset$. Tässä tapauksessa $G \cap \Lambda(S)$ on ryhmä ja $G \cap \Lambda(S) = \Lambda(G)$.*

iii) *Joukon S suljetut maksimaaliset aliryhmät ovat topologisesti isomorfisia.*

Todistus. *i)* Olkoon $\{e_\alpha\}$ verkko joukossa $E(S)$, joka suppenee kohti alkiota $e \in S$. Valitaan mikä tahansa $s \in \Lambda(S)$, ja olkoon G_1 ja G_2 sellaisia joukon S maksimaalisia aliryhmiä, joilla on identiteetit e_1 ja e_2, että $s \in G_1$ ja $e \in G_2$. Koska $s = se_\alpha$, kaikilla α, niin saadaan $s = se$, joten $e_1 e = s^{-1}se = s^{-1}s = e_1$, missä s^{-1} on alkion s käänteisalkio ryhmässä G_1. Näin ollen

$$e = e_2 e = e_2 e_1 e = e_2 e_1 = e_2 \in E(S),$$

joten $E(S)$ on suljettu.

ii) Oletetaan ensin, että $G \cap \Lambda(S) \neq \emptyset$ ja olkoon $s \in G \cap \Lambda(S)$. Tällöin $G = \lambda_s(S)$, joten G on suljettu ja $\Lambda(S)$ on ryhmä. Nyt myös $\lambda_{s^{-1}} |_G$ on jatkuva, koska se on injektiivisen jatkuvan kuvauksen $\lambda_s |_G$ käänteiskuvaus. Täten mille tahansa $t \in \Lambda(G)$, $\lambda_t = \lambda_t \circ \lambda_{s^{-1}} \circ \lambda_s$ on jatkuva, joten $\Lambda(G) = G \cap \Lambda(S)$.

Oletetaan sitten, että G on suljettu. Koska $\Lambda(S) \neq \emptyset$, niin $G_1 \cap \Lambda(S) \neq \emptyset$ jollain joukon S maksimaalisella aliryhmällä G_1. Nyt $\Lambda(G_1) = \Lambda(S) \cap G_1$, kuten edellä todistettiin. $\Lambda(S)$ sisältää joukon G_1 identiteetin e_1. Näin ollen λ_{e_1} kuvaa joukon G isomorfisesti joukkoon G_1. Täten $\lambda_{e_1} |_G$ on topologisesti isoorfinen, jolla on käänteiskuvaus $\lambda_e |_{G_1}$, missä e on joukon G identiteetti. Koska λ_{e_1} kuvaa joukon S jatkuvasti joukkoon G_1, niin $\lambda_e = \lambda_e \circ \lambda_{e_1}$ on jatkuva. Näin ollen $G \cap \Lambda(S) \neq \emptyset$. Tämä todistaa myös kohdan *iii*). □

Edellisissä lauseissa käsitellään kompakteja oikeita topologisia puoliryhmiä S, joilla on tiettyjä ominaisuuksia, joiden vuoksi $E(S)$ on suljettu. Kaikissa tapauksissa idempotenttien joukko ei kuitenkaan ole suljettu. Aihetta on tutkittu ja tutkitaan edelleenkin. Esimerkiksi N. Hindman ja D. Strauss ovat tutkineet aihetta, ja he ovat julkaisseet useita teoksia aiheeseen liittyen. He ovat esimerkiksi esitelleet seuraavan lauseen, jonka seurauksena saadaan esimerkiksi se, että joukossa $\beta\mathbb{Z}$ minimaalisten idempotenttien joukko ei ole suljettu.

Lause 9.25. *Olkoon S diskreetti laskettavasti ääretön peruuttava puoliryhmä ja olkoon T joukon S alipuoliryhmä. Tällöin on olemassa jono $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ joukon βT minimaaleja idempotentteja, joilla on sellainen ominaisuus, että jos p on mikä tahansa kasaantumispiste joukossa $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, niin $Sp \cap S^*S^* = \emptyset$.*

Lauseessa $S^* = \beta S \backslash S$ ja βS on Stone-Čech kompaktisointi. Lauseeseen ja sen seurauksiin voi tutustua tarkemmin esimerkiksi Hindmanin ja Straussin teoksesta [3, Lause 8.22]. Tämä on yksi mielenkiintoinen tutkimuksen aihe, joka on jatkoa tässä tutkielmassa esitettyihin tuloksiin.

Lähdeluettelo

[1] J. F. Berglund, H. D. Junghenn ja P. Milnes, *Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compactifications, Representations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[2] M. Filali, *Topology I*, Lecture notes, 2007.

[3] N. Hindman ja D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications*, Walter de Gruyter Berlin, 2011.

[4] P. Salmi, *On Semigroup Compactifications*, Master's Thesis, 2001.

[5] T. Vedenjuoksu, *The Stone-Čech Compactification as a Compact Semigroup*, Master's Thesis, 2003.