Laatikkodimensio

LuK-tutkielma
Eetu Värttö
2577696
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2020

Sisällys

Johdanto

Tutkielman aiheena on laatikkodimensio, mikä on yksi tapa määritellä fraktaalien ulottuvuutta. Ensimmäisessä kappaleessa käydään lyhyesti läpi, mikä fraktaalidimensio on sekä johdatellaan laatikkodimension laskukaavaa. Toisessa kappaleessa määritellään laatikkodimensio ja todistetaan sen ekvivalentteja määritelmiä. Kolmas kappale käsittelee Minkowskin dimensiota, mikä on hieman muista määritelmistä poikkeava tapa laskea laatikkodimensio. Neljännessä kappaleessa käydään esimerkkinä läpi Cantorin joukkoa ja sen laatikkodimensiota. Esimerkki 2.2 on omani, mutta muuten tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [1], minkä todistuksiin olen täydentänyt välivaiheita.

1 Fraktaalidimensio

Määritelmä 1.1. Kahden funkiton $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vertailuun pienillä muuttujan x arvoilla merkitään $f(x) \sim g(x)$, mikä tarkoittaa, että $f(x)/g(x) \to 1$, kun $x \to 0$. Merkintä $f(x) \simeq g(x)$ tarkoittaa, että $f(x)$ ja $g(x)$ ovat tietyssä mielessä yhtäsuuret, mikä tarkennetaan asiayhteydessä.

Määritelmä 1.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A *peite* on sellainen kokoelma joukkoja $\{C_i \subset \mathbb{R}^n : i \in I\}$, että

$$A \subset \bigcup_{i \in I} C_i, \tag{1.1}$$

missä I on indeksijoukko.

Fraktaalidimensioille ei ole vain yhtä määritelmää, mutta suurimmalle osalle on ominaista jonkinlainen mitta mittakaavalla δ. Tällöin mitataan joukkoa siten, että lukua δ pienemmät yksityiskohdat jätetään huomiotta ja tutkitaan, kuinka mitta käyttäytyy, kun $\delta \to 0$.

Tutkitaan esimerkkinä tasokäyrää F, jonka mitta $M_\delta(F)$ on δ-pituisten "mittakeppien" lukumäärä, joka tarvitaan tasokäyrän F pituuden mittaamiseen. Joukon F dimensio saadaan selville, jos mitta $M_\delta(F)$ noudattaa potenssilakia

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}, \tag{1.2}$$

kun $\delta \to 0$. Vakiota s sanotaan joukon F dimensioksi ja vakio c on joukon F s-dimensionaalinen pituus. Ottamalla logaritmit puolittain saadaan

$$\log M_\delta(F) \simeq \log(c\delta^{-s}) = \log c + \log(\delta^{-s}) = \log c - s \log \delta, \tag{1.3}$$

missä yhtäsuuruus seuraa siitä, että yhtälön puolien erotus lähestyy nollaa, kun $\delta \to 0$. Tästä saadaan dimensiolle s lausekkeeksi

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{1.4}$$

Jos $M_\delta(F)$ ei noudata potenssilakia, niin kaavassa (1.4) raja- arvo korvataan ylä- ja alaraja-arvolla.

2 Laatikkodimensio

Määritelmä 2.1. Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä ja rajoitettu osajoukko ja $N_\delta(F)$ pienin lukumäärä joukkoja, joiden halkaisija on enintään δ, jotka peittävät joukon F. Määritellään joukon F *ala- ja ylälaatikkodimensiot*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2.1}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{2.2}$$

Jos ala- ja ylälaatikkodimensiot ovat yhtä suuria, eli $\underline{dim}_B(F) = \overline{dim}_B(F)$, niin yhteistä arvoa sanotaan joukon F *laatikkodimensioksi* ja merkitään

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{2.3}$$

Kun osoitetaan, että luku s on joukon F laatikkodimensio, on osoitettava ainoastaan, että $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \le s \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, koska epäyhtälö $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ on aina voimassa.

Esimerkki 2.2. Lasketaan esimerkkinä janalle laatikkodimensio. Olkoon janan F pituus a. Koska $F \subset \mathbb{R}$, niin mielivaltainen δ-halkaisijainen peittävä joukko voidaan korvata välillä, jonka pituus on δ. Tällöin

$$\frac{a}{\delta} \le N_\delta(F) \le \frac{a}{\delta} + 1. \tag{2.4}$$

Jotta päästään tilanteeseen, missä $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, niin arvioidaan ylälaatikkodimensiota alaspäin ja alalaatikkodimensiota ylöspäin epäyhtälön (2.4) avulla. Määritelmästä 2.1 saadaan

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \le \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log(\frac{a}{\delta} + 1)}{-\log \delta}$$

Ottamalla a/δ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\delta\to 0}\frac{\log(\frac{a}{\delta}(1+\frac{\delta}{a}))}{-\log\delta} = \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log\frac{a}{\delta}+\log(1+\frac{\delta}{a})}{-\log\delta}\\
&= \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log\frac{a}{\delta}}{-\log\delta} = \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log a-\log\delta}{-\log\delta}\\
&= \limsup_{\delta\to 0}\frac{-\log\delta(\frac{\log a}{-\log\delta}+1)}{-\log\delta} = \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log a}{-\log\delta}+1\\
&= 1,
\end{aligned}$$

sillä $-\log\delta\to\infty$, kun $\delta\to 0$. Vastaavasti

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}F = \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \geq \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log\frac{a}{\delta}}{-\log\delta} = 1.$$

Siis $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}F \leq 1 \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}F$, eli ala- ja ylälaatikkodimensiot lähestyvät yhteistä arvoa, jolloin janalla on laatikkodimensio

$$\dim_{\mathrm{B}}F = 1,$$

mikä vastaa intuitiivista oletusta janan dimensiosta.

Laatikkodimensiolla on useita ekvivalentteja määritelmiä, joissa luku $N_\delta(F)$ voidaan valita usealla eri tavalla. Muodostetaan ensin ekvivalenttien määritelmien avuksi δ-*koordinaattiruudukko.*

Määritelmä 2.3. Muodostetaan kokoelma rinnakkaisia, δ-sivuisia kuutioita avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin δ-koordinaattiruudukon muodostavat kuutiot ovat muotoa

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_n\delta,(m_n+1)\delta], \tag{2.5}$$

missä $m_1,\ldots,m_n$ ovat kokonaislukuja.

Huomautus 2.4. Avaruudessa $\mathbb{R}^1$ δ-sivuinen kuutio on δ pituinen lukuväli ja avaruudessa $\mathbb{R}^2$ δ-sivuinen neliö.

Lause 2.5. *Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä ja rajoitettu osajoukko. Ala- ja ylälaatikkodimensiot ovat*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}F = \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.6}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}F = \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}. \tag{2.7}$$

Ja laatikkodimensio on

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \tag{2.8}$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin $N_\delta(F)$ voi olla mikä tahansa seuraavista.

i. *Pienin määrä δ-säteisiä suljettuja palloja, jotka peittävät joukon F.*

ii. *Pienin määrä δ-sivuisia kuutioita, jotka peittävät joukon F.*

iii. *Niiden δ-koordinaattiruudukon kuutoiden lukumäärä, jotka leikkaavat joukkoa F.*

iv. *Pienin määrä joukkoja, joiden halkaisija on enintään δ ja jotka peittävät joukon F.*

v. *Suurin määrä erillisiä δ-säteisiä palloja, joiden keskipiste on joukossa F.*

Todistus. Todistetaan kohdat yksitellen.
i) Olkoon $N'_\delta(F)$ pienin määrä δ-säteisiä suljettuja palloja, jotka peittävät joukon F. Jos $\operatorname{diam} C \leq \delta$ ja $x \in C$, niin $C \subset B(x, \delta)$, missä $B(x, \delta)$ on x-keskeinen δ-säteinen suljettu pallo ja $\operatorname{diam} C$ on joukon C halkaisija. Näin ollen

$$F \subset \bigcup_{i \in I} C_i \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \delta)$$

Jokaisella joukon F δ-peitteellä $\{C_i : i \in I\}$, missä $x_i \in C_i$. Siten

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F).$$

Kun $\delta < 1$, $-\log \delta > 0$ ja koska $\log(x)$ on kasvava funktio, saadaan

$$\log N'_\delta(F) \leq \log N_\delta(F)$$

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Kun $\delta \to 0$

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.9}$$

ja

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{2.10}$$

Toisaalta, koska $\operatorname{diam} B(x,\delta) = 2\delta$, niin

$$N_{2\delta}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Kun $2\delta < 1$, saadaan

$$\frac{\log N_{2\delta}(F)}{-\log(2\delta)} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log(2\delta)} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log 2 - \log\delta} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta(\frac{-\log 2}{-\log\delta}+1)}.$$

Kun $\delta \to 0$, niin $\frac{-\log 2}{-\log\delta} \to 0$, jolloin

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.11}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.12}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (2.9) - (2.12) nähdää, että $N_\delta(F)$ voidaan valita pienimmäksi määräksi δ säteisiä suljettuja palloja.
ii) Olkoon $N'_\delta(F)$ pienin määrä mielivaltaisia δ-sivuisia kuutioita K_i, jotka peittävät joukon F. Olkoon $\operatorname{diam} C_i \leq \delta$. Valitaan kaikilla $j = 1, \ldots, n$ luvut $a_j = \inf\{x_j : x \in C_i\}$ ja $b_j = \sup\{x_j : x \in C_i\}$. Tällöin

$$C_i \subset \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$$

Ja $|a_j - b_j| \leq \delta$ kaikilla j. Tällöin $C_i \subset K_i$ jollakin kuutiolla K_i. Siis

$$F \subset \bigcup_{i\in I} C_i \subset \bigcup_{i\in I} K_i$$

jokaisella joukon F δ-peitteellä $\{C_i : i \in I\}$. Tällöin

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F),$$

mistä saadaan

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.13}$$

ja

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{2.14}$$

Koska δ-sivuisen kuution halkaisija on $\delta\sqrt{n}$, niin kuutiot mudostavat $N'_\delta(F)$, halkaisijaltaan $\delta\sqrt{n}$ joukkoa, jolloin

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Kun $\delta\sqrt{n} < 1$ saadaan

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta(\frac{-\log\sqrt{n}}{-\log\delta}+1)}.$$

Kun $\delta \to 0$

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.15}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.16}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (2.13) - (2.16) nähdään, että $N_\delta(F)$ voidaan valita pienimmäksi määräksi mielivaltaisia δ-sivuisia kuutioita, jotka peittävät joukon F.

iii) Olkoon $N'_\delta(F)$ δ-koordinaattiruudukon kuutioiden lukumäärä, jotka leikkaavat joukon F. Kuten kohdassa *ii*), kuutiot muodostavat $N'_\delta(F)$ joukkoa, joiden halkaisija on $\delta\sqrt{n}$. Tästä saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.17}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{2.18}$$

Toisaalta joikainen joukko, jonka halkaisija on korkeintaan δ sisältyy 3^n δ-koordinaattiruudukon kuutioon (valitaan kuutio, jossa on jokin joukon piste, sekä sen viereiset kuutiot). Tällöin

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log(3^n)}{-\log\delta} + \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

Kun $\delta \to 0$

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.19}$$

ja

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{2.20}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (2.17) - (2.20) nähdään, että $N_\delta(F)$ voidaan valita δ-koordinaattiruudukon kuutioiden lukumääräksi, jotka leikkaavat joukon F.
iv) On suoraan alkuperäinen määritelmä.
v) Olkoon $N'_\delta(F)$ suurin määrä erillisiä δ-säteisiä palloja, joiden keskipiste on joukossa F. Olkoon $B(x_1, \delta), \ldots, B(x_{N'_\delta(F)}, \delta)$ jokin tälläinen kokoelma palloja. Jos $x \in F$, niin pisteen x etäisyys jostain pallosta B_i on pienempi kuin δ, sillä muuten voitaisiin muodostaa suurempi kokoelma palloja lisäämällä x-keskipisteinen δ-säteinen pallo. Tällöin pallot $B(x_1, 2\delta), \ldots, B(x_{N'_\delta(F)}, 2\delta)$ peittävät joukon F. Koska pallon $B(x_i, 2\delta)$ halkaisija on 4δ kaikilla $i = 1, \ldots, N'_\delta(F)$, niin

$$N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F),$$

mistä saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2.21}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2.22}$$

Olkoon $U_1, \ldots, U_{N_\delta(F)}$ kokoelma joukkoja, joiden halkaisija on enintään δ, jotka peittävät joukon F. Koska joukot U_j peittävät kaikkien pallojen $B(x_i, \delta)$ keskipisteet, niin jokainen pallo $B(x_i, \delta)$ sisältää ainakin yhden joukon U_j. Koska pallot ovat erilliset, on joukkoja U_j oltava vähintään yhtä paljon kuin palloja. Tällöin

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F),$$

mistä seuraa

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.23}$$

ja

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{2.24}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (2.21) - (2.24) nähdään, että $N_\delta(F)$ voidaan valita suurimmaksi määräksi erillisiä, δ-säteisiä palloja. $\square$

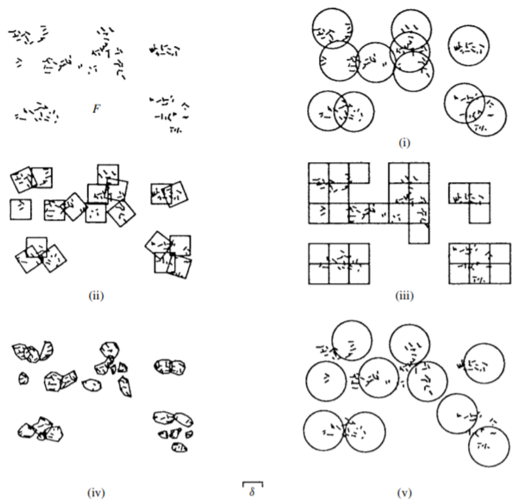
Lause 2.6. *Olkoon joukko F rajoitettu ja $\overline{F}$ joukon F sulkeuma eli pienin avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko, joka sisältää joukon F. Tällöin*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.25}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.26}$$

eli joukon F ja sen sulkeuman $\overline{F}$ laatikkodimensiot ovat samat.



Kuva 1: Joukko F ja edellä mainitut ekvivalentit määritelmät laatikkodimensiolle. Alkuperäinen kuva [1, Figure 3.2].

Todistus. Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ äärellinen kokoelma suljettuja δ-säteisiä palloja. Koska pallot ovat suljettuja, niin myös niiden äärellinen yhdiste

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

on suljettu. Tällöin, jos joukko F sisältyy pallojen B_i yhdisteeseen, eli

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

niin myös joukon F sulkeuma $\overline{F}$ sisältyy pallojen B_i yhdisteeseen, eli

$$\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

koska yhdiste on suljettu. Käyttämällä tietoa $N_\delta(F) \leq N_\delta(\overline{F})$, koska $F \subset \overline{F}$ nähdään, että pienin määrä δ-säteisiä, suljettuja palloja, jotka peittävät joukon F peittävät myös joukon $\overline{F}$ eli $N_\delta(F) = N_\delta(\overline{F})$. Tästä seuraa suoraan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

$\square$

Lause 2.7. *Laatikkodimension raja-arvo $\delta \to 0$ voidaan laskea myös nollaa kohti suppenevan, vähenevän jonon δ_k avulla, missä $\delta_{k+1} \geq c\,\delta_k$ jollain vakiolla $0 < c < 1$. Erityisesti voidaan valita $\delta_k = c^k$.*

Todistus. Olkoon $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ ja $N_\delta(F)$ pienin määrä joukkoja joukon F δ-peitteessä. Tällöin

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k}$$

Lisätään ja vähennetään nimittäjään termi $\log \delta_{k+1}$ ja käyttämällä logaritmien laskusääntöjä sekä oletusta $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ saadaan

$$= \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{1}{\delta_k} + \log \delta_{k+1}}$$

$$= \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{c\delta_k}{\delta_k}} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c},$$

mistä saadaan

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.27}$$

ja

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.28}$$

eli

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.29}$$

ja

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.30}$$

Vastaavasti

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_{k+1}} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log(c\delta_k)} = \frac{\log N_{\delta_k}}{-\log \delta - \log c}$$

mistä saadaan

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.31}$$

ja

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.32}$$

eli

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} \tag{2.33}$$

ja

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}. \tag{2.34}$$

Koska ylä- ja alalaatikkodimensioiden ylä- ja alarajat ovat yhtä suuret, voidaan laatikkodimensio laskea vähenevän jonon δ_k avulla. $\square$

Esimerkki 2.8. Lasketaan esimerkkinä laatikkodimensio joukolle $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Olkoon $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ja k sellainen kokonaisluku, jolle pätee

$$\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}. \tag{2.35}$$

Jos $|U| \leq \delta$, niin U voi peittää enintään yhden pisteistä $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots 1/k\}$, sillä pienin väli on pisteiden $\frac{1}{k-1}$ ja $\frac{1}{k}$ välillä ja

$$\left|\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)}\right| = \left|\frac{k-1+1}{k(k-1)}\right| = \frac{1}{k(k-1)} > \delta.$$

Tarvitaan siis ainakin k halkaisijaltaan δ olevaa joukkoa peittämään joukko F, jolloin

$$N_\delta(F) \geq k.$$

Lisäksi

$$-\log \delta = \log \frac{1}{\delta} \geq \log k(k+1).$$

Tällöin

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}. \tag{2.36}$$

Kun $\delta \to 0$, niin $k \to \infty$, jolloin

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log k}{\log k(k+1)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log k}{\log k + \log(k+1)}. \tag{2.37}$$

Laventamalla termillä $\log k$ raja-arvosta saadaan

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log(k+1)}{\log k}} = \frac{1}{2},$$

sillä $\frac{\log(k+1)}{\log k} \to 1$, kun $k \to \infty$. Siis

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \geq \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

Toisaalta $k+1$ δ-pituista väliä peittää väin $[0, \frac{1}{k}]$, jättäen $k-1$ joukon F pistettä, jotka voidaan peittää toisella $k-1$ välillä. Tällöin

$$N_\delta(F) \leq 2k,$$

joten

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)}. \tag{2.39}$$

Ottamalla raja-arvo, kun $\delta \to 0$ saadaan

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(2k)}{\log k + \log(k-1)} = \frac{1}{2}. \tag{2.40}$$

Siis

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \frac{1}{2}. \tag{2.41}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (2.38) ja (2.41) saadaan

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \frac{1}{2} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{2.42}$$

eli joukolla F on olemassa laatikkodimensio

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \frac{1}{2}. \tag{2.43}$$

3 Minkowskin dimensio

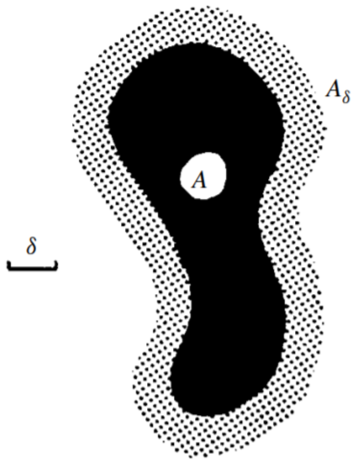
Määritelmä 3.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A *δ-ympäristö* A_δ on sellaisten pisteiden joukko, joiden etäisyys joukosta A on enintään δ. Eli

$$A_\delta = \{x : |x-y| \leq \delta, \text{ jollekin } y \in A\}.$$

Määritelmä 3.2. Olkoon $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$. Tällöin joukon A *n-ulotteinen tilavuus* on

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Tutkitaan joukon F δ-ympäristön F_δ n-ulotteista tilavuutta, kun $\delta \to 0$. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jos joukko F on yksittäinen piste, niin F_δ on pallo ja $\mathrm{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$. Jos F on jana, jonka pituus on l, niin F_δ on pyoristetty lieriö ja $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim \pi l \delta^2$. Jos F on taso, jonka pinta-ala on a, niin F_δ on



Kuva 2: Joukon A δ-ympäristö. Alkuperäinen kuva [1, Figure 1.1].

"paksunnettu" versio joukosta F ja $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$. Huomataan, että jokaisessa tapauksessa $\mathrm{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$, missä s on joukon F dimensio ja vakiota c sanotaan joukon F Minkowskin sisällöksi.

Tämä voidaan laajentaa myös dimensioille, jotka eivät ole kokonaislukuja. Jos F on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja jollakin s lauseke $\frac{\mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}}$ lähestyy positiivista raja-arvoa, kun $\delta \to 0$, niin on mielekästä sanoa, että joukon F dimensio on s. Lisäksi raja-arvoa sanotaan joukon F s-dimensionaaliseksi sisällöksi. Vaikka raja-arvo ei olisikaan olemassa, on silti mahdollista saada δ:n eksponentti ja huomataan, että se liittyy laatikkodimensioon.

Lause 3.3. *Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Tällöin*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta} \tag{3.1}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}, \tag{3.2}$$

missä F_δ on joukon F δ-ympäristö.

Todistus. Jos F voidaan peittää $N_\delta(F)$ pallolla, joiden säde $\delta < 1$, niin F_δ voidaan peittää samankeskeisillä, 2δ-säteisillä palloilla. Siis

$$\mathrm{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

missä c_n on avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallon tilavuus. Ottamalla logaritmit puolittain ja käyttämällä logaritmien laskusääntöjä hajoittamaan oikean puolen osoittaja saadaan

$$\frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \frac{\log(2^n c_n) + n\log\delta + \log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

$$= \frac{\log(2^n c_n)}{-\log\delta} + n\frac{\log\delta}{-\log\delta} + \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Ottamalla raja-arvo, kun $\delta \to 0$ saadaan

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \leq -n + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{3.3}$$

ja

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \leq -n + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \tag{3.4}$$

sillä $\frac{\log(2c_n)}{-\log\delta} \to 0$, kun $\delta \to 0$. Toisaalta, jos on $N_\delta(F)$ erillistä, δ-säteistä palloa, joiden keskipisteet ovat joukossa F, niin lisäämällä yhteen niiden tilavuudet saadaan

$$N_\delta c_n \delta^n \leq \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta),$$

sillä pallot eivät peitä joukkoa F. Siis

$$\frac{\log N_\delta(F) + \log c_n + n\log\delta}{-\log\delta} \leq \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta}.$$

Ottamalla raja-arvo $\delta \to 0$ saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \tag{3.5}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta}. \tag{3.6}$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.3) - (3.6) saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F - n,$$

jolloin lisäämällä puolittain termin n ja siirtämällä miinusmerkit raja-arvon ulkopuolelle, jolloin käyttämällä tietoa $\inf A = -\sup(-A)$ saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq n - \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{\log\delta} \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \tag{3.7}$$

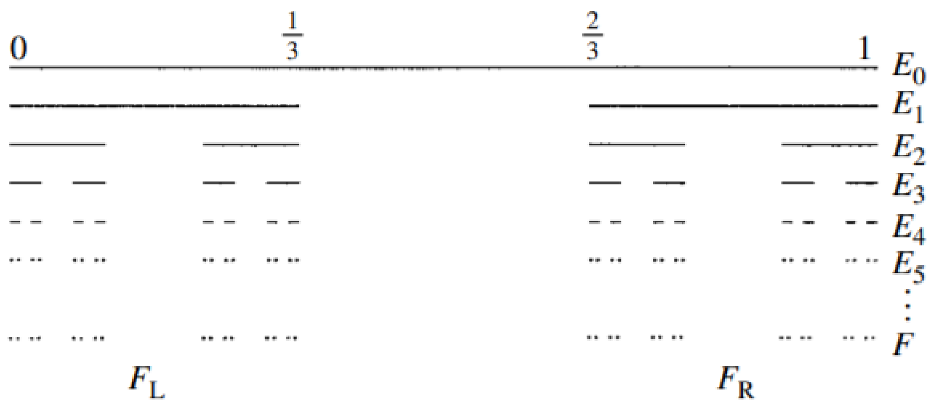
ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq n - \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log \mathrm{vol}^{\mathrm{n}}(F_\delta)}{\log \delta} \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F. \tag{3.8}$$

□

4 Cantorin joukkko

Määritelmä 4.1. Olkoon E_0 lukuväli $[0, 1]$. Olkoon uusi joukko E_1 joukko E_0, josta on poistettu keskimmäinen kolmannes. E_1 koostuu siis kahdesta välistä $[0, \frac{1}{3}]$ ja $[\frac{2}{3}, 1]$. Vastaavasti muodostetaan joukko E_2 poistamalla joukon E_1 väleistä keskimmäiset kolmannekset. Joukko E_2 koostuu siis neljästä lukuvälistä. Näin saadaan muodostettua joukko E_k poistamalla joukon E_{k-1} lukuväleistä keskimmäiset kolmannekset. Tällöin joukossa E_k on 2^k lukuväliä joiden pituus on 3^{-k}. Cantorin joukko F saadaan muodostettua joukkojen E_k leikkauksena $F = \cap_{k=0}^{\infty} E_k$.



Kuva 3: Cantorin joukko F sekä joukot E_0 - E_5. Alkuperäinen kuva [1, Figure 0.1].

Kuvassa 3 huomataan Cantorin joukossa fraktaaleille tyypillistä itsesimilaarisuutta. Joukon vasen ja oikea puoli, F_L ja F_R, ovat kopioita koko joukosta skaalattuna vakiolla $\frac{1}{3}$.

Esimerkki 4.2. Lasketaan esimerkkinä Cantorin joukolle laatikkodimensio. Olkoon F Cantorin joukko. Huomataan, että F voidaan peittää 2^k k-tason lukuvälillä, joiden pituus on 3^{-k}. Tällöin, jos $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$, niin

$$N_\delta(F) \leq 2^k.$$

Tästä saadaan

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}}$$

$$= \limsup_{k \to \infty} \frac{k}{k-1} \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Toisaalta, jos $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$, niin kaikki δ-pituiset lukuvälit leikkaavat enintään yhtä k-tasoista lukuväliä, jonka pituus on 3^{-k}. Siis tarvitaan ainakin 2^k δ-pituista lukuväliä tarvitaan peittämään joukko F, joten

$$N_\delta(F) \geq 2^k.$$

Tästä saadaan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}}$$

$$= \limsup_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Koska $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, niin Cantorin joukolla F on laatikkodimensio $\dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Lähdeluettelo

[1] K. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, West Sussex, England, 2003.