Jatkuvuus ja funktion kulku lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Laura Lapinlampi
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisällys

Johdanto

Viime aikoina matematiikan opetuksessa on lisääntynyt huomattavasti sähköisten työkalujen käyttö. Opiskelijoilla on käytössään lukemattomia työkaluja, jotka kykenevät ratkaisemaan matematiikan laskennolliset osuudet helposti, mikä on synnyttänyt tarpeen uudentyyppisistä tehtävistä ja toisaalta myös syvällisemmästä tavasta opiskella matematiikkaa niin, että laskennollisuuden sijaan uuden opettelussa korostuukin syvällisempi ajattelu ja matemaattinen logiikka, sillä nämä ovat edelleen asioita, joita ihminen tekee itse. Tämä näkökulma onkin pyritty pitämään mielessä tämän oppimateriaalin tekemisessä.

Tämä oppimateriaali on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja-projektia, jossa tuotettiin lukion uuden opetussuunnitelman mukainen sähköinen oppikirja pitkän matematiikan MAA6 kurssille. Avoin oppikirja on opiskelijan itsenäiseen opiskeluun tarkoitettu kirja, joka jaetaan netissä avoimesti ja täysin ilmaiseksi. Vaikka oppikirja onkin tarkoitettu opiskelijan itsenäiseen opiskeluun, se sisältää myös tehtävien taustaa koskevan osion, joka on tarkoitettu opettajalle, mutta jaetaan netissä avoimesti ja on siten opiskelijankin saatavilla.

Kurssin MAA6 sisältö jaettiin työryhmässä seitsemään kokonaisuuteen, joista yhdeksi muodostui funktion jatkuvuus ja funktion kulun tutkiminen. Ennen tätä aihekokonaisuutta kirjassa on käsitelty funktion raja-arvon ja derivaatan käsitteet sekä polynomifunktion derivaatta ja ääriarvot. Tämä oppimateriaali aloitetaan funktion kulun tutkimisella, minkä jälkeen pohditaan funktion jatkuvuutta, jossa korostuu Bolzanon lauseen sisäistäminen. Lopuksi yhdistetään edellisten osa-alueiden sisältö ja määritetään suljetulla välillä määritellyn funktion ääriarvoja ja tehdään soveltavia tehtäviä.

Kirjan sisältö perustuu uuteen lukion opetussuunnitelmaan [5], jonka keskeisenä teemana tässä aihekokonaisuudessa korostuu havainnollisuus funktion kulun tutkimisessa ja funktion jatkuvuuden ymmärtämisessä. Havainnollisuus ja graafisuus muodostuikin oppimateriaalin keskeisimmäksi teemaksi ja tätä on pyritty hyödyntämään jokaisessa aihealueessa. Toisena yhteisenä teemana uuden aiheen lähestymisessä on Hashemin, Abun, Mokhartin ja Rahimin artikkelissa [3] *Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework* julkaistu opetusmetodia MGDSI (*Modified Generalization Strategies in derivatives and integrals*). Opetusmetodin hyödyntäminen näkyy tavassa, jossa ennen määritelmien ja lauseiden antamista aihetta pohditaan sopivien esimerkkien avulla, minkä jälkeen annettu määritelmä tai lause tuntuu jo tutulta. Funktion kulun tutkimisessa pyritään lisäksi säilyttämään ja vahvistamaan yhteyttä derivaatan arvon ja tangentin kulmakertoimen välillä. Tämän yhteyden ymmärtäminen on todettu haastavaksi mm. [8] Sahin, Yenmezin ja Erbasin tutkimuksessa *Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study*. Funktion jatkuvuuden ymmärtämisessä käytetään tukena intuitiivisia esimerkkejä ja arjen tilanteita, joiden on todettu auttavan jatkuvuuden ymmärtämistä Richardin artikkelissa [6] *From Intuition to Definition: Teatching Continuity in First Semester Calculus*.

Oulun yliopiston Avoin oppikirja-projektin työryhmän kesken sovittiin lisäksi muutama yhteinen ja uuden opetussuunnitelman mukainen tehtävätyyppi Swanin artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [10]. Yhteisten tehtävätyyppien valinnalla tavoiteltiin kirjan osa-alueiden välistä yhtenäisyyttä ja uuden opetussuunnitelman ja uudentyyppisten tehtävien toteutumista kirjan jokaisessa osa-alueessa. Tämän suunnitelman mukaisesti tässäkin kirjan osa-alueessa on nähtävissä tehtäviä, joissa vertaillaan eri esitystapoja tai ratkaisuja, pohditaan annettuja väitteitä ja niiden oikeellisuutta sekä analysoidaan valmista ratkaisua ja sen pätevyyttä.

1 Perusteluosa

1.1 Tavoitteet

1.1.1 Opetussuunnitelman tavoitteet

Tämän kirjan sisältö perustuu 7.11.2019 Opetushallituksen antaman lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 astuvat voimaan 1.8.2021 aloittaville lukion opiskelijoille.

Tähän kirjanosaan keskeisesti liittyvänä kurssin MAA6 (Derivaatta) tavoitteena on, että opiskelija

- *tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla*
- *omaksuu havainnollisen käsityksen funktion jatkuvuudesta*
- *hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä*
- *osaa käyttää ohjelmistoja jatkuvuuden tutkimisessa sovellusten yhteydessä.*

Tähän kirjanosaan liittyviä kurssin keskeisiä sisältöjä ovat

- *funktion jatkuvuus*
- *funktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen*

sekä jo aiemmissa kirjanosiossa tutuksi tulleet keskeiset sisällöt

- *funktion raja-arvo ja derivaatta*
- *polynomifunktioiden derivaatat.* [5]

1.1.2 Habits of Mind - tavoitteet

Toisena tavoitteena tälle kirjalle asetettiin työryhmän kanssa yhdessä sovitut tavoitteet Cuocon, Goldenbergin ja Markin artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [1]. Artikkelissa pohdittiin matematiikan opetusta ja opettamista tulevaisuuden näkökulmasta. Koska emme voi tietää, mitä ongelmia opiskelijamme kohtaavat tulevaisuudessa, meidän pitää artikkelin mukaan kyetä opettamaan opiskelijoille matemaatikoilta tutut mielen tavat ratkaista ongelmia. Sen sijaan, että antaisimme opiskelijoille muutamat ongelmanratkaisun avaimet, meidän tulisi opettaa opiskelijoille erillaisia ajatusmalleja, joiden avulla he voisivat ratkaista ongelmia tulevaisuudessa. Habits of Mind - tavoitteena on, että opiskelijat olisivat *säännönmukaisuuden etsijöitä*, *kokeilijoita*, *kuvailijoita*, *nikkareita*, *keksijöitä*, *visualisoijia*, *hypoteesin muodostajia* ja *arvaajia*. Näistä Habits of Mind tavoitteista kirjan kannalta keskeisiksi työryhmän kanssa valittiin

- Kokeilijat
  Opiskelijoiden tulisi olla kokeilijoita ja yrittää ratkaista matemaattiset ongelmat vanhojen tietojen ja hyödylliseksi koettujen strategioiden pohjalta heti ongelman kohdattuaan tai yksinkertaisesti kokeilemalla ongelman ratkaisua sopivilla luvuilla ja tutkimalla, mitä tapahtuu, kun lukuja muutetaan. Tämän lisäksi opiskelijan tulisi suhtautua myös kriittisesti kokeilujen tuloksiin ja ymmärtää, ettei kokeilun tulos todista teoriaa oikeaksi.

  Tämä tavoite näkyy tässä kirjaosassa lauseiden ja määritelmien pohjustamisena. Lauseet ja määritelmät pyritään rakentamaan esimerkkien ja yleistämisen avulla, jolloin opiskelija päätyy oikeaan lauseeseen tai määritelmään johdatellusti oman pohdinnan ja kokeilun kautta. Myös tehtävissä on mahdollista päästä eteenpäin esimerkiksi kokeilemalla funktioon sopivia arvoja GeoGebran liukutoiminnon avulla.

- Kuvailijat
  Opiskelijoiden tulisi olla kuvailijoita ja pystyä kuvailemaan ratkaisun eri vaiheita ja perustelemaan päättelynsä matemaattisella kielellä. Opiskelijan tulisi pystyä käyttämään matemaattista kieltä perustellessaan väitteen tai ratkaisun vaiheita sekä kirjallisesti että suullisesti luokkayhteisön sisällä.

  Tämä tavoite toteutuu tässä kirjaosassa pohdintatehtävien *"miksi"* ja *"miksi ei"* kysymyksinä, joiden tarkoituksena on pohjustaa ja syventää opiskelijoiden ymmärrystä käsiteltävästä aihealueesta ja kehittää opiskelijan kykyä keskustella asioista matematiikan kielellä ja perustella oma väitteensä matemaattisesti. Tätä tavoitetta niin ikään tukee varsinaiset tehtävät, joiden ratkaisut ja vastaukset tulee perustella matemaattisesti.

- Visualisoijat
  Opiskelijoiden tulisi olla visualisoijia ja kyetä kuvainnollistamaan matemaattisia sisältöjä kuvien ja taulukoiden tai kuvailujen ja oman ajatuksen sisäisen visualisoinnin tavoin.

  Tämän tavoitteen toteutuminen on nähtävissä tässä kirjaosassa kuvien muodossa. Kuvia on käytetty paljon ja niillä on pyritty havainnollistamaan ja syventämään opiskelijan ymmärrystä opiskeltavasta aiheesta. Kuvien avulla on myös havainnollistettu lauseita, joiden todistaminen muutoin vaatisi sellaisten sisältöjen hallintaa, jotka eivät lainkaan tai tässä vaiheessa kuulu opiskelijan hallitsemiin lukion oppimissisältöihin. Myös tehtävät ovat sellaisia, joissa visualisointi on osa ratkaisua ja siten ne kehittävät opiskelijan kykyä matemaattisten sisältöjen visualisoinnissa.

1.1.3 Tehtävätyypit

Oppimista tukemaan työryhmän kanssa sovittiin muutama tehtävätyyppi Swanin artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [10]. Artikkelin mukaan opetus on tehokasta, kun se esimerkiksi rakentuu vanhan tiedon päälle, ottaa huomioon mahdolliset ennakko-oletukset tai virhekäsitykset ja keskittyy oikean vastauksen sijaan ratkaisuun.

Artikkelissa julkaistiin näitä periaatteita tukemaan tehtävätyyppejä, joista kirjan kannalta keskeisiksi valittiin

- Eri esitystapojen yhdistäminen ja vertailu

  Matematiikassa asiat voidaan esittää usealla eri tavalla ja luokkahuoneessa opiskelijoille opetetaan useita eri tapoja esittää sama asia. Artikkelin mukaan näiden tapojen vertailuun ja yhdistämiseen tulisi käyttää aikaa ja opiskelijalle tarjota mahdollisuus sisäistää eri esitystavat ja niiden yhteys. Tässä tehtävätyypissä opiskelija yhdistelee kaikki mahdolliset samaa tarkoittavat esitysmuodot.

- Matemaattisten väitteiden analysoiminen

  Tässä tehtävätyypissä opiskelijalle annetaan väitteitä, jotka ovat *aina*, *joskus* tai *ei koskaan totta*. Opiskelija pääsee kehittämään omaa matemaattisen perustelun, vakuuttelun ja todistelun taitojaan.

- Matemaattisen päättelyn ja ratkaisujen analysoiminen

  Matematiikan tunnilla opiskelija voi oppia yhden tavan ratkaista tietty ongelma ja tämä ratkaisumalli jää olemaan siitäkin huolimatta, ettei se välttämättä ole tehokas eikä soveltuva muiden ongelmien ratkaisuihin. Opiskelijasta voi tuntua, että hän ei voi ratkaista ongelmaa, jos hän ei tiedä siihen liittyvää ratkaisumetodia. Koska usein ongelmat voidaan ratkaista usealla eri tavalla, ratkaisujen vertailu voi vahvistaa opiskelijan uskoa omiin kykyihinsä ja lisätä yrittämisen tahtoa silloin, kun opiskelija muuten olisi jumissa. Yksi tapa tehdä tämän tyyppisiä tehtäviä on antaa opiskelijoiden keksiä mahdollisimman monta tapaa ratkaista yksi tehtävä.

  Muita hyödyllisiä tehtävätyyppejä artikkelissa oli ratkaisujen kriittinen tarkastelu ja todistuksen järjestys. Ratkaisujen kriittisessä tarkastelussa opiskelijan tehtävänä on havaita ja korjata virheellisen ratkaisun virhekohdat. Tässä opiskelija kohtaa vaihtoehtoisia ajattelu- ja ratkaisutapoja ja toisaalta mahdollisia virhekäsityksiä. Yksi tapa tehdä tämän tyyppisiä tehtäviä on antaa opiskelijoille väärä ratkaisu ja pyytää heitä tarkastelemaan kriittisesti ja mahdollisesti korjaamaan ratkaisu yksin tai ryhmässä. Todistuksissa artikkelin mukaan opiskelijoilla voi olla vaikeuksia tuottaa perustelujen ketju. Tätä voi auttaa tehtävätyyppi, jossa jokainen todistuksen vaihe on kirjoitettu auki, mutta opiskelijan tulee laittaa ne järjestykseen.

1.2 Kulkukaavio ja ääriarvot

Sahin, Yenmezin ja Erbasin tutkimuksessa [8] havaittiin opiskelijoiden omaavan puutteellinen käsitys derivaatasta ja erityisesti tangentin kulmakertoimen, muutosnopeuden ja raja-arvon yhteydestä toisiinsa. Tutkimuksessa havaittiin, että vaikka kiitettäviä arvosanoja saavat opiskelijat osaisivatkin selittää derivaatan sekä graafisesti että raja-arvolausekkeen avulla, he eivät olleet ymmärtäneet näiden välistä yhteyttä eivätkä osanneet hyödyntää derivaattaa arkisen ongelman ratkaisussa. Tutkimuksessa suositeltiin opettajia aloittamaan ja keskittämään opetustaan arjen ongelmiin ja pitämään yllä derivaatan graafista ja algebrallista yhteyttä.

Myös Hashemin, Abun, Kashefin, Mokhtarin ja Rahimin artikkelissa [3] korostettiin graafisen ja symbolisen derivaatan yhteyden täyrkeyttä. Opiskelijoiden ongelmanratkaisun vaikeuden taustalla on graafisen ja symbolisen derivaatan esitysten yhdistäimisen vaikeus ja opettajan vähäisempi painotus graafiseen esitykseen. Artikkelissa julkistettiin uusi opetusmetodi MGSDI (*Modified Generalization Strategies in derivatives and integrals*), jossa painotetaan graafisen esityksen tärkeyttä ja yleistämistä. Yleistämisessä uuden aiheen johdatus aloitetaan yksittäisellä esimerkillä, josta lähdetään esimerkiksi kysymysten avulla johdattelemaan yleistettyä määritelmää. Yleistämisessä voidaan myös antaa useampia yksittäisiä esimerkkejä, joista opiskelijan tulee löytää yhteneväisyydet ja eroavaisuudet ja siten pohdinnan kautta lähestyä yleispätevää määritelmää.

Mahirin tutkimuksessa [4] verrattiin kahden ryhmän koetehtävien ratkaisuja ja osaamista toisiinsa. Molemmilla ryhmillä oli samaan aikaan koe, joka sisälsi kaksi derivaattaan liittyvää tehtävää. Tehtävät tuli ratkaista kuvaajien avulla. Kuvaajat olivat samat molemmilla ryhmillä. Toisella ryhmällä kuvaajien funktiot oli yhdistetty arkielämän tilanteeseen, kun taas toisella kyseessä oli vain puhdas matemaattinen funktio ja sen kuvaaja. Tutkimuksessa havaittiin, että ryhmän, jolla funktiot oli liitetty arkielämän ongelmaan, opiskelijat menestyivät paremmin derivaattaan liittyvissä kuvaajan tulkitsemisessa kuin toisen ryhmän opiskelijat. Artikkelin mukaan kuvaajien käyttö derivaatan yhteydessä on tärkeää ja Mahir suositteleekin arkielämän ongelmien hyödyntämistä derivaatan opetuksessa.

Rivera-Figueroan ja Ponce-Campuzanon artikkelissa [7] käsiteltiin funktion maksimien ja minimien opetusta niin, ettei opiskelijalle jäisi turhia väärinkäsityksiä tai väärää yleistämistä. Artikkelissa suositeltiin aiheen käsittelyä kuvien avulla ja siten, että esimerkkikuvat annettaisiin sellaisista tilanteista, joissa kriittisessä kohdassa ($f'(x) = 0$) on maksimi, minimi tai terassipiste, mutta myös tilanteesta, joissa näin ei selvästi ole. Esimerkiksi vakiofunktiossa funktion derivaatta on kaikkialla nolla, mutta varsinaista huippua tai terassipistettä funktiolla ei ole. Tällaisella funktiolla jokainen piste on suurin ja pienin arvo tai koko funktion voidaan ajatella olevan joukko terassipisteitä. Toisaalta voi olla myös funktio, jonka arvot aaltoilevat rajusti derivaatan nollakohdan ympäristössä, minkä vuoksi on hyvin vaikeaa tutkia, onko funktio kasvava vai vähenevä derivaatan nollakohdan molemmilla puolilla eikä siksi voida helposti saada ratkaisua kysymykseen, onko kyseinen kohta maksimi, minimi vai terassipiste. Useassa tilanteessa toinen derivaatta voi antaa vastauksen tähän kysymykseen, mutta se ei kuulu tämän kurssin sisältöihin. Rivera-Figuerola ym. antoivat myös tätä virhekäsitysten muodostamista estävät esimerkkimääritelmät ensimmäisen derivaatan käytölle huippukohtien tutkimisessa.

Kulkukaavio ja ääriarvot-osion pohdinta aloitetaan arjen tilanteeseen liittyvällä pohdintatehtävällä A.1, jonka tarkoituksena on lähestyä kulkukaaviota intuitiivisesti sekä syventää derivaatan arvon ja tangentin kulmakertoimen välistä yhteyttä. Pohdintatehtävässä A.2 pyritään johdattelemaan kulkukaavion käsite ja vahvistaa opiskelijan luottamusta siihen, että toden totta derivaatan merkin perusteella voidaan määritellä funktion kulkukaavio. Tässä yhteydessä huomataan, että jokaisessa derivaatan nollakohdassa ei ole huippua. Huomataan, että derivaatan nollakohdassa voi olla myös terassipiste. Esimerkkikuvan sijasta tässä yhteydessä annetaan huomautus koskien tilannetta, jossa selvää huippua tai terassipistettä ei olisikaan ja aiheesta kiinnostuneille mainitaan käsite "*toinen derivaatta*", josta on apua huippujen selvittämisessä ongelma-

tilanteissa. Pohdintatehtävän kautta ymmärretään, että jos funktiolla on huippu tai terassipiste, derivaatan arvo kyseisessä kohdassa on nolla. Pohdintatehtävien A.1 ja A.2 kautta myös lauseen A.5 sisältö on opiskelijalle jo ennalta tuttu. Lauseen sisältöön päästään siis kahden esimerkkitehtävän kautta yleistämällä. Tässä yhteydessä lauseen johdattelulla pyritään siihen, että opiskelija sisäistäisi ja ymmärtäisi lauseen sisällön paremmin, mikäli hän on itse pohdinnallaan päässyt vastaavaan tulokseen. Lauseen sisältö on muodostettu Rivera-Figueroan ym. [7] suositusten mukaisesti. Lauseen A.5 sisältö menee yli kurssin oppimäärän, mutta ylöspäin eriyttämisen vuoksi aiheesta tarkemmin kiinnostuneille opiskelijalle mainitaan, että todistukseen liittyy väliarvolause, jonka sisältöön he voivat halutessaan itse perehtyä. Pohdintaa tukemaan on laitettu kuva tukemaan asian hahmottamista. Todistuksen jälkeen edetään pohdintatehtävään A.6, missä on pyritty vahvistamaan derivaatan ja muutosnopeuden välistä yhteyttä esittämällä väittämiä, jotka ovat aina, joskus tai ei koskaan totta. Tämän tehtävän pohdinnan jälkeen myös funktion kulun tutkimisen pitäisi olla opiskelijalla hyvin hallinnassa. Alueen viimeisessä pohdintatehtävässä opiskelijan tulee miettiä funktion kasvavuutta jo hyvin tarkasti, sillä opiskelijalle annetaan todistustehtävä ja siihen liittyvät vaiheet, mutta opiskelijan tulee laittaa vaiheet oikeaan järjestykseen siten, että todistus on looginen. Tämän tehtävän toivotaan myös kaventavan kynnystä todistamiselle.
Harjoitustehtävissä 1 ja 2 opiskelija pääsee harjoittamaan ja soveltamaan uutta asiaa. Jos opiskelija ei pääse tehtävässä eteenpäin, hän voi ratkaista tai päästä eteenpäin omassa ratkaisussaan GeoGebran piirto-, ääriarvo- ja liukutoimintoja hyödyntäen, mutta tässä kirjassa painotetaan sähköisten ratkaisujen perustelun tärkeyttä.
Tehtävässä 3 opiskelija saa itsenäisesti osoittaa väitteen oikeaksi hyödyntämällä kaikkea ymmärrystään funktion kasvun ja derivaatan yhteydestä. Opiskelijalle on tässä yhteydessä hyötyä, että hän on käynyt pohdintatehtävän A8 läpi. Zulalin ym. sekä Mahirin tutkimusten [8] [4] julkaisuartikkelissa toivottiin opettajilta arjen ongelmien ratkaisuja matematiikan opetuksessa. Tätä pyritään tekemään harjoitustehtävässä 4, jossa pyritään vahvistamaan opiskelijan kykyä ratkaista todellisia arjen ongelmia ja siten syventää omaa derivaatan ymmärrystään ja hyödyntämään sähköisiä apuvälineitä käytännön ongelman ratkaisussa. Ennen tehtäväosiota on lisätieto A.8, jossa annetaan käytännön vinkkejä sähköisen ratkaisun muodostamiseen - kuvien tukemana.

1.3 Jatkuvuus ja Bolzanon lause

Richard kirjoittaa artikkelissaan [6] jatkuvuuden opettamistyylistä, jossa jatkuvuuden määritelmä johdetaan perinteisestä graafisesta esimerkistä poiketen intuitiivisin kysymyksin, joiden tarkoitus on herättää opiskelijassa käsitys jatkuvan ja epäjatkuvan funktion erosta muutoin, kuin grafiikan perusteella. Artikkelin mukaan intuitiivisesti muodostettu käsitys jatkuvuudesta voisi olla syvällisempi, kuin pelkän grafiikan kautta muodostunut käsitys jatkuvuudesta yhtenäisenä kuvaajana. Richard pitää kuitenkin tärkeänä myös perinteistä tapaa käsitellä jatkuvuutta piirtämällä yhtenäinen kuvaaja.

Kristin, Camenga, Rebekah ja Johnson lähestyvät artikkelissaan [2] jatkuvuutta graafisin menetelmin. Artikkelissa painotetaan erilaisten graafisten esitysten tärkeyttä ja sitä, että hyvällä johdattelulla saadaan syvempi intuitiivinen käsitys jatkuvuudesta ja epäjatkuvuudesta niin, että kuvaan saadaan liitettyä paremmin jatkuvuuden määritelmä.

Aihetta lähestytään pohdintatehtävässä A.9, jonka tarkoituksena on lähestyä jatkuvuuden käsitettä ensin intuitiivisesti ja tuottaa opiskelijalle käsitys siitä, että jollakin välillä jatkuva funktio saa kaikki arvot miniminsä ja maksiminsa välillä, kun taas epäjatkuva funktio ei. Pohdintatehtävän esimerkit on pyritty valitsemaan niin, että opiskelija voi selvästi havaita eron jatkuvan ja epäjatkuvan funktion välillä. Opiskelija ymmärtää, että jatkuvuus on jotain sellaista, missä yhdenkään arvon yli ei voi hypätä. Tästä jatketaan sujuvasti pohdintatehtävään A.10, missä lähestytään jatkuvuutta perinteisemmin katkeamattomien tai katkeavien kuvien avustuksella. Tehtävässä pohjustetaan jatkuvuuden määritelmää graafisten kuvien pohjalta. Aluksi jatkuvuutta pohditaan kokonaisvaltaisesti kahden kuvaryhmän (jatkuvat- ja epäjatkuvat funktiot) avulla, missä jatkuvan funktion kuvaaja havaitaan yhtenäisenä, kun taas epäjatkuvan funktion kuvaaja havaitaan sellaisena, joka katkeaa jossain kohdassa. Tässä yhteydessä opiskelijaa pyydetään pohtimaan, miten hän voisi määritellä kuvien perusteella jatkuvuuden pisteessä ja myöhemmin kaikkialla. Opiskelijaa kannustetaan käyttämään tulkinnoissaan raja-arvoa. Tästä siirrytään määrittelyjoukossa jatkuvien funktioiden kuvaajiin, minkä kautta ymmärretään jatkuvuuden olevan pisteen ominaisuus ja siten voivan olla jollain tavalla ehdollista, kuten esimerkiksi niin, että on funktio on jatkuva joukossa, kuten esimerkin määrittelyjoukossa. Pohdintatehtävän A.10 tarkoituksena on johdatella opiskelija jatkuvuuden määritelmään A.11, jotta määritelmän haltuunotto olisi syvällisempää. Määritelmän jälkeen annetaan vielä huomautus A.12, jotta opiskelija varmasti ymmärtää, että jatkuvan funktion kuvaajan tulee olla yhtenäinen niiltä osin, millä se on määritelty. Kuvien tarkoituksena on myös laajentaa jatkuvan funktion yhtenäisen kuvaajan käsitystä niin, että pelkästään kuvaajan luonne - yhtenevä tai epäyhtenevä - ei ole peruste sille, onko kyseessä jatkuvan funktion kuvaaja vai ei.

Määritelmässä A.15 käytetään termiä toispuoleinen jatkuvuus. Tämä voitaisiin perustella toispuoleisella raja-arvolla, mutta koska se ei kuulu kurssin sisältöön, määritelmän jälkeen annetaan lisätieto A.16, jossa selitetään, mitä toispuoleisella jatkuvuudella tarkoitetaan. Lisäksi tässä yhteydessä mainitaan myös toispuoleinen raja-arvo, jotta aiheesta kiinnostuneet voivat halutessaan perehtyä aiheeseen enemmänkin. Pohdintatehtävässä A.17 pohditaan arjen tilanteita jatkuvien funktioiden näkökulmasta. Tehtävässä ylitetään oppiainerajat selvästi fysiikan kohdalta, mutta joukossa on myös tilanteita fysiikkaan perehtymättömille opiskelijoille. Pohdintatehtävä voi auttaa jatkuvuuden sisäistämisessä ja toisaalta se voi tukea opiskelijan ymmärrystä siitä, että jatkuvuutta ja derivointia voi käyttää todellisien ongelmien ratkaisuun. Mahdollisten virhekäsitysten ennaltaehkäisemiseksi tehtävän jälkeen kuitenkin annetaan huomautus A.18, missä muistutetaan, että jatkuvia funktioita voidaan hyödyntää sellaistenkin ongelmien ratkaisuissa, mitkä eivät itse tuottaisi jatkuvaa funktiota.

Bolzanon lauseen A.20 todistaminen vaatisi kurssin oppimäärän ylittäviä tietoja, mutta lauseen sisältö pohditaan tässä yhteydessä kuvien avulla siten, että ymmärrys lauseen sisällöstä syventyisi.

Tehtävässä 6 opiskelija pääsee harjoittelemaan ja syventämään ymmärrystään Bolzanon lauseen teoriasta testaamalla sopivia arvoja funktioon. Tehtävä 7 on piirtotehtävä, jossa opiskelijan tulee soveltaa edellisen tunnin sisältöä huippujen derivaatasta tämän tunnin Bolzanon lauseen sisältöön. Jos opiskelija löytää välin, jonka päätepisteet ovat erimerkkiset, opiskelija voi haarukoida niiden väliin nollakohdan likiarvon ja siten hahmotella funktion kuvaajaa. Tehtävässä 8 opiskelija saa testata ymmärrystään Bolzanon lauseen sisällöstä ja etenkin lauseen ehdoista pohtimalla, onko annettu väite tosi vai epätosi.

1.4 Ääriarvot suljetulla välillä

Sahinin ym. tutkimuksessa [8] todettiin arjen ongelmien ratkaisun olevan hyvä tapa opiskella ja sisäistää derivaattan ja funktion kulun välistä yhteyttä. Myös Mahirin tutkimuksessa [4] huomattiin positiivinen yhteys sillä, että tehtävässä esiintyvä funktio sidotaan johonkin todelliseen tilanteeseen. Arjen ongelmat ovatkin keskeinen asia tämän aihealueen käsittelyssä.

Ääriarvot suljetulla välillä - osio aloitetaan pohdintatehtävällä A.23, missä opiskelija pääsee pohtimaan kolmen jatkuvan funktion suurimpia ja pienimpiä arvoja. Tämän jälkeen funktioiden määrittelyjoukko kavennetaan suljetuksi joukoksi (suljettu väli), minkä jälkeen sama pohdinta tehdään uudestaan. Opiskelijan on mahdollista havaita kolmen esimerkin avulla seuraavan lauseen sisältö. Myös tässä hyödynnetään sitä, että aihetta lähestytään esimerkkien kautta, jotka sitten yleistetään. Tämänkin lauseen sisältö menee yli lukion oppimäärän, mutta lauseen kohdat havainnollistetaan ja pohditaan kuvin. Kuvilla ja pohdinnalla pyritään siihen, että opiskelijalle jäisi intuitiivinen ymmärrys siitä, mihin lause perustuu ja miksi lause on tosi.

Pohdintatehtävässä A.26 lähestytään tähän alueeseen liittyviä soveltavia tehtäviä tehtävätyypillä, jossa kolme opiskelijaa vertaavat kokeen jälkeen tekemiään ratkaisujaan "suullisesti". Opiskelijan pitää pohtia, kenen ratkaisu on oikein. Tehtävän tarkoituksena on kannustaa opiskelijaa vaihtoehtoisiin ratkaisutapoihin siten, että tehtävässä jokainen ratkaisu on oikein. Tehtävän tarkoituksena on kuitenkin pohtia, millainen perustelu on riittävää ja tämä ei jokaisessa ratkaisussa täyty. Seuraavassakin pohdintatehtävässä opiskelijan tulee analysoida ratkaisua, mutta tällä kertaa ratkaisuja on vain yksi ja se on esitetty kokonaisuudessaan ja opiskelijan tehtävänä on tarkistaa ratkaisu ja etsiä siinä esiintyvät virheet. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija pohtii funktion kulun tutkimista vielä tarkemmin, koska kyseessä on toisen tekemä ratkaisu ja opiskelijan tehtävä on etsiä sen virheet. Tehtävässä kysytään myös perustelujen riittävyydestä, mikä on aina tärkeää pohdintaa matemaattisten ratkaisujen esittämisessä. Virheitä lukuun ottamatta tehtävässä esitetty ratkaisu toimii esimerkkinä ratkaisusta sellaisessa tapauksessa, missä on tarkoitus tutkia funktion kulkua. Vaikka ratkaisu on virheellinen, siitä on nähtävissä, miten funktion kulkuun liittyviä tehtäviä voidaan ratkaista.

Harjoitustehtävä 9 on suora kopio vanhasta ylioppilaskokeesta. Tehtävä on melko tavallinen ääriarvojen tutkimisen tehtävä, joka antaa hyvää harjoitusta opiskelijalle uuden sisällön sisäistämisessä. Seuraavat kolme tehtävää ovat soveltavia tehtäviä. Tehtävissä opiskelija pääsee haastamaan itseään todellisilla arjen ongelmilla, jonka ratkaisu vaatii hyvää derivaatan ymmärrystä ja rohkeutta matematiikan soveltamiseen käytännön tilanteessa.

Lähdeluettelo

[1] Cuoco A., Goldenberg E. P. ja Mark J. (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Journal of Mathematical Behavior, 15, 375-402.

[2] Kristin A., Camenga B., Rebekah B., Johnson Y. (2014). *Connecting the Dots: Rediscovering Continuity*. National Council of Teachers of Mathematics, 108(3), 212-217.

[3] Hashemi N., Abu M. S., Kashefi H., Mokhtar M ja Rahimi K. (2015). *Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework*. Eurasia Journal of Mathematics, 11(2), 219-230

[4] Mahir N. (2010). *Students' Interpretation of a Function Associated with a Real-Life Problem from its Graph*. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 20(5), 392-404.

[5] Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus.

[6] Richard P. (2007). *From Intuition to Definition: Teaching Continuity in First Semester Calculus*. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 16(1), 53-60.

[7] Rivera-Figueroa A. ja Ponce-Campuzano J. C. (2012). *Derivative, maxima and minima in a graphical context*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(2), 284-299.

[8] Sahin Z., Yenmez A. A ja Erbas A. K. (2015) *Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study*. Eurasia Journal of Mathematics, 11(1), 177-188.

[9] SpeedEndurance. Haettu 15.8.2020 osoitteesta https://speedendurance.com.

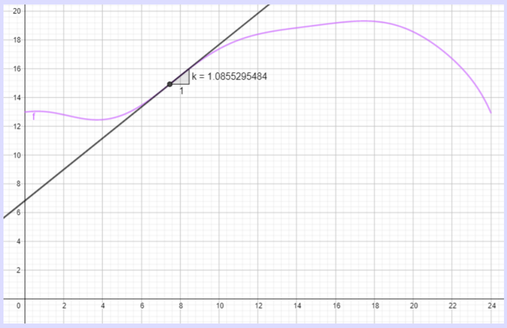
[10] Swan M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England.

[11] Ylioppilaslautakunta. Haettu 4.6.2020 osoitteesta https://examina.fi.

A Jatkuvuus ja funktion kulku

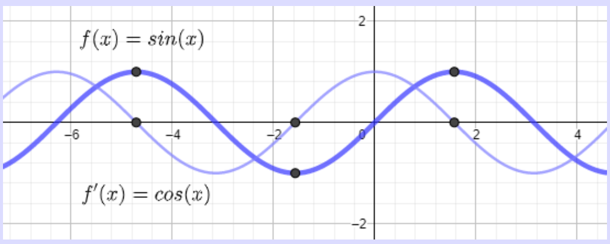
A.1 Kulkukaavio ja ääriarvot

Pohdinta A.1
Kuvan funktio kertoo erään kesäisen päivän lämpötilat ajan funktiona yhden vuorokauden ajalta. Tutki liukusäätimen avulla, millä derivaatan arvoilla lämpötila on kasvava ja millä vähenevä.



Pohdinta A.2

(a) Kuvassa on funktio $f(x) = \sin(x)$ ja sen derivaattafunktio $f'(x) = \cos(x)$. Tutki derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaajaa ja täydennä alla olevan taulukon ensimmäinen rivi derivaatan merkeillä + (positiiviset arvot) ja − (negatiiviset arvot). Tutki sitten funktion $f(x)$ kuvaajaa ja täydennä taulukon toinen rivi funktion kulkua kuvaavilla nuolilla ↗ (funktio on kasvava) ja ↘ (funktio on vähenevä).

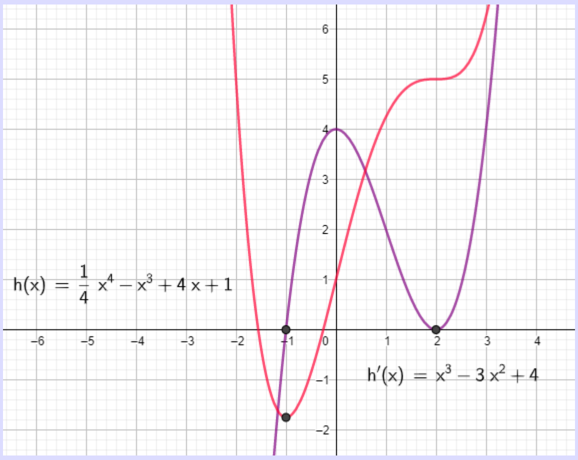


		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	
f'(x) = cos(x)							
f(x) = sin(x)							

- Mikä yhteys derivaattafunktion merkillä ja funktion kululla on?

- Mikä yhteys derivaattafunktion nollakohdilla ja funktion maksimeilla ja minimeillä on?

(b) Kuvassa on funktio $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 1$ ja sen derivaattafunktio $h'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Tutki kuvaajia ja täydennä kulkukaavio.



h'(x)			← Derivaatan merkkikaavio
h(x)			← Funktion kulkukaavio

- Miksi derivaattafunktion eräässä nollakohdassa ei ole funktion maksimia eikä minimiä?

Huomautus A.3

- *Huippu* on sellaisessa derivaatan nollakohdassa, jossa derivaatan merkki vaihtuu.
- *Terassipiste* on sellaisessa derivaatan nollakohdassa, jossa derivaatan merkki pysyy samana.
- Funktion kulkukaavion nuolet kuvaavat funktion kasvavuutta ja vähenevyyttä ja ne voidaan piirtää derivaattafunktion merkkikaavion avulla, kun kulkukaavioon on piirretty derivaatan nollakohdat.

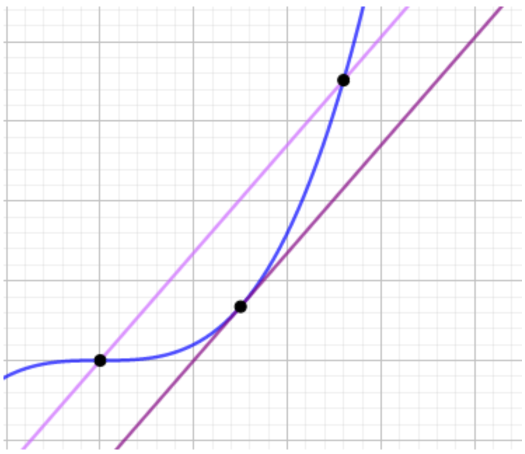
Lisätieto A.4
Joskus voi tulla vastaan tilanne, jossa derivaatan nollakohdassa ei ole selvää huippua eikä terassipistettä. Tällöin asiaa voi tutkia *toisen derivaatan* avulla, mutta se menee jo tämän kurssin sisällön ulkopuolelle eikä sellaisia funktioita käsitellä tällä kurssilla.

Lause A.5
Funktio $f(x)$ on aidosti kasvava jollakin välillä $x \in [a, b]$, kun $f'(x)$ on positiivinen tai yksittäisissä kohdissa nolla kyseisellä välillä.

Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä jollakin välillä $x \in [a, b]$, kun $f'(x)$ on negatiivinen tai yksittäisissä kohdissa nolla kyseisellä välillä.

Jos funktiolla $f(x)$ on huippu- tai terassipiste kohdassa x_0, niin $f'(x_0) = 0$.

Todistukseen tarvitaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta, johon tutustutaan myöhemmillä kursseilla.



Väliarvolause sanoo, että väliltä [a,b] löytyy sellainen piste c, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on sama, kuin välin päätepisteiden kautta kulkevan sekantin kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo kyseisessä pisteessä ja tangentin kanssa yhdensuuntaisen sekantin kulmakertoimen ja kasvavuuden välinen suhdehan on meille tuttu. Kun kulmakerroin on positiivinen, suora on aidosti kasvava ja kun se on negatiivinen, suora on aidosti vähenevä.

Pohdinta A.6
Pohdi parin kanssa funktion ja sen derivaattafunktion välistä yhteyttä. Mitkä seuraavista väitteistä pitää paikkansa *aina* (A), *joskus* (J) tai *ei koskaan* (E)?

(i) Funktio on kasvava, kun sen derivaattafunktio on positiivinen.

(ii) Jos derivaattafunktio saa arvon nolla, kohtaan piirretyn tangentin yhtälö saa arvon nolla.

(iii) Derivaatan nollakohdassa on funktion paikallinen maksimi tai minimi.

(iv) Funktio saavuttaa ääriarvonsa (maksimit ja minimit) derivaatan nollakohdissa.

(v) Funktion kasvunopeus on negatiivinen, kun derivaattafunktio on vähenevä.

(vi) Kasvunopeuden yksikkö on arvoakselin yksikkö jaettuna muuttuja-akselin yksiköllä.

(vii) Funktion huipun y-koordinaatti kohdassa x on yhtä suuri kuin derivaatan arvo kohdassa x.

(viii) Derivaatan arvo on yksikäsitteinen jokaisessa derivoituvan funktion kohdassa x.

(ix) Funktion muutosnopeus on eri jokaisessa derivoituvan funktion kohdassa x.

(x) Funktiolla on täsmälleen yhtä monta huippua kuin sen derivaattafunktiolla on nollakohtia.

Pohdinta A.7 Järjestä alla olevan todistuksen osat oikeaan järjestykseen niin, että saat osoituksen sille, että $\sin(x) \leq x$ kaikilla epänegatiivisilla muuttujan x arvoilla.

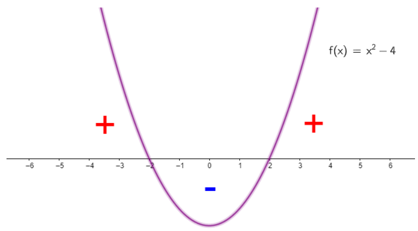
1. Funktion $g(x)$ kasvua kuvaa $g'(x) = Dx = 1$ =vakio.
2. enintään 1.
3. Koska $-1 \leq f'(x) \leq 1$, niin funktion $f(x)$ kasvunopeus on
4. Koska$f(0) = g(0) = 0$ ja
5. Molemmat funktiot f ja g ovat jatkuvia ja derivoituvia aina, kun $x \in \mathbb{R}$.
6. aina 1.
7. Olkoon $f(x) = \sin(x)$ ja $g(x) = x$.
8. kasvaa aina vähintään yhtä nopeasti kuin
9. Funktion $f(x)$ kasvua kuvaa $f'(x) = D(f(x)) = D\sin(x) = \cos(x)$.
10. funktio $g(x)$
11. funktio $f(x)$,
12. niin $f(x) \leq g(x)$ aina, kun $x \geq 0$.
13. Funktion $g(x)$ kasvunopeus on

Lisätieto A.8
Vihjeitä kulkukaavion rakentamiseen:

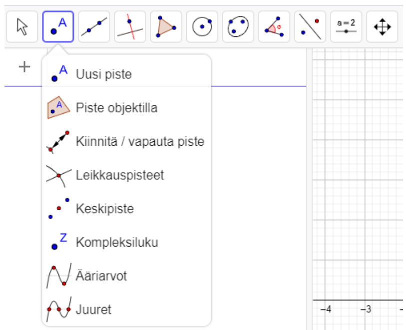
- Kulkukaavio voidaan tehdä abitissa esimerkiksi *array* toiminnolla. Taulukkoon saa lisää sarakkeita ja rivejä *tab*- ja *enter*- näppäimillä.

		-2		2	
$f'(x) = x^2 - 4$	$+$		$-$		$+$
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- Derivaatan merkit voidaan määrittää nollakohtien ratkaisemisen jälkeen joko graafisesti tai sijoittamalla derivaattafunktioon sopivia arvoja.
  $f'(-3) = 5$
  $f'(0) = -4$
  $f'(3) = 5$



- Funktion kulkua voidaan tutkia helposti myös sähköisiä apuvälineitä käyttäen. Funktion huiput ja nollakohdat voidaan määrittää helposti GeoGebralla *ääriarvot* ja *juuret* toimintoja käyttäen. Muista aina perustella ratkaisusi.



1. Tutki, milloin funktio $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}$ on vähenevä.

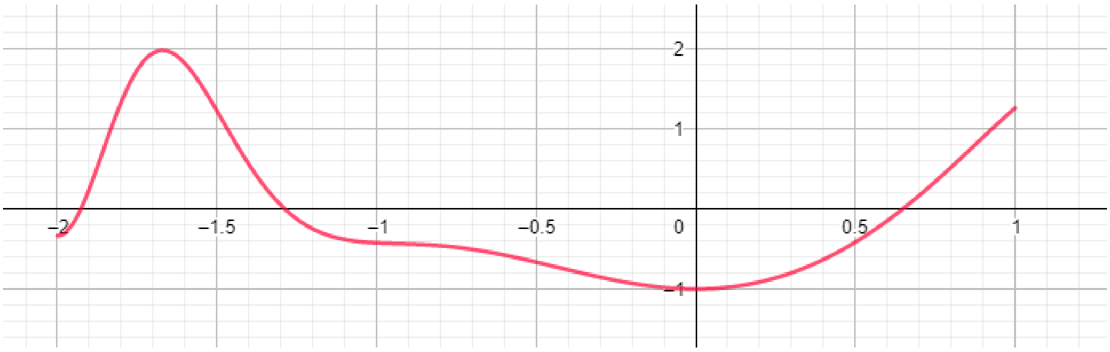
2. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \frac{4}{3}ax^3 + 4ax^2 + 2x + 9a^2$ on kasvava?

3. Olkoon f derivoituva funktio ja olkoon $f'(x) \geq 2$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Osoita, että jos $f(-1) = 0$, niin $f(4) \geq 10$.

4. Taulukossa on esitetty vuoden 2008 Pekingin olympialaisten 100m kultamitalistin Usain Boltin väliaikatiedot kymmenen metrin välein. Sovita aineistoon viidennen asteen polynomifunktio ja tutki, milloin Usain Boltin juoksunopeus oli kiihtyvää. Huomaa, että nopeus on matkan aikaderivaatta.

Matka (m)	Aika (s)	Lähde: http://speedendurance.com
10	1.85	
20	2.87	
30	3.78	
40	4.65	
50	5.5	
60	6.32	
70	7.14	
80	7.96	
90	8.79	
100	9.69	

5. Olkoon $f(x)$ suljetulla välillä $[-2, 1]$ määritelty funktio, jonka derivaattafunktion kuvaaja on esitetty alla. Vastaa kuvan avulla alla oleviin kysymyksiin.



(a) Milloin funktio $f(x)$ on kasvava?

(b) Missä kohdissa funktiota sivuava tangentti on x-akselin suuntainen?

(c) Missä kohdassa funktion kasvu on kaikista voimakkainta?

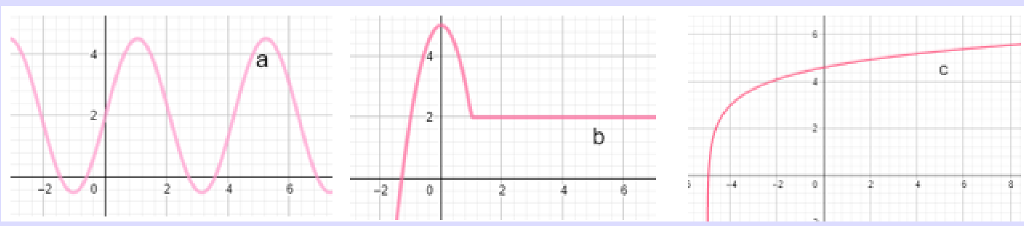
A.2 Jatkuvuus ja Bolzano

Pohdinta A.9

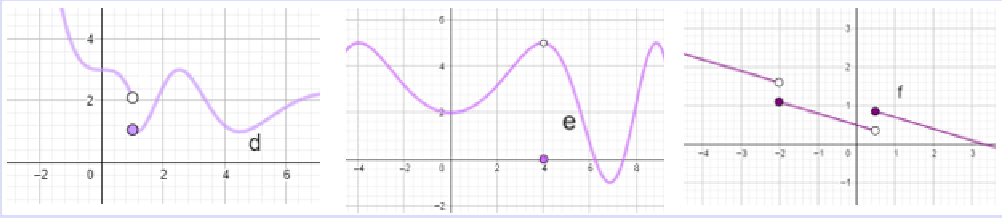
- Lasten uima-allas täytetään valuttamalla siihen vettä hanasta. Alussa uima-allas on tyhjä ja lopussa siinä on 150 litraa vettä. Oliko uima-altaassa jossakin täytön vaiheessa tarkalleen 72 litraa vettä? Miksi tai miksi ei?
- Opiskelijat keräsivät rahaa lasten hyväntekeväisyyteen yhden päivän ajan. Eräässä lippaassa oli päivän päätteeksi 372,30 euroa. Oliko lippaassa jossakin vaiheessa tarkalleen 200 euroa rahaa? Miksi tai miksi ei?

Pohdinta A.10

(a) Tutki alla olevia funktioita ja pohdi seuraavia kysymyksiä raja-arvon kautta. Jatkuvia funktioita

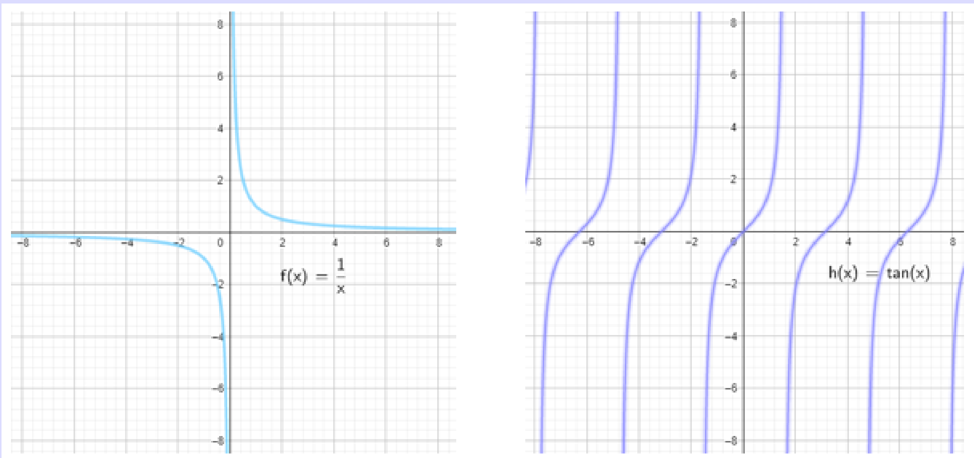


Epäjatkuvia funktioita



- Mitä voit sanoa jatkuvien funktioiden kuvaajista?
- Miten määrittelisit jatkuvuuden yhdessä pisteessä näiden kuvien perusteella?
- Miten määrittelisit funktion jatkuvuuden kaikkialla näiden kuvien perusteella? Pohdi tämä parin kanssa tai kirjoita ylös.

(b) Jokaisella yllä olevalla jatkuvalla funktiolla oli yhtenäinen kuvaaja, joka pystytään piirtämään nostamatta kynää paperista. Tutki vielä alla olevia kuvia ja mieti, miten voisit jatkaa intuitiivista jatkuvuuden määritelmää niin, että myös alla olevat kuvaajat olisivat jatkuvia - edes jotenkin.

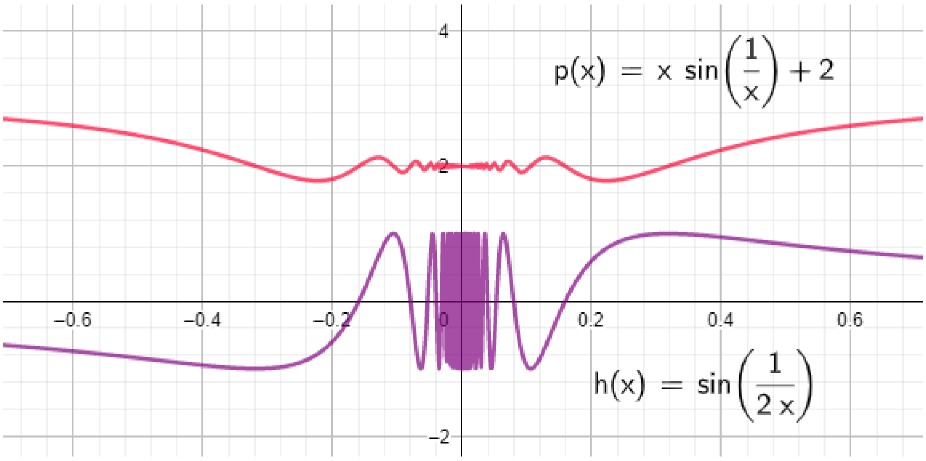


Määritelmä A.11
Funktio $f(x)$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Funktio on *jatkuva*, jos se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.
- Funktio on *jatkuva joukossa* S, jos se on jatkuva jokaisessa kohdassa $x \in S$.

Huomautus A.12
Jatkuvan funktion kuvaaja on *yhtenäinen* silloin, kun sen määrittelyjoukko on yhtenäinen. Jos funktion määrittelyjoukko ei ole yhtenäinen, funktion kuvaajakaan ei välttämättä ole yhtenäinen kohdassa, missä funktio ei ole määritelty. Alla on esitetty kaksi funktiota, jotka ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan, mutta molempien funktioiden kuvaajassa on "hyppy"määrittelyjoukon ulkopuolella.



- Kohdassa $x = 0$ funktiolla $p(x)$ on raja-arvo, mutta ei arvoa, sillä funktiota ei ole määritelty kyseisessä kohdassa. Muualla funktio on selvästi jatkuva.
- Kohdassa $x = 0$ funktiolla $h(x)$ ei ole raja-arvoa eikä arvoa, mutta funktio on silti jatkuva määrittelyjoukossaan.

Lause A.13
Olkoon funktiot f ja g jatkuvia kohdassa x_0. Tällöin myös funktioiden f ja g

- *vakiolla kerrottu funktio* kf
- *summa* $f + g$
- *tulo* fg
- *itseisarvo* $|f|$

ovat jatkuvia kohdassa x_0. Myös funktioiden f ja g

- *osamäärä* $\frac{f}{g}$

on jatkuva kohdassa x_0, jos $g(x_0) \neq 0$.

Lauseen todistus tulee suoraan raja-arvon laskusäännöistä. Pohditaan tätä kuvien avulla.

Olkoon funktiot f ja g jatkuvia kohdassa x_0 eli olkoot

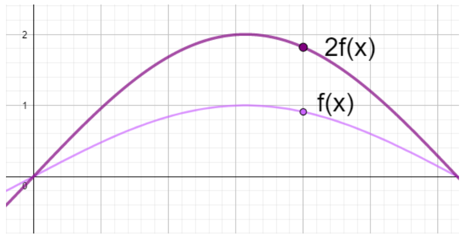
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ja

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

- *Vakiolla kerrottu funktio*

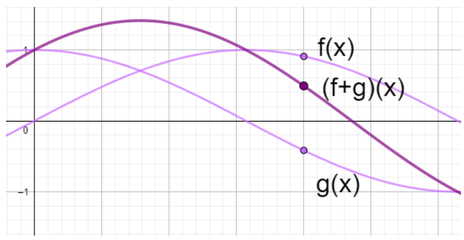
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(kf(x)) &= k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)\\ &= kf(x_0)\end{aligned}$$



Raja-arvon laskusääntöjen perusteella jatkuvan funktio on jatkuva, vaikka se kerrottaisiin jollakin reaaliluvulla k.

- *Funktioiden summa*

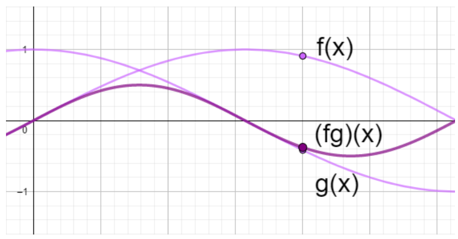
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\\ &= f(x_0)+g(x_0)\\ &= (f+g)(x_0)\end{aligned}$$



Funktioiden f ja g summan raja-arvo kohdassa x_0 on yhtäsuuri kuin summafunktion arvo kohdassa x_0 eli myös funktioiden summa on myös jatkuva kohdassa x_0.

- *Funktioiden tulo*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot(g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\\ &= f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= (fg)(x_0)\end{aligned}$$

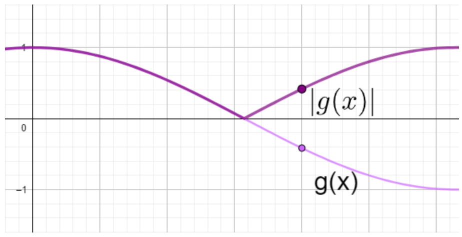


Funktioiden f ja g tulon raja-arvo kohdassa x_0 on yhtäsuuri kuin tulon arvo kohdassa x_0 eli myös funktioiden tulo on jatkuva kohdassa x_0.

- *Funktion itseisarvo*

$$\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} g(x)\right|$$
$$= |g(x_0)|$$

Jatkuvan funktion g itseisarvofunktion raja-arvo kohdassa x_0 on yhtäsuuri kuin itseisarvofunktion arvo kohdassa x_0 eli myös funktion itseisarvofunktio on jatkuva kohdassa x_0.

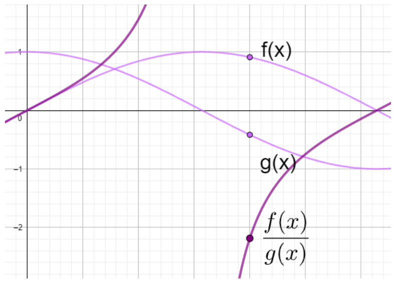


Onko esimerkkifunktion g itseisarvofunktio derivoituva?

- *Funktioiden osamäärä*
  Olkoon $g(x_0) \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$
$$= \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Kahden funktion osamäärän raja-arvo ja arvo ovat yhtäsuuret, jolloin osamääräfunktio on myös jatkuva kohdassa x_0, jos osamääräfunktio on määritelty kohdassa x_0.



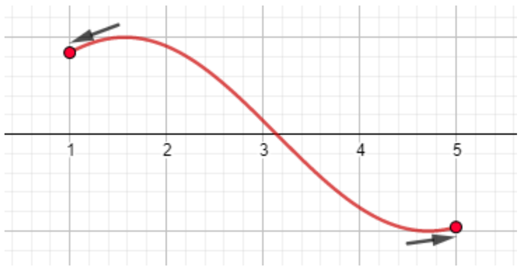
Entä, jos nimittäjä olisi nolla kohdassa x_0?

Huomautus A.14
Määrittelyjoukossaan jatkuvat funktiot:

- Polynomifunktio
- Rationaalifunktio
- Trigonometriset funktiot
- Juurifunktio
- Eksponenttifunktio
- Logaritmifunktio

Määritelmä A.15
Funktio on *jatkuva välillä* $[a, b]$, jos se on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja jos se on toispuoleisesti jatkuva välin $[a, b]$ päätepisteissä.

Lisätieto A.16 *Toispuoleinen jatkuvuus* välin päätepisteissä tarkoittaa sitä, että funktio lähestyy välin päätepisteiden arvoja kyseisen välin sisäpuolelta ja funktio myös saavuttaa nämä arvot välin päätepisteissä. Tähän liittyy matemaattinen käsite *toispuoleinen raja-arvo*, mutta se ei kuulu tämän kurssin sisältöön.



Pohdinta A.17
Pohdi alla olevia arjen asioita. Mitä näistä voisi AINA/JOSKUS kuvata jatkuvana ajan funktiona? Onko tällöin muodostuva funktio kaikkialla vai toispuoleisesti jatkuva?

- Ihmisen pituus, pankkitilin saldo, lämpötila, nopeus, COVID-19-tartuntojen lukumäärä, auringon säteen tulokulma, huoneilman Radon-säteilyn määrä ja sydämen pumppaaman veren määrä *ajan funktiona*.
- Säteilyn intensiteetti, polttoaineen kulutus, magneettikentän voimakkuus, pallon tilavuus ja painovoima *pituuden (matka, etäisyys, säde...) funktiona*.
- Keksitkö itse lisää arjen jatkuvia funktioita?

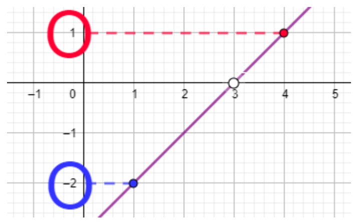
Huomautus A.18
Vaikka tutkittava suure ei itsessään käyttäytyisi jatkuvan funktion määritelmän mukaisesti, aineiston käsittelyssä voidaan hyödyntää jatkuvia funktioita sovittamalla käytettävissä olevaan aineistoon sopiva jatkuva funktio.

Huomautus A.19
Jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto derivoituvuudelle ja siten funktion kulun tutkimiselle. Derivoituva funktio on jatkuva, mutta jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva.

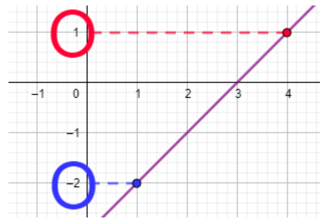
Lause A.20 Bolzanon lause
Funktiolla, joka on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ on vähintään yksi nollakohta avoimella välillä $]a, b[$, jos se saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot.

Pohditaan tämä funktion jatkuvuuden kautta.

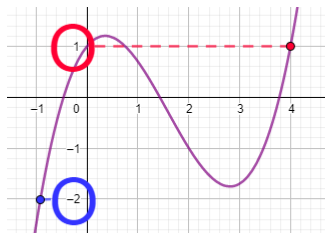
- Jatkuvuus on tässä yhteydessä oleellinen asia. Jos funktio ei olisi jatkuva, funktiolla voisi olla epäjatkuvuuskohta juuri siinä kohdalla, missä funktio muutoin leikkaisi vaaka-akselin. Koska epäjatkuvan funktion kuvaaja ei ole yhtenäinen, on mahdollista, että kuvaaja "hyppää"vaaka-akselin yli.



- Jos funktio on suljetulla välillä jatkuva, niin sen kuvaaja on yhtenäinen kyseisellä välillä eli kuvaaja pystytään piirtämään nostamatta kynää paperista. Jos funktio saa arvoja sekä vaaka-akselin ylä- että alapuolelta, funktion täytyy myös leikata vaaka-akseli jossain kohdassa.



- Kuviin on merkitty funktioiden arvot kohdissa $x = -1$ ja $x = 4$. Koska funktiot ovat jatkuvia ainakin välillä $x \in [-1, 4]$, niin tiedämme, että funktiot saavat myös kaikki arvot väliltä $x \in [f(-1), f(4)]$. Koska välin päätepisteiden arvot ovat erinmerkkiset, funktiolla täytyy olla vähintään yksi nollakohta kyseisellä välillä.



Huomautus A.21

Huomaa, että

- Bolzanon lause ei ota kantaa siihen, kuinka monta nollakohtaa on.
- Bolzanon lause ei ota kantaa nollakohtien lukumäärään siinä tapauksessa, että välin päätepisteiden arvot ovat saman merkkiset.

Pohdinta A.22 Olkoon $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ja olkoon $f'(x) = \cos(2x) - \sin(\frac{x}{2})$. Alla olevassa ratkaisussa on selvitetty, missä kohdassa funktion $f(x)$ kuvaajassa voi olla huippu tai terassipiste. Mihin teoriaosioihin ratkaisukohdat perustuvat? Täydennä ratkaisua tarvittaessa esimerkiksi viittauksin.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 1 \\
f'(0,5) &\approx 0,29 \\
f'(0,6) &\approx 0,07 \\
f'(0,62) &\approx 0,02 \\
f'(0,628) &\approx 0,0008
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f'(\frac{\pi}{2}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\
f'(1) &\approx -0,90 \\
f'(0,8) &\approx -0,42 \\
f'(0,7) &\approx -0,17 \\
f'(0,63) &\approx -0,004 \\
f'(0,629) &\approx -0,0016
\end{aligned}
$$

Vastaus: Mahdollisen huippu- tai terassipiste sijaitsee kahden desimaalin tarkkuuteen pyöristettynä kohdassa $x \approx 0,63$.

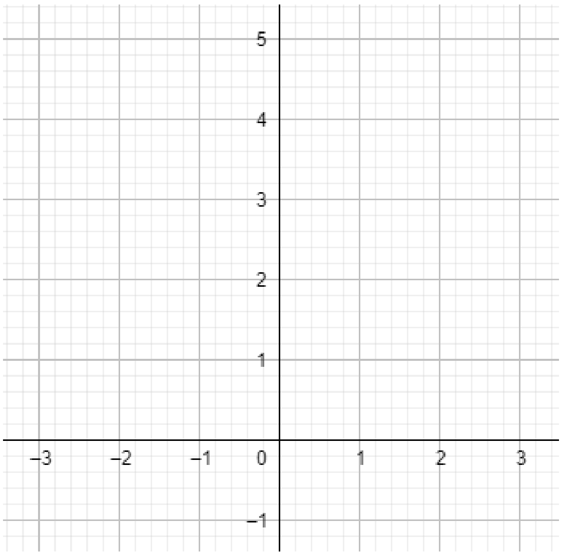
- Pystytäänkö tehtävänannon ja ratkaisun perusteella perustelemaan, onko kyseisessä kohdassa huippua tai terassipistettä?
- Entä voidaanko sanoa, milloin funktio $f(x)$ on aidosti kasvava ja aidosti vähenevä kyseisellä välillä?

6. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6$$

on vähintään yksi nollakohta välillä [-2,2].

7. Tutki funktiota $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$ ja hahmottele sen kuvaaja huippujen ja juurten likiarvojen avulla.

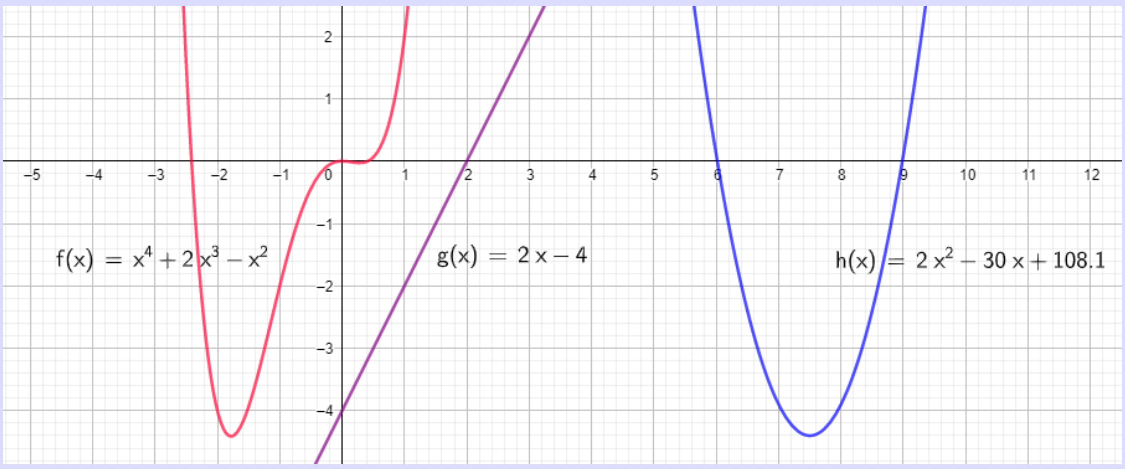


8. Lue seuraava väite koskien tuntematonta funktiota $f(x)$. Perustele, onko väite oikein vai väärin.

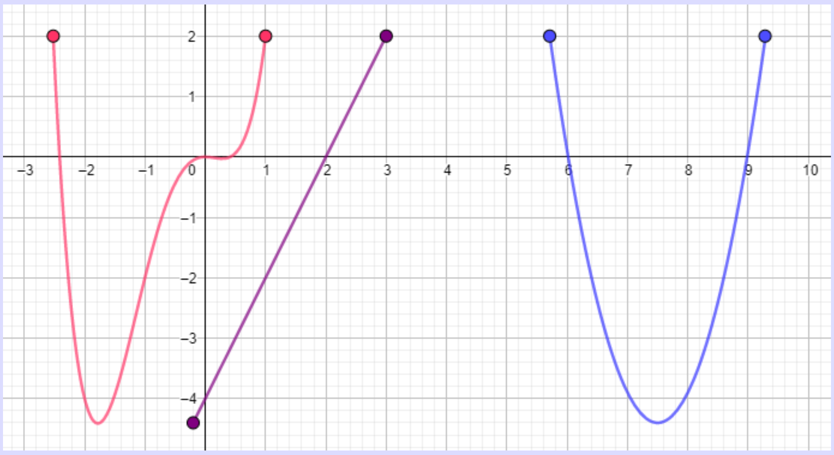
"Koska tiedämme funktiosta $f(x)$, että $f(-20) = -74$, $f(-5) = 20$ ja $f(0) = -74$, niin tiedämme, että funktiolla on 2 nollakohtaa."

A.3 Ääriarvot suljetulla välillä

Pohdinta A.23
Tutki alla olevia kuvia ja niissä esiintyviä funktioita.



- Saavuttavatko funktiot suurimman ja pienimmän arvonsa jossain kohdassa $x \in \mathbb{R}$?
- Entä, jos funktioiden määrittelyjoukkoa kavennetaan joksikin suljetuksi väliksi $[a, b]$?

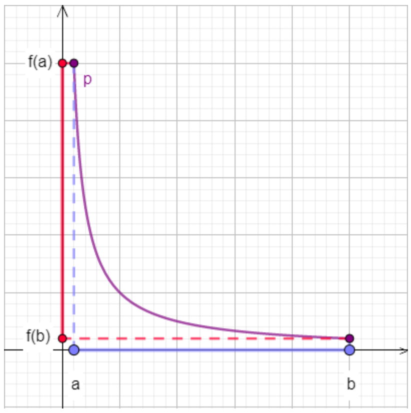


Lause A.24
Suljetulla välillä $x \in [a, b]$ jatkuvan ja avoimella välillä $x \in]a, b[$ derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä on joko välin päätepisteissä tai väliin kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

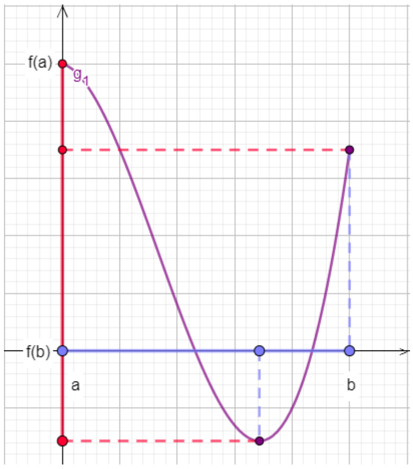
Lauseen todistus ei kuulu tämän kurssin sisältöön, mutta pohditaan lauseen sisältöä kuvien avulla.

- Jos funktion määritelyalue tai tutkittava väli on suljettu ja funktio on kyseisellä välillä jatkuva, funktiolla on olemassa suurin ja pienin arvo kyseisellä välillä. Koska funktio on jatkuva, funktion kuvaaja on kokonaan yhtenäinen tällä välillä. Se tarkoittaa sitä, että funktio ei voi missään välin kohdassa saada kuvaajasta irrallista arvoa eli funktion kuvaajassa ei ole hyppyjä tällä välillä. Intuitiivisesti voidaan ajatella niin, että jos funktio on jatkuva jollakin välillä, sen kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista ja tällöinhän täytyy olla olemassa sellainen kohta, jonka "yläpuolella" kuvaaja ei käy. Tämä kohta on funktion suurin arvo. Toisaalta täytyy olla olemassa myös kohta, jonka "alapuolella" kuvaaja ei käy eli intuitiivisesti ajateltuna välillä tai sen päätepisteissä on olemassa suurin- ja pienin arvo.

- Suljettu väli $[a, b]$ on tässä tapauksessa oleellinen. Oikealla on kuva funktiosta $f(x) = 1/x$. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla on suurin ja pienin arvo, mutta tiedämme, että jos tutkisimme funktiota esimerkiksi avoimella välillä $]0, 5[$, suurinta tai pienintä arvo ei olisi. Suurinta arvoa funktiolla ei olisi, koska funktio saisi äärettömän suuria arvoja. Toisaalta pienintäkään arvoa funktiolla ei olisi, koska se lähestyisi arvoa $f(x) = \frac{1}{5}$ sitä koskaan saavuttamatta.



- Suurin ja pienin arvo tutkittavalla välillä selviää kätevästi derivaatan nollakohtien avulla, sillä jokaisessa funktion huipussa derivaatan arvo on nolla. Välin päätepisteisiin emme kuitenkaan voi piirtää funktion kasvua kuvaavaa tangenttia, sillä mikä tahansa päätepisteen kautta kulkeva suora sivuaa funktiota vain tässä yhdessä pisteessä. Voit kokeilla tätä itse esimerkiksi kynän avulla niin, että koetat asettaa kynän välin päätepistettä sivuavaksi tangentiksi. Huomaat, että se on mahdotonta. Tästä syystä derivaatta ei anna tietoja välin päätepisteistä ja siksi nämä kohdat on tutkittava aina erikseen laskemalla funktion arvo tutkittavan välin päätepisteissä.



Huomautus A.25

- *Paikallinen ääriarvo* tarkoittaa funktion arvoja, jotka ovat suurempia (*maksimi*) tai pienempiä (*minimi*), kuin muut lähialueen arvot. Toisin sanoen paikallinen ääriarvo tarkoittaa kaikkia funktion huippuja ja niitä voi olla yksi tai usempi.
- *Globaali ääriarvo* tarkoittaa suurinta tai pienintä arvoa, jonka funktio voi saada koko määrittelyjoukossaan.
- Funktio ei välttämättä saavuta suurinta tai pienintä arvoa koko määrittelyjoukossaan, mutta määrittelyjoukon tai tutkittavan alueen ollessa suljettu väli, jossa funktio on jatkuva, *suurin arvo* ja *pienin arvo* ovat aina olemassa.

Pohdinta A.26

Opiskelijat saivat yllätystentissä tehtäväkseen määrittää, mikä on nelikulmion, jonka piiri on 70cm, suurin mahdollinen pinta-ala. Jokainen sai oikean vastauksen, mutta he olivat ratkaisseet tehtävän eri tavoilla. Mitkä ratkaisuista ovat oikein?

- Anni: *Muodostin pinta-alaa kuvaavan funktion* $A(x) = x \cdot \frac{70-2x}{2}$. *Siitä tuli toisen asteen funktio ja muistin, että sehän on symmetrinen funktio. Niin se huippu eli suurin arvo on siinä nollakohtien puolessa välissä. Niin ensin ratkaisin ne nollakohdat ja lopuksi sen funktion arvon siinä nollakohtien puolessa välissä.*
- Bertta: *Minä myös määrittelin ensin tuon funktion, mutta sain siitä, että* $A(y) = -y^2 + 35y$ *ja sen määrittelyehdot, sillä pituushan ei voi olla negatiivinen. Derivoin sitten sen funktion ja tein kulkukaavion ja katsoin, että se huippu on siinä derivaatan nollakohdassa. Laskin sen pinta-alan sitten ihan vaan, että kanta kertaa korkeus.*
- Cassy: *Minä määritin suttupaperille sen funktion ja näpyttelin sen GeoGebraan ja ratkaisin sen huipun ääriarvot-toiminnolla. Otin siitä kuvaajasta kuvakaappauksen ja sitten vielä laskin sillä laskimella sen pinta-alan ja kirjoitin vastaukseksi sen pinta-alan, minkä se laskin antoi.*

Pohdinta A.27 Krisse sai tehtäväkseen ratkaista, mikä on funktion

$$f(x) = \tfrac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 2x^2$$

pienin arvo välillä $[-5, 5]$. Alla on esitetty Krissen ratkaisu.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\
f'(x) &= 12x^3 + 6x^2 - 4x \\
&= x(12x^2 + 6x - 4) \\
f'(x) &= 0, kun \\
12x^2 + 6x - 4 &= 0, kun \\
x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-4)}}{2 \cdot 12} \\
x &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 192}}{24} \\
&= \frac{-6 \pm 15}{24}
\end{aligned}$$

x=0,4 tai x=-0,9

		$-0{,}9$		0		$0{,}4$	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$12x^2+6x-4$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Vastaus: Funktion $f(x)$ pienin arvo on kohdassa $x = 0,4$.

- Tarkista Krissen ratkaisu.
- Mitä virheitä löysit?
- Miten Krisse olisi voinut perustella ratkaisunsa vielä paremmin?

Huomautus A.28

Tutkittaessa funktion kulkua ja ääriarvoja suljetulla välillä, kulkukaavioon tulee merkitä derivaatan nollakohtien lisäksi välin päätepisteet.

9. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 2\pi$. [K2018]

10. Tehtävänäsi on valmistaa tilavuudeltaan mahdollisimman suuri laatikko suorakulmion muotoisesta levystä, jonka mitat ovat 1 m ja 2 m. Valmistat laatikon leikkaamalla jokaisesta nurkasta pois neliön muotoiset palaset, minkä jälkeen taittelet levyn laatikon muotoiseksi. Mikä on leikatun palasen optimaalinen sivun pituus, jotta laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?

11. Santtu Viima suunnittelee uransa suurinta konserttia Olympiastadionille Helsinkiin. Stadionin kapasiteetti on 39784 ja työryhmä on arvioinut, että stadioni myydään loppuun, jos lipun hinta on 30 euroa, jolloin nopeimmat vievät parhaimmat paikat.Työryhmä on niin ikään arvioinut, että jokainen lipun hintaa nostava euro vähentää myytyjen lippujen määrää sadallaviidelläkymmenellä.
Olympiastadion on saatava täyteen ja Artisti Viima on päättänyt antaa ensimmäiset 5000 myymättä jäänyttä lippua hyväntekeväisyytenä vähävaraisille. Loput myymättä jääneet liput myydään ovelta kolme tuntia ennen konsertin alkua.

Muodosta konsertin lipputuloja kuvaava funktio ja ratkaise, mikä on konsertin (i) optimaalinen lipun hinta, (ii) ilmaislippujen ja ovelta myytyjen lippujen määrä sekä (iii) tuotto, kun konsertin kulut ovat arviolta 270 000 euroa ja mahdolliset ovelta myydyt liput maksavat kaksi kertaa ennakkolippujen hinnan verran, jos

(a) ovelle ei jätetä myytäväksi yhtään lippua

(b) ennakkoon myytävien lippujen määrä on oltava vähintään 80 prosenttia stadionin kapasiteetista.

12. Pesäpalloa harrastava astronautti suunnitteli tekevänsä historian ensimmäisen pesäpallolyönnin Kuun pinnalla ja vieläpä niin, että hän itse toimii sekä syöttäjänä että lyöjänä. Hän sai määritellyksi funktion $f(t)$, joka kertoo ylöspäin heitetyn pallon etäisyyden Kuun pinnalta ajan funktiona heittämisen ($t = 0$) jälkeen. Alla olevassa kuvassa on tämän funktion derivaattafunktio $f'(t)$.

(a) Ehtiikö astronautti siirtyä lyöntiasentoon ennen kuin pallo on tippunut lyöntikorkeudelle? Perustele.

(b) Mikä on pallon nopeus 4 sekunnin kuluttua sen heittämisestä?

(c) Mikä on Kuun vetovoiman kiihtyvyys?
Vinkki: Nopeus on paikan aikaderivaatta ja kiihtyvyys on nopeuden aikaderivaatta.

B Opettajan opas

B.1 Tuntisuunnitelma

1. Kulkukaavio ja ääriarvot (75min)
2. Jatkuuvuus ja Bolzanon lause (75min)
3. Ääriarvot suljetulla välillä (75min)

B.2 Eriyttäminen

Tässä kirjassa eriyttäminen on jätetty opettajan tehtäväksi. Motivoitunut opiskelija voi myös itse eriyttää itseään ylöspäin ottamalla selvää lauseiden tai huomautusten yhteydessä mainituista matemaattisista käsitteistä. Alaspäin eriyttämistä voi tehdä esimerkiksi

- esittämällä opiskelijalle johdattelevia kysymyksiä
- antamalla opiskelijalle valmiit derivaatan kuvaajat, joissa on valmiina + ja − merkinnät tai muut positiivisia ja negatiivisia arvoja kuvaavat merkinnät (esim. värit)
- antamalla opiskelijalle valmiita kulkukaaviopohjia, joihin opiskelijan on helppo täydentää tarvittavat tiedot ja joka siten vie eteenpäin tehtävässä.
- hahmottelemalla opiskelijalle soveltavien tehtävien tilanteita kuvaavat kuvat tai taulukot, joiden avulla tarvittavan funktion määrittely on helpompaa.
- antamalla opiskelijalle valmiit funktiot soveltavien tehtävien kohdalla.

B.3 Pohdintatehtävät

A.1
Pohdintatehtävässä halutaan lähestyä funktion kulun tutkimista sellaisella tiedolla, mikä opiskelijalla on: funktion derivaatta on positiivinen, kun funktio on kasvava - ja toisinpäin.

A.2
Pohdintatehtävässä halutaan luoda yhteys derivaattafunktion kulun ja itse funktion kulun välille. Koska kulkukaavio annetaan tehtävässä valmiina, varsinaista mallia siitä ei enää tarvitse esittää. Tehtävän b-osion tarkoituksena on huomata, ettei derivaatan nollakohta automaattisesti tarkoita sitä, että kohdassa olisi funktion paikallinen ääriarvo.
Lisäkysymykset:

- Kumpi kuvaajista on toisen derivaattafunktio?
- Milloin derivaattafunktio leikkaa x-akselin eli mitkä ovat funktion nollakohdat?
- Milloin derivaattafunktio on positiivinen/negatiivinen?
- Mitä funktion kasvulle tapahtuu derivaatan nollakohdassa?

Vastaukset:

- Derivaatan ollessa negatiivinen, funktio on vähenevä ja derivaatan ollessa positiivinen, funktio on kasvava.
- Funktion maksimien ja minimien kohdalla derivaatta on nolla.
- Funktion kasvu pysähtyy hetkellisesti, mutta funktio jatkaa kasvuaan myös sen jälkeen.

A.6
Pohdintatehtävän tarkoituksena on pohtia derivaatan merkin ja funktion kulun yhteyttä syvällisemmin, jotta opiskelija erottaa satunnaiset tilanteet yleispätevistä.
Vastaukset:

(i) A

(ii) J

(iii) J

(iv) A

(v) J

(vi) A

(vii) J

(viii) J

(ix) J

A.7
Pohdintatehtävän tarkoituksena on laittaa opiskelija miettimään, mitä funktion kasvu tarkoittaa ja miten se liittyy derivaattaan. Tehtävässä opiskelija saa järjestää todistuksen vaiheet siten, että lopputulema on looginen. Tämän tehtävän ratkaiseminen vaatii opiskelijalta jo hyvää ymmärrystä derivaatasta, mutta toisaalta se, että vaiheet on kirjoitettu valmiiksi voi kaventaa kynnystä asioiden oikeaksi todistamiselle. Myöhemmin tehtävissä tarvitaan jo todistamisen taitoa.
Lisäkysymykset:

- Useassa kohdassa puhutaan funktioista f ja g. Mitä ne ovat?
- Mitä teorian osa-aluetta todistuksessa mahdollisesti käytetään?
- Mikä on funktioiden arvo kohdassa $x = 0$? Mikä kertoo funktion kasvusta siitä eteenpäin?
- Miten voisimme olla varmoja, että toisen funktion kuvaaja on aina toisen kuvaajan yläpuolella tai korkeintaan samassa kohdassa?

Vastaus: 7, 5, 9, 1, 3, 2, 13, 6, 4, 10, 8, 11 ja 12.

A.9
Pohdintatehtävässä halutaan luoda sellainen kuva jatkuvuudesta, joka ei nojaa funktion graafiseen esitystapaan vaan käytännön läheiseen esimerkkiin, josta voi ymmärtää jatkuvan ja epäjatkuvan funktion eron.
Vastaukset:

- Kyllä, veden valuminen on jatkuvaa, eikä sen lisäystä voi tehdä yksiköittäin.
- Ei välttämättä. Esimerkiksi 190 euron jälkeen joku saattoi lahjoittaa 20 euroa.

A.10
Tässä pohdintatehtävässä halutaan lähestyä jatkuvuutta jo tuttuun tapaan graafisesti. Kuvien tarkoituksena on antaa opiskelijalle käsitys siitä, että jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen, mutta epäjatkuvan ei ole. Opiskelijan halutaan sisäistävän jatkuvuus pisteen ominaisuutena, mutta myös jatkuvan funktion käsite. Tehtävässä tavoitteena on, että opiskelija osaa yhdistää jatkuvuuteen raja-arvon sekä arvon tutkittavassa pisteessä. Kuvien avulla opiskelijan toivotaan tulevan johtopäätökseen, jossa funktio voi olla jatkuva ehdollisesti eli esimerkiksi aina silloin, kun funktio on määritelty.
Lisäkysymykset:

- Tutki kuvaajia a ja d kohdassa $x = 1$. Onko molemmilla funktioilla arvo ja raja-arvo olemassa kyseisessä kohdassa?
- Huomaatko mitään yhtäläisyyttä kuvaajien epäjatkuvuuskohdissa ja funktion määrittelyjoukossa?

Vastaukset:

- Jatkuvat funktiot saavat kaikki arvot kahden pisteen välillä, eikä kuvaajassa ole "hyppyjä", kun taaas epäjatkuvilla on.
- Jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen.
- Funktio on jatkuva pisteessä x, jos sen raja-arvo on sama, kuin arvo kyseisessä pisteessä.

- Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä, missä se on määritelty.

A.17
Tehtävän tarkoituksena on syventää opiskelijan ymmärrystä jatkuvuudesta, jotta soveltavien tehtävien ratkaisu jatkossa olisi sujuvampaa.
Vastaukset:

- A, E, A, A, E, J (yhden päivän ajan), A, E
- A, A, A, A, A

A.22
Pohdintatehtävän tarkoituksena on sisäistää Bolzanon lauseen sisältö ja toisaalta huomauttaa opiskelijalle, että likiarvoa etsittäessä haarukointi on toisinaan kätevä tapa. Tehtävän tarkoituksena on niin ikään pohtia perustelun tärkeyttä.
Lisäkysymykset:

- Mitä ratkaisussa on haluttu tehdä, kun siinä on haarukoitu derivaattafunktion arvoja eri kohdissa?
- Mihin lauseeseen ratkaisu perustuu?
- Onko kyseisen lauseen ehdot voimassa tällä funktiolla?
- Voisitko piirtää kulkukaavion annettujen tietojen pohjalta?

Vastaus:

- Kyllä. Derivaattafunktio $f'(x)$ on jatkuva välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Haarukoimalla saadaan kavennettua väliä ja samalla väli muuttuu avoimesta suljetuksi. Haarukoimisen jälkeen voidaan todeta, että derivaattafunktio $f'(x)$ on jatkuva suljetulla välillä $[0,62; 0,63]$. Koska derivaattafunktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä, funktiolla $f'(x)$ on Bolzanon lauseen perusteella vähintään yksi nollakohta kyseisellä välillä. Tämän jälkeen ratkaisussa on jatkettu haarukointia, jotta nollakohta on saatu pyöristettyä oikein kahden desimaalin tarkkuuteen.
- Kyllä, jos tiedetään, että derivaattafunktiolla $f'(x)$ on vain yksi nollakohta välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

A.23
Tehtävän tavoitteena on johdatella opiskelija seuraavaan lauseeseen itsenäisesti ja siten syventää lauseen ymmärrystä.
Lisäkysymykset:

- Onko jokaisella funktiolla aina välttämättä suurin/pienin arvo tai paikallinen maksimi/minimi?

- Voiko olla sellaista suljetulla välillä määriteltyä funktiota, jolla ei olisi suurinta arvoa?

Vastaukset:

- Ei aina.
- Kyllä.

A.26
Tehtävän tarkoituksena on havainnollistaa opiskelijaa siitä, että tehtäviä voi ratkaista usealla eri tavalla. Tehtävän toivotaan herättävän keskustelua hyvän ratkaisun piirteistä.
Lisäkysymykset:

- Onko pinta-alaa kuvaava funktio kaikkialla määritelty?
- Miten Anni ja Bertta olisivat voineet perustella ratkaisujaan?
- Riittääkö pelkkä kuvakaappaus tehtävän ratkaisuksi? Miten Cassy olisi voinut perustella ratkaisujaan niin, että perustelu tukisi GeoGebran ratkaisua.

Vastaus: Jokaisen ratkaisu vaikuttaisi olevan oikein, mutta asioiden perustelu on kyseenalaista. Keskustelun perusteella ainakaan Cassy ei ole perustellut ratkaisua lainkaan, jolloin tehtävän pistemäärä voi jäädä vähäiseksi.

A.27
Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija joutuu pohtimaan funktion kulun tutkimisen vaiheita vielä tarkemmin, kun hänen edessään on malliratkaisun näköinen virheellinen ratkaisu. Virheiden lukumäärään liittyvän kysymyksen tarkoituksena on haastaa opiskelijaa etsimään virheitä tarkemmin, jotta hän ei luovuta heti ensimmäisen virheen kohdalla.

Vastaukset:

- Laskentatavasta riippuen ratkaisusta löytyy ainakin kuusi virhettä. Funktio $f(x)$ on derivoitu väärin (1), eikä derivaatan nollakohtaa $x = 0$ ole perusteltu (2), vaikka se on merkitty kulkukaavioon. Sitä ei ole myöskään huomioitu kulkukaaviossa (3). Kaksi muuta derivaatan nollakohdan arvoa on pyöristetty (4). Kulkukaavion analysoinnissa ei ole huomioitu välin päätepisteitä (5) ja lisäksi vastauksena on annettu kohta, missä "pienin arvo"sijaitsee, vaikka tehtävässä kysyttiin pienintä arvoa (6).

- Ratkaisussa olisi pitänyt perustella derivaatan kolmas nollakohta esimerkiksi tulon nollasäännön ja yhtälönratkaisun avulla. Lisäksi ratkaisussa olisi voitu mainita, miksi funktiota ylipäätään derivoidaan tai miksi kulkukaavio tehdään.

C Tehtävien vastaukset

1. $\frac{5-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{17}}{2}$
2. $0 < a \leq 2$
3. -
4. $72,9 \leq s \leq 100$
5. a) $-1,92 \leq x \leq -1,29$ ja $0,65 \leq x \leq 1$, b) $x \approx -1,92; -1,29; 0,65$, c)$\approx -1,67$
6. -
7. -
8. Väärin.
9. 2 ja -2
10. 21cm
11. a) i) 63,33 €, ii)4999 ja 0, iii) 1,9M €, b)i) 83,05 €, ii) 5000 ja 2957, iii)2,8M €
12. a) Kyllä, b) n. $1m/s$, c) $1,62m/s^2$