Raja-arvo ja derivaatta pisteessä
Limit and derivative at a point

Pro gradu -tutkielma
Jialiang Sun
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

1 Tiivistelmä

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston projektia, jonka tarkoituksena on luoda avoin oppikirja lukion matematiikan kurssista MAA6. Oppimateriaali on suunnattu opetussuunnitelman mukaan vain pitkän matematiikan opiskelijoille. Materiaalin sisältö perustuu vuoden 2019 opetussuunnitelmaan sekä tieteellisiin artikkeleihin ja didaktisiin tutkimuksiin.

Tutkielmani koostuu viidestä osasta. Tutkielmani ensimmäisessä osassa esitellään projektiryhmässä ja opetussuunnitelmassa asetetut yleiset tavoitteet oppimateriaalille. Toisessa osassa perustellaan tarkasti oppimateriaalissa tehdyt päätökset tieteellisten artikkeleiden ja didaktisten tutkimusten kautta. Itse oppimateriaali on kolmannessa osassa. Neljännessä osassa on opettajan opas, jossa on opettajille lisätietoa oppimateriaalista. Viimeisenä on vastausosio oppimateriaalin tehtäville.

Oppimateriaalin aiheena on raja-arvo ja derivaatta pisteessä. Tämä on jaettu kahteen kappaleeseen. Ensimmäisessä kappaleessa tutkitaan tarkemmin mikä raja-arvo on sekä määritellään siihen liittyviä keskeisiä laskusääntöjä sekä käsitteitä. Raja-arvon osaamista pohjustetaan erilaisten pohdintatehtävien avulla. Asioiden osaamista vahvistetaan ja varmistetaan erilaisten harjoitustehtävien avulla. Suurin osa pohdintatehtävistä ja harjoitustehtävistä tehdään Geogebralla piirrettyjen kuvaajien avulla. Täsmällistä määritelmää raja-arvolle ei anneta, vaan tarkoituksena on pyrkiä saamaan havainnollinen käsitys raja-arvosta ja oppia muutamia laskutekniikoita. Raja-arvon tarkka määritelmä ei kuulu lukiomatematiikkaan.

Toisessa kappaleessa käsitellään funktion derivaattaa yksittäisessä pisteessä. Raja-arvon avulla johdatellaan derivaatan käsitteeseen ja johdetaan siihen liittyviä laskusääntöjä. Kappaleesta löytyy sekä teoriaosuus että esimerkkiosuus. Derivaatan teoriaa pohjustetaan erilaisten pohdintatehtävien avulla. Asioiden osaamista vahvistetaan ja varmistetaan erilaisten harjoitustehtävien avulla. Suurin osa pohdintatehtävistä ja harjoitustehtävistä tehdään Geogebralla piirrettyjen kuvaajien avulla. Aiheeseen ei sisälly derivaattafunktioita.

Itse laskemista tässä oppimateriaalissa on melko vähän, sillä tavoitteena on aktivoida opiskelijat pohtimaan, keskustelemaan ja käsittelemään matematiikkaa syvällisesti pelkän rutiininomaisen laskemisen sijaan. Laskuja tulee kuitenkin laskettua väistämättä, mutta ensisijaisina tavoitteina on antaa opiskelijoille parempi kuva matematiikasta tieteenä sekä motivoida opiskelijoita laajempaan ymmärrykseen matematiikan periaatteista.

Sisällys

2 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston projektia, jonka tarkoituksena on luoda avoin oppikirja lukion matematiikan kurssista MAA6. Tämän tutkielman lopussa oleva oppimateriaaliosa sisältää kaksi lukua, joka käsittelee aiheista raja-arvoa ja derivaattaa, mutta ei kuitenkaan derivaattafunktiota. Oppimateriaali on suunnattu opetussuunnitelman mukaan vain pitkän matematiikan opiskelijoille. Oppimateriaali toteutetaan Opetushallituksen uuden opetussuunnitelman perusteita mukaillen. Lukion uusi opetussuunnitelma otetaan käyttöön vuonna 2021.

Tutkielma alkaa perusteluosasta, jossa esitellään projektiryhmän asettamat yleiset tavoitteet oppimateriaalille *Habits of Mind* -artikkelin tuomien ajattelumallien kautta sekä perustellaan tehdyt valinnat oppimateriaaliin. Näiden projektiryhmän asettamien yleisten tavoitteiden lisäksi asetin tavoitteiksi myös *"Pattern sniffers"* ja *"conjecturers"*. Ne valikoituivat tavoitteisiini, sillä mielestäni kyseiset taidot sopivat hyvin oppimateriaalin aihealueisiin. Kaikki oppimateriaalissa käytetyt tehtävät perustellaan aiheeseen liittyvien tieteellisten artikkeleiden ja didaktisten tutkimusten kautta. Yksi näistä tärkeimmistä artikkeleista on *Collaborative Learning in Mathematics*. Oppimateriaalin tekemisessä on huomioitu enemmän derivaatan ja raja-arvon oppimiseen ja oppimisvaikeuksiin liittyviä tutkimustuloksia.

Tutkielman lopussa on opettajan opas, joka on suunnattu tueksi opettajille oppimateriaalissa tehtyjen valintojen tarkoituksen ymmärtämiseen. Opettajan oppaassa kerrotaan tarkemmin pohdintatehtävistä, erityisesti siitä, mitä niissä pitäisi saavuttaa sekä mikä niiden tarkoitus on. Lisäksi annetaan vinkkejä eriyttämiseen ylös- ja alaspäin. Tutkielman lopussa on vastaukset kaikkiin opetusmateriaalin tehtäviin.

Nykyään suurin osa e-kirjoista ja opetusmateriaaleista on maksullisia. Maksullisten materiaalien vastakohtana on alettu julkaisemaan avoimia oppikirjoja ja oppimateriaaleja sähköisesti internetissä, jotka ovat vapaasti käytettävissä kaikille. Toivon, että tutkielmani avointa oppimateriaalia voidaan hyödyntää lukion MAA6 -kurssilla.

3 Oppimateriaalin tavoitteet

Tutkielman tarkoituksena on toteuttaa avoin oppikirja voimassa olevan lukion opetussuunnitelman perusteella. Oppikirjassa käsitellään lukion pitkän matematiikan MAA6 kurssin asioita, joihin kuuluu raja-arvo, derivaatta pisteessä, monomin derivaatta ja vakiolla kerrotun funktion derivaatta. Oppimateriaali on laadittu vuonna 2019 opetushallituksen julkistaman uuden lukion opetussuunnitelman perusteiden vaatimusten mukaan. Tämän lisäksi myös projektiryhmän asettamia tavoitteita sekä vaatimuksia on otettu huomioon.

Tässä kappaleessa käydään läpi tarkemmin edellä mainitut tavoitteet. Lisäksi kerron omista tavoitteistani tarkemmin tulevissa kappaleissa, joissa kirjan sisältö esiintyy.

3.1 Opetushallituksen asettamat tavoitteet

Opetushallitus on päättänyt 7.11.2019 lukion opetussuunnitelman perusteista lukiokoulutusta varten. Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan laadittu opetussuunnitelma otetaan käyttöön lukion aloittaneilla opiskelijoilla 1.8.2021 alkaen ja sen käyttö jatkuu vuosiluokka kerrallaan.

Opetushallituksen yleiset tavoitteet matematiikan opetusta varten ovat, että oppilaat saavat valmiudet jatko-opintojaan varten. Valmiuksiin kuuluu muun muassa matemaattisten menetelmien hallitsemista, ohjelmistojen sekä tietolähteiden hallitsemista. Lisäksi oppilaiden tulee osata ja pystyä perustelemaan asioita edellä mainittujen seikkojen avulla. Oppilaat pystyvät osoittamaan ja todistamaan väitteitä ohjelmiston tuottamien tuloksien avulla. Valmiuteen kuuluu myös rohkeus kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan sekä ongelmien ratkaisutapojen löytämiseen ja niiden selkeään esittämiseen. Tarkemmin tähän MAA6 moduliin kuuluvat tavoitteet ovat seuraavat:

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

1. tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla

2. omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta

3. ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena

4. kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat

5. osaa derivoida yhdistettyjä funktioita

6. hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä

7. osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä.[9]

Näistä tavoitteista kirjaosani keskittyy vain kohtiin 1,2,3,5 ja 7, joissa puhutaan raja-arvosta ja yksinkertaisista derivaatoista. Opiskelija on pyritty huomioimaan oppimateriaaleissa monipuolisella teorialla ja eritasoisilla tehtävillä, joista hän voi saada lisää motivaatiota matematiikan opiskeluun ja johtaa matemaattista ymmärrystä syvemmälle tasolle. Matemaattisia käsitteitä sekä esimerkkejä on pyritty selittämään mahdollisimman ymmärrettävästi, jotta sisäistäminen tapahtuisi mahdollisimman tehokkaasti. Myös sanalliset tehtävät on pyritty yhdistämään arkipäivän tilanteisiin, joihin voi päivittäin törmätä. Tällä varmistetaan oppilaiden matemaattista ajattelua myös vapaa-ajalla.

Derivaatta on kurssilla tärkeässä roolissa, mutta keskeisin asia oppimateriaalissani on raja-arvo ja derivaatta raja-arvon avulla. Raja-arvo on todella tärkeä pohja derivaatalle, joten on oleellista valita erilaisia tehtävätyyppejä, jotta voidaan varmistaa opetetun tiedon sisäistäminen sekä soveltaminen. Tämän vuoksi materiaalissa on pyritty käyttämään mahdollisimman paljon Geogebraa, jotta voidaan varmistaa opiskelijoiden osaaminen. Opiskelijat tulevat tekemään paljon havaintoja erilaisista kuvista ja hauskoista tilanteista.

Koska derivaatta on tärkeä osata, on mielenkiinto hyvä herättää jo perusasioita opeteltaessa. Erilaisten derivaattatehtävien avulla johdatellaan opiskelija derivaattasääntöihin. Tässä käytetään apuna Swanin tehtävätyyppejä.

3.2 Habits of Mind

Yhteisesti sovittuja tavoitteita valittiin artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*[1]. Artikkeli kertoo, millaisia ajattelutapoja ja mielenmalleja opiskelijoilla olisi hyvä olla tulevaisuudessa, joko matematiikan opiskelussa tai muissa korkeakoulun opinnoissa sekä arkisessa elämässä.

Artikkelissa nostettiin esille, että toistuvia rutiiniopetusmenetelmiä, joissa samankaltaiset selitykset, esimerkit ja harjoitukset toistavat itseään, pitäisi välttää. Tällöin oppilailla syntyy helposti sellainen ajatus, että matematiikan käsitteet ja teoria ovat toisistaan riippumattomia ja menettelytavat ovat ulkoa muistettavia faktoja. [1]

Tässä oppimateriaalissa olen välttänyt rutiiniopiskelua tekemällä eritasoisia Geogebra-tehtäviä, joiden tarkoitus on herättää pohtimaan ja kannustaa käyttämään erilaisten ratkaisumenetelmien käyttöä.

3.2.1 ”Pattern sniffers”

”Pattern sniffers” ei valittu ryhmässä tavoitteeksi, mutta halusin nostaa sen esille oppimateriaalissa. ”Pattern sniffers” tarkoittaa sitä, että opiskelija tulee toistuvien tehtävien tai esimerkkien avulla tekemään omia johtopäätöksiä ja löytämään ratkaisuja sekä mahdollisesti niiden laajempaa merkitystä.[1] Valitsin tämän tavoitteeksi, koska tätä ajattelumallia voi hyödyntää runsaasti ja eri tavoin sekä matemaattisissa aineissa että arkielämässä.

Tämä malli on huomioitu lähes jokaisessa tämän oppimateriaalin osassa. Eniten se nousee esiin raja-arvon ja derivaatan esimerkeissä sekä pohdintatehtävissä. Näissä opiskelija tutkii Geogebran avulla funktion kulkua ja pyrkii tekemään sen perusteella johtopäätöksiä, milloin funktiolla on tai ei ole raja-arvoa, sekä mitä derivaatta tarkoittaa raja-arvon avulla. Tälläisissa tilanteissa opettajan on tuettava oppilaita tiedon löytämissä ja oivaltamisessa sekä hänen tulee tunnistaa oppimiseen ja työskentelyyn liittyvät ongelmat. Muuten oppilailla syntyy helposti väärinkäsityksiä, jotka voivat vaikeuttaa muiden käsitteiden oppimista.

3.2.2 ”Experimenters”

Yksi tärkeistä tavoitteista on saada oppilaat kokeilemaan uusia, erilaisia asioita. Tämä on valittu tavoitteeksi, sillä oppilaat pääsevät kokeilemaan erilaisia tehtävätyyppejä ja osaavat täten reagoida oikein myös tulevien tehtävien kohdalla. Tietyt tehtävämallit alkavat toistaa itseään, joten käytettyjen ajatusmallien hyödyntämisestä tulee helpompaa. [1]

Tämä malli on myös huomioitu lähes jokaisessa oppimateriaalin osassa. Parhaimpia esimerkkejä tästä on tehtävässä 3, jossa pitää tutkia erilaisten funktioiden raja-arvoa Geogebralla. Tästä tehtävästä näkee parhaiten algebrallisen rakenteen ja kuvaajan yhteyden.

3.2.3 Tulosten käsittelyä (”Describers”, ”visualizers” ja ”conjecturers”)

”Describers” ja ”visualizers” valittiin tavoitteiksi, koska tulosten käsittelyn merkitys ja osaamisen näyttäminen ovat kasvaneet matematiikassa kirjoitusten sähköistyessä ja sovellusten tullessa käyttöön. Tässä osaoppimateriaalissa pyritään saamaan oppilas perustelemaan(”Describers”) jokainen vastaus rutiininomaisesti, jotta vastaus olisi mahdollisimman monipuolinen. Tarkoituksena on myös pyrkiä nykyteknologian avulla auttamaan oppilaita hahmottamaan ja visualisoimaan (”visualizers”) muun muassa Geogebran avulla raja-arvon ja derivaatan tehtäviä. Ennen lopullisen vastauksen antamista tarvitaan arvioinnin taitoja, eli pyritään tekemään konjunktuureja (”conjecturers”) arvailun, tutkimusten tai olemassa olevan datan perusteella. [1]

4 Yleiset perustelut oppimateriaalille

Tässä kappaleessa kerron, millä perustein olen valinnut tässä tutkielmassa esiintyvät tehtävät. Perusteluina käytän artikkeleita, joissa käsitellään matematiikan opiskeluihin liittyviä ongelmia ja niiden ratkaisuja.

4.1 Raja-arvo

Artikkelissa *Assessment of Students' Conceptual Knowledge in Limit of Functions* on testattu avoimilla testeillä eri oppilaitosten luonnontieteen opiskelijoiden ymmärrystä funktion raja-arvosta pisteissä ja äärettömyydessä. Tulokset paljastavat tekijöitä, jotka ovat vaikuttaneet opiskelijoiden osaamiseen, kuten käsitteiden heikko osaaminen, staattinen näkemys dynaamisista prosesseista, ratkaisutavan yleistyminen (samojen ratkaisumenetelmien käyttäminen jokaisessa laskussa ja olennaisten ratkaisevien tekijöiden huomiotta jättäminen), epäjohdonmukainen kognitiivinen rakenne, riippuvuus mekaanisesta oppimisesta, johdonmukaisuuden ja päättelemisen joustavuuden puute, mekaanisen ratkaisemisen sujumattomuus ja symbolisten merkintöjen väärä tulkinta. [8]

Näitä vaikeuksia aiheuttaneet ajattelutavat ja lähestymistavat syntetisoidaan myös seuraavasti: oppilaat ajattelevat tehtäviä pikemminkin aritmeettisesti kuin algebrallisesti, kielellinen epäselvyys (eli kyvyttömyys käyttää matemaattista kieltä oikein), lokeroitunut oppiminen (eli kyvyttömyys muodostaa yhteyksiä aiemmin opitun ja uuden tiedon välille), riippuvuus käsitteen kuvasta enemmän kuin käsitteen määritelmästä, oikeiden vastausten saaminen vääristä välivaiheista ja keskittyminen vain alemman tason kognitiivisiin harjoituksiin. [8]

Artikkelissa *Students' Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions* huomattiin samoja seikkoja. Raja-arvon kurssia pidetään yhtenä tärkeimmistä ja vaikeimmista kursseista. Syynä tähän on muun muassa vaikeus yhdistää uutta opittua tietoa vanhaan, matematiikka pidetään tosiseikkoina ja ulkoa muisteltavana asiana, ulkoaoppiminen, rutiinioppiminen sekä negatiivinen asennoituminen. [3] Tehtäviä valitessani olen pyrkinyt välttämään rutiinitehtäviä ja hyödyntämään jokaisessa tehtävässä Geogebraa. Geogebralla pyritään vahvistamaan käsiteellistä kuvaa raja-arvosta, sekä syventämään sen tuntemusta yhdistämällä uutta opittua tietoa vanhoihin asioihin.

Artikkelin *Limits of functions: Students solving tasks* mukaan ohjelmistoilla on huomattavasti positiivisia vaikutuksia matemaattiseen opiskeluun.[4] Geogebran avulla oppilaat oppivat käsitteellisiä tietoja ja taitoja, mitkä vahvistavat laskennallisia taitoja. Geogebran avulla on helpointa yhdistää funktion graafinen kuva ja sen algebrallinen muoto, minkä avulla syvennetään käsitteiden tuntemista. Käsitteellinen tieto kuitenkin kärsii, jos on liikaa riippuvainen kuvaajista ja muodollisesta määritelmästä derivaatan funktiossa. Geogebran opetuksella voi mahdollisesti kasvattaa menettelytavan tietämystä.

Pohdintatehtävässä $A.1$ a) kohdassa pitää tutkia Geogebran avulla funktioiden kuvaajaa, kun funktioita ei ole määritelty, kun $x = 2$. Valitsin tämän tehtävän, koska artikkelissa [4] on huomattu, että Geogebran avulla on helpointa muodostaa yhteyksiä funktion graafisen esitysen ja sen algebrallisen muodon välille. Tällä pyritään välttämään riippuvuus mekaanisesta oppimisesta ja vahvistamaan laskennallisia taitoja.

Pohdintatehtävä $A.2$ johdattelee kuvaajien avulla raja-arvon laskusääntöihin. Tehtävän tarkoituksena on antaa opiskelijoille mahdollisuus rakentaa merkityksiä ja linkkejä taustalla olevien teorioiden ja käsitteiden välille. Samalla päästään pois rutiininomaisesta laskemisesta ja vahvistetaan laskennallisia taitoja kuvaajien avulla. [4] Opiskelijat pääsevät itse tutkimaan ja miettimään, miten raja-arvon laskusäännöt muodostuvat. Tämä eliminoi heti alusta väärinkäsitykset pois, sekä lisää johdonmukaista ja joustavaa päättelykykyä.[3]

Pohdinnassa $A.6$ sovelletaan raja-arvon laskusääntöjä. Opiskelijat pääsevät itse pohtimaan mihin kohtaan laskusäännöt sijoitetaan ja näkevät samalla, miten laskusääntöjä käytännössä käytetään. Tehtävän tarkoitus on luoda yhteyksiä laskujen ja teorian välille. Näin pyritään kehittämään opiskelijoiden päättelykykyä ja mekaanisen vastauksen perusteluntaitoa. Samalla vähennetään merkkinnällisiä virheitä.4

Tehtävän 1 on tarkoituksena on luoda opiskelijoille onnistumisen kokemuksia. On tutkittu, että oppilaiden asenteet vaikuttavat raja-arvon opiskeluun. Oppilaat, jotka luottavat itseensä enemmän, myös menestyvät keskimääräistä paremmin.[3] Tehtävässä harjoitellaan algebrallista funktioiden sieventämistä. Tällä pyritään välttämään ongelmia mekaanisen ratkaisemisen sujuvuudessa ja symbolisten merkintöjen väärässä tulkinnassa.[4] Myös lopussa lopputulos tarkistetaan Geogebralla, jotta nähdään konkreettisemmin, miten funktiot käyttäytyvät lähestyessään eri pisteitä, ettei yhteys katkea käsitekuvasta ja määritelmästä. [8]

Tehtävät 2 ja 3 ovat vaikeita. Tähän materiaaliin ei kuulu toispuolisten raja-arvojen laskeminen, joten olen oppimisen syventämistä varten kiertänyt asian kuvaajan tulkinnan avulla. Näissä tehtävissä pitää tutkia Geogebran avulla raja-arvoa. Olen valinnut tähän haastavia tehtäviä, joiden tarkoituksena on herättää pohdintaa. Lisäksi olen valinnut tehtäviin funktioita, joita edellisissä tehtävissä ei ole ollut. Tämä vahvistaa ei-rutiinioppimista ja asian yleistämistä sekä aktivoi johdonmukaista ja joustavaa päättelykykyä kuvaajatulkinnassa ja perusteluissa.[4] Tehtävä 3 lasketaan ilman laskinta. Näissä kohdissa pyritään vahvistamaan algebrallisten rakenteiden ja merkintöjen osaamista ja mekaanisen laskutaidon sujuvuutta. [8]

4.2 Derivaatta

Malcolm Swanin kirjoittaman *Collaborative Learning in Mathematics* artikkelin mukaan pitäisi välttää opetusmenetelmiä, joissa selitykset, esimerkit ja harjoitukset toistavat itseään, sillä toistuvalla rutiinioppimismenetelmällä opetetut tiedot eivät säily kauan tai eivät toimi uudenlaisen tehtävätyypin tullessa. [5] Swanin artikkelissa on listattu viisi erilaista oppimismenetelmää. Näillä viidellä oppimismenetelmällä pyritään välttämään oppilaiden rutiinioppimista. Tässä osa-alueessa käytän erityisesti kohtia 3 ”Evaluating mathematical statements” ja 5 ”Analysing seasoning and solutions”.

Students' conceptions of derivative given different representations[7] - artikkelissa annettiin oppilaiden derivaattaongelmalle kolme esitysmuotoa: analyyttinen, graafinen ja numeerinen. Lisäksi tälle ongelmalle on kolme erilaista tasoa: sisäinen taso, välitaso ja ulkoinen taso. Jokaisessa tasossa pitää tutkia annettujen ohjeiden mukaan kyseistä derivaattaongelmaa. Opiskelijat aloittavat sisäisestä vaiheesta, jossa he kohtaavat annettuja matemaattisia käsitteitä irrotettuina toisistaan, eivätkä he osaa myöskään muodostaa yhteyksiä käsitteiden välille. Kehittäessään käsitteiden välisiä yhteyksiä he etenevät asteittain välitason kautta ulkoiseen tasoon, jossa heillä on jonkinlainen mielikuva käsitteiden välisistä yhteyksistä. Tälläisen ymmärryksen avulla opiskelijat pystyvät perustelemaan tehtävät mielekkäällä tavalla.

Artikkelissa *Students' conceptions of derivative given different representations* [7] on myös huomattu, että opiskelijat saavat eniten itseluottamusta, kun heille annetaan analyyttinen esitysmuoto ja vastaus annetaan lähes välittömästi. Näin ei tapahdu sellaisissa esitysmuodoissa, joissa ratkaisuprosessi on hidasta ja opiskelijat pohdiskelevat paljon. Kun eteen tuli tehtävä, jossa derivaatta piti ratkaista raja-arvon avulla, monet opiskelijat kertoivat, etteivät he enää muista, miten raja-arvo laskettiin. Analyyttisessä ryhmässä olleet kuitenkin saivat lopulta ratkaisun monien algebrallisen laskusääntöjen yrittämisen jälkeen. Tutkimuksessa monien oppilaiden mielestä derivaatan löytäminen riippuu esitysmuodoista. Kun heille annettiin analyyttinen esitymuoto, kaikki opiskelijat käyttivät ketjusääntöä nopeasti ja helposti ja pystyivät antamaan perusteellisia vastauksia.

Useat opiskelijat todennäköisesti katsovat tehtävän funktiot objekteina tai päättävät, etteivät tiedä mistä vastaus tulee, kun heille annetaan tehtävä graafisessa- tai numeerisessa esitysmuodossa. Artikkelissa *Students' conceptions of derivative given different representations* [7] korostettiin, että oppilailla on hankaluuksia yhdistää erilaisia matemaattisia esityksiä funktiosta (vaikka objekti on sama, mutta esitysmuoto eri). Todella moni käyttää mieluummin analyyttistä esitystapaa, kuin graafista tai numeerista esitystapaa.

The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative [6] tutkimuksessa tutkittiin Geogebran vaikutusta derivaatan opiskeluun. Tutkimuskohteina oli kaksi luokkaa. Toisessa luokassa oli 34 henkilöä ja he saivat käyttää Geogebraa avuksi derivaatan opiskelussa. Toisessa luokassa oli 24 henkilöä ja he opiskelivat perinteisella opetustavalla derivaattaa.

Tässä tutkimuksessa tehtiin tärkeitä havaintoja. Ensimmäisenä huomattiin, että ryhmien laskutaitojen pistemäärät eivät poikenneet huomattavasti. Sen sijaan keskimääräiset pistemäärät erottuivat merkittävästi sekä käsitteellistä tietoa koskevissa kysymyksissä että niiden kokonaispistemäärässä jälkikokeen yhteydessä.

Vaikka opiskelijat osaavat käyttää sääntöjä ja ratkaisualgoritmeja käsitellessään laskennallisia ongelmia, he eivät ymmärrä käsitteitä täydellisesti. Johdannaisen soveltaminen vaatii korkeamman asteen ajattelutaitoja. Siksi on tarpeellista ymmärtää, osata yhdistää ja tulkita niitä käsitteitä, joilla on samoja rakenteita, mutta eri muodoissa. Tutkimuksessa huomattiin myös, että monilla opiskelijoilla on vaikeuksia oppia kyseistä asiaa. [6]

Geogebrassa on sekä CAS ja DGE toiminnot. Näiden toimintojen avulla opiskelijat pystyvät näkemään selkeät yhteydet visuaalisesti algebrallisten muodojen ja funktioiden rakenteiden välillä. Oppilailla oli tilaisuus tarkkailla muutosten vaikutusta toisiinsa. Tämä auttoi opiskelijoita luomaan yhteyksiä algebran ja graafisen esityksen välillä, mikä helpotti funktion graafisen esityksen ja derivaattafunktion graafisen esityksen tulkitsemista. Opiskelijat voisivat laatia jonkinlaisia yleistyksiä käsitellessään tulkittavia funktioita tai derivaattafunktioita Geogebran avulla. Tämä tilanne voisi edistää opiskelijoiden käsitteellistä tietämystä derivaatan soveltamisesta. [6]

Relieving of Misconceptions of Derivative Concept with Derive [2] tutkimuksen tarkoituksena on selvittää derivaatan väärinkäsityksiä ja miten ne ratkaistaan derivaatan ohjelmistolla. Tutkimuksen tuloksista huomattiin, että opiskelijat, joilla on väärinkäsityksiä derivaattaan liittyen, eivät pysty hyödyntämään ja soveltamaan derivaatan määritelmää. Lisäksi he eivät myöskään tutki määrittelyvälejä derivoidessaan. Väärinkäsitys etäisyydestä ja väleistä johtaa suoraan epäonnistumiseen geometrian derivaattatehtävissä. Tutkimuksessa nousi ilmi, että väärinkäsitys derivaatasta johtuu tiedonpuutteesta derivaattafunktion käyttäytymisestä, epäonnistumisesta yhteyden muodostamisessa normaalin ja tangentin välillä, sekä käsitteiden funktion derivaatta ja funktion derivaatta jossakin pisteessä sekoittamisesta.

Artikkelissa *Relieving of Misconceptions of Derivative Concept with Derive* [2] korjattiin kahden tutkimusryhmän väärinkäsityksiä derivaatasta. Toinen ryhmä käytti derivaatan sovelluksia ja toisessa ryhmässä käytettiin perinteistä opetusmenetelmää. Vaikka kummatkin opetusmenetelmät olivat tehokkaita, sovellusopetusmenetelmä todettiin tehokkaammaksi. Tämä johtuu siitä, että opiskelijat näkevät konkreettisesti, miten derivaattafunktio käyttäytyy ja tämä tuottaa enemmän onnistumista derivaatan väärinkäsityksen ratkeamisessa. Lisäksi sovellusten käytöllä huomattiin selkeää oppimista. Esimerkiksi oppilaat, jotka eivät vastanneet esitestissä, pääsivät kuitenkin läpi toisesta testistä sovellusten käyttämisen jälkeen. Oppimisen taso oli huomattavasti noussut.

Tehtävässä 4 tarkoituksena on mahdollistaa opiskelijoille onnistumisen kokemuksia. On tutkittu, että oppilaiden asenteet vaikuttavat raja-arvon opiskeluun. He, jotka luottavat itseensä enemmän, myös menestyvät keskimääräistä paremmin.[3] Tehtävässä harjoitellaan derivoimista. Tällä pyritään välttämään ongelmia mekaanisen ratkaisemisen sujuvuudessa ja symbolisten merkintöjen väärässä tulkinnassa.[4] Myös lopussa tarkistetaan Geogebralla lopputulos, ettei yhteys katkea käsitekuvasta ja määritelmästä. [8]

Pohdintatehtävässä *A.7* hahmotellaan erotusosamäärän derivaatan kaavan syntymistä sekantin ja tangentin avulla. Tässä tehtävässä Geogebran CAS -ja DGE -toiminnot luovat yhteyksiä derivaatan käsitteen ja sen geometrisen esityksen välille. [6] Kuvaajan avulla pystytään myös korjaamaan väärinkäsityksiä eri käsitteiden välillä. Samalla tarkoituksena on vahvistaa raja-arvon oppimista ja luoda käsitteellisiä yhteyksiä derivaatan kanssa. [2]

Artikkelissa *Students' conceptions of derivative given different representations* havaittiin, että opiskelijat osaavat paremmin ratkaista derivaatan ongelmat analyyttisessa esitysmuodossa kuin numeerisessa- tai geometrisessa esitysmuodoissa. Ilmiö johtuu siitä, että opiskelijat eivät osaa muodostaa yhteyksiä esitysmuodojen välille.7 Tästä johtuen pohdintatehtävät $A.10$, $A.15$, $A.13$ ja tehtävät 6 , 5 tehdään Geogebralla, jotta voidaan luoda yhteyksiä eri esitymuodojen välille. Olen valinnut tällaisia tehtäviä myös siksi, koska artikkelissa *The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative* havaittiin, että Geogebra CAS- ja DGE- toimintojen avulla pystytään luomaan parhaiten yhteyksiä esitysmuotojen välille. Tämä kehittää oppilaiden kuvaajan tulkintaa ja auttaa ymmärtämään derivaatan soveltamistä paremmin. Esimerkiksi tehtävässä 6 sovelletaan derivaattaa tilastotulkintaan. [6] Geogebran avulla pystytään tarkastelemaan konkreettisesti derivaattafunktion käyttäytymistä. Tämä vahvistaa derivaatan ymmärtämistä ja mahdollisesti vähentää väärinymmärryksiä. Väärinymmärrykset johtavat suoraan epäonnistumiseen ja ovat este oppilaiden syvälliseen ymmärrykseen. Tälläisiä havaintoja tehtiin artikkelissa *Relieving of Misconceptions of Derivative Concept with Derive* [2].

Tehtävässä 7 olen soveltanut artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics National Institute of Adult Continuing Education* [5] kohtaa 5 *"Analysing seasoning and solutions, putting reasoning in order"*. Tässä tehtävässä pitää järjestää derivaatan kaavan todistukset oikeaan järjestykseen. Tässä prosessissa auttaa, kun perustelujen vaiheet tarjotaan valmiiksi, koska opiskelijoilla on usein vaikeuksia tuottaa todistuksia tyhjästä. Huomiota kiinnitetään siis ratkaisun taustalla olevaan logiikkaan ja rakenteeseen, eikä sen tekniseen tarkkuuteen. [5]

Tehtävissä 8 ja 9 lasketaan funktion derivaatta ilman teknisiä apuvälineitä. Tällä pyritään vahvistamaan opiskelijoiden matemaattisia laskutaitoja ja sitä, etteivät opiskelijat ole liian riippuvaisia teknillisistä apuvälineistä.[6] Ylioppilaskirjoitusten ollessa kaksiosainen, pitäisi laskemiseen kyetä myös ilman teknisiä sovelluksia.

Tehtävä 10 on sanallinen tehtävä, joka ratkaistaan ensin ilman Geogebraa. Tässä tehtävässä vahvistetaan käsitteellistä ja algebrallista tuntemusta sekantista ja tangentista sekä derivaatasta.[6] Tässä tehtävässä harjoitellaan myös tulosten arviointia. [1]

Tehtävässä 11 olen hyödyntänyt kohtaa 3 *"Evaluating mathematical statements"*. Tehtävässä pitää päättää, ovatko väitteet aina, joskus vai eivät koskaan totta, ja selittää päätös. Valitsin tämän tehtävätyypin, koska selityksessä ilmenee aina esimerkki tai vastaesimerkki väitteiden tukemiseksi tai kumoamiseksi. Artikkelin mukaan tämänkaltaiset tehtävätyypit kehittävät oppilaiden kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa. Väitteet pakottavat opiskelijat kohtaamaan joitakin yleisiä derivaattaan liittyviä vaikeuksia ja väärinkäsityksiä.[5]

Tehtävä 12 on kertaustehtävä raja-arvo- ja derivaattaosiolle. Tässä tehtävässä päästään soveltamaan derivaatan ja raja-arvon määritelmää sekä luomaan vahva yhteys raja-arvon ja derivaatan välille. Tämän jälkeen oppilaat voivat mahdollisesti sisäistää helpommin derivaatan käsitteen, kun asioiden välillä on jonkinlainen yhteys.8 Tässä tehtävässä ei tarvita laskimia ja funktioiden derivaatta pisteissä sekä funktion arvo pisteessä on valmiiksi annettu. Samalla päästään perinteisestä rutiinilaskemisesta pois, ja koska teknillisiä apuvälineitä ei voi tässä käyttää, niin syntyy myös paljon pohdintaa ja johtopäätöksiä.

Tehtävässä 13 on pitkän matematiikan yo-kirjoituksen tehtävä. Valitsin tämän tehtävän, koska tässä todistustehtävässä pitää soveltaa sekä raja-arvon määritelmää, että derivaatan määritelmää. Tässä tehtävässä eliminoidaan rutiinioppimista ja vahvistetaan mekaanista laskutaitoa. [4] Lisäksi yhdistetään uusia opittuja käsitteitä vanhoihin käsitteisiin. Tämä vahvistaa sekä uusien että vanhojen käsitteiden oppimista ja asia jää paremmin muistiin. [3] Kun käsitteiden välille muodostuu yhteyksiä, on helpompaa välttää väärinymmärryksiä ja syventää opittua asiaa pidemmälle. [2]

Viitteet

[1] Al Cuoco, E. Paul Goldenberg ja June Mark. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* Education Department Center, Inc., Newton, Ma ,Journa of Mathematical Behavior 15, 375-40(1996)

[2] Kaplan, A., Ozturk, M., Ocal M.F. *Relieving of misconceptions of derivative concept with derive.*International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 1(1), 64-74,(2015)

[3] Kristina Juter. *Students' Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions.* Mathematics Education Research Journal volume, Vol. 17, No. 2, 91–110 (2005)

[4] Kristina Juter. *Limits of functions:Students solving tasks.* Australian Senior Mathematics Journal Vol.20 No. 1, 15-31 (2006)

[5] Malcolm Swan. *Collaborative learning in mathematics: a challenge to our beliefs and practices. Leicester: NIACE.* (2006)

[6] Mehmet Fatih Ocal. *The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative* Higher Education Studies; Vol. 7, No. 2; 2017

[7] Michelle Cetner. *Students' Conceptions of Derivative Given Different Representations*,North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,37,324-331 (2015)

[8] Sebsibe, Sidelil Ashebir ; Feza, Nellie Nosisi . *Assessment of Students' Conceptual Knowledge in Limit of Functions, International Electronic Journal Of Mathematics Education , Vol. 15, No. 2* (2020)

[9] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* (2019)

A Oppimateriaalit

A.1 Raja-arvo

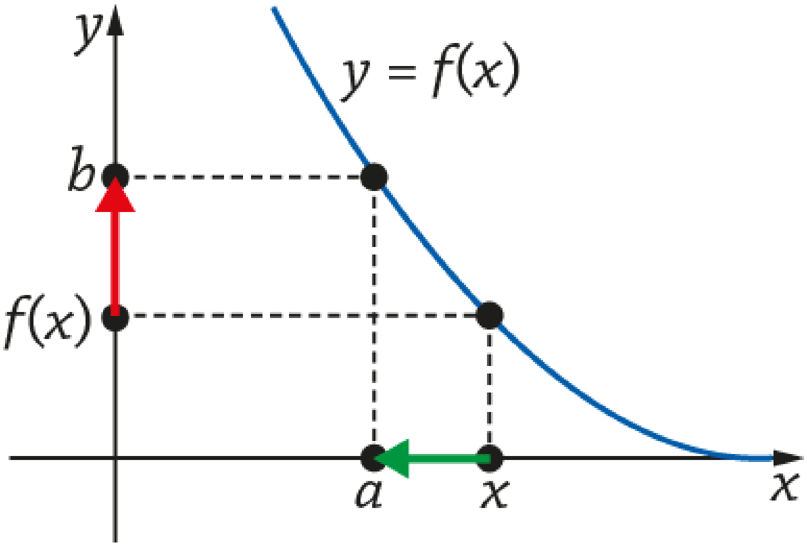
Pohdinta A.1 Tutki Geogebran avulla seuraavia funktioita :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-4}{x-2} \\
g(x) &= \frac{3x}{x-2} \\
h(x) &= \frac{3x^2-12}{5x-10} \\
k(x) &= \frac{4x^2-12}{3x-6}, \\
l(x) &= \frac{\sin(x-2)}{x-2}, \\
n(x) &= (x-2)\cdot\sin(\frac{1}{x-2}),
\end{aligned}
$$

jotka eivät ole määriteltyjä kohdassa $x = 2$.

Päättele kuvaajasta, mitä lukua funktioiden $f(x), g(x), h(x), k(x), l(x),n(x)$ arvot lähenevät, kun muuttujan arvot lähenevät lukua 2.

Funktion f *raja-arvo* on b kohdassa a, jos funktion f arvot saadaan niin lähelle lukua b kuin halutaan, kun muuttujan x arvot viedään riittävän lähelle lukua a.



Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Luetaan:"Funktion f raja-arvo kohdassa a on b".

Voidaan myös merkitä

$$f(x) \to b\,, \text{kun } x \to a.$$

Luetaan:"$f(x)$ lähestyy b:tä, kun x lähestyy a:ta ".

Tällä kurssilla ei anneta täsmällistä määritelmää raja-arvolle vaan pyritään saamaan havainnollinen käsitys raja-arvosta ja oppimaan muutamia laskutekniikoita. Raja-arvon tarkka määritelmä ei kuulu lukiomatematiikkaan.

Pohdinta A.2 Tutki Geogebran avulla funktion $f(x) = \lim_{x \to 3}(x - 2)$ raja-arvoa ja vertaile sitä seuraaviin funktoiden raja-arvoihin. Mitä huomaat?

$$a) \lim_{x \to 3}(5x - 10).$$
$$b) \lim_{x \to 3}(x + 2) + (x - 2).$$
$$c) \lim_{x \to 3}(x + 2) \cdot (x - 2).$$
$$d) \lim_{x \to 3} \frac{(x + 2)}{x}.$$

Lause A.3 Raja-arvon laskusääntöjä

Oletetaan, että funktioilla f ja g ovat raja-arvot olemassa kohdassa a. Oletetaan myös, että $k \in \mathbb{R}$. Tällöin ovat voimassa seuraavat laskusäännöt.

1) Vakion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} k = k.$$

2) Identtisen funktion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

3) Vakion siirtosääntö

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot lim_{x \to a}(f(x)).$$

4) Funktioden summan raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = lim_{x \to a}(f(x)) + lim_{x \to a}(g(x)).$$

5) Funktioden tulon raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = lim_{x \to a}(f(x)) \cdot lim_{x \to a}(g(x)).$$

6) Funktioden osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{jos} \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Huomautus A.4 Osamäärän raja-arvon olemassaolo

Tutkitaan Funktioiden osamäärän $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvoa kohdassa a.

Jos $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, niin $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$. Paitsi tilanteessa, kun

$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, niin raja-arvoa ei ole olemassa. Toisaalta, jos $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, lauseketta voi mahdollisesti sieventää. Jos sievennyksen jälkeinen lauseke saa kohdassa a raja-arvon b, niin tämä on myös alkuperäisen osamäärän raja-arvo.

Mallitehtävä A.5 Olkoon

$$f(x) = \frac{2x-6}{x^2-9}, \text{kun} \quad x \neq 3 \quad \text{ja} \quad x \neq -3.$$

a) Lasketaan funktion f raja-arvo kohdassa 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x-6)}{\lim_{x\to 1}(x^2-9)} = \frac{2\cdot \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 6}{\lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 9} = \frac{2\cdot 1 - 6}{1\cdot 1 - 9} = \frac{1}{2}.$$

b) Lasketaan funktion f raja-arvo kohdassa 3.

Osoittajan raja-arvo: $\lim_{x\to 3} 2x - 6 = 2\cdot 3 - 6 = 0$.

Nimittäjän raja-arvo: $\lim_{x\to 3} x^2 - 9 = 3^2 - 9 = 0$.

Huomautuksen *A.4* nojalla funktion lauseketta voidaan siis supistaa. Osoittajassa ja nimittäjässä yhteinen tekijä on $x - 3$, eli siis:

$$f(x) = \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2}{(x+3)}, \text{kun} \quad x \neq \pm 3.$$

Huomautuksen nojalla supistetun lausekkeen arvo voidaan laskea kohdassa 3, joten:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{(3+3)} = \frac{1}{3}.$$

c) Lasketaan myös funktion f raja-arvo kohdassa -3.

Osoittajan raja-arvo: $\lim_{x\to -3} 2x - 6 = 2\cdot(-3) - 6 = -12$.

Nimittäjän raja-arvo: $\lim_{x\to -3} x^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = 0$.

Tilanne on nyt $\frac{-12}{0}$, joten huomautuksen $A.4$ nojalla voidaan päätellä, että funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = -3$.

Pohdinta A.6 Päättele Santerin ratkaisusta mitä raja-arvolaskusääntöja on käytetty missäkin välivaiheessa.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 5}\frac{(8x+4)+(2x-2)}{(x+2)(x-2)} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\lim_{x\to 5}(8x+4)+(2x-2)}{\lim_{x\to 5}(x+2)(x-2)} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{\lim_{x\to 5}(8x+4)+\lim_{x\to 5}(2x-2)}{\lim_{x\to 5}(x+2)(x-2)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{2\cdot(\lim_{x\to 5}(4x+2)+\lim_{x\to 5}(x-1))}{\lim_{x\to 5}(x+2)(x-2)} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{2\cdot(\lim_{x\to 5}(4x+2)+\lim_{x\to 5}(x-1))}{\lim_{x\to 5}(x+2)\cdot\lim_{x\to 5}(x-2)} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{2\cdot(\lim_{x\to 5}4x+\lim_{x\to 5}2+\lim_{x\to 5}x-\lim_{x\to 5}1)}{\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}2\cdot\lim_{x\to 5}x-\lim_{x\to 5}2} \\
&= \frac{52}{21}
\end{aligned}
$$

1. Sievennä ja laske raja-arvot:

$$
\begin{aligned}
&a)\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}. \\
&b)\lim_{x\to -8}\frac{x^2+8x}{x+8}. \\
&c)\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-29}. \\
&d)\lim_{x\to -3/2}\frac{x^2+12x-9}{4x^2-9}.
\end{aligned}
$$

2. Ratkaise seuraavat kohdat Geogebran avulla .

a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-|3-2x|}{5+|3-2x|}$.

b) Määritä Geogebrassa olevan funktion raja-arvo on kohdassa -4 ja 2. Pohdi, miksi jossain kohdassa funktiolla ei ole raja-arvoa. Hyödynnä alla olevaa Geogebra-linkkiä.

https://www.geogebra.org/classic/f9qzhpqn

c) Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 100}{|x - 10|}$ raja-arvo kohdaissa $x = 0$ ja $x = 10$.

3. Ratkaise seuraavat kohdat ilman teknisiä apuvälineitä.

a) Määritä raja-arvo $\lim_{x \to 4} \dfrac{(f(x))^2 - (f(4))^2}{x - 4}$, kun$f(x) = x^2$.

b) Määritä vakio a niin, että raja-arvo $\lim_{x \to a} \dfrac{ax^2 - 8}{x - a}$ on olemassa.

A.2 Derivaatta

Pohdinta A.7 https://www.geogebra.org/classic/c8k3txkf

Kuvassa on osa funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$ kuvaajasta. Kuvaan on piirretty punaisella pisteiden $A(3, f(3))$ ja $B(5, f(5))$ kautta kulkeva sekantti ja sinisellä pisteen $A(3, f(3)$:n kautta kulkeva tangentti.

a) Selvitä pisteiden A ja B koordinaatit ja määritä sekantin kulmakerroin.

b) Määritä kuvasta tangentin kulmakerroin.

c) Tutki Geogebran avulla mitä sekantille tapahtuu, jos pistettä B aletaan liu'uttaa paraabelia pitkin kohti pistetta A.

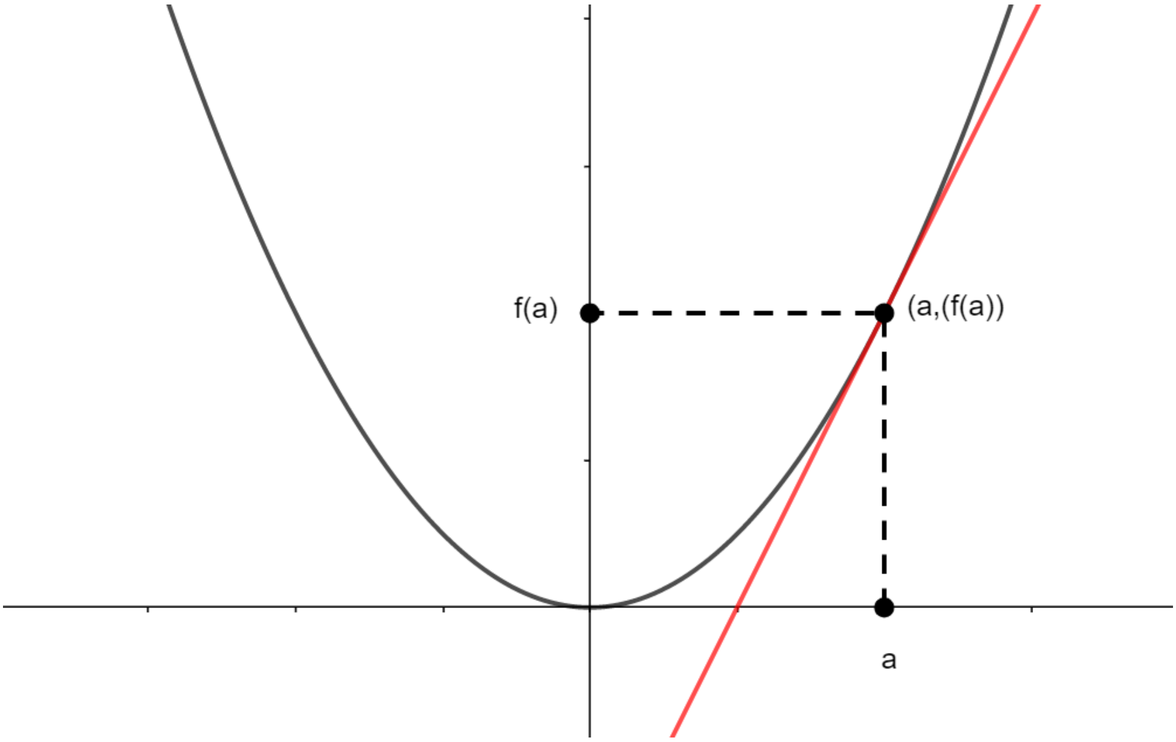
d) Korvataan piste B mielivaltaisella pisteellä $(x, f(x))$. Muodosta A ja B kautta kulkevan sekantin kulmakertoimen lauseke.

e) Laske edellisessä kohdassa muodostetun lausekkeen raja-arvo, kun x lähestyy lukua 2.

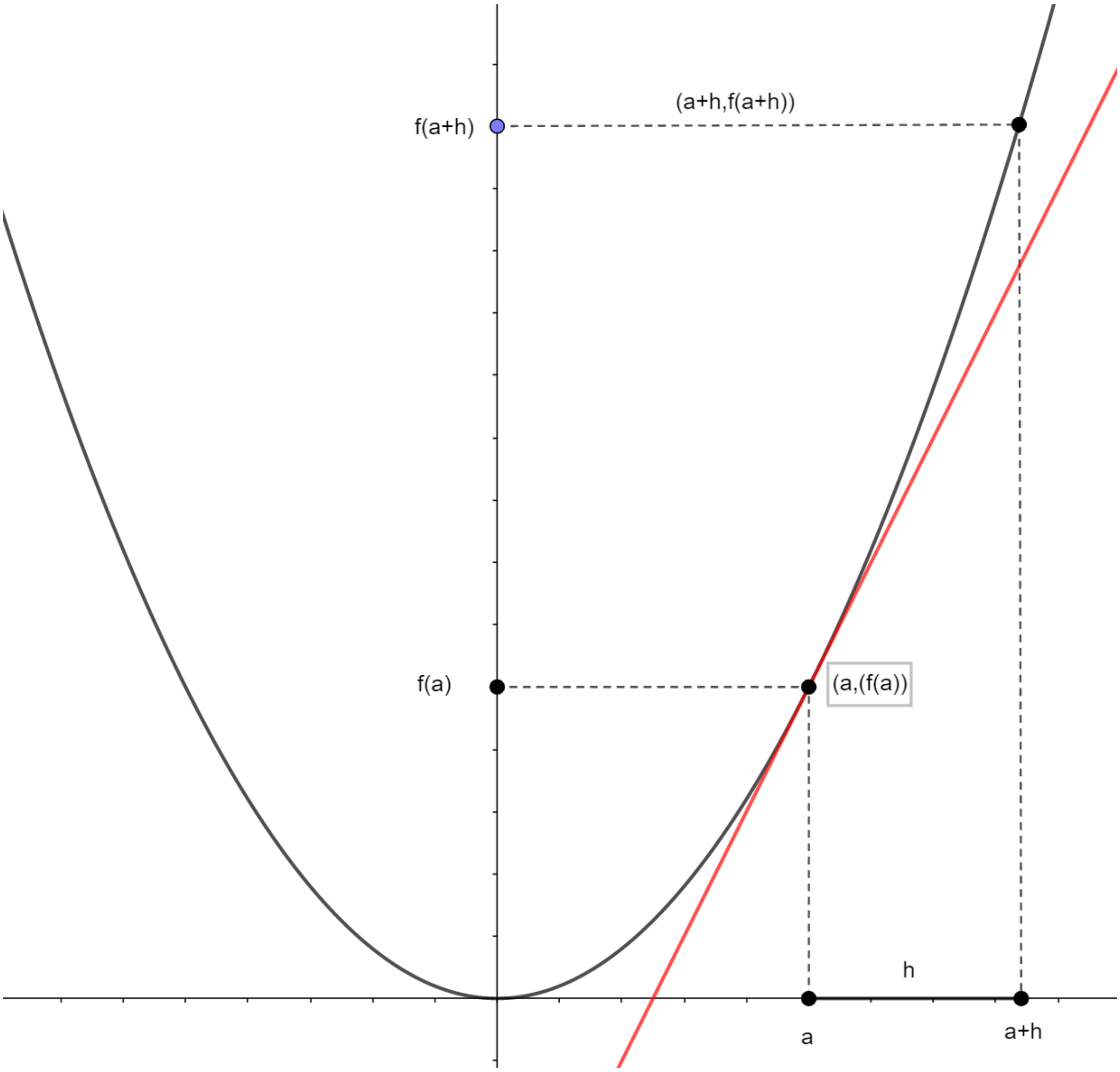
f) Mitä tangentin kulmakerroin kuvaa tässä tehtävässä?

Erotusosamäärän raja-arvo

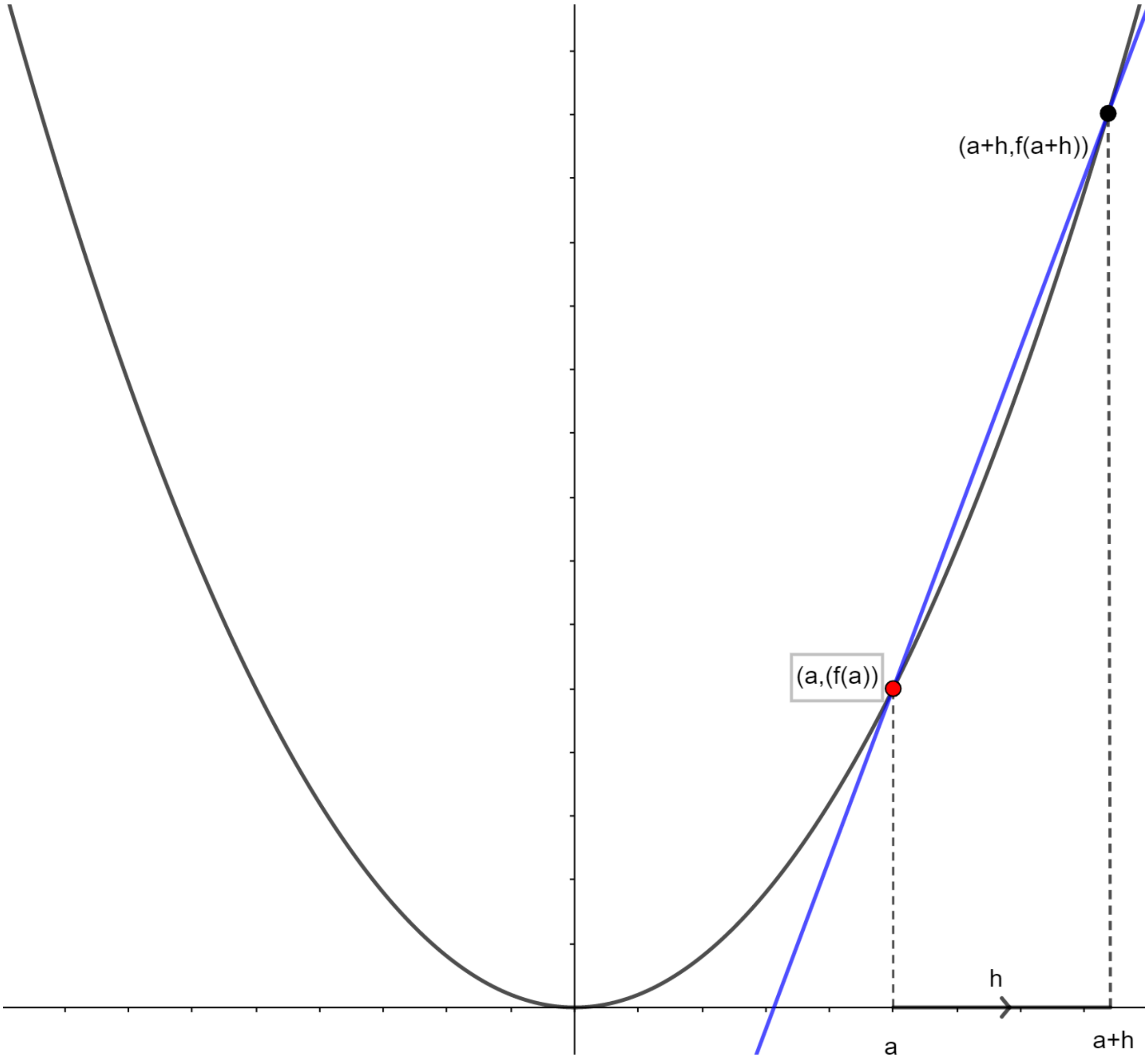
Funktion f kuvaajan pisteen a kautta on piirretty tangentti.



Toisaalta, jos funktion kuvaaja ei ole suora, tangentin kulmakerrointa pisteessä ei saa helposti selville. Tutkitaan nyt tarkemmin kuvaajaan piirettyä tangenttia kohdassa $x = a$.



Suoran kulmakertoimen selvittämiseen tarvitaan kaksi pistettä. Nyt tiedossa on vain yksi tangetilla oleva piste $(a, f(a))$, joka sivuaa kuvaajaa. Valitaan toiseksi apupisteeksi funktion f kuvaajalta piste, joka on $(a + h, f(a + h))$. Merkitään h:lla poikkeama kohdasta a. Tällöin apupisteen x-koordinaatti on $a + h$ ja y-koordinaatti on $f(a + h)$.



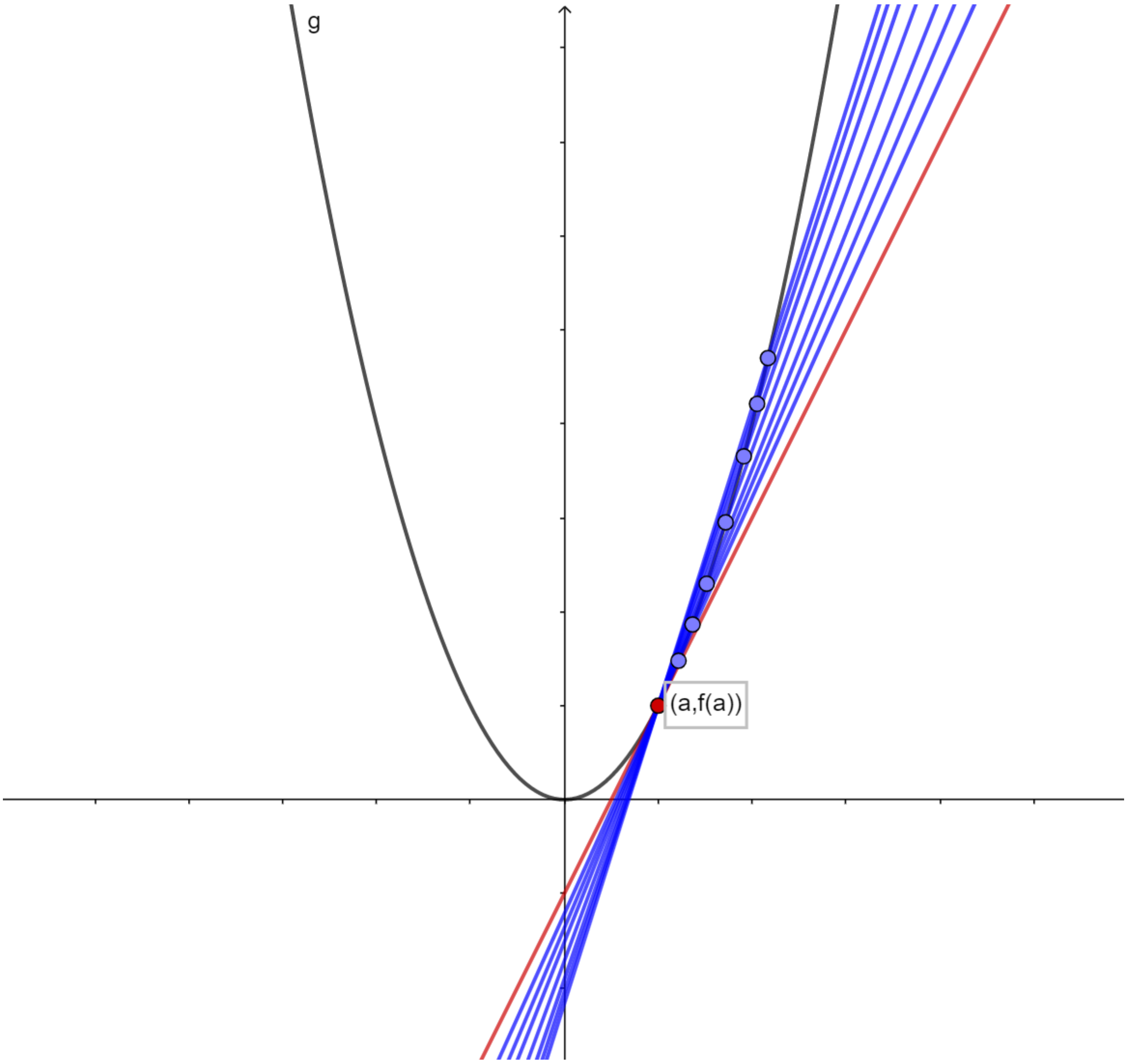
Huomataan pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan sekantin kulmakerroin (eli keskimääräinen muutosnopeus) on muotoa

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

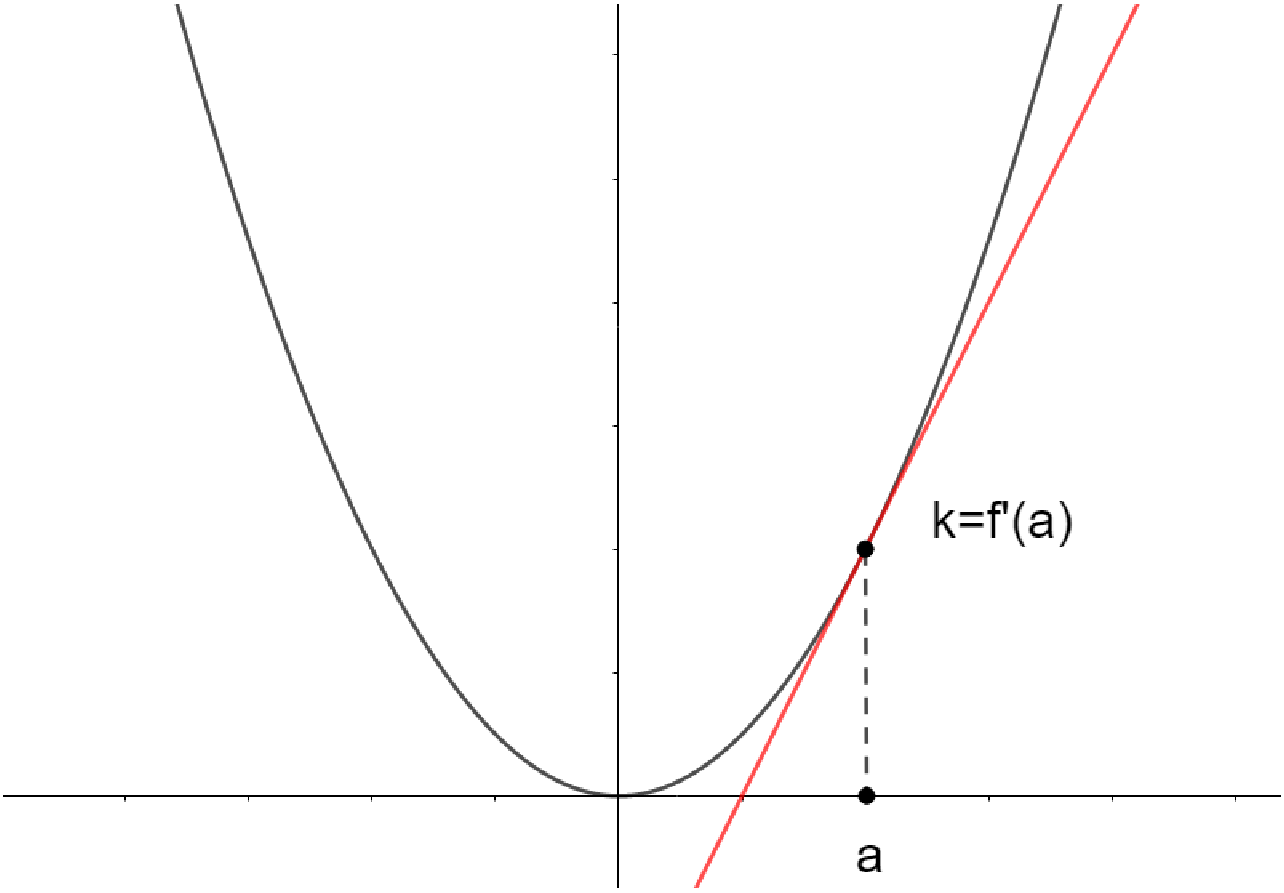
Nyt on tilanne, jossa piste $(b, f(b)) = (a + h, f(a + h))$. Sijoitetaan sekantin kulmakerroin lausekkeeseen a:n kohdalle a, b:n kohdalle $a + h$ ja lopuksi $f(b)$:n kohdalle $f(a + h)$, josta saadaan

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Tätä kutsutaan matematiikassa funktion f *erotusosamääräksi kohdassa* a.



Nyt kun pistettä $a + h$ siirretään lähemmäs pistettä a eli h lähestyy nollaa, niin huomataan, että apupiste $(a + h, f(a + h))$ liukuu kuvaajaa pitkin kohti pistettä $(a, f(a))$. Samalla sekantti muuttuu tangentiksi pisteessä $(a, f(a))$, eli sekantin kulmakerroin lähestyy kuvaajaan piirettyä tangentin kulmakerrointa.



Tästä huomataan, että tangentin kulmakerroin kuvaa asetetussa pisteessä $(a, f(a))$ funktion f hetkellistä muutosnopeutta kyseisessä pisteessä.

Tämä voidaan matemaattisesti esittää Määritelmän *A*.8 avulla.

Määritelmä A.8 Derivaatta

Funktion f derivaatta kohdassa a on

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

jos raja-arvo on olemassa.

Lisätieto A.9 Derivaattaan liittyvät seuraavat käsitteet

- Jos funktion derivaatta on olemassa kohdassa a, sanotaan, että funktio on derivoituva kohdassa a.
- Derivaatta voidaan merkitään joko $Df(a)$ tai $\frac{d}{dx}f(a)$.

Pohdinta A.10 Tutki Geogebran avulla funktiota $f(x) = x^2$.
a) Piirrä pisteiden $(2, f(2))$ ja $(4, f(4))$ välille sekantti.
b) Selvitä sekantin kulmakerroin.
c) Piirrä funktion f kuvaajaan tangentti pisteeseen $x = 4$.
d) Muodosta pisteiden $(2, f(2))$ ja $(2 + h, f(2 + h))$ kautta kulkevan sekantin kulmakertoimen lauseke.
e) Laske edellisessä kohdassa muodostetun kulmakertoimen raja-arvo, kun $h \to 0$.
f) Mikä on funktion $f(x) = x^2$ derivaatta pisteessä 2?

Mallitehtävä A.11 Lasketaan erotusosamäärän raja-arvon avulla potenssifunktion derivaatta pisteessä a, kun $n = 2, 3$.

a) Olkoon $n = 2$ ja muodostetaan ensin lauseke funktiosta $f(x) = x^n$ pisteessä a, joka on

$$f(a) = a^2.$$

Määritetään derivaatan arvo $f'(a)$ laskemalla funktion $f(x)$ erotusosamäärän raja-arvo-arvo kohdassa a:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2a+h)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}(2a+h)\\
&= 2a.
\end{aligned}
$$

b) Olkoon $n = 3$ ja muodostetaan ensin lauseke funktiosta $f(x) = x^n$ pisteessä a, joka on

$$f(a) = a^3.$$

Määritetään derivaatan arvo $f'(a)$ laskemalla funktion $f(x)$ erotusosamäärän raja-arvo-arvo kohdassa a:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{a^3+3ha^2+3ah^2+h^3-a^3}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3ha^2+3ah^2+h^3}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(3a^2+3ah+h^2)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2)\\
&= 3a^2.
\end{aligned}
$$

Mallitehtävä A.12 a) Hyödynnä edellistä tehtävää ja määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta.

b) Määritä derivaatat $f'(5)$ ja $f'(-5)$.

c) Määritä funktion f kuvaajalle kohtaan $x = \frac{1}{2}$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

a) Edellisen tehtävän nojalla jokaisella muuttujan arvolla x funktion $f(x) = x^2$ derivaatta $f'(x) = 2x$.

b) Voidaan nyt suoraan laskea $f'(5)$ ja $f'(-5)$.

$$f'(5) = 2 \cdot 5 = 10.$$
$$f'(-5) = 2 \cdot (-5) = -10.$$

c) Kohtaan $x = \frac{1}{2}$ piirretyn tangentin kulmakerroin k on derivaatta kohdassa $\frac{1}{2}$.

$$k = f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Pohdinta A.13 Osoita seuraavat väitteet oikeaksi käyttämällä erotusosamäärän raja-arvoa.

a) Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on nolla jokaisessa pisteessä a, eli $f'(x) = 0$ kaikilla $x = a$.

b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin $f(x) = ax$ derivaatan arvo on a jokaisessa pisteessä a, eli $D(f(x)) = a$.

Lause A.14 Monomin derivaatan yleinen kaava

Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Funktion $f(x) = x^n$ derivaatta pisteessä a on muotoa

$$Df(a) = na^{n-1}.$$

Kun derivoidaan monomi x^n, niin eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäisen monomin eksponentti muuttuu derivoidun monomin kertoimeksi.

Pohdinta A.15 a) Tutki Geogebran avulla funktioiden $2 \cdot g(x)$, $g(x)$ derivaattoja, kun $g(x) = x^2$. Mitä huomaat?

b) Olkoot $k \in \mathbb{R}$ ja $f(x)$ derivoituva funktio. Osoita , että $D(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x)$ erotusosamäärän avulla.

Lause A.16 Vakiolla kerrotun funktion derivaatta

Olkoot $k \in \mathbb{R}$ ja $f(x)$ derivoituva funktio. Tällöin

$$D(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x).$$

Lause A.17 Vakiofunktion derivaatta

$Dc = 0$, kun c on vakio.

4. a) Määritä seuraavien funktioiden derivaattafunktiot laskemalla erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x.

$$1) f(x) = 4x^2.$$
$$2) g(x) = \frac{1}{2}x^2.$$
$$3) n(x) = x.$$
$$4) h(x) = ax^2.$$

b) Määritä

$$1) f'(2).$$
$$2) g'(3).$$
$$3) n'(-2).$$
$$4) h'(-3).$$

Tarkista lopuksi Geogebralla.

5. Tutki funktiota $f(x) = x$.

a) Tutki funktion pisteiden $(2, 2)$,$(5, 5)$ kautta kulkeva sekanttia ja sen kulmakerroin. Mitä huomaat?

b) Selvitä erotusosamäärämenetelmällä funktion $f(x) = x$ derivaatta.

c) Piirrä derivaatan kuvaaja ja tutki funktion $f(x) = x$ derivaatan arvoa kohdissa $x \in \mathbb{R}$. Mitä huomaat ?

6. Tutki Geogebran avulla. Maapallon väkilukua vuosien 1800 ja 2000 välisenä aikana kuvaa likimain funktio $f(x) = \frac{1}{15}x^2 - 241x + 217551$, kun $1800 < x < 2000$ ja muuttuja x

on vuosiluku.

a) Mikä oli vuosien 1840 ja 1950 välisenä aikana väkiluvun keskimääräinen kasvunopeus ?

b) Mikä on hetkellinen kasvunopeus vuoden 1870 alussa ?

7. Alla on esitetty monomin derivaatan yleiskaavan todistuksen vaiheet. Laita monomin derivaatan yleiskaavan todistuksen vaiheet oikeaan järjestykseen.

1) Lauseke voidaan supistaa, sillä jos n on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, niin lauseke $x^n - a^n$ voidaan ilmaista tulona $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})$
2) $= \underbrace{a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + ... + a^2a^{n-3} + aa^{n-2} + a^{n-1}}_{\text{n}kpl} = na^{n-1}$
3) Yleisesti funktion x^n erotusosamäärä kohdassa a on $\frac{x^n - a^n}{x-a}$
4) joten,$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ $=\lim_{x\to a} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}$
5) Siis funktiolle $f(x) = x^n$ pätee$f'(a) = na^{n-1}$. Merkitsemällä muuttujaa kirjaimella x saadaan funktion$f(x) = x^n$ derivaattafunktio$f'(x) = nx^{n-1}$.
6) Supistamisen jälkeen erotusmäärä tulee muotoon $x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}$

8. Laske

$$a)\frac{d}{dx}3x^{2020} \qquad b)\frac{d}{da}abx \qquad c)\frac{d}{dz}x^{-1}y^3z^3 \qquad d)\frac{d}{db}t^9h^3s^4 \qquad e)\frac{d}{dr}\frac{4\pi r}{3}.$$

9. Määritä $f'(x)$ ilman teknisiä apuvälineitä ja derivoimissäännön avulla, kun $f(x)$ on

$$a)36^{17} \qquad b) - 7x^{19} \qquad c)\frac{4x^5}{5} \qquad d)\frac{x^{2020}}{10} \qquad e)\pi^2 \qquad f)2020 \qquad g)x\sqrt{2}.$$

10. Eräs oppilas pudotti vahingossa puhelimensa pilvenpiirtäjästä. Puhelimen putoama matka on metreinä ja aika t sekunteina, putoamismatkan ilmaisee funktio $s(t) = 3.9t^2$ (yksikkönä metri). Millä nopeudella puhelin putoaa a) $1,5s$ b) $6s$ kuluttua? Laske ensin ja tarkista vastausta Geogebrasta.

11. Onko väite aina, joskus vai ei koskaan totta?

Väitteet:

a) Funktion keskimääräinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle piirretyn sekantin kulmakerroin.

b) Funktion derivaatta tietyssä kohdassa on funktion kuvaajalle kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

c) Merkinnät $f'(x)$ ja $\frac{d}{dx}f(x)$ tarkoittavat samaa asiaa.

d) Tiedetään , että funktio kulkee pisteen $(2, 3)$ kautta. Sen avulla pystytään päättelemään, että funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 2$ asetetun tangentin kulmakerroin on 3 .

e) Funktion $f(x) = x^0$ derivaatan arvo on 1.

f) Tangentti on suora, joka kulkee kuvaajan kahden pisteen kautta.

12. Eräällä funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f(a + b) = f(a) + f(b) + 2ab$ kaikilla a ja b. Lisäksi funktio f on derivoituva kohdassa 0 ja $f'(0) = 2$.

1) Määritä $f(0)$.

2) Määritä derivaattafunktio $f'(x)$.

13. Funktio f on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja täyttää seuraavat ehdot:

1) on olemassa äärellinen raja-arvo $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x, y.

Osoita, että funktiolla f on derivaatta jokaisella arvolla x. [yo pitkä S1967/7a]

B Opettajan opas

Tässä kappaleessa esitetään tiiviisti suuntaa-antava tuntijako sekä tavoitteet ja opas opettajalle. Oppaassa perustellaan pohdintatehtävissä, mihin niillä pyritään ja annetaan eriyttämistä varten tehtävään liittyviä vinkkejä. Pohdintatehtävät on tarkoitus tehdä pareittain, mutta halutessaan ne saa tehdä yksinkin.

B.1 Tuntijako

Tuntijako on tehty 75 minuutin oppitunneille ja tämä on vain malli.

- 1X75min Raja-arvo
- 1X75min Derivaatta
- 1X75min Derivaatta

B.2 Raja-arvo

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- Raja-arvon tulkitseminen ja sen määrittäminen
- Raja-arvon laskusäännöt

Kappaleen tavoitteena oppilaille:

- Ymmärtää raja-arvo käsitteenä ja soveltaa aiemmin opittuun tietoon.
- Osaa tutkia ja määrittää erilaisten funktioiden raja-arvoa.
- Osaa käyttää Geogebraa tehtävän ratkaisun apuna.
- Hahmottaa raja-arvon olemassaolon.

Pohdintatehtävässä *A*.1 funktioiden $l(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ ja $n(x) = (x-2)\cdot\sin(\dfrac{1}{x-2})$ analyyttisen esityksellä ei pysty näkemään suoraa raja-arvon olemassaoloa kohdassa $x = 2$. Tästä syystä kannattaa suurentaa funktioiden kuvaajat tarpeeksi isoksi ja vetää x pistettä niin lähelle kohtaa 2 kuin mahdollista. Tällöin raja-arvon olemassaolon voi nähdä selkeästi Geogebralla. Eriyttäessä ylöspäin oppilas voi tutkia myös cosini- ja tangenttifunktioita ja alaspäin eriytyksessä funktiot $l(x)$ ja $n(x)$ voi käydä läpi vasta myöhemmässä vaiheessa. Tärkeintä tässä vaiheessa on, että oppilaat saavat raja-arvon ideasta kiinni jollakin tasolla. Tämä helpottaa myöhempää raja-arvon määritelmän sisäistämistä.

Pohdintatehtävän *A*.6 jälkeen oppilaiden pitäisi osata hyödyntää jollakin tavalla raja-arvon laskusääntöjä. Eriyttäessä ylöspäin oppilaat voivat laskea tehtävän uudestaan ilman välivaiheita. Eriyttäessä alaspäin oppilaille voidaan antaa tehtävässä käytetyt laskusäännöt ja pyytää perustelemaan tehtyjä valintoja.

B.3 Derivaatta

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- Derivaatan määritelmä raja-arvon avulla.
- Derivaattaan liittyvät käsitteet.

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- Derivaatan lausekkeet.
- Vakiolla kerrotun funktion derivaatta.

Kappaleen tavoitteena oppilaille:

- Ymmärtää raja-arvon ja derivaatan välinen yhteys.
- Ymmärtää mistä derivaattalausekkeet tulevat.
- Osaa derivoida ilman teknisiä apuvälineitä.
- Osaa derivoida ja soveltaa sanallisissa tehtävissä.
- Osaa käyttää Geogebraa tehtävän ratkaisun apuna.

Pohdintatehtävässä *A.7* kannattaa ohjeistaa oppilaita Geogebran käytössä esimerkiksi tangentin kulmakertoimen määrittämiseen ja liukupisteiden muodostamiseen. Tehtävän voi viedä pidemmälle sillä tavalla, että pyydetään muodostamaan tangentti muissa pisteissä ja kysymään "pystyykö jokaisessa pisteessä muodostamaan tangenttia? Miksi?". Alaspäin eriyttäessä voi muodostaa oppilaille d) ja e) kohdista lausekkeet valmiiksi ja pyytää laskemaan raja-arvot. Tämän jälkeen selitetään koko prosessi alusta lähtien. Tärkeintä on, että oppilaat saavat linkityksen raja-arvon ja derivaatan välille sekä huomaavat, miten tangentti muodostuu lähestyessään jotakin pistettä.

C vastaukset

1.
$\lim_{x\to5} \dfrac{x^2-25}{x-5} = 10$

$\lim_{x\to-8} \dfrac{x^2+8x}{x+8} = -8$

$\lim_{x\to3} \dfrac{x^4-81}{x^2-29} = 0$

$\lim_{x\to-3/2} \dfrac{x^2+12x-9}{4x^2-9}$, ei ole määritelty kohdassa $-\dfrac{3}{2}$

$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2.
a)
$\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-|3-2x|}{5+|3-2x|} = 0$

b)
Funktion raja-arvo kohdassa -4 on -6 ja kohdassa 2 ei ole määritelty.

c)
$a = 2$

d)
$\lim_{x\to0} f(x) = \dfrac{x^2-100}{|x-10|} = -1$
$\lim_{x\to-10} f(x) = \dfrac{x^2-100}{|x-10|} = 0$

3.

a) 256

b) 8

4.
a)

$$1) f(x) = 8x.$$
$$2) g(x) = x.$$
$$3) n(x) = 1.$$
$$4) h(x) = 2ax.$$

b)

$$
\begin{aligned}
&1) f'(2) = 16.\\
&2) g'(3) = 3.\\
&3) n'(-2) = 1.\\
&4) h'(-3) = -6a.
\end{aligned}
$$

5.

b) 1

6.

a) 11.67 miljoonaa ihmistä/vuosi b) 8.33 miljoonaa ihmistä/vuosi

7.
3)1)2)4)6)5)

8.

$$a)6060x^{2019}, \qquad b)bx, \qquad c)\frac{3y^3z^2}{x}, \qquad d)0, \qquad e)\frac{4\pi}{3}.$$

9.

$$a)0, \qquad b) -133x^{18}, \qquad c)4x^2, \qquad d)202x^{2019}, \qquad e)0, \qquad f)0, \qquad g)\sqrt{2}.$$

10.
a) $7,8m/s$
b) $46,8m/s$

11.
a) A
b) A
c) A
d) J
e) E
f) E

12.
1)0
2)$2x + 2$

13.

$a) -8$ $\quad b)\frac{-3}{4}$ $\quad c) -6$