Ryhmäteorian suora tulo

LuK-tutkielma
Sanni-Ilona Nikkinen
2547671
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisällys

1 Esitietoja **3**
1.1 Ryhmä 3
1.2 Konjugaatti 4
1.3 Isomorfismi 4
1.4 Aliryhmä 6
1.5 Normaali aliryhmä 7

2 Suora tulo **10**
2.1 Ulkoinen suora tulo 10
2.2 Sisäinen suora tulo 12

Lähdeluettelo **16**

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään ryhmäteoriaan liittyvää käsitettä suora tulo, joka jakautuu ulkoiseen ja sisäiseen suoraan tuloon. Ennen varsinasita aihetta tutkielman ensimmäisessä osiossa käydään läpi tarvittavia esitietoja, jossa tutustutaan lyhyesti ryhmän, konjugaatin ja aliryhmän käsitteisiin sekä vähän laajemmin esimerkkienkin avulla isomorfismiin sekä normaaliin aliryhmään. Esitiedoissa myös aukaistaan, mitä tarkoitetaan kun operoidaan kahta joukkoa keskenään sekä kun operoidaan ryhmän alkiolla sen aliryhmää.

Tutkielman toisessa osiossa päästään suoraan tuloon, josta ensin käsitellään ulkoinen suora tulo ja sitten sisäinen suora tulo sekä tarkastellaan niiden rakenneyhtäläisyyttä.

Tässä tutkielmassa on käytetty pääasiassa lähteenä [1]. Lähteinä joillekin määritelmille sekä esimerkeille ovat toimineet myös [2] ja [3] sekä luentomateriaali [4]. Tutkielmassa on laskettu monivaiheisemmin lähteistä otettuja esimerkkejä.

1 Esitietoja

1.1 Ryhmä

Määritelmä 1.1. Otetaan joukosta G alkiot x, y ja z. Operaatio $(*)$ on assosiatiivinen, jos $x * (y * z) = (x * y) * z$ jokaiselle $x, y, z \in G$.

Määritelmä 1.2. Aidosti epätyhjä joukko G on ryhmä binäärisellä operaatiolla $(*)$, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

- operaation binäärisyys toteutuu eli

  $$x * y \in G$$

  jokaiselle $x, y \in G$

- operaatio on assosatiivinen eli

  $$x * (y * z) = (x * y) * z$$

  kaikilla $x, y, z \in G$.

- neutraalialkio on olemassa eli

  $$x * 1_G = x$$
  $$1_G * x = x$$

  kaikilla $x \in G$

- käänteisalkiolla kertominen antaa tulokseski neutraalialkion eli

  $$x * x^{-1} = 1_G$$
  $$x^{-1} * x = 1_G$$

  kaikilla $x \in G$

Jatketaan Määritelmää 1.2 ja lisätään siihen vielä määritelmä Abelin ryhmästä.

Määritelmä 1.3. Jos G on ryhmä operaatiolla $(*)$, niin alkiot x ja y kommutoivat, jos

$$x * y = y * x.$$

Jos kaikki ryhmän alkiot kommutoivat keskenään, niin ryhmä G on silloin Abelin ryhmä.

Suraavaksi määritellään bijektiivisyys kuvaukselle.

Määritelmä 1.4. Valitaan kaksi aidosti ei-tyhjää joukkoa S ja J . Kuvaus $g : S \to J$ on bijektio jos ja vain jos se on injektio ja surjektio.

1. Kuvaus g on injektio, jos lausekkeesta $g(a) = g(b)$ saadaan, että $a = b$ kaikille $a, b \in J$.
2. Kuvaus g on surjektio, jos kaikille alkioille $a \in J$ löytyy sellainen alkio $b \in S$, että $g(b) = a$

Jos kuvaus $g : S \to J$ on bijektio, niin silloin sen käänteiskuvaus $g^{-1} : J \to S$ on myös bijektio.

1.2 Konjugaatti

Määritelmä 1.5. Oletetaan, että G on ryhmä ja valitaan kaksi alkiota $x, y \in G$. Voidaan määritellä, että

$$x^y = y^{-1}xy \in G$$

Nyt sanotaan, että x^y on alkion x *konjugaatti* eli alkio y konjugoi alkion x muotoon x^y.

Huomataan, että alkiot x ja y kommutoivat ainostaan silloin, kun

$$x^y = x$$

ja symmetriasta seuraa, että x ja y kommutoivat, jos ja vain jos

$$y^x = y.$$

Voidaan myös nähdä, että $x^x = x$ ja $1^x = 1$ kaikille $x \in G$.

1.3 Isomorfismi

Määritelmä 1.6. Oletetaan, että X ja Y ovat ryhmiä. Kuvaus $\alpha : X \to Y$ on *homomorfismi*, jos kaikilla $a, b \in X$

$$\alpha(ab) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$$

Kuvaus ryhmältä toiselle ryhmälle on homomorfismi, jos rakenne säilyy. Jos homomorfismi kuvaus on bijektiivinen, niin silloin se on isomorfismi.

Isomorfsimi on bijektiivinen kuvaus joukolta toiselle joukolle, missä rakenne säilyy. Rakenteina voi olla melkeinpä mitkä tahansa esimerkiksi algebraaliset laskutoimitukset tai etäisyysfunktiot. Suoran tulon kannalta ryhmäisomorfismi on merkittävässä asemassa, koska se yhdistää ulkoisen ja sisäisen suoran tulon. Ryhmäisomorfismissa tutkitaan joukkojen sijasta ryhmiä, mutta muuten periaate on sama eli ryhmäisomorfismi on bijektiivinen kuvaus ryhmältä toiselle ryhmälle, missä rakenne edelleen säilyy. Isomorfismi toimii myös kuvausten käänteiskuvauksille.

Määritelmä 1.7. Olkoon X ja Y ryhmiä, joissa molemmissa on eri operaatiot. Merkitään $(X, \cdot)$ ja $(Y, *)$, missä $\cdot$ ja $*$ kuvastavat mitä tahansa kahta erilaista operaatiota. Jos on olemassa bijektiivinen kuvaus $g : X \to Y$, mikä toteuttaa ehdon $g(a \cdot b) = g(a) * g(b)$ jokaiselle $a, b \in X$, niin tällöin kuvaus g on *ryhmäisomorfismi.*

Huomautus 1.8. Edellinen määritelmä 1.7 pätee myös käänteiskuvaukselle. Nyt $g^{-1} : Y \to X$ ja ehto $g^{-1}(a * b) = g^{-1}(a) \cdot g^{-1}(b)$ jokaiselle $a, b \in Y$ toteutuu, jolloin kuvaus g^{-1} on myös ryhmäisomorfismi.

Esimerkki 1.9. Tutkitaan ryhmää $(\mathbb{R}, +)$, jossa joukkona on reaaliluvut ja operaationa yhteenlasku ja ryhmää $(\mathbb{R}^+, \times)$, jossa joukkona on positiiviset reaaliluvut ja operaationa kertolasku. Määritellään bijektiivinen kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, jossa $f(x) = 10^x$. Nyt voidaan laskea, että

$$f(a + b) = 10^{a+b} \text{ jokaiselle } a, b \in \mathbb{R}$$

ja eksponenttien laskusääntöjen avulla

$$f(a) \cdot f(b) = 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \text{ jokaiselle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Huomataan siis, että $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$, joten Määritelmän 1.7 mukaan kuvaus f on ryhmäisomorfismi. Tutkitaan vielä käänteiskuvauksen ryhmäisomorfisuus. Koska f on bijektiivinen kuvaus, sillä on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, jossa $f^{-1}(x) = \log(x)$, joka saadaan logaritmin ja eksponenttien laskusäännöistä. Nyt voidaan laskea, että

$$f^{-1}(a \cdot b) = \log(a \cdot b) \text{ jokaiselle } a, b \in \mathbb{R}$$

ja logaritmin laskusääntöjen avulla

$$f^{-1}(a) + f^{-1}(b) = \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b) \text{ jokaiselle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Huomataan taas, että $f^{-1}(a \cdot b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$, joten Määritelmän 1.7 mukaan käänteiskuvaus f^{-1} on myös ryhmäisomorfismi.

Nyt voidaan antaa alkioille a ja b reaalilukuarvot $a = 7$ ja $b = 15$. Saadaan kuvaukselle f arvoksi:

$$\begin{aligned} f(7+15) &= 10^{7+15} = 10^{22} \\ f(7) \cdot f(15) &= 10^{7} \cdot 10^{15} = 10^{7+15} = 10^{22} \end{aligned}$$

Ja käänteiskuvaukselle f^{-1} saadaan arvoksi:

$$\begin{aligned} f^{-1}(7 \cdot 15) &= \log(7 \cdot 15) = \log(105) \\ f^{-1}(7) + f^{-1}(15) &= \log(7) + \log(15) = \log(7 \cdot 15) = \log(105) \end{aligned}$$

1.4 Aliryhmä

Ryhmän G aliryhmä ei ole koskaan tyhjä, koska se sisältää aina neutraalialkion 1_G. Ryhmän G osajoukko voi taas olla tyhjäkin eli $N \neq \emptyset$, mutta tällöin se ei voi olla aliryhmä. Jotta osajoukko N on ryhmän G aliryhmä, osajoukosta voidaan ottaa mielivaltaisesti kaksi alkiota $a, b \in N$ niin, että kaikille $a, b \in N$ pätee, että $ab^{-1} \in N$.

Määritelmä 1.10. Oletetaan, että G on ryhmä, jolla on osajoukko N. Osajoukko N on ryhmän G *aliryhmä*, jos seuraavat ehdot täyttyvät.

1. $1_G \in N$
2. Jos $a, b \in N$, niin $ab \in N$.
3. Jos $a \in N$, niin myös $a^{-1} \in N$.

Aliryhmää merkitään $N \leq G$ tai toisin päin $G \geq N$. Jos kyseessä on aito aliryhmä, niin $N \neq G$, jolloin merkintänä toimii $N < G$ tai $G > N$.

Lemma 1.11. *Jos $N \neq \emptyset$ sekä, jos otetaan $a, b \in N$ niin $ab^{-1} \in N$, niin osajoukko N on ryhmän R aliryhmä.*

Todistus. Oletetaan, että ehdot

- $N \neq \emptyset$

- $a, b \in N$ niin $ab^{-1} \in N$

toteutuvat. Koska $N \neq \emptyset$, voidaan valita alkio $n \in N$. Jos ehdossa $a, b \in N$ niin $ab^{-1} \in N$ määrätään, että $a = b = n$ niin tällöin

$$1 = nn^{-1} \in N.$$

Jos taas määrätään, että $a = 1$ ja $b = n$ niin tällöin

$$1n^{-1} = n^{-1} \in N$$

Näistä seuraa, että Määritelmän 1.10 ehdot 1. ja 3. pätevät. Ehdon 2. todistmiseksi valitaan $a, b \in N$. Koska osajoukon alkioiden käänteisalkiot kuuluvat myös osajoukkoon, niin $b^{-1} \in N$. Nyt ehdosta $a, b \in N$ niin $ab^{-1} \in N$ saadaan, että $a(b^{-1})^{-1} = ab \in N$, joten osajoukko N on ryhmän R aliryhmä. $\square$

1.5 Normaali aliryhmä

Oletetaan, että G on ryhmä, jolla on osajoukot A ja B. Osajoukkojen tulo määritellään seuraavasti:

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}.$$

Jos jompi kumpi osajoukoista on tyhjä, niin silloin tulo on myös tyhjä. Yhtälailla, jos A on ei-tyhjä joukko ja $G = B$, sitten $AB = G$. Tämä nähdään, kun huomataan, että määritelmän mukaan osajoukkojen tulo on ryhmän G osajoukko eli

$$AB \subseteq G$$

Nyt voidaan näyttää, että

$$G \subseteq AB.$$

Koska $A \neq \emptyset$, voidaan valita alkio $a \in A$. Valitaan vielä alkio $g \in G$ mielivaltaisesti, jolloin

$$g = a(a^{-1}g) \in AB.$$

Vastaavasti tämä pätee, jos B on ei-tyhjä joukko ja $G = A$, sitten $AB = G$. Nyt voidaan näyttää, että

$$G \subseteq AB.$$

Koska $B \neq \emptyset$, voidaan valita alkio $b \in B$. Valitaan vielä alkio $g \in G$ mielivaltaisesti, jolloin

$$g = (b^{-1}g)b \in AB.$$

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa operoidaan ryhmän G aliryhmää N alkiolla $g \in G$. Operointi voi tapahtua vasemmalta tai oikealta, mutta niissä ei ole eroavaisuuksia, joten tarkastellaan operointia vasemmalta.

Lemma 1.12. *Oletetaan, että G on ryhmä, jolla on aliryhmä N. Kun $g \in G$, niin $gN = N$ jos ja vain jos $g \in N$.*

Todistus. Jos $gN = N$ niin

$$g = g1_G \in N,$$

joten $g \in N$. Toisaalta, jos taas $g \in N$ niin silloin $gN \subseteq N$, koska N on ryhmä. Pitää vielä todistaa, että $N \subseteq gN$. Valitaan jokin $n \in N$. Koska $g^{-1} \in N$, saadaan, että

$$n = g(g^{-1}n) \in gN.$$

Tällöin $gN \subseteq N \subseteq gN$, joten $gN = N$. □

Lemma 1.13. *Oletetaan, että G on ryhmä, jolla on aliryhmä N. Kun $g, g_1 \in G$, niin $gN = g_1N$ jos ja vain jos $g^{-1}g_1 \in N$*

Todistus. Huomataan, koska $gN = g_1N$, niin

$$g^{-1}gN = g^{-1}g_1N$$

eli $N = g^{-1}g_1N$. Lemman 1.12 mukaan

$$N = g^{-1}g_1N \text{ jos ja vain jos } g^{-1}g_1 \in N.$$

Täten

$$gN = g_1N \text{ jos ja vain jos } g^{-1}g_1 \in N.$$

□

Määritelmä 1.14. Olkoon G ryhmä ja sen aliryhmä on N eli $N \leq G$. N on ryhmän G *normaali aliryhmä*, jos $gN = Ng$ tai yhtäpitävästi $g^{-1}Ng = N$ kaikilla $g \in G$. Normaalin aliryhmän merkintä on tällöin $N \trianglelefteq G$.

Määritelmän 1.14 lausekkeesta $gN = Ng$ kaikilla $g \in G$ ei välttämättä seuraa, että $gn = ng$ jokaisella $n \in N$. Jos kuitenkin jokainen ryhmän G alkio kommutoisi jokaisen ryhmän N alkion kanssa, N olisi ryhmän G normaali aliryhmä.

Lause 1.15. *Oletetaan, että N on aliryhmä. N on ryhmän G normaali aliryhmä eli $N \trianglelefteq G$ jos ja vain jos $g^{-1}ng \in N$ jokaiselle $n \in N$ ja $g \in G$.*

Esimerkki 1.16. Tutkitaan ryhmää $(\mathbb{R}^2, +)$. Nyt $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Tarkastellaan, onko $\mathbb{R}^2$ ryhmä. Ryhmä toimii samallalailla kuin 2-pituisten vektoreiden operointi yhteenlaskulla, joten binäärisyys toteutuu, koska

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Myös assosatiivisuus toteutuu, koska

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Laskemalla

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (0, 0) &= (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1)\\ (0, 0) + (x_1, y_1) &= (0 + x_1, 0 + y_1) = (x_1, y_1)\end{aligned}$$

nähdään, että neutraalialkio $(0, 0)$ on olemassa ja käänteisalkiolla operoiminen antaa tulokseksi neutraalialkion, koska

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) &= (x_1 + (-x_1), y_1 + (-y_1)) = (0, 0)\\ (-x_1, -y_1) + (x_1, y_1) &= (-x_1 + x_1, -y_1 + y_1) = (0, 0).\end{aligned}$$

Eli jokaisella alkioparilla on käänteisalkiona vastalukupari $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$. Yhteenlaskuoperaatio on myös kommutatiivinen, koska

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Koska kommutatiivisuuskin toteutuu, $\mathbb{R}^2$ on Abelin ryhmä ja kaikki Abelin ryhmän aliryhmät ovat normaaleja aliryhmiä, joten ryhmät $A = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ ja $B = \{(0, y)|y \in \mathbb{R}\}$ ovat ryhmän $\mathbb{R}^2$ normaaleja aliryhmiä.

Todistus. Voidaan laskea aliryhmälle A:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)^{-1} + (x, 0) + (x_1, y_1) &= (-x_1, -y_1) + (x, 0) + (x_1, y_1)\\ &= (-x_1 + x + x_1, -y_1 + 0 + y_1)\\ &= (x, 0) \in A\end{aligned}$$

ja aliryhmälle B:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)^{-1} + (0, y) + (x_1, y_1) &= (-x_1, -y_1) + (0, y) + (x_1, y_1) \\ &= (-x_1 + 0 + x_1, -y_1 + y + y_1) \\ &= (0, y) \in B\end{aligned}$$

Lauseen 1.15 nojalla ryhmät A ja B ovat ryhmän $\mathbb{R}^2$ normaaleja aliryhmiä. $\square$

2 Suora tulo

Suora tulo, tai toiselta nimeltä karteesinen tulo, tarkoittaa ryhmäteoriassa operaatiota, jossa yksinkertaisessa tapauksessa kaksi ryhmää muodostaa uuden ryhmän. Kun puhutaan suorasta tulosta, tarkoitetaan yleensä ulkoista suoraa tuloa. On olemassa myös sisäinen suora tulo, mikä on isomorfinen ulkoisen suoran tulon kanssa. Tästä seuraa, että ulkoinen ja sisäinen suora tulo ovat periaatteessa sama asia, mutta ne ovat vain kaksi eri tarkastelutapaa.

2.1 Ulkoinen suora tulo

Oletetaan, että A ja B ovat ryhmiä. Nyt määritellään, että $G = A \times B$ on joukko järjestettyjä pareja (a, b) kun $a \in A$ ja $b \in B$ eli $G = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Tähän joukkoon lisätään binäärinen operaatio, jotta se muuttuu ryhmäksi. Eli oletetaan, että $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, mistä voidaan määritellä, että

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2),$$

missä $(a_1a_2) \in A$ ja $(b_1b_2) \in B$, joten selvästi $(a_1a_2, b_1b_2) \in A \times B$. Tarkastetaan seuraavaksi assosiatiivisuus:

$$\begin{aligned}((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) &= (a_1a_2, b_1b_2) * (a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3, b_1b_2b_3) \\ &= (a_1, b_1) * (a_2a_3, b_2b_3) \\ &= (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3))\end{aligned}$$

Neutraalialkio on olemassa ja se on $(1_A, 1_B)$, koska:

$$\begin{aligned}(a, b) * (1_A, 1_B) &= (a1_A, b1_B) = (a, b) \\ (1_A, 1_B) * (a, b) &= (1_Aa, 1_Bb) = (a, b).\end{aligned}$$

Myös käänteisalkio on olemassa ja se on (a^{-1}, b^{-1}), koska:

$$(a,b) * (a^{-1}, b^{-1}) = (aa^{-1}, bb^{-1}) = (1_A, 1_B)$$
$$(a^{-1}, b^{-1}) * (a,b) = (a^{-1}a, b^{-1}b) = (1_A, 1_B).$$

Näin ollen $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2) \in A \times B$ on binäärinen operaatio joukossa $A \times B$. Joten joukko $A \times B$ on muutettu ryhmäksi, joka on ulkoinen suora tulo A:sta ja B:stä.

Määritelmä 2.1. Jos otetaan ryhmistä A ja B alkioparit (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$, voidaan laskea:

$$(a,b) * (a', b') = (aa', bb') \in A \times B$$

Voidaan merkitä, että $E = A \times B$, missä E on *ulkoinen suora tulo.*

Esimerkki 2.2. Esimerkissä 1.16 määriteltiin ryhmä $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Voidaan huomata, että $\mathbb{R}^2$ on ulkoinen suora tulo, koska $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Tämä voidaan laskea seuraavasti

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Esimerkki 2.3. Lasketaan joukoille $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ja $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ ulkoinen suora tulo. Nyt ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ alkiot ovat muotoa

$$(x, y) \text{ missä } x \in \mathbb{Z}_2 \text{ ja } y \in \mathbb{Z}_3.$$

Eli

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2)\}$$

Seuraavaksi tutkitaan, onko $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_6$ kanssa. Selvitetään ensin, millä alkiolla ryhmässä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ saadaan tulokseksi koko ryhmä, kun alkiota lisätään itseensä uudestaan ja uudestaan.
Alkiolla $(0, 0)$:

$$0(0,0) = (0,0)$$

Alkiolla $(1, 0)$:

$$0(1,0) = (0,0) \qquad 1(1,0) = (1,0)$$

Alkiolla $(0, 1)$:

$$0(0,1) = (0,0) \qquad 2(0,1) = (0,2)$$
$$1(0,1) = (0,1)$$

Alkiolla $(1,1)$:

$$\begin{aligned} 0(1,1) &= (0,0) & 3(1,1) &= (1,0) \\ 1(1,1) &= (1,1) & 4(1,1) &= (0,1) \\ 2(1,1) &= (0,2) & 5(1,1) &= (1,2) \end{aligned}$$

Alkiolla $(0,2)$:

$$\begin{aligned} 0(0,2) &= (0,0) & 2(0,2) &= (0,1) \\ 1(0,2) &= (0,2) \end{aligned}$$

Alkiolla $(1,2)$:

$$\begin{aligned} 0(1,2) &= (0,0) & 3(1,2) &= (1,0) \\ 1(1,2) &= (1,2) & 4(1,2) &= (0,2) \\ 2(1,2) &= (0,1) & 5(1,2) &= (1,1) \end{aligned}$$

Joten alkioilla $(1,1)$ ja $(1,2)$ saadaan tulokseksi koko ryhmä ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ kanssa.

Määritellään yleinen muoto ulkoiselle suoralle tulolle.

Määritelmä 2.4. Oletetaan, että $E_1, ..., E_n$ ovat ryhmiä. Näille ryhmille voidaan määritellä ulkoinen suora tulo seuraavasti:

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, ..., e_n) | e_i \in E_i \ \forall \ i \text{ niin että } 1 \leq i \leq n\}$$

ja

$$(e_1, e_2, ..., e_n) * (e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}) = (e_1 e_1^{'}, e_2 e_2^{'}, ..., e_n e_n^{'}).$$

Ryhmän E neutraalialkio on $(1_{E_1}, 1_{E_2}, ..., 1_{E_n})$ ja alkioin $(e_1, e_2, ..., e_n)$ käänteisalkio on $(e_1^{-1}, e_2^{-1}, ..., e_n^{-1})$.

2.2 Sisäinen suora tulo

Määritelmä 2.5. Tutkitaan ryhmää G, jolla on kaksi normaalia aliryhmää A ja B. G on *sisäinen suora tulo* normaaleista aliryhmistä A ja B, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $AB = G$
2. $A \cap B = 1_G$

Määritelmän 2.5 ehto 1. tarkoittaa, että normaalien aliryhmien A ja B tulo antaa vastaukseksi tutkittavan ryhmän G. Ehto 2. tarkoittaa taas, että normaalien aliryhmien A ja B leikkaus sisältää ainoastaan ryhmän G neutraalialkion.

Esimerkki 2.6. Esimerkissä 1.16 määriteltiin ryhmälle $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ normaalit aliryhmät

$$\begin{aligned} A =& \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\} \cong (\mathbb{R}, +) \\ B =& \{(0, y)|y \in \mathbb{R}\} \cong (\mathbb{R}, +), \end{aligned}$$

jotka ovat isomorfisia reaalilukujen muodostaman ryhmän kanssa. Nyt voidaan operoida normaalit aliryhmät keskenään eli AB, jossa ryhmän A alkiot summataan ryhmän B alkioiden kanssa, jolloin joukon AB alkiot ovat muotoa:

$$(x_A, 0) + (0, y_B) = (x_A + 0, 0 + y_B) = (x_A, y_B).$$

Esimerkin 2.2 perusteella huomataan, että

$$AB = \mathbb{R}^2.$$

Ryhmien A ja B leikkaus sisältää ainoastaan ryhmän $\mathbb{R}^2$ neutraalialkion, koska ryhmien A ja B ainoa yhteinen alkio on $(0, 0)$, joka on ryhmän $\mathbb{R}^2$ neutraalialkio. Nyt Määritelmän 2.5 ehdot 1. ja 2. täyttyvät, joten $\mathbb{R}^2$ on sisäinen suora tulo normaaleista aliryhmistä A ja B.

Esimerkki 2.7. Jatketaan ryhmän $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tarkastelua. Määritellään ensin sen kaikki aliryhmät:

$$\begin{aligned} &\langle 0 \rangle = \{0\} \\ &\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \langle 5 \rangle = \mathbb{Z}_6 \\ &\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\} = \langle 4 \rangle \\ &\langle 3 \rangle = \{0, 3\}. \end{aligned}$$

Tutkitaan nyt aliryhmiä $\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ja $\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Operoidaan näitä aliryhmiä keskenään yhteenlaskulla. Jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 &= \{0, 3\} + \{0, 2, 4\} \\ &= \{0 + 0, 0 + 2, 0 + 4, 3 + 0, 3 + 2, 3 + 4\} \\ &= \{0, 2, 4, 3, 5, 7\} \\ &= \{0, 2, 4, 3, 5, 1\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Joten $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$. Myös $\mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_3 = \{0\}$ eli aliryhmien $\mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_3$ leikkaus sisältää ainoastaan ryhmän $\mathbb{Z}_6$ neutraalialkion. Huomataan, että $\mathbb{Z}_6$ on Abelin ryhmä eli sen kaikki aliryhmät ovat normaaleja aliryhmiä. Joten nyt nähdään, että Määritelmän 2.5 kaikki ehdot täyttyvät, jolloin $\mathbb{Z}_6$ on sisäinen suora tulo normaaleista aliryhmistä $\mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_3$.

Lause 2.8. *Oletetaan, että A ja B ovat ryhmän G normaaleja aliryhmiä niin, että $AB = G$ ja aliryhmillä A ja B on ainoastaan neutraalialkio yhteisenä tekijänä, joten G on sisäinen suora tulo ryhmistä A ja B. Tästä seuraa, että ryhmä G on isomorfinen ulkoisen suoran tulon $A \times B$ kanssa.*

Todistus. Todistetaan ensin, että jokainen ryhmän A alkio kommutoi jokaisen ryhmän B alkion kanssa. Oletusten nojalla jokainen ryhmän G alkio pystytään esittämään muodossa ab jollain $a \in A$ ja $b \in B$. Nyt $B \trianglelefteq G$, joten

$$(b^{-1})^a \in B \text{ ja siksi } (b^{-1})^a b \in B.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $a^{-1}b^{-1}ab$. Toisaalta myös $A \trianglelefteq G$, joten

$$(a^{-1})^b \in A \text{ ja siksi } (a^{-1})a^b \in A,$$

joka voidaan myös kirjoittaa muodossa $a^{-1}b^{-1}ab$. Huomataan, että

$$a^{-1}b^{-1}ab = (b^{-1})^a b = (a^{-1})a^b$$

Joten

$$a^{-1}b^{-1}ab \in A \cap B = 1,$$

josta voidaan päätellä, että $a^{-1}b^{-1}ab = 1$. Siispä kaikki mielivaltaiset alkiot $a \in A$ ja $b \in B$ kommutoivat keskenään eli $ab = ba$. Seuraavaksi määritellään kuvaus $f : A \times B \to G$, missä $f(a, b) = ab$ kaikille $a \in A$ ja $b \in B$. Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} f((a,b)(a',b')) &= f(aa', bb') \\ &= aa'bb' \\ &= aba'b', \end{aligned}$$

koska ryhmän A alkiot kommutoivat ryhmän B alkioiden kanssa. Täten

$$f((a,b)(a',b')) = f(a,b)f(a',b').$$

Joten kuvaus f on homomorfismi eli antaa ryhmien A ja B kertolaskun alkiot ryhmään G. Jos $f(a,b) = f(a^{'}, b^{'})$ niin $ab = a^{'}b^{'}$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(a^{'})^{-1}a = b^{'}b^{-1}.$$

Nähdään, että vasen puoli kuuluu ryhmään A ja oikea puoli ryhmään B, joten molemmat puolet kuuluvat ryhmien A ja B leikkaukseen. Tästä seuraa, että molemmat puolet ovat yhtä kuin 1, joten $a = a^{'}$, $b = b^{'}$ ja kuvaus f on injektio. Koska $AB = G$, niin jokainen ryhmän G alkio voidaan esittää tulona ab joillekin $a \in A$ ja $b \in B$, joten kuvaus f on surjektiivinen. Näistä seuraa, että $A \times B$ on isomorfinen ryhmän G kanssa. $\square$

Lopuksi määritellään vielä yleinen muoto sisäiselle suoralle tulolle.

Määritelmä 2.9. Oletetaan, että G on ryhmä, jolla normaaleina aliryhminä $G_1, G_2, ..., G_n$. Voidaan sanoa, että ryhmä G on *sisäinen suora tulo* näistä aliryhmistä G_i, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $G_1G_2...G_n = G$

2. Jokaiselle normaalille aliryhmälle välillä $1 \leq i \leq n$, oletetaan, että $\hat{G}_i$ on tulo kaikista aliryhmistä G_j lukuun ottamatta aliryhmää G_i. Joten $\hat{G}_i = G_1 \cdots G_{i-1}G_{i+1} \cdots G_n$. Tällöin $G_i \cap \hat{G}_i = 1$ jokaiselle normaalille aliryhmälle.

Lähdeluettelo

[1] G. Smith, O. Tabachnikova: Topics in Group Theory, Springer-Verlag, London, 2000

[2] M.A. Armstrong: Groups and Symmetry, Springer-Verlag, New York, 1988

[3] D.S. Dummit, R.M. Foote: Abstract Algebra, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2004

[4] Markku Niemenmaa, Kari Myllylä, Topi Törmä: Algebran perusteet luentorunko, 2019