Hilateoriaa

LuK-tutkielma
Paula Eerikinharju
2549718
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisällys

Johdanto

Hiloja voidaan käsitellä järjestysteoreettisesta tai algebrallisesta näkökulmasta, koska hila voidaan määritellä kahdella eri tavalla; osittain järjestettynä joukkona, jolla on sekä supremum että infimum, tai algebrallisena rakenteena, joka toteuttaa tietyt ehdot. Tässä seminaarissa käsitellään hiloja algebrallisina rakenteina. Lopuksi käydään läpi esimerkki osittain järjestetyn joukon kautta määritetystä hilasta.

Tässä työssä käsitellään ensin peruskäsitteitä, joiden avulla päästään määrittelemään hila algebrallisesta näkökulmasta. Hilan määrittelemisen jälkeen esitellään esimerkki ja hilaan liittyviä lauseita. Määritellään myös osahila. Tämän jälkeen määritellään osittain järjestetty joukko, mistä päästään määrittelemään hila järjestysteoreettisesti. Tämän jälkeen todistetaan algebrallisen ja järjestysteoreettisen määritelmän yhtäpitävyys. Järjestysteoreettiseen määritelmään liittyen esitellään myös Hasse-diagrammi. Sen jälkeen määritellään hiloihin liittyviä käsitteitä liittyen hilan alkioihin ja erilaisiin hiloihin. Lopuksi todistetaan, että distributiivinen hila on aina modulaarinen, ja annetaan esimerkki modulaarisesta hilasta, joka ei ole distributiivinen.

1 Peruskäsitteitä

1.1 Joukko ja osajoukko

Määritelmä 1.1. Joukko on kokoelma alkioita. Jos a on joukon A alkio, sitä merkitään $a \in A$. Joukko B on jouko A osajoukko, jos jokainen joukon B alkio kuuluu joukkoon A. Tällöin merkitään $B \subset A$.

Esimerkki 1.2. Esimerkiksi joukko A, johon kuuluu alkiot a, b ja c, kuvataan

$$A = \{a, b, c\}.$$

Joukko $A_1 = \{a, b\}$ on joukon A osajoukko, mutta joukko $A_2 = \{a, d\}$ ei ole, koska alkio d ei kuulu joukkoon A.

1.2 Binäärinen operaatio

Määritelmä 1.3. Olkoon A epätyhjä joukko. Binäärinen operaatio joukossa A on kuvaus $f : A \times A \to A$. Binääristä operaatiota sanotaan myös laskuoperaatioksi.

Esimerkki 1.4. Otetaan kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, joka siis on epätyhjä joukko. Olkoon tässä joukossa kuvaus $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ niin, että kokonaislukua operoidaan yhteenlaskuoperaatiolla, jota voidaan merkitä merkillä $+$. Tällöin siis kokonaislukujen summa kuuluu myös kokonaislukuihin.

Otetaan joukon X potenssijoukko eli kaikkien joukon X osajoukkojen muodostama joukko. Olkoon tässä joukossa kuvaus $g : P(X) \times P(X) \to P(X)$ niin, että potenssijoukkoja operoidaan joukkojen leikkauksella. Tällöin siis joukon X potenssijoukkojen leikkaus kuuluu joukon X potenssijoukkoihin.

1.3 Algebrallinen rakenne

Määritelmä 1.5. Algebrallinen rakenne on systeemi, johon kuuluu jokin epätyhjä joukko ja vähintään yksi laskuoperaatio.

Esimerkki 1.6. Otetaan luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$, joka on epätyhjä joukko. Määritellään tässä joukossa kuvaus $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niin, että kuvaus f kuvaa lukujen yhteenlaskua, jota merkitään merkillä $+$ ja kuvaus g kuvaa lukujen kertolaskua, jota merkitään merkillä $\cdot$.

Nyt voidaan muodostaa tästä epätyhjästä joukosta ja kahdesta laskuoperaatiosta systeemi, joka on algebrallinen rakenne $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

2 Hila

2.1 Hilan määritelmä

Määritelmä 2.1. Olkoon $(A, \vee, \wedge)$ algebrallinen rakenne, jossa on joukko A ja kaksi binääristä operaatiota: liitto $\vee$ ja kohtaaminen $\wedge$. Tämä algebrallinen rakenne on hila, jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla alkioilla $a, b \in A$:

- Kommutatiivisuus: $a \wedge b = b \wedge a$ ja $a \vee b = b \vee a$.
- Assosiatiivisuus: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ja $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
- Absorptiolait: $a \wedge (a \vee b) = a$ ja $a \vee (a \wedge b) = a$.

Tällöin $(A, \vee, \wedge)$ on hila ja voidaan kutsua sitä esimerkiksi hilaksi L.

Esimerkki 2.2. Joukon X potenssijoukosta saadaan hila $L = (P(X), \cap, \cup)$, kun määritellään kohtaaminen joukkojen leikkauksena $\cap$ ja liitto joukkojen yhdisteenä $\cup$.

Olkoon joukon X osajoukot $A, B \in P(X)$. Joukkojen leikkaus $A \cap B$ on yhtä suuri kuin $B \cap A$. Sama pätee joukkojen yhdisteelle, joten kommutatiivisuus on voimassa.

Olkoon lisäksi osajoukko $C \in P(X)$. Nyt

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$$

ja

$$(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

eli assosiatiivisuus on voimassa.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ antaa kaikki joukkojen A ja B alkiot. Kun tästä yhdisteestä otetaan leikkaus joukon A kanssa, jää yhdisteestä pois kaikki joukon B alkiot ja jäljelle jää kaikki joukon A alkiot. Tällöin voidaan kirjoittaa $A \cap (A \cup B) = A$. Vastaavasti joukkojen A ja B leikkaus antaa kaikki alkiot, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Kun tästä otetaan unioni joukon A kanssa, saadaan mukaan kaikki ne alkiot, jotka ovat sekä joukossa A ja B ja jotka ovat pelkästään joukossa A. Tällöin saadaan kaikki joukon A alkiot ja voidaan kirjoittaa $A \cup (A \cap B) = A$. Tällöin myös absorptiolait ovat voimassa, ja voidaan todeta, että hilan L kaikki ominaisuudet ovat voimassa.

Lause 2.3. *Todista, että jos L on hila, niin $a \wedge b = a$ jos ja vain jos $a \vee b = b$.*

Todistus. Oletetaan, että $a \wedge b = a$. Muistetaan, että hilalla on voimassa absorptiolaki, eli

$$a \wedge (a \vee b) = a \text{ ja } a \vee (a \wedge b) = a.$$

Koska hila on myös kommutatiivinen, voidaan kirjoittaa alkio b muodossa

$$b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b).$$

Koska oletettiin, että $a \wedge b = a$, voidaan ylläoleva kirjoittaa muodossa

$$b \vee (a \wedge b) = b \vee a = a \vee b.$$

Vastaavasti absorptiolain ja kommutatiivisuuden mukaan voidaan kirjoittaa

$$b = b \wedge (b \vee a) = b \wedge (a \vee b) = (b \vee (b \wedge a)) \wedge (a \vee b).$$

Koska $a \wedge b = a$, saadaan edellinen muotoon

$$(b \vee (b \wedge a)) \wedge (a \vee b) = (b \vee a) \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge (a \vee b) = a \vee b.$$

Tällöin voidaan siis sanoa, että $a \wedge b = a$ jos, ja vain jos $a \vee b = b$. $\square$

Lause 2.4. *Jokaiselle hilan alkiolle a pätee, että*

a) $a \vee a = a$ ***b)*** $a \wedge a = a$.

Todistus. **a)** Hilalle pätee absorptiolaki, eli $a \wedge (a \vee b) = a$ ja $a \vee (a \wedge b) = a$. Tällöin voidaan kuvata lause $a \vee a$ muodossa

$$a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)).$$

Tiedetään, että $a \vee (a \wedge b) = a$. Tällöin ei siis ole väliä, mikä on $a \vee a$ yhtälön oikealla puolella; kuvataan sitä vaikka kirjaimella b. Nyt saadaan lause muotoon

$$a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a \vee (a \wedge b) = a.$$

b) Vastaavasti absorptiolain nojalla voidaan kuvata lause $a \wedge a$ muodossa

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)).$$

Absorptiolain mukaan nyt voidaan jälleen kuvata $a \wedge a$ kirjaimella b. Tällöin saadaan absorptiolakia käyttämällä lause muotoon

$$a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a \wedge (a \vee b) = a.$$

□

2.2 Osahila

Määritelmä 2.5. Olkoon joukolla A epätyhjä osajoukko A_1. Olkoon lisäksi hilalla A laskuoperaatiot liitto $\vee$ ja kohtaaminen $\wedge$. Tällöin hila $L_1 = (A_1, \vee, \wedge)$ on hilan $L = (A, \vee, \wedge)$ **osahila**, jos kaikilla $a, b \in A_1$ pätee, että $a \vee b \in A_1$ ja $a \wedge b \in A_1$.

Esimerkki 2.6. Olkoon joukko $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja sen osajoukko $A_1 = 1, 2, 3$. Olkoon lisäksi kuvaukset $f : A \times A \to A$ ja $g : A \times A \to A$ niin, että kuvaus f kuvaa alkioiden välistä supremumia, jota merkitään merkillä liitto $\vee$ ja kuvaus g kuvaa alkioiden välistä infimumia, jota merkitään merkillä kohtaaminen $\wedge$.

Nyt hila $L_1 = (A_1, \vee, \wedge)$ on hilan $L = (A, \vee, \wedge)$ osahila, koska joukko A_1 on joukon A osajoukko, ja jokaiselle mahdolliselle alkioparille hilassa L_1 on olemassa sekä liitto että kohtaaminen joukossa A_1.

3 Järjestysteoreettinen määritelmä

3.1 Osittain järjestetty joukko

Määritelmä 3.1. Matemaattinen rakenne (S, R) on osittain järjestetty joukko, jossa on joukko S ja relaatio R, jos relaatio R täyttää seuraavat ominaisuudet alkioiden x, y ja z kuuluessa joukkoon S:

- R on refleksiivinen eli xRx
- R on epäsymmetrinen eli jos xRy ja yRx, niin $x = y$
- R on transitiivinen eli jos xRy ja yRz, niin xRz.

Esimerkki 3.2. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ja relaatio $\leq$ muodostavat osittain järjestetyn joukon: jokaiselle luonnolliselle luvulle a, b ja c pätee refleksiivisyys, epäsymmetrisyys ja transitiivisuus:

$$\begin{gathered} a \leq a \text{ kaikilla luonnollisilla luvulla,} \\ \text{jos } a \leq b \text{ ja } b \leq a, \text{ niin } a = b \text{ ja} \\ \text{jos } a \leq b \text{ ja } b \leq c, \text{ niin } a \leq c. \end{gathered}$$

Myös joukon X potenssijoukko $P(X)$ ja relaatio osajoukkous $\subset$ muodostavat osittain järjestetyn joukon: jokaiselle joukon X osajoukolle $A, B, C \in P(X)$ pätee refleksiivisyys, epäsymmetrisyys ja transitiivisuus:

$$\begin{gathered} A \subset A \text{ jokaiselle osajoukolle,} \\ \text{jos } A \subset B \text{ ja } B \subset A \text{ , niin } A = B \text{ ja} \\ \text{jos} A \subset B \text{ ja } B \subset C \text{ , niin } A \subset C. \end{gathered}$$

3.2 Hilan määritelmä järjestysteoreettisesti

Määritelmä 3.3. Osittain järjestetty joukko $(S, \leq)$ on hila, jos kaikilla joukon S alkioilla a ja b on olemassa pienin yläraja eli supremum ja suurin alaraja eli infimum. Näitä merkitään $\sup(a, b)$ ja $\inf(a, b)$.

Lause 3.4. *Mielivaltaisesta hilasta voidaan tehdä osittain järjestetty joukko.*

Todistus. Olkoon hila $L = (A, \vee, \wedge)$ ja sen alkioita $a, b, c, d \in A$. Olkoon lisäksi $a \vee b = c$ ja $a \wedge b = d$. Tällöin siis alkio c on alkioiden a ja b pienin yläraja ja alkio d alkioiden a ja b suurin alaraja. Koska on näin, voidaan kirjoittaa, että

$$a \leq b \leq c \text{ ja } d \leq b.$$

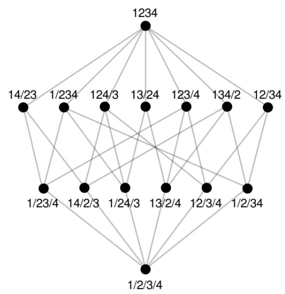
Edellä olevassa esimerkissä on todistettu, että jokin joukko ja relaatio $\leq$ muodostavat osittain järjestetyn joukon, jolloin voidaan sanoa, että mistä tahansa hilasta voidaan tehdä osittain järjestetty joukko.

Tällöin algebralliset ja järjestysteoreettiset hilan määritelmät ovat yhtäpitäviä. □

3.3 Hasse-diagrammi

Hasse-diagrammi havainnollistaa hilaa erittäin hyvin. Diagrammissa alkioiden suuruus kasvaa ylöspäin mentäessä. Näin ollen samalla korkeudella olevat alkiot ovat ns. samanarvoisia. Diagrammista voidaan huomata helposti hilan **suurin ja pienin alkio**.

Hasse-diagrammin avulla voidaan yksinkertaistaa monimutkaisiakin alkioiden välisiä relaatioita.



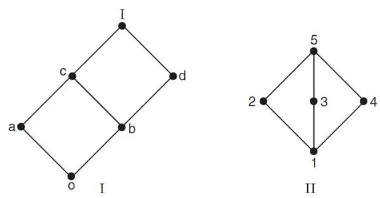
4 Käsitteitä

4.1 Redusoitumattomat alkiot

Kohtaamis-redusoitumaton alkio on sellainen alkio hilassa, joka voidaan esittää kahden erillisen hilan alkion kohtaamisena.

Liitto-redusoitumaton alkio on sellainen alkio hilassa, jota ei voida esittää kahden toisen alkion liittona. Yleensä lisäksi hilan suurin ja pienin alkio rajataan käsitelyn ulkopuolelle.

Alla olevassa kuvassa kohtaamis-redusoitumattomia alkioita ovat a, c, d, 2, 3 ja 4 ja liitto-redustoitumattomia alkioita a, b, d, 2, 3 ja 4.



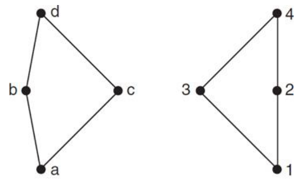
4.2 Isomorfinen hila

Määritelmä 4.1. Olkoon $L_1 = (A_1, \vee_1, \wedge_1)$ ja $L_2 = (A_2, \vee_2, \wedge_2)$ hiloja. Hilat L_1 ja L_2 ovat **isomorfisia hiloja**, jos on olemassa bijektio hilasta L_1 hilaan L_2, eli $f : A_1 \to A_2$ niin, että

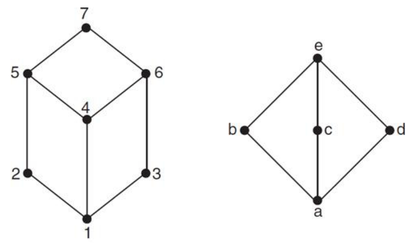
$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \text{ ja } f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

kaikille alkioille a ja b, jotka kuuluvat joukkoon A_1.

Esimerkki 4.2. Alla on kuva isomorfisista hiloista; kaksi vasemmanpuolimmaista esittävät keskenään isomorfisia hiloja. Vertailun vuoksi oikealla puolella on kaksi hilaa, jotka eivät ole isomorfisia, koska niissä on eri määrä alkioita.



I II



I II

4.3 Rajoitettu hila

Määritelmä 4.3. Hila L on **rajoitettu hila** (eng. bounded lattice), jos se sisältää suurimman ja pienimmän alkion, joita kuvataan tässä 1 ja 0.

Tällaisessa rajoitetussa hilassa kaikille alkioille a, jotka kuuluvat joukkoon A, pätee seuraavat:

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \vee 0 = a$$

$$a \wedge 1 = a \text{ ja}$$

$$a \wedge 0 = 0.$$

Seuraus 4.4. *Jokainen äärellinen hila $L = a_1, a_2, \ldots, a_n$ on rajoitettu.*

Hila on rajoitettu, jos se sisältää suurimman ja pienimmän alkion. Hilassa on n kappaletta alkiota ja tiedetään, että kahdesta alkiosta suurempi alkio saadaan liitto-operaatiolla, joka antaa alkion, joka kuuluu myös hilaan. Tällöin voidaan kuvata hilassa suurinta alkiota

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n.$$

Vastaavasti kahdesta alkiosta saadaan pienempi kohtaamisoperaatiolla, ja sen antama alkio kuuluu myös hilaan. Näin voidaan siis kuvata hilan pienintä alkiota

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n.$$

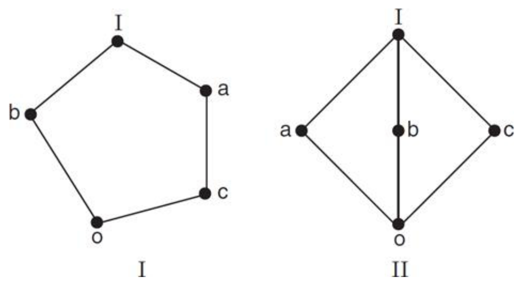
Nyt sekä $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ $etta_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ kuuluvat hilaan L ja voidaan sanoa, että nämä ovat hilan suurin ja pienin alkio. Koska hila voi olla minkälainen tahansa äärellinen hila, voidaan nyt sanoa, että jokainen äärellinen hila on rajoitettu.

4.4 Distributiivinen hila

Määritelmä 4.5. Hila L on **distributiivinen hila**, jos mille tahansa alkiolle a, b ja c, jotka kuuluvat joukkoon A, on voimassa seuraavat ominaisuudet:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Huomautus 4.6. Hila on ei-distributiivinen aina, kun siihen kuuluu osahila, joka on jompi kumpi alla olevista hiloista tai on isomorfinen jomman kumman alla olevien hilojen kanssa.



Nämä ovat modulaarisia hiloja ja modulaaristen hilojen yleisimpiä osahiloja. Modulaariseen hilaan palataan myöhemmin.

4.5 Komplementit hilassa

Määritelmä 4.7. Olkoon hila $L = (A, \vee, \wedge)$ ja tämän hilan suurin alkio 1 ja pienin alkio 0. Alkio x' on alkion $x \in A$ komplementti, jos $x \wedge x' = 0$ ja $x \vee x' = 1$.

Määritelmä 4.8. Hila L on komplementoituva hila (eng. complemented lattice), jos hila on rajoitettu hila ja sen jokaisella alkiolla on komplementti hilassa L.

Todistus. Olkoon hilan suurin alkio 1 ja pienin alkio 0. Hilan alkio a' on alkion a komplementti, jos $a' \wedge a = 0$ ja $a' \vee a = 1$. Komplementti ei välttämättä ole yksikäsitteinen tai olemassa jokaiselle alkiolle. Komplementin määritelmästä seuraa se, että jos alkio a' on alkion a komplementti, niin myös alkio a on alkion a' komplementti. $\square$

Lause 4.9. *Rajoitetun distributiivisen hilan jokainen esiintyvä komplementti on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon a_1 ja a_2 jonkin yhden alkion a komplementteja sekä 1 ja 0 suurin ja pienin alkio hilassa L. Tällöin komplementtiuden määritelmän mukaisesti $a \vee a_1 = a \vee a_2 = 1$ ja $a \wedge a_1 = a \wedge a_2 = 0$.

Koska 0 on hilan pienin alkio, niin $a_1 \vee 0 = a_1$ ja $a_2 \vee 0 = a_2$. Kun tiedetään, että $a \wedge a_2 = 0$, saadaan alkio a_1 kuvattua muodossa $a_1 = a_1 \vee 0 = a_1 \vee (a \wedge a_2)$.

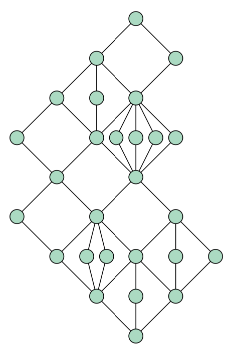
Koska hila on distributiivinen, niin $a_1 \vee (a \wedge a_2) = (a_1 \vee a) \wedge (a_1 \vee a_2)$. Kun tiedetään, että $a_1 \vee a = 1$, saadaan edellinen muotoon $(a_1 \vee a) \wedge (a_1 \vee a_2) = 1 \wedge (a_1 \vee a_2)$. Koska 1 on hilan suurin alkio, on sen ja kahden alkion liiton kohtaaminen oltava tämä kahden alkion liitto, eli $1 \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1 \vee a_2$.

Alkiolle a_2 voidaan käydä täysin sama tarkastelu, ja huomataan, että sekin saadaan muotoon $a_1 \vee a_2$. Tällöin voidaan sanoa, että $a_1 = a_2$ eli komplementti alkiolle a on yksikäsitteinen. $\square$

4.6 Modulaarinen hila

Määritelmä 4.10. Hila L on modulaarinen, jos kaikille alkioille a, b ja c, jotka kuuluvat joukkoon A, pätee

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \text{ aina, kun } a \leq c.$$



5 Distributiivinen hila on modulaarinen

Lause 5.1. *Distributiivinen hila on aina modulaarinen.*

Todistus. Todistetaan, että $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Koska hila on distributiivinen, niin

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

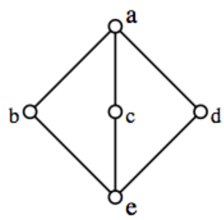
Kun $a \leq c$, niin $a \vee c = c$. Tällöin saadaan siis

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Ollaan päästy yhtälön vasemmalle puolelle, ja voidaan todeta, että distributiivinen hila on aina modulaarinen. $\square$

5.1 Esimerkki

Esimerkki 5.2. Vaikka distributiivinen hila on aina modulaarinen, ei modulaarinen hila ole aina distributiivinen. Seuraavaksi esimerkki modulaarisesta hilasta, joka ei kuitenkaan ole distributiivinen.



Muistetaan, että hila on distributiivinen, kun $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ja $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Nyt huomataan, että tässä hilassa $b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b$, ja $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = e \vee e = e$. Tällöin distributiivisuussääntöjen mukaan pitäisi olla, että $b = e$. Näin ei ole, eikä hila ole tällöin distributiivinen.

Hila kuitenkin on modulaarinen, koska aina alkioille a, b, c ja d pätee, että $b, c, d \leq a$ (ja vastaavasti $e \leq a, b, c, d$), jolloin esimerkiksi $b \vee (c \wedge a) = b \vee c = a$ ja $(b \vee c) \wedge a = a \wedge a = a$.

Lähdeluettelo

[1] Satinder Gupta (2015), Discrete Mathematics and Structures, Laxmi Publications

[2] https://fi.wikipedia.org/wiki/Hila_(matematiikka)

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Distributive_lattice

[4] https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/123456789/23992/ seppala.pdf?sequence=3isAllowed=y

[5] https://www.math24.net/lattices/