Johdatus derivaattaan lukiossa

Pro gradu -tutkielma
Esa Liinamaa
2467515
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisällys

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston oppikirjaprojektia, jossa pyritään tuottamaan lukion oppimateriaaleja Opetushallituksen *Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019* tavoitteiden mukaisesti [12]. Tässä tutkielmassa keskitytään lukiokurssin MAA6 ”Derivaatta” aloitukseen, ja tämän oppimateriaalin tarkoituksena on luoda hyvä pohjaosaaminen opiskelijalle loppukurssia varten samalla motivoiden derivaatan opiskelun pariin. Derivaatta itsessään matemaattisen muutoksen ja dynaamisuuden ilmentymänä säilyttänee aina paikkansa lukion opetussuunnitelmassa, sillä mikäpä olisi pysyvämpää kuin muutos; olipa sitten kyseessä opetukselliset ja kasvatukselliset trendit tai polynomifunktion arvot.

Matematiikan osaaminen on arvostettu taito, mikä näkyy nykyään esimerkiksi korkeakouluvalinoissa matematiikan ylioppilaskokeesta saatavista pisteistä [8, 11, 16]. Deweyläisen näkemyksen mukaisesti koulun tulee heijastella yhteiskunnallista kehitystä, ja siitä lieneekin ollut kyse, kun ylioppilaskirjoitukset ovat viime vuosina kokeneet digiloikan [7, 17]. Matemaattisen osaamisen merkitys ei ole kuitenkaan niissä jäänyt yhtään vähemmälle, vaan voisi jopa sanoa, että matematiikan ylioppilaskirjoitukset ovat vaikeutuneet — ainakin jos erityisesti pitkän matematiikan ylioppilaskokeen arvosanojen pisterajoista vedetään johtopäätöksiä [21, 22, 23]. Ylioppilaskirjoituksista on tullut entistä soveltavampia ja enemmän kokelaan abstraktia ymmärrystä kuin laskurutiinia mittaavia kokeita. Tässä oppimateriaalissa pyritään vastaamaan tähän paineeseen siten, että derivaattaan pureudutaan mahdollisimman syvälle tavoilla, joilla halutaan tuottaa opiskelijoille maanläheinen, mutta monipuolinen ja syvällinen ymmärrys derivaatasta ja sen merkityksestä eri tieteenaloille, kuten fysiikalle ja teknillisille tieteille, unohtamatta derivaatan kiinnostavia ominaisuuksia myös puhtaan matemaattisen analyysin näkökulmasta.

Tätä oppimateriaalia laadittaessa on didaktisena punaisena lankana pyritty pitämään *Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019* ja ylioppilaskirjoitusten asettamien osaamisvaatimusten lisäksi sekä peruskoulun että lukion opetussuunnitelman perusteista läpi paistavia nykyaikaisia oppimiskäsityksiä ja -malleja [7, 12, 13]. Erityisesti sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys on saanut suuren painoarvon tätä oppimateriaalia laadittaessa, ja tieteelliset artikkelit, joihin tuotettu oppimateriaali perustuu, noudattavat myös melko pitkälti sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen henkeä. Keskeisen roolin tässä oppimateriaalissa saa myös ajan mukainen tehtävien sähköisyys, vaikka tehtävissä ei suoranaisesti tulekaan olemaan mitään, mikä estäisi ratkomasta tehtäviä myös perinteisesti kynällä ja paperilla.

Tässä oppimateriaaliassa on pyritty huomioimaan nykyisiin oppimiskäsityksiinkin heijastuva sosiaalisten taitojen spektri ja erityisesti tässä tapauksessa ensivaikutelman tärkeys. Kurssin MAA6 ”Derivaatta” aloituksen tulisi olla sellainen, että opiskelija innostuu ja kiinnostuu aidosti aiheesta, varsinkin kun huomioidaan, miten merkittävä tekijä derivaatta on monilla tieteen ja tekniikan aloilla, joille opiskelija voi lukiosta päästyään suunnata [2, 3]. Näistä lähtökohdista on syntynyt kurssin avaus, jossa esitellään heti derivaatan merkitystä muille tieteille, erityisesti fysiikalle. Ensivaikutelman tärkeys on myös ulotettu koko ryhmän kattavalle tasolle, ja tässä oppimateriaalissa on pyritty ilmaisutaidollisin keinoin luomaan heti luokkaan ilmapiiri, jossa voidaan ja toisaalta osataan keskustella matematiikasta, esittää omia näkemyksiä ja kumota väärinkäsityksiä hyvässä hengessä.

Mainitusta muutoksen pysyvyydestä huolimatta kirjoittajan harras toive kuitenkin on, että tässä oppimateriaalissa derivaattaan käydään käsiksi niin maanläheisesti, yleistajuisesti ja ennen kaikkea ajattomasti, ettei oppimateriaali menetä tiedollista ja pedagogista arvoaan täysin edes opetussuunnitelman perusteiden vaihtuessa vuosien varrella. Tässä oppimateriaalissa ei sinällään ole tarkoitus luoda uutta didaktiikkaa tai keksiä pedagogiikan pyörää uudestaan, vaan tuoda yhteen jo olemassa olevia monipuolisia tapoja opettaa ja oppia matematiikkaa. Vaikka ajat sekä opetuksen ja kasvatuksen trendit muuttuvatkin, matemaattiset totuudet säilyvät ja korkeintaan jalostuvat täydellisemmiksi versioiksi aikaisemmasta itsestään. Antoisia hetkiä opettamisen ja oppimisen parissa!

2 Oppikirjan rakenne ja tavoitteet

2.1 Oppikirjan sisältö

Tämä tutkielma muodostaa ensimmäisen osan seitsemään osaan jaetusta lukion matematiikan kurssista MAA6 ”Derivaatta” käsittäen kolme alaotsikkoa:

- Mikä ihmeen derivaatta?
- Erotusosamäärä
- Erotusosamäärän raja-arvo

Ensimmäisen osion tarkoitus on toimia kurssin aloituksena, kertoa opiskelijalle kurssin keskeiset sisällöt ja oppimistavoitteet sekä motivoida opiskelijaa työskentelemään aiheen parissa. Lisäksi ensimmäisessä osiossa on pyritty mahdollisuuksien mukaan kertomaan derivaatasta ja sen merkityksestä matematiikkaan tukeutuvissa tieteen ja teknologian sovelluksissa. Kahden seuraavan osion tarkoitus on esitellä derivaatan käsitteen määrittelyyn tarvittavat matemaattiset työkalut erotusosamäärä ja funktion raja-arvo. Derivaattaa itsessään päästään opiskelemaan tämän ensimmäisen osan jälkeen oppikirjan toisessa osassa, vaikka derivaatan matemaattinen olemus merkintöineen päivineen paljastetaankin lukijalle jo tämän oppimateriaalin alkumetreillä.

Oppimateriaalin tarkoitus on olla kuin matemaattinen illallismenu, jossa esitellään tulossa olevia asiota ja jonka tarkoitus on herättää opiskelijassa tiedonnälkä tuottamalla aito halu oppia lisää derivaatasta. Ensimmäinen osio ”Mikä ihmeen derivaatta” on perusluonteeltaan leppoisa, eikä varsinaisesti kovin laskennallinen, vaan sen on tarkoitus toimia kurssin sisältöä ja työkaluja esittelevänä osiona, jossa teoria ja tuntitehtävät eli *pohdinnat* vuorottelevat muodostaen nousujohteisen kokonaisuuden. Tällä tunnilla myös harjoitellaan GeoGebran käyttöä sen derivaattaan liittyvissä sovelluksissa. Osion lopussa sijaitsevat *harjoitustehtävät* muodostavat kelvollisen kotitehtäväkavalkadin.

Toisessa osiossa kyseessä on perinteiseen matematiikan oppitunnin muotoon ajettu kokonaisuus, jossa vahvaan teoriatykitykseen liittyy jo hieman monimuotoisempia harjoituksia, jotka soveltuvat nekin hyvin myös kotitehtäviksi. Kolmannen tunnin on tarkoitus johdatella opiskelija derivaatan ääreen erotusosamäärän raja-arvon kautta siten, että oppikokonaisuuden lopuksi opiskelijalle on muodostunut sekä visuaalinen että analyyttinen kuva derivaatasta sekä valmiudet jatkaa kurssilla eteenpäin. Aivan oppimateriaalin loppuun on sijoitettu ”Yhteenveto ja lisätietoutta” kokoaa kolmen edellisen kappaleen keskeiset asiat yhteen sekä tarjoilee lisätietoa derivaatan historiasta.

Oppimateriaalin sekaan on pyritty ripottelemaan nippelitietoa derivaatasta, matemaattisista aiheista sekä kielitietoista opetusta tukevia lisätietoja esimerkiksi sanojen alkuperistä. Oppimista ja oppitunteja kuljettaviksi työkaluiksi on opettajaa ja opiskelijaa varten kirjaan tehty useita *pohdintatehtäviä*, jotka haastavat opiskelijaa joko suorilla kysymyksillä tai uusien käsitteiden pariin johdattelevilla mietintätuokioilla. Varsinaisen oppikirjan jälkeen seuraa opettajan opas, jossa annetaan vinkkejä ajankäyttöön sekä työkaluja opettajalle käyttää pohdintatehtäviä sujuvasti osana opetusta sekä hieman ideoita opetuksen eriyttämiseen, erityisesti ylöspäin. Aivan viimeisenä tarjotaan vastaukset oppikirjan tehtäviin ja muutamaan – etenkin GeoGebraan liittyvään tehtävään

– annetaan jopa ratkaisuehdotuksia.

2.2 Opetussuunnitelma 2019

Opetushallituksen *Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019* kurssi MAA6 ”Derivaatta” on määritelty kolmen opintopisteen moduuliksi [12]. Tämän oppimateriaalin kannalta erityisesti neljä opiskelijan tavoitetta on keskeisessä asemassa. Käydessään kurssia MAA6 opiskelija:

• tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla,

• omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta,

• ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena,

• osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä [12].

Tämä oppimateriaali on ensimmäinen osa seitsemään osaan jaetusta lukion matematiikan pitkän oppimäärän kurssista MAA6 ”Derivaatta”, joten materiaali on pitkälti derivaatan opiskeluun liittyviä valmiuksia tuottavaa ja harjaannuttavaa. Oppimateriaalissa painotetaan etenkin funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen kiinnostavia ominaisuuksia ja derivaatan visuaalista hahmottamista, sillä tarkoituksena on herättää opiskelijassa aito mielenkiinto derivaatan oppimiseen ja ymmärtämiseen sekä toisaalta tuottaa opetettavalle ryhmälle vahva ja yhteinäinen pohja jatkaa pidemmälle opiskeltavan aiheen parissa.

Harjoitukset, esimerkit ja pohdintatehtävät on tässä oppimateriaalissa laadittu *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* mielessä pitäen, perustuen erityisesti didaktisten artikkelien *Habits of Mind* ja *Collaborative Learning in Mathematics* kuvaamiin oppijatyyppeihin ja oppimistapoihin [4, 12, 18]. Keskeiseen asemaan on tässä oppimateriaalissa nostettu myös *Lukion opetussuunnitelman perusteiden* laaja-alaisen osaamisen tavoitteet, ja oppimateriaali on laadittu lukion yleissivistävä rooli mielessä pitäen. Erityisesti tehtävissä on pyritty laaja-alaisista tavoitteista huomioimaan:

• Monitieteinen ja luova osaaminen sekä

• Vuorovaikutusosaaminen [12].

Voisi sanoa, että tämän oppimateriaalin tavoitteena on auttaa opettajaa tekemään opiskelijoistaan yleissivistyneitä – kunnianhimoisesti voisi jopa todeta *valistuneita* – ihmisiä. Lisäksi oppimateriaali on laadittu niin, että se auttaa opettajaa toteuttamaan kielitietoisen opetuksen periaatteita. Matemaattisia ilmauksia ja sanojen alkuperiä on avattu *lisätietojen* muodossa, ja oppimateriaali kannustaa keskustelemaan tieteestä tieteen kielellä.

2.3 Ajattelun taidot

”Itseoppinut on ainoa oppinut. Muut ovat opetettuja [14].”

Erno Paasilinnan aforismin voisi nähdä kuvaavan hyvin nykyisten opetussuunnitelmien henkeä, sillä viime vuosina sekä peruskoulun että lukion opetussuunnitelman perusteissa on painoarvoa saanut oppilaan ja opiskelijan oma aktiivinen rooli oppimisprosessissa [12, 13].

Tässä oppimateriaalissa opiskelijan ajatusprosessia oppimisessa lähestytään erityisesti *Habits of Mind* -artikkelin kuvaamien kolmen oppijatyypin

kautta:

- Visualisoijat (Vizualizers),
- Kokeilijat (Experimenters) ja
- Kuvailijat (Describers) [4].

Visualisoinnissa on kyse matemaattisen tehtävän tai ongelman piirtämisestä. Visualisointia voi joko tehdä joko mielessään, kynällä ja paperilla tai sopivan ohjelmiston avulla [4]. Tässä kohti derivaattaa johdattelevassa oppimateriaalissa tarkoitus on erityisesti keskittyä funktioiden ja niiden kuvaajien tangenttien kulmakertoimien visualisointiin, sekä kulmakertoimista saatavaan tietoon. Tämä ajatus näkyy kautta linjan koko oppimateriaalissa, ja oppimateriaalin kymmenestä kotitehtävästäkin vain kaksi on sellaista, joihin ei liity visualisointia. Tarkoituksena on osoittaa opiskelijalle, miten tehtävän hyvän visualisoinnin kautta voi päästä uusien matemaattisten ominaisuuksien ja sääntöjen jäljille. Esimerkiksi funktion jatkuvuuteen otetaan tässä oppimateriaalissa hyvin vähän kantaa, mutta materiaalin viimeisessä pohdinnassa A.31 sitä pyritään käsittelemään kuvan keinoin siten, että opiskelijalle jää ennen kaikkea selkeä visuaalinen ymmärrys funktion jatkuvuuden merkityksestä derivaatalle.

Kokeileminen on opiskelutapa, jossa opiskelijoille annetaan tehtäväksi vapaasti muuttaa lausekkeita esimerkiksi manipuloimalla muuttujien arvoja ja vakioiden suuruutta. Tarkoituksena on, että opiskelija saavuttaa osin yrityksen ja erehdyksen kautta lisää tietoa käsillä olevasta matemaattisesta ilmiöstä tai ongelmasta [4]. Tässä oppimateriaalissa kokeileminen näkyy etenkin GeoGebraan liittyvissä harjoitustehtävissä 6, 8, joissa esimerkiksi liukusäätimillä tutkitaan pisteiden x_0 ja x keskinäisen etäisyyden vaikutusta erotusosamäärän arvoon sekä tehtävissä, joissa etsitään yksinkertaisimpia derivoimisääntöjä kuten pohdinnoissa A.29 ja A.30 sekä harjoitustehtävissä 9 ja 10.

Kuvaileminen oppimisen mallina lähtee liikkeelle siitä, että matematiikka on ennen kaikkea kieli. Matematiikan avulla voi kuvata monia ilmiötä, mutta joskus jokaisella tulee sellainen tilanne vastaan, ettei pysty selittämään jotain uutta asiaa tai ilmiötä ilman uutta tietoa ja uusia käsitteitä. Matemaattiset käsitteet, notaatiot ja symbolit ovat kaikki syntyneet tarpeeseen kuvailla jotain uutta [4]. Tässä oppimateriaalissa opiskelijoille halutaan tuottaa tuo tarve derivaatan suhteen, muun muassa dialogipohdintoja A.1, A.14 ja A.22 apuna käyttämällä. Kuvailemista käytetään myös keinona luoda tarve raja-arvolle, sillä pohdinnoissa A.20 ja A.21 opiskelija joutuu kuvailemaan annettussa tilanteessa tapahtuvia asioita ja pohtimaan, miten muuttujan arvojen x_1 ja x_2 valinta vaikuttaa erotusosamäärän tulkintaan. Kuvaileminen lähestymistapana oppimiseen kuvataan sekä artikkelissa *Habits of Mind* että artikkelissa *Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example* [4, 6].

2.4 Tehtävätyypit

Oppikirjan rakenteessa tehtävineen päivineen on pyritty nousujohteiseen kokonaisuuteen, ja tässä oppikirjan ensimmäisessä osassa pyritään luomaan hyvä pohja tulevien osien opiskelua varten. Opiskelijaa pyritään motivoimaan derivaatan opiskelun pariin esittelemällä matematiikkaan ja fysiikkaan liittyviä, helposti arkijärjellä lähestyttäviä tehtäviä, joiden ratkaisemiseen derivaatta tarjoaa hyviä työkaluja. Tehtävien asettelussa on pyritty huomioimaan erilaiset tavat oppia ja kiinnittää huomiota asioihin.

Osa tehtävistä on laadittu hyvin perinteisinä matematiikan tehtävinä, osassa puolestaan haastetaan opiskelijaa (ja miksei opettajaakin) jopa heittäytymään esittävän taiteen pariin! Opiskelijoiden syvällisempi ymmärrys ilmiöistä halutaan mahdollistaa johdattelevien pohdintatehtävien avulla, joille on tyypillistä noudattaa Malcolm Swanin artikkelissaan *Collaborative Learning in Mathematics* (2006) esittämiä oppimisen malleja [18]. Tähän oppimateriaaliin valitut tehtävätyypit ovat

- eri esitystapojen yhdistäminen ja vertailu (interpreting multiple representations),
- matemaattisten väitteiden analysoiminen (evaluating mathematical statements) ja
- päättelyn ja ratkaisujen analysointi (analysing reasoning and solutions) [18].

Eri esitystapoja vertailevissa tehtävissä pyritään erityisesti tuomaan opiskelijoille esille, miten sama asia voidaan matematiikan kielellä kertoa monin eri tavoin sekä pyritään tuottamaan opiskelijoille kyky tunnistaa ja tulkita matemaattisia ilmiöitä eri tavoin kuvattuna. Lisäksi pyritään siihen, että opiskelija osaa valita tilanteen mukaan parhaiten sopivan esitystavan. Eri esitystapoja voidaan käyttää myös virheellisten käsityksien korjaamiseen siten, että opiskelijan on tunnistettava kahdesta esitystavasta toinen vääräksi ja toinen oikeaksi sekä pystyttävä perustelemaan valintansa [18].

Eri esitystapojen yhdistämisestä ja vertailusta toimivat hyvinä esimerkkeinä harjoitustehtävät 2 ja 7 sekä pohdinta A.22. Harjoitustehtävässä 2 opiskelijan tulee verrata kahta samaa tilannette esittävää keskenään erilaista kuvaajaa ja pyrkiä löytämään niiden tarjoamasta informaatiosta samankaltaisuuksia tai eroavaisuuksia. Harjoitustehtävässä 7 opiskelijan tulee perehtyä erotusosamäärän merkitykseen fysiikassa yhdistämällä keskenään suureet, niiden symbolit, määrittelyssä käytettävät erotusosamäärät ja merkitykset keskenään. Pohdinnassa A.22 opiskelija joutuu kahden kuvaajan ja dialogin pohjalta perustelemaan, miksi toisen keskustelijan tapa ymmärtää ilmiötä samoista lähtökohdista on virheellinen, mutta toisen ei.

Matemaattisten väitteiden analysoiminen on myös keskeisessä asemassa tässä oppimateriaalissa, mutta se ei saa niin suurta painoarvoa kuin ensimmäinen ja kolmas tehtävätyyppi. Tavoitteena on, että etenkin pohdintatehtävissä haastetaan opiskelijoiden käsityksiä matematiikasta ja pyritään luomaan selkeitä ristiriitoja väärien käsitysten ja oikeiden käsitysten välille, jolloin oikeat käsitykset tulevat perustelluiksi oikeiksi ja väärät vääriksi. Tehtävien tarkoitus on syventää opiskelijan ymmärrystä opeteltavasta asiasta haastamalla opiskelija perustelemaan matemaattisia väitteitä tai osoittamaan niiden paikkansapitämättömyys [18].

Väitteiden analysointi tulee vastaan jonkin verran uuteen aiheeseen johdattelevissa pohdinnoissa A.1, A.14 ja A.22, sekä pohdintatehtävässä A.9, jossa opiskelijan tulee ottaa kantaa väitteen muodossa esitettyyn ajatukseen matematiikasta. Keskeistä väitteiden analysoinnissa olisi tutkia väitteen esittämää tilannetta esimerkiksi väitteen visualisoinnin keinoin ja pyrkiä löytämään mahdollinen ristiriita väitteen ja todellisuuden välillä.

Oppitunteja ajatellen ajallisesti suuren painoarvon saa myös päättelyn ja ratkaisujen analysointi, sillä se on oikeastaan tieteellisen matematiikan sydän ja sielu. Tätä tehtävätyyppiä edustavat tässä oppimateriaalissa erityisesti *pohdintatehtävät*. Matemaattisten prosessien ja ajattelutapojen ymmärtäminen on hyvin tärkeää, mikäli haluaa kyetä soveltamaan matematiikkaa, joten päättelyyn ja analysointiin tähtäävät tehtävät on laadittu siten, että niitä ratkoakseen opiskelijan tulee olla sinut tätä kurssia edeltävien matematiikan kurssien kanssa.

Päättelyn ja ratkaisujen analysointia esiintyy etenkin uuteen aiheeseen johdattelevissa dialogimuotoisissa pohdinnoissa A.1, A.14 ja A.22, joissa on esitetty oppitunnin aiheeseen liittyvä vuoropuhelu. Tyypillinen tehtävänasettelu on näissä dialogipohdinnoissa tämä: tehtävä on kirjoitettu sokraattisen keskustelun muotoon, mutta vastuu keskustelun älyllisestä lopputulemasta jätetään ainakin osittain opiskelijalle. Opiskelijan tulee siis kyetä analysoimaan keskustelussa esitettyjä argumentteja sekä niiden perusteella kyetä johtamaan itselleen uutta tietoa matematiikan maailmasta.

3 Oppimateriaalien perustelu

3.1 Sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys

Tätä oppimateriaalia tehtäessä on tukeuduttu nyt kasvatustieteen piirissä laajasti vallalla olevaan sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, joka heijastuu tällä hetkelle vahvasti sekä peruskoulun että lukion opetussuunnitelman perusteisiin ja jossa keskeistä on opiskelijan oma aktiivinen rooli oppimisprosessissa [12, 13]. Reijo A. Kauppilan kirjassa *Ihmisen tapa oppia – Johdatus sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen* (2007) oppiminen esitetään siten, että se voidaan nähdä sekä yksilöllisenä että yhteisöllisenä ymmärryksen ja osaamisen luomisena [10]. Opiskelijan tietojen ja taitojen nähdään karttuvan vuorovaikutuksellisissa tilanteissa opettajan, muiden opiskelijoiden ja ympäristön kanssa. Sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys kannustaa opettajaa saattamaan oppilaansa itseohjautuvuutta ja yhteistoimintaa vaativien oppimistilanteiden pariin sekä arvioimaan omaa oppimistaan ja myös opettelemaan oppimista. Merkityksellistä tässä oppimiskäsityksessä on, että ihmiset yhdessä luovat yhteistä ymmärrystä maailmankaikkeudesta, ja toisaalta vanhaa tiedollista konstruktiota haastetaan uusissa vuorovaikutteisissa tilanteissa, ja juuri tämän ajatustenvaihdon kautta saavutetaan uusi yhteisymmärrys ympäröivien ilmiöiden luonteesta. [10].

Sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys tulee tässä oppimateriaalissa ilmi etenkin oppiainerajojen ennakkoluulottomana rikkomisena, kontekstiongelmina ja kirjassa oppimista johdattelevina pohdintoina, joiden tarkoitus on juurikin haastaa opiskelijaa itse pohtimaan matemaattisten ilmiöiden syy- ja seuraussuhteita sekä herättämään luokassa vuoropuhelua sekä opiskelijan ja opettajan, mutta myös opiskelijan ja toisen opiskelijan välille. Tämän oppimateriaalin keskeisin tarkoitus johdatuksena kohti derivaatan käsitettä on nimenomaan tarjota opiskelijalle uutta tietoa ja näkökulmaa analyyttisesta tavasta lähestyä matemaattisia ongelmia, mutta myös herättää ristiriitoja mahdollisen vanhan väärän tiedon suhteen ja näin saada aikaan syvälliset valmiudet opiskella ja oppia derivaattaa ja derivoimista siinä laajuudessa kuin se on lukion kurssin MAA6 puitteissa tarpeen.

Kirjassaan *Ihmisen tapa oppia* (2007) Kauppila korostaa sosiaalisen vuorovaikutuksen vastavuoroisuutta vaikutuksen voimakkuutta lisäävänä tekijänä [10]. Tässä oppimateriaalissa on lähestytty sosiaalisia verkkoja oppimisen osatekijöinä korostavaa sosiokonstruktivistista oppimiskäsitystä näytelmän keinoin, sillä näytelty tilanne sisältää sosiaalista vuorovaikutusta, oli se sitten todellista tai ei. Näytelmä on luotu tässä ainerajoja rikkovaksi Swanin artikkelissa esitetyn *eri esitystapojen yhdistäminen ja vertailu* mukaiseksi tehtävätyypiksi [18]. Tyypillisessä luokkahuonetilanteessa opettaja voi haastaa opiskelijoiden ennakkokäsityksiä niin sanotusti ”kyselemällä tyhmiä” pyrkien näin luomaan ristiriitoja oletettujen ja tiedettyjen asioiden välille. Tässä oppimateriaalissa on mukana aina uuden osion aloittava näytelmätyyppinen vuorosanat sisältävä väittelytilanne, jonka tarkoitus on antaa opiskelijoille mahdollisuus osallistua aktiivisemmin opetukseen olemalla osa sitä. Näytelmän tyypillinen skenaario on tämä: kaksi henkilöä väittelee matematiikkaan liittyvästä aiheesta tai ongelmasta, ja näytöksen jälkeen katsojien tulisi voida perustella, oliko jompikumpi oikeassa tai väärässä, ja millä tavalla. Tällä tehtävätyypillä pyritään yhdistämään siis sekä oppimisen sosiaalinen puoli että ainerajat ylittävä monialainen osaaminen.

3.2 Ainerajat ylittävä oppiminen

Tässä oppimateriaalissa keskeinen piirre on erityisesti fysikaalisten ilmiöiden hyödyntäminen derivaatan opettamisen lähtökohtana. Tavoitteena on, että opiskelija ymmärtää jo kurssin alkumetreillä, mihin derivaattaa tarvitaan ja miksi se on merkittävä käsite niin monelle tekniikan ja luonnontieteen alalle [2, 3]. Tämän oppimateriaalin lähtökohta on opiskelijan motivoiminen ja tiedonjanon tunteen tuottaminen heti alkukurssista, jolloin opiskelijassa lähtee käyntiin sosiokonstruktivisten oppimiskäsityksen mukainen oppimisprosessi.

Puhtaan matematiikan kauneutta ymmärtämätön pragmaatikko voisi sanoa, että fysiikka antaa matematiikalle tarkoituksen. Monella luonnontieteellisteknillisellä alalla näin onkin, ja tässä oppimateriaalissa on pyritty huomioimaan se tosiasia, että suurimmalle osalle lukion pitkän matematiikan lukeneista opiskelijoista matematiikka tulee olemaan ”vain” oman alan työkalu, ei niinkään itse tarkoitus [2, 3, 9]. Tässä oppimateriaalissa tehtävät on laadittu niin, että niissä huomioidaan kurssin keskeisin sisältö, derivaatta, pitäen samalla mielessä mahdollisimman paljon sopivia lukion matematiikan ja fysiikan yhtymäkohtia. Fysiikan yleisistä tavoitteista osana matematematiikan opetusta on tässä oppimateriaalissa pyritty huomioimaan erityisesti, että opiskelija:

- perehtyy fysiikan soveltamiseen monipuolisissa tilanteissa, kuten luonnossa, elinkeinoelämässä, järjestöissä tai tiedeyhteisöissä ja

- ymmärtää luonnontieteellisen tiedon luonnetta ja kehittymistä sekä tieteellisiä tapoja tuottaa tietoa [12].

Pyrkimys on, että tämä oppimateriaali syventää opiskelijan ymmärrystä lukion fysiikan ensimmäisen, kaikille lukiolaisille pakollisen kurssin FY1 ”Fysiikka luonnontieteenä” sisällöistä ja niiden matemaattisesta merkityksestä. Tässä oppimateriaalissa nostetaan esille erityisesti kurssin FY1 keskeisistä sisällöistä:

- mittaaminen, tulosten kerääminen, niiden esittäminen graafisesti ja luotettavuuden arviointi sekä

- graafinen malli ja lineaarinen malli [12].

Näitä sisällöllisiä tavoitteita käytetään tässä oppimateriaalissa tuomaan konkretiaa matemaattisten käsitteiden ja ilmiöiden opettamiseen. Tavoitteena on, että opiskelija saa näin kurssin MAA6 alusta asti selvän ja kurssia varten motivoivan kuvan derivaatan merkityksestä matematiikalle ja muille tieteille.

Dialogimuotoon kirjoitettua filosofista keskustelua käytettiin jo antiikin aikana muun muassa Platonin toimesta opetustapana sekä keinona kirjoittaa filosofisia pohdintoja muistiin hyvin aikaa kestävään muotoon. Nyt yli kaksituhatta vuotta myöhemmin tässä oppimateriaalissa on pyritty esittelemään opiskelijalle klassisen sokraatisen dialogin voima (ja toisaalta hauskuuskin) siten, että hieman epätyypillisesti matematiikan opetukselle opiskelijaa haastetaan myös ilmaisutaidollisten tehtävien pariin. Oppimista kuljettavista pohdinnoista osa on pyritty laatimaan niin, että niiden pohjalta voidaan järjestää pienimuotoisia väittelyitä, ja jokaisen uuden kappaleen aloittaa sokraattisen keskustelun muotoon kirjoitettu näytelty väittelytilanne (pohdinnat A.1, A.14 ja A.22), jonka oppilaat voivat esittää ilman sen suurempia valmisteluja.

Näiden ilmaisutaidollisten tuokioiden on tarkoitus vahvistaa opiskelijan kykyä käydä keskustelua matematiikasta ja matemaattisista ongelmista käyttäen oikeita ja täsmällisiä termejä, opettaa esittämistä ja esiintymistä sekä sisällyttää opetukseen luontevasti Lukion opetussuunnitelman perusteiden mukainen jokaiselle oppiaineelle ominainen kielitietoisuuden taso [12]. Lukion opetussuunnitelmassa äidinkielen kurssien ÄI3 ”Vuorovaikutus 1”, ÄI7 ”Vuorovaikutus 2” ja ÄI9 ”Vuorovaikutus 3” tavoitteiksi esitetään, että opiskelija:

• lisää viestintärohkeuttaan, syventää viestijäkuvaansa sekä käsitystään kielestä ja identiteetistä,

• kehittää esiintymistaitojaan sekä kykyään tuottaa erilaisia puhuttuja tekstejä myös digitaalisissa ympäristöissä,

• syventää kykyään analysoida ja arvioida puhuttuja tekstejä ja audiovisuaalista viestintää ja

• monipuolistaa erityisesti jatko-opinnoissa ja työelämässä tarvittavia vuorovaikutustaitojaan [12].

Tässä oppimateriaalissa näitä tavoitteita pyritään hyödyntämään Swanin artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* (2006) esittämien oppimismallien näkökulmasta [18]. Erityisesti ilmaisutaidollisissa tehtävissä painottuu matemaattisten väitteiden, päättelyn ja ratkaisujen analysoiminen.

3.3 Kontekstiongelmat ja RME

Artikkelissaan *Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example* (1999) didaktikot Koeno Gravemeier ja Michiel Doorman esittävät, että differentiaalilaskennan opetuksessa on mahdollista lähteä liikkeelle niin sanotuista kontekstiongelmista (engl. *context problems*), joissa tarkoitus on esittää uusi matemaattinen pulma tutussa ympäristössä [6]. Samalla voidaan esimerkiksi perehtyä ongelman historiallisiin lähtökohtiin. Hyvä tyypillinen lähtökohta kontekstiongelmalle on jokin opiskelijoille tuttu fysikaalinen ilmiö. Tässä materiaalissa opiskelijoita johdatellaan derivaatan käsitteen pariin pohtimalla, mikä on kiihtyvyyden matemaattinen merkitys nopeudelle. Ajatuksena kontekstiongelmissa on tuottaa opiskelijoille aito tarve derivaatan käsitteeseen, kun heidän vanhalla osaamisellaan esimerkiksi auton nopeutta kuvaavan yhtälön käsitteleminen ei onnistukaan tyydyttävällä tavalla. Tehtävän asettelulla pyritään siis tilanteeseen, jossa opiskelijalle syntyy sisäinen motivaatio uuden asian oppimiseen pelkän ulkoisen sijaan.

RME eli *Realistic Mathematics Education* viittaa opetustapaan, jossa matematiikan opetuksessa käytettävät esimerkit ovat todellisia ongelmia, esimerkiksi historiallisia sellaisia [6]. Tavoitteena on, että opiskelijoiden oppimisprosessi mukailee muinaisten tieteentekijöiden ajatuksenjuoksua uusien matemaattisten ominaisuuksien keksimisessä. Esimerkiksi oppimateriaalin ensimmäinen harjoitustehtävä 1 esittelee opiskelijalle Nicole Oresmen ajatuksenjuoksua nopeuden graafisesta kuvaamisesta, mutta tuo esille myös siihen liittyviä ongelmia. Myös harjoitustehtävissä 2, 4 ja 5 käytetään kuvaajia, joissa opiskelijalle tutut suureet matka, nopeus ja aika esiintyvät luontevissa tilanteissa. Pohdintatehtävässä A.19 opiskelija tutustuu erotusosamäärän keskeiseen merkitykseen fysiikassa ja erityisesti perusmekaniikassa.

Näillä tehtävillä pyritään opiskelijan omaan aktiiviseen rooliin oppimisessa. RME-lähtöisessä opetustavassa ajatellaan, että todelliset ongelmat opetuksen lähtökohtina parantavat myös opiskelijan mahdollisuutta ottaa roolia opetuksessa, sillä ongelman ollessa todellinen, opiskelijan on helpompi käydä siitä vuoropuhelua opettajan ja muiden opiskelijoiden kanssa [6]. Tällöin oppiminen tapahtuu parhaimmillaan sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisessa halutussa vuorovaikutteisessa viitekehyksessä. Näkökulmaa voisi RME:hen voisi avata esimerkiksi sanomalla Paasilinnaa mukaillen tavoitteen olevan, etteivät opiskelijat olisi *opetettuja*, vaan *oppineita* [14].

3.4 Opiskelijoiden tyypilliset lähestymistavat derivaattaan

Mark Asialan, Jim Cottrillin, Ed Dubinskyn ja Keith E. Schwingendorfin tutkimuksessa *The Development of Students' Graphical Understandingof the Derivative* (1997) saatiin selviä viitteitä siitä, että opiskelijoilla on karkeasti kaksi tapaa lähestyä derivaattaan liittyviä tehtäviä [1]. Nämä tavat ovat ovat *graafinen* ja *analyyttinen*.

Graafista ratkaisutapaa käyttävät opiskelijat lähtevät tehtävien ratkaisemisessa liikenteeseen piirtämällä pisteitä graafille, pyrkien sitten ratkaisemaan pisteiden avulla muodostetun sekantin kulmakertoimen. Erotusosamäärän raja-arvon käsitettä he lähestyvät tässä ratkaisutavassa viemällä valittuja pisteitä ”lähemmäs ja lähemmäs” toisiaan, jolloin sekantista muodostuu oleellisesti tangentti sille pisteelle, johon liittyvästä kuvaajan tangentin kulmakertoimesta oltiin alunperin kiinnostuneita [1].

Analyyttista ratkaisutapaa käyttävät opiskelijat puolestaan aloittavat derivaatan määrittämisen laskemalla keskimääräistä muutosnopeutta funktion arvoille halutun pisteen ympäristössä korkeus- ja leveyskoordinaattien osamäärän avulla. Seuraavaksi heidän tavassaan ajatella kutistetaan valittujen pisteiden keskinäistä välimatkaa niin, että se lähestyy nollaa. Lopputuloksena he mieltävät saaneensa muuttujan ja sen saamien arvojen hetkellistä muutosnopeutta kuvaavan raja-arvon, toisin sanoen funktion derivaatan kysytyssä pisteessä [1].

Graafisen ja analyyttisen ratkaisutavan käyttäjien polku derivaatan arvoa kohti on siis hyvinkin samanlainen, sillä kumpaankin kuuluu vahvasti ajatus derivaatasta erotusosamäärän raja-arvona. Keskeisin ero näissä opiskelijatyypeissä on se, että graafista ratkaisutapaa käyttävien opiskelijoiden voisi ajatella omaavan enemmän *Habits of Mind* -artikkelin mukaisen visualisoivan oppimistavan mukaisia piirteitä, kun taas analyyttista ratkaisutapaa käyttävien puolestaan voisi ajatella omaavan enemmän kuvailevan oppimistavan piirteitä [4].

Tässä oppimateriaalissa pyritään tarjoamaan opiskelijoille pilkahduksia kummastakin lähestymistavasta yhdessä ja erikseen. Tavoitteena on, että tämän kurssin MAA6 aloittavan oppimateriaalin opiskeltuaan kumpikin lähestymistapa derivaattaan tuntuu opiskelijasta luontevalta siirryttäessä kurssilla ja oppikirjassa eteenpäin.

Graafista ratkaisutapaa ja siihen liittyvää erotusosamäärän raja-arvon käsittelyä on tässä oppimateriaalissa lähestytty erityisesti sekanttiin liittyvissä tehtävissä, kuten pohdinnoissa A.14, A.20 ja A.21, sekä harjoitustehtävissä 3, 4, 5 ja 8. Näissä tehtävissä lähdetään liikkeelle ajatuksesta, jossa siirtyminen alussa esitetystä tangentista sekanttiin oikeutetaan sekantin määritelmällisellä ja laskennallisella helppoudella, sekä ajatuksella siitä, että sopivasti valituilla muuttujan arvoilla x_1 ja x_2 sekantti antaa erittäin hyvän – ellei täydellisen – approksimaation tangentille kulmakertoimineen.

Analyyttista ratkaisutapaa tässä oppimateriaalissa lähestytään sekä tangenttiin että sekanttiin liittyvissä tehtävissä. Oppimateriaalin aloittava kappale lähestyy muutosta monin paikon keskimääräisen muutosnopeuden kautta, esimerkiksi pohdinnoissa A.6 ja A.10 sekä harjoitustehtävässä 1 funktion arvojen muutosta tutkitaan juurikin tässä keskimääräisen muutoksen valossa. Toisiaan lähellä olevien pisteiden avulla laskettavaan keskimääräisen muutoksen suuruuteen liittyvään matematiikkaan vilkaistaan myös pohdinnassa A.14, jossa roolihahmot Anja ja Eila tuskailevat tangentin piirtämiseen liittyvien haasteiden kanssa.

Graafisen ja analyyttisen ratkaisutavan tehtävien lopputuleman pitäisi kuitenkin olla sama ja selkeä: Oppimateriaalin opiskeltuaan opiskelija näkee erotusosamäärän raja-arvon samana asiana tangentin kulmakertoimen kanssa ja hahmottaa siten, miksi derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona.

3.5 GeoGebran käyttö derivaatan opetuksessa

Geometrialta ja algebralta yhdistelmänimen saanut *GeoGebra* on ilmainen, Java-pohjainen, symbolinen, vapaan lähdekoodin CAS-laskinohjelmisto (*computer algebra system*), jossa on erinomainen mahdollisuus visualisoida ja laskea matematiikkaa monipuolisesti kaikilla kouluasteilla. GeoGebran kehittämisen aloitti Markus Hohenwarter 2000-luvun alussa ja kehitystyö jatkuu edelleen [5]. Ylioppilaskoejärjestelmässä kokelaan käytössä ovat GeoGebran versiot 5 ja 6, ja lukioaikana opiskelija voi ladata ne ilmaiseksi tietokoneelleen tai vastaavalle laitteelleen osoitteesta `http://www.geogebra.org` [20].

GeoGebralle tunnustusta opetusvälineenä antaa muun muassa Ljubica Diković artikkelissaan *Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level* (2009) nostaen GeoGebran hyviksi ominaisuuksiksi

- käyttäjäystävällisyyden,
- rohkaisun kokeilemiseen,
- muuttujien arvojen helpon varioinnin,
- yhteisöllisen oppimisen ja
- matematiikan opettamisen visualisoinnin helpottamisen [5].

Diković ei kuitenkaan tyydy listaamaan pelkkiä erinomaisia, sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen sopivia puolia GeoGebrasta ja sen käytöstä opetuksessa, vaan nostaa esille myös sovelluksen paikalliset puutteet pedagogisena työvälineenä. Diković kertoo GeoGebran ongelmakohdiksi muun muassa

- aikaisemman ohjelmointikokemuksen tarpeen joissain toiminnoissa,
- osalle opiskelijoista soveltumattoman itsenäisen työn määrän,
- heikot mahdollisuudet animaatioiden tuottamiseen ja
- toistaiseksi vähäisen tutkimustiedon GeoGebran vaikutuksesta oppimiseen [5].

Tätä oppimateriaalia kirjoitettaessa Dikovićin tutkimus on jo 11 vuotta vanha, mikä on tietoteknisten sovellusten kohdalla paljon. Pedagogisessa mielessä Dikovićin huoli itsenäisen työn sopimattomuudesta joillekin oppilaille on kuitenkin aiheellinen ja edelleen ajankohtainen. Vaikka nykyisissä *Lukion opetussuunnitelman perusteissa* lukio-opiskelija nähdäänkin hyvin itsenäisenä ja aktiivisena tiedonhankkija, voidaan kyseenalaistaa, onko jokaisella lukioon tulevalla opiskelijalla riittävästi valmiuksia tai edes halua olla oman oppimisensa herra tai rouva. Täysin tuntematon ei ole sellainenkaan ilmiö, jossa nuori on päätynyt lukion penkille, koska ei ole aikaisemman heikon koulumenestyksensä takia muualle päässyt [15]. Tässä oppimateriaalissa onkin pyritty siihen, että opiskelijaa opastetaan GeoGebran käyttöön liittyvissä tehtävävissä ja esimerkeissä kuvallisten ohjeiden kera aina, kun käyttöön otetaan jokin kurssin kannalta uusi ominaisuus.

Tässä oppimateriaalissa esiintyvät kuvaajat on lähtökohtaisesti piirretty GeoGebralla Classic 6:lla ja sitä oletetaan käytettävän myös tehtävien ratkaisemisessa, vaikka muitakin vaihtoehtoja varmasti on olemassa. Tehtävät on pyritty laatimaan niin, että esimerkiksi ohjelmointikokemusta ei vaadita, vaan opiskelija pärjää käyttöliittymän tyypillisimmillä toiminnoilla mahdollisimman pitkälle. Tavoitteena on ollut, että GeoGebran käyttö ei olisi tehtävissä sen vaikeampaa kuin kynän ja paperin käyttäminen ja että GeoGebraa käyttämällä saataisiin tuotua sellaista visuaalisuutta opetukseen, johon perinteisesti ei ole vihkon sivulla helposti pystytty.

GeoGebrassa hyvin yhdistyvä funktioiden analyyttinen ja graafinen käsittely tekevät siitä kiitettävän alustan juuri derivaatan opettamiseen ja opiskeluun. Nellie C. Verhoefin, Fer Coendersin, Jules M. Pietersin, Daan van Smaalenin ja David O. Tallin nimenomaan derivaatan opetukseen liittyvässä tutkimuksessa *Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra* (2013) havaittiin, että GeoGebran avulla opiskelijat ovat jopa itse voineet keksiä geometriaan liittyviä lauseita ja niiden todistuksia [19]. Tässä oppimateriaalissa opiskelijoille annetaan mahdollisuus tutkia derivoinnin säännönmukaisuuksia erityisesti pohdinnassa A.30 sekä harjoitustehtävissä 3 ja 10.

Verhoefin ja kumppaneiden tutkimusta vastaan voi kuitenkin suhtautua sikäli varauksellisesti, että tutkimukseen osallistunut opettajaryhmä oli melko pieni ($n = 7$). Lisäksi opettajien työkokemuksessa oli selkeitä määrällisiä eroja, sillä se vaihteli yhdestä vuodesta 23 vuoteen [19]. Kvalitatiivisena tutkimuksena Verhoefin ja kumppaneiden tutkimus nosti kuitenkin hyviä huomiota pintaan ajatellen tulevaa oppimateriaalia. Opettajat olivat muun muassa kokeneet GeoGebran hyödylliseksi:

- oppilaiden väärinkäsitysten havaitsemiseen ja korjaamiseen,
- visuaalisuuden lisäämiseen opetuksessaan,
- funktion paikallisen käyttäytymisen tutkimiseen (*Zoom*-toiminto) ja

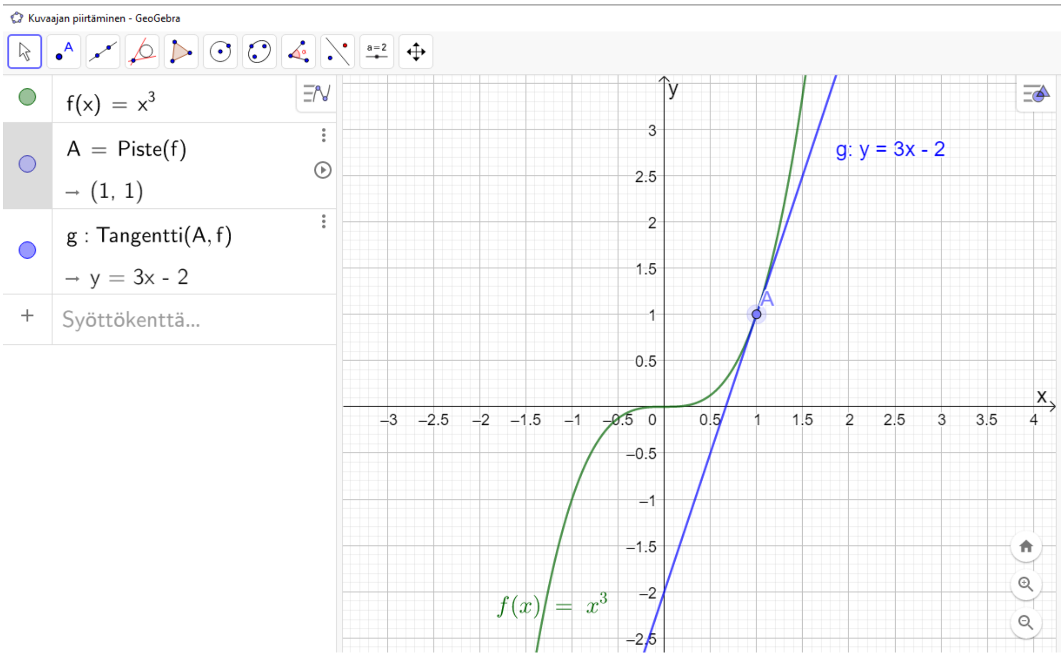
- derivoimissääntöjen intuitiiviseen havainnollistamiseen. [19]

Lisäksi tutkimuksessa nostettiin esille, miten opettajat kokivat GeoGebran yleisesti rikastuttavan heidän matematiikan opetustaan [19]. Tämän oppimateriaalin kannalta keskeisintä tutkimuksen antia ovat *visuaalisuuden lisääminen opetuksessa* ja *funktion paikallisen käyttäytymisen tutkiminen*, jotka oikeastaan vieläpä liittyvät kiinteästi toisiinsa. GeoGebran *Zoom*-toiminto antaa helpon mahdollisuuden lähestyä mitä vain jatkuvan funktion graafilla olevaa pistettä mielivaltaisen lähelle, ja näin tekemällä saadaan mikä tahansa derivoituva käyrä näyttämään paikallisesti suoralta, jolloin opiskelijalla on kuvan kautta helppo mahdollisuus ymmärtää erotusosamäärän raja-arvon yhteys funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimeen halutussa pisteessä.

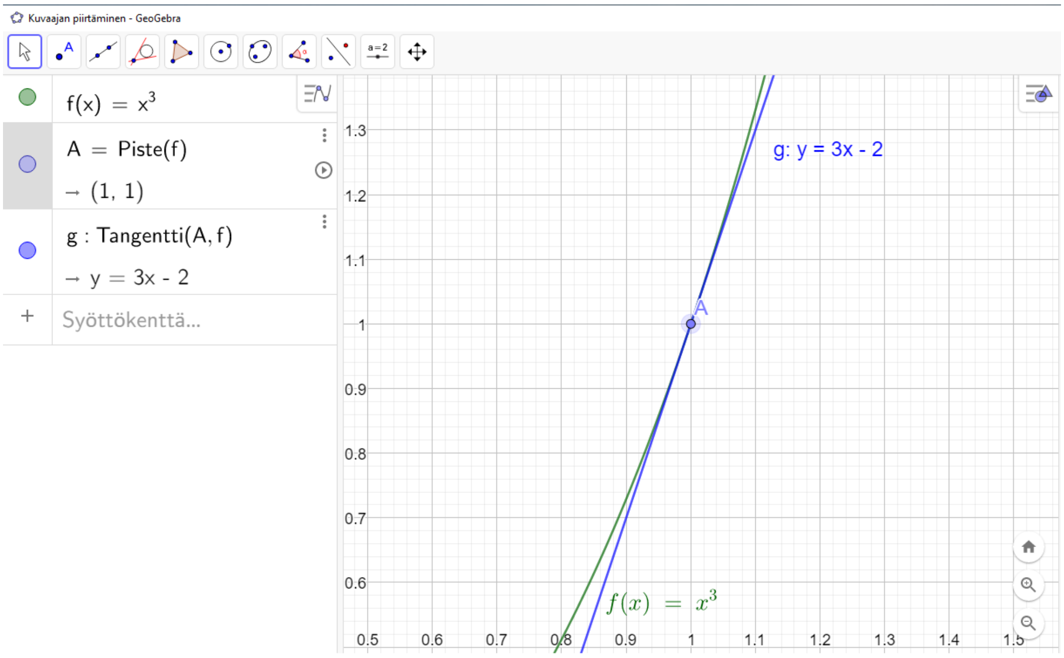
GeoGebra siis tuo opetukseen uusia ja vaivattomia mahdollisuuksia, mikäli tilannetta verrataan derivaatan opettamiseen pelkän kynän ja paperin avulla. GeoGebralla voidaan derivaattaa havainnollistaa siten, että funktion tiettyyn pisteeseen piirrettyä tangenttia voidaan tutkia tarkentamalla kuvaa kohti kysyttyä pistettä käytännössä mielivaltaisen lähelle, jolloin mikä tahansa derivoituvan funktion kuvaaja näyttää paikallisesti tangenttisuoran suuntaiselta [19]. Näin opiskelijoille voidaan luoda vahva visuaalinen mielikuva siitä, mitä derivaatta tarkoittaa käytännössä. Perinteiseen matematiikan opetukseen verrattuna tässä yllättävintä on se, että ainakin teoriassa derivaatan käsite olisi mahdollista opettaa näin jopa kokonaan ilman erotusosamäärän tai raja-arvon käsitettä!

Tutkimuksessa haastatelluista opettajista useampi toi esille derivoimissääntöjen intuitiivisuuden opiskelijoille, kun niitä lähestytään visuaalisesti GeoGebralla kuvaajien tutkimisen kautta [19]. Tässä oppimateriaalissa on pyritty korostamaan visuaalisuuden merkitystä kuvaajien käyttäytymisen tutkimisessa ja tavoitettaana on ollut GeoGebran monipuolinen käyttö tässä tarkoituksessa. Esimerkiksi pohdinnassa A.25 GeoGebraa hyödynnetään raja-arvon visualisoinnissa käyttäen funktiota, jonka piirtäminen ei käsin olisi yksinkertaista, vaikka funktio itsessään sellainen onkin. Päämääränä tässä oppimateriaalissa on ollut se, että GeoGebra toisi opetukseen visuaalisuutta lisää tavalla, joka opettajan on helppo ottaa haltuun ja osaksi opetustaan.

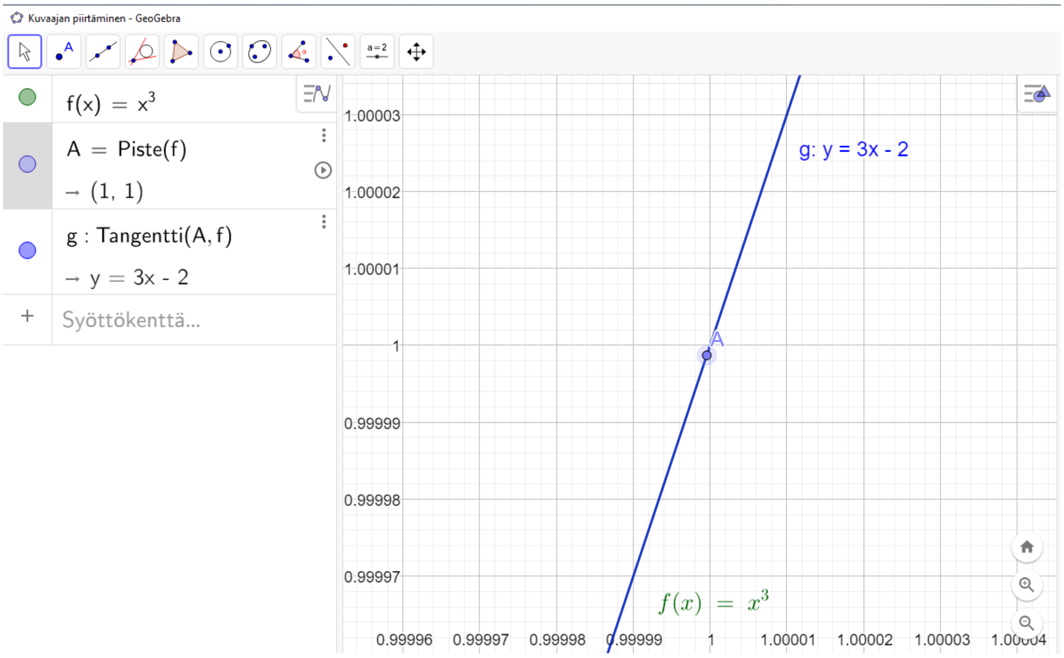
Esimerkiksi kirjan viimeisessä harjoitustehtävässä 10 halutaan tutkia kolmannen asteen funktion käyttäytymistä sen tietyissä pisteissä GeoGebran avulla. Jos kiinnostuksen kohteena oleva funktio olisi esimerkiksi $f(x) = x^3$ ja tutkittavaksi pisteeksi valittaisiin $A = (1, 1)$, opiskelija voisi ratkaista tehtävän esimerkiksi seuraavasti: Hän piirtää funktion f, sijoittaa sille pisteen A käskettyyn kohtaan ja piirtää pisteeseen A tangenttisuoran, jonka kulmakertoimen hän lukee.



Tarkentamalla kuvaa opiskelija voi havaita, miten funktion $f(x) = x^3$ kuvaaja muistuttaa käyttäytymiseltään tangettifunktion kuvaajaa enenevissä määrin, kun lähestytään pistettä A.



Kun tarkennusta on jatkettu riittävän kauan, havaitaan, ettei GeoGebran näytöltä ole mahdollista erottaa enää kuvaajia toisistaan, vaan ne ovat käytännössä täysin päällekkäisiä ja käyttäytyvät pisteen A välittömässä läheisyydessä identtisesti. Opiskelija voi siis itse nähdä, miten tangentin kulmakerroin, joka voidaan ajatella erotusosamäärän raja-arvoksi pisteessä A, vastaa alkuperäisen funktion f kuvaajan muodostaman ”suoran” kulmakerrointa samassa pisteessä.



Lopuksi opiskelijalla on mahdollisuus useampia pisteitä tutkittuaan muodostaa funktion $f(x) = x^3$ derivaatan arvoa kuvaava yhtälö $f'(x) = 3x^2$. Kritiikin aihettakin voi kuitenkin löytää tästä derivaatan esitystavasta. Vaikka tällainen tehtävätyyppi vaikuttaisi ensisilmäyksellä todella hyvältä, on paikallaan pohtia, onko tässä kuitenkin kyseessä kaksiteräinen didaktinen miekka. Tässä tehtävätyypissä toisaalta kootaan yhteen kaikki tämän oppimateriaalin asiat, mutta toisaalta tehtävän anti saattaa opiskelijalle olla pahimmillaan se, että erotusosamäärä ja raja-arvo saadaan näyttämään tarpeettomilta matemaattisilta työkaluilta, joiden arvo on lähinnä historiallinen.

Tällainen opetustapa on kuitenkin vahvasti graafinen, joten lienee epätodennäköistä, että sen käyttäminen saisi opiskelijan näkökulmasta analyyttisen tavan tutkia derivaattaa näyttämään heikommalta. Parhaimmillaan tilanne onkin päinvastainen, ja opiskelijan ymmärrys derivaatasta paranee sekä analyyttisella että graafisella tasolla etenkin, kun tehtävätyyppi esitellään nimenomaan erotusosamäärän raja-arvon visualisointina. Tässä oppimateriaalissa tämä tehtävätyyppi onkin haluttu nähdä ennen kaikkea opetusta rikastuttavana ja opiskelijan visuaalista ymmärrystä laajentavana, joten se on jätetty oppimateriaalin loppuun tehtäviksi (pohdinta A.30 ja harjoitustehtävä 10), joiden tarkoitus on toimia yhteenvetona kaikesta edellä opitusta, sekä tuottaa opiskelijalle mahdollisuus keksimisen riemuun.

Tämän derivaatan visuaalisen esitystavan GeoGebran avulla olisi voinut sijoittaa myös tämän oppimateriaalin alkuun esimerkiksi opiskelijalle siitä, mistä derivaatassa oikein onkaan kysymys. Toisaalta sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen ja *Lukion opetussuunnitelman perusteisiin* vedoten on tämä tehtävätyyppi kuitenkin jätetty oppimateriaalin loppuun, sillä opiskelijan oma aktiivinen rooli on suurempi itse asiaa tutkiessa kuin kuin passiivisesti esimerkkiä seuratessa [10, 12]. Tarkoituksena on ikään kuin sulkea ensimmäisestä kappaleesta käyntiin pyörähtänyt oppimisen ympyrä ja sen jälkeen vapauttaa hyvät derivaatan ja derivoimisen oppimisen valmiudet saanut opiskelija oppikirjan seuraavien osioiden kimppuun.

Viitteet

[1] Mark Asiala, Jim Cottrill, Ed Dubinsky ja Keith E. Schwingendorf. *The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative* (1997)

Julkaistu: *ELSEVIER The Journal of Mathematical Behavior*, vuosikerta 16, 4/1997, sivut 399-431.

[2] Paula Collin, Yle: *Suomalaiset osaavat matematiikkaa yhä huonommin, vaikka sitä tarvittaisiin koko ajan enemmän – professori: Teknologinen kehitys lisää matematiikan merkitystä* (2018)

https://yle.fi/uutiset/3-10353905 Noudettu 8.12.2020.

[3] Paula Collin, Yle: *Jopa 10 000 työpaikkaa koodareille, mutta tekijät puuttuvat - "vaatii kaikkien osapuolten aktivoitumista"* (2019)

https://yle.fi/uutiset/3-10669492 Noudettu 8.12.2020.

[4] Al Cuoco, E. Paul Goldenberg ja June Mark. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* (1996)

Julkaistu: *ELSEVIER The Journal of Mathematical Behavior*, vuosikerta 15, 4/1996, sivut 375-402.

[5] Ljubica Diković. *Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level* (2009)

Julkaistu: *Computer Science and Information Systems*, vuosikerta 6 2/2009, sivut 191-203.

[6] Koeno Gravemeier ja Michiel Doorman. *Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example* (1999)

Julkaistu: *Educational Studies in Mathematics*, vuosikerta 39, 1/1999, sivut 111–129.

[7] Jenni Honkanen. *Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä – YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin* (2018)

shorturl.at/quzRW Noudettu 8.12.2020.

[8] Kaisu Jansson & Petra Ristola, Yle: *Syökö pitkän matikan suosio yleissivistystä? Yle kysyi rehtoreilta – "Opiskelijoiden jaksaminen on heikentynyt ja taito- sekä taideaineiden opiskelu on vähentynyt"* (2019)

https://yle.fi/uutiset/3-10826054 Noudettu 8.12.2020.

[9] Kreeta Karvala. Iltalehden pääkirjoitus: *Yleissivistyksen piti olla lukion ydin, mutta jatkossa se on pitkä matematiikka* (2019)

shorturl.at/tTWZ6 Noudettu 31.10.2020.

[10] Reijo A. Kauppila. *Ihmisen tapa oppia - Johdatus sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen* Jyväskylä : PS-kustannus (2007)

[11] Jecaterina Mantsinen, Aamulehti: *Matematiikan lukiomenestyksestä halutaan antaa etumatkaa yliopistoon – "Ymmärrämme hyvin, miksi tähän on päädytty"* (2018)

https://www.aamulehti.fi/uutiset/art-2000007287912.html Noudettu 8.12.2020.

[12] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* (2019)

[13] Opetushallitus. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2014* (2014)

[14] Erno Paasilinna. *Lausui alustaja, joka korosti – Kootut aforismit ja aforistiset lauseet 1967–1987* Otava (1989)

[15] Krista Rastamo, MTV-uutiset: *Pitkän uran tehneen lehtorin synkkä tuomio nykynuorista: "Vanhemmat hyysäävät ja lukioon tullaan ilman pohjatietoja – monella ei ole unelmia mistään"*

https://cutt.ly/jhNJOnN Noudettu 27.8.2020.

[16] Marjatta Rautio, Yle: *Yliopistojen todistusvalinta valmistui – katso minkälaisilla ylioppilastodistuksilla pääsi lääkikseen, oikikseen, kauppikseen ja psykaan* (2020) https://yle.fi/uutiset/3-11370205, noudettu 9.6.2020.

[17] Pauli Siljander, Kari Väänänen, Ari Kivelä, Mari Mielityinen, Esa Pikkarainen, Ari Sutinen, Heini Hinkkanen & Jouni Peltonen. *Kasvatus ja sivistys* (2000)

[18] Malcolm Swan. *Collaborative Learning in Mathematics* sivut 162–176. National Institute of Adult Continuing Education (2006)

[19] Nellie C. Verhoef, Fer Coenders, Jules M. Pieters, Daan van Smaalen, and David O. Tall. *Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra* (2013)

Julkaistu: *Professional Development in Education*, vuosikerta 41, 1/2015, sivut 109-126.

[20] Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämden. Koejärjestelmässä käytettävissä olevat ohjelmat

https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat Noudettu 26.8.2020.

[21] Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämden. Pisterajat kevät 2019

https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/pisterajat/pisterajat-kevat-2019 Noudettu 29.5.2020.

[22] Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämden. Pisterajat syksy 2019

https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/pisterajat/pisterajat-syksy-2019 Noudettu 29.5.2020.

[23] Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämden. Pisterajat kevät 2020

https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/pisterajat/pisterajat-kevat-2020 Noudettu 29.5.2020.

A Luku 1: Johdatus derivaattaan, erotusosamäärään ja raja-arvoon.

A.1 Mikä ihmeen derivaatta?

Pohdinta A.1 Mininäytelmä

Roolihahmot: Marko ja Pekka.

Paikka: Pöydän ääressä, esimerkiksi keittiössä.

Marko ja Pekka tekevät fysiikan läksyjä.

Marko: *Hei miten sä ratkaisit tuon kasin?*

Pekka: *Piirsin kuvaajan ja ratkaisin sen tangentin kulmakertoimen ajan hetkellä* $t = 4$.

Marko: *Höh, niin tietysti. Aina pitää piirtää kuva.*

Pekka: *Mä oon itteasiassa miettiny, että onkohan se ihan noin...*

Marko: *No miten muuten voit muka ratkaista jonku randomin funktion kulmakertoimen?*

Pekka: *No oikeastaan et ratkaise funktion kulmakerrointa, vaan sen* ***kuvaajan tangentin kulmakertoimen*** *jossain tietyssä pisteessä. Mutta mietipä näin: jos sulle annetaan sama funktion kuvaaja kahdessa eri tehtävässä, niin eihän sun tartte kuin piirtää se kerran, koska kyllähän niissä molemmissa on ihan sama kulmakerroin samassa kohtaa, jos ne kerran on samanlaisia.*

Marko: *No joo, mutta pitää se silti piirtää vähintääkin kerran.*

Pekka: *Sitä mä oon täs justiin miettiny. Voisko sen funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen tietää jo etukäteen, jos tietää funktion ennalta?*

Marko: *No totta kai voi. Esimerkiksi, kyllähän sä tiedät funktion* $f(x) = 2x$ *kuvaajan kulmakertoimen olevan kaikkialla tasan* 2.

Pekka: *Totta, mutta entä jos se funktio on jotenkin monimutkaisempi?*

Marko: *No ei sitä sitten voi tietää.*

Pekka: *Missä se raja sitten menee? Kuinka monimutkainen funktion pitää olla, jotta et osaa enää sanoa mitään sen kuvaajan tangentin kulmakertoimesta?*

Marko: *Semmonen missä se kulmakerroin muuttuu. Vaikka* $f(x) = x^2$.

Pekka: *Mutta kyllähän sä nytkin tiedät heti sanoa, että tuon funktion tangentin kulmakerroin on positiivinen, kun* $x > 0$ *ja negatiivinen, kun* $x < 0$. *Ja nollassa se on nolla.*

Marko: *Meinaatko, että funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen arvojen muutosta vois kuvata jotenkin?*

Pekka: *Voishan sitä vaikka kuvata jollain toisella funktiolla. Aina kun sinne funktioon syöttäis x:n paikalle jonku luvun, niin se funktio kertois mikä sen alkuperäisen funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin on sillä x:n arvolla.*

Marko: *Mutta sitten pitäisi tehdä aina kaksi funktiota, eikä vaan yhtä!*

Pekka: *Mutta toisaalta ei tarttisi ollenkaan piirtää näitä kuvaajia. Riittäis vaan laskea sen toisen funktion arvo halutussa pisteessä x.*

Marko: *No siinä tapauksessa tuo ei olisi yhtään pöllömpi idea!*

Onkohan herrojen pohdinnassa mitään päätä tai häntää? Mitä mieltä olet Pekan ajatuksesta, jonka mukaan funktion kuvaajan tangentin kulmakerrointa – siis arvojen muutosnopeutta halutussa pisteessä x – voisi kuvata toisella funktiolla?

Tämän kurssin aihe on derivaatta. Lyhyesti derivaatan voisi määritellä tarkoittavan funktion kuvaajan tangentin kulmakerrointa, siis funktion arvojen muutosta suhteessa muuttujan muutokseen.

On olemassa funktioita, joiden kuvaajista niiden tangentin kulmakerroin on helppo määrittää, kuten funktio $f(x) = 2x$, jonka kuvaajan tangentin kulmakerroin on kaikkialla 2.

Äsken luetussa dialogissa Pekka kuitenkin esitti hyvän kysymyksen: kuinka monimutkainen pitää olla, jotta sen kuvaajan tangentin kulmakertoimen määrittäminen menee ongelmalliseksi?

Esimerkiksi, miten määritettäisiin tangentin kulmakerroin seuraavien funktioiden kuvaajista?

$$f(x) = 3x^3 - x^2 + 8\,,$$

$$g(x) = \sin(2x) \text{ ja}$$

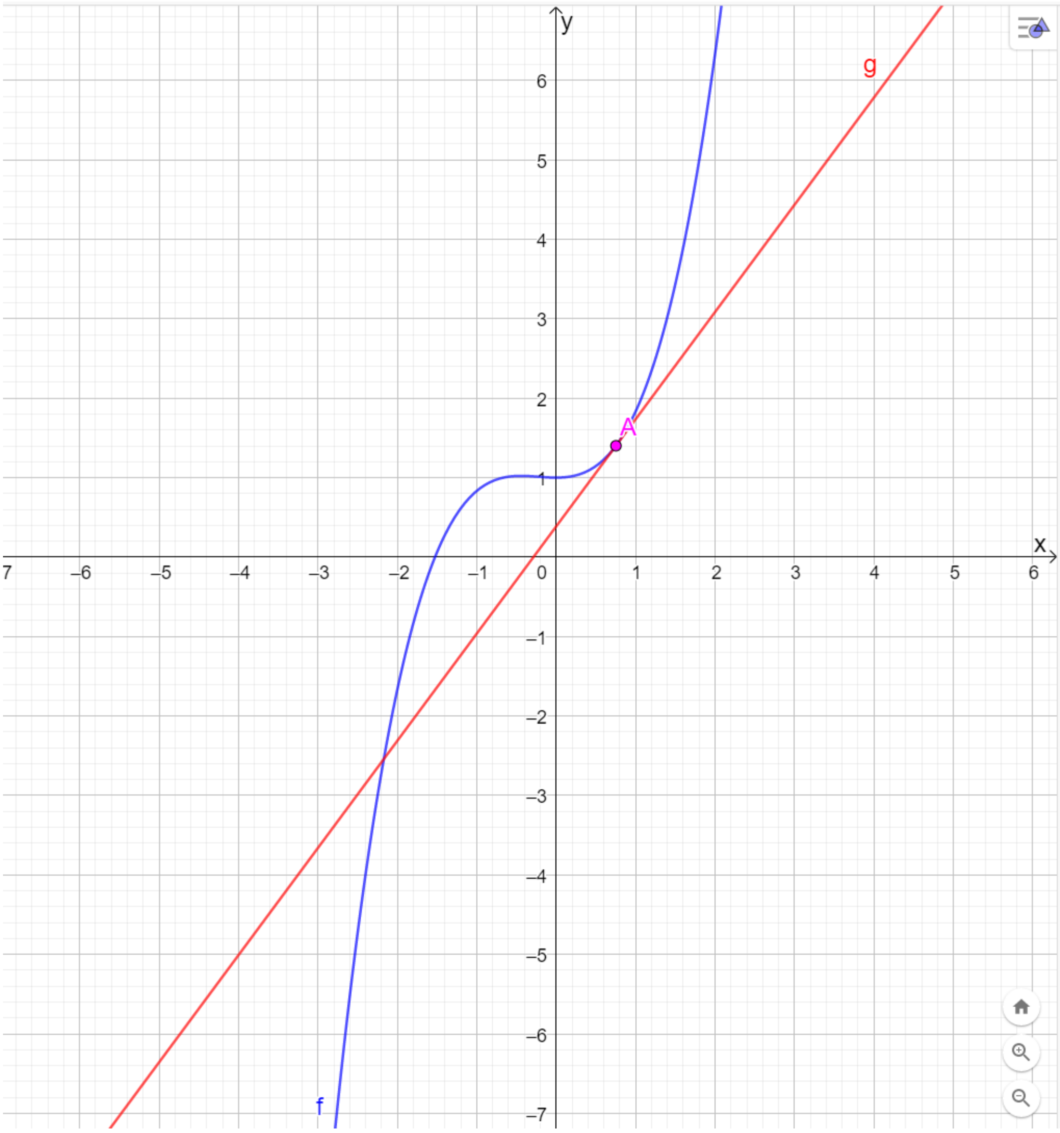
$$v(t) = \frac{s}{t}\,.$$

Ensimmäinen ajatus lienee, ettei ainakaan ihan helposti nykyisen tiedon valossa. Mikäli palaat kurssin loppupuolella näiden funktioiden pariin uudestaan, osaat varmasti määrittää jokaiselle funktiolle sen kuvaajan tangentin kulmakertoimen helpommin kuin nyt uskallat edes toivoa.

Mutta miksi ihmeessä funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen määrittäminen ylipäätään on niin kiinnostavaa, että sitä varten on tarvittu kokonainen kolmen opintopisteen lukiomatematiikan kurssi?

Huomautus A.2 Tangentti on suora, joka sivuaa kuvaajaa paikallisesti täsmälleen yhdessä pisteessä.

Esimerkki A.3 Kuvassa suora g on funktion f tangentti sivuten sitä pisteessä A. Funktion f derivaatta pisteessä A on puolestaan tangentin g kulmakerroin.

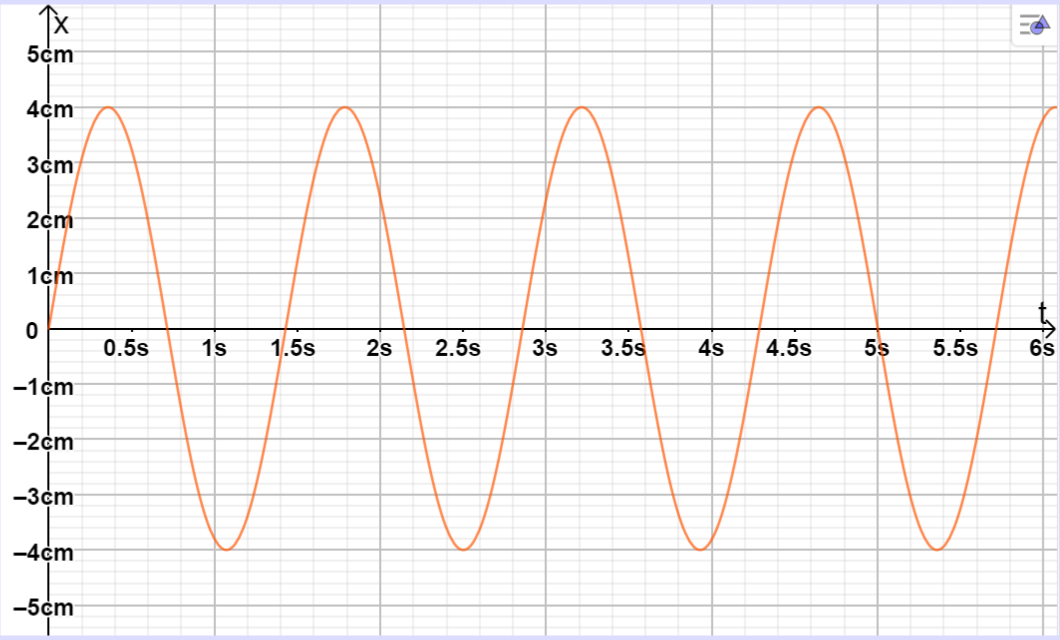


Lisätieto A.4 Sana *tangentti* juontaa juurensa latinan sanaan *tangere*, kosketus.

Lisätieto A.5 Mihin derivaattaa tarvitaan?

Derivaatalle eli funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimelle löytyy paljon sovelluksia laskennallisten tieteiden kuten esimerkiksi fysiikan, kemian, tekniikan, lääketieteen, ohjelmoinnin ja taloustieteen piiristä. Hyvin perinteinen käyttökohde on fysiikka, jossa funktioiden kuvaajien tangenttien kulmakertoimet sisältävät monesti mielenkiintoista tietoa jonkin ilmiön käyttäytymisestä. Jossain mielessä nykyaikaisempia derivaatan käyttökohteita edustavat esimerkiksi tekoälyohjelmistot, sillä derivaatta on se matemaattinen keino, jolla voidaan optimoida ratkaisuja. Toisin sanoen, derivaatta on keskeisessä roolissa myös koneoppimisessa, kun kone pyrkii löytämään parhaita mahdollisia toimintamalleja.

Pohdinta A.6 Seuraavassa kuvaajassa on esitetty jousen vapaan pään värähtely aika-paikka -koordinaatiostossa.



a) Miten kuvaajasta voisi määrittää jousen vapaan pään hetkellisen nopeuden?

b) Milloin nopeus on pienimmillään?

c) Milloin nopeus on suurimmillaan?

d) Entä mikä on jousen vapaan pään keskinopeus?

Esimerkki A.7 Miten derivaatta liittyy lääke- ja kemianteollisuuteen?

Olet varmasti joskus miettinyt liuosten käyttäytymistä sitä itse sen enempää tiedostamatta. Jos olet ikinä pohtinut, milloin veteen lisäämäsi tiskiaine on levinnyt kaikkialle veteen tasaisesti tai sekoittanut kaakaojauhetta maitoon tai maitoa kahviin saadaksesi aikaan tasakoosteisen ja -laatuisen juoman, olet tehnyt sen nopeuttaaksesi luonnollisen sekoittumisen prosessia.

Liuosten käyttäytymisen tunteminen on hyvin tärkeää etenkin, jos halutaan valmistaa suuria määriä liuoksia tai tehdä niitä kirurgisella tarkkuudella. Matematiikka antaa jälleen erinomaiset työkalut liuosten käyttäytymisen mallintamiseen ja ennustamiseen. Mielenkiintoinen liuoksiin liittyvä ilmiö, joka tulee vastaan varmasti ainakin kemiassa, lääketieteessä ja biologiassa, on *diffuusio* eli ilmiö, jossa liuoksessa olevat molekyylit pyrkivät siirtymään väkevämmästä pitoisuudesta eli *konsentraatiosta* laimeampaan pitoisuuteen.

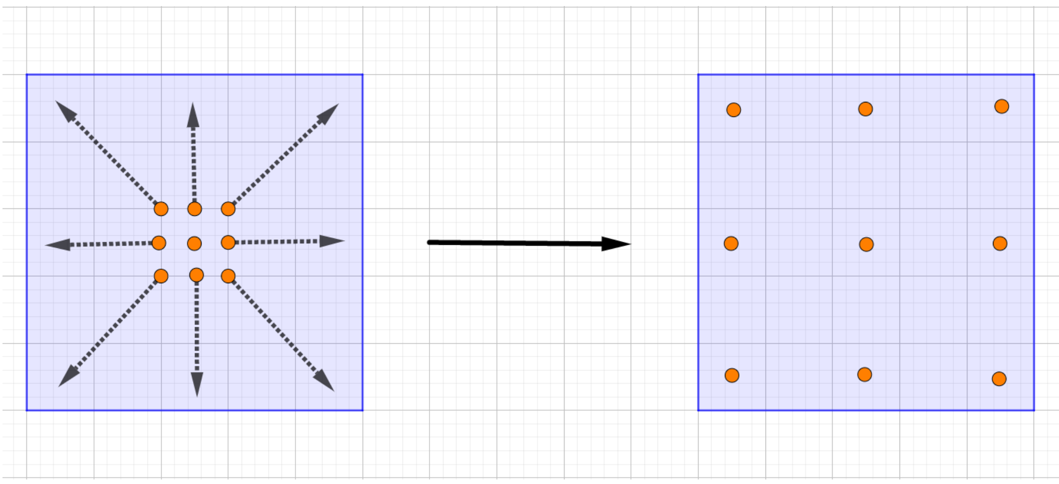
Vuonna 1855 saksalainen fyysikko Adolf Fick esitti teoreettisen mallin *diffuusiolle*. Fick esitti tämän diffuusion vuon J suuruutta kuvaavan luonnonlain matemaattisessa muodossa

$$J = -D\frac{dc}{dx},$$

missä D = tilanteesta riippuva diffuusiokerroin, c = konsentraatio ja x = paikka.

Tämä nimellä *Fickin 1. diffuusiolaki* tunnettu yhtälö osoittaa, että diffuusion vuon suuruus J riippuu konsentraation muutoksen dc suhteesta paikan muutokseen dx. Toisin sanoen, yleisesti *vuon suuruus riippuu konsentraation derivaatasta paikan suhteen.*

Monimutkaisen kuuloista tilannetta ja kaavaa voidaan kuitenkin kuvata helposti. Siniseen liuokseen lisätyn aineen oranssit molekyylit pyrkivät leviämään korkeammasta konsentraatiosta matalampaan konsentraatioon, jolloin lopputuloksena on tasalaatuinen liuos. Katkoviivalla piirretyt nuolet kuvaavat nyt diffuusion vuon J suuntaa.

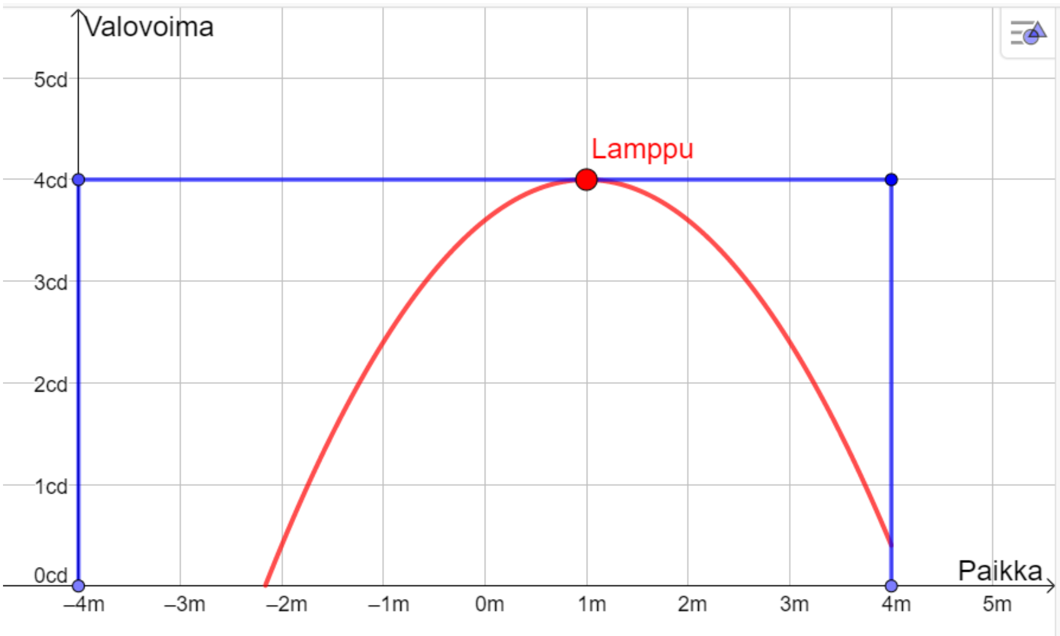


Tutustutaan vielä toiseen esimerkkiin derivaatan merkityksestä työelämässä. Ohjelmointi on alati kasvava ala, johon matematiikka liittyy kiinteästi.

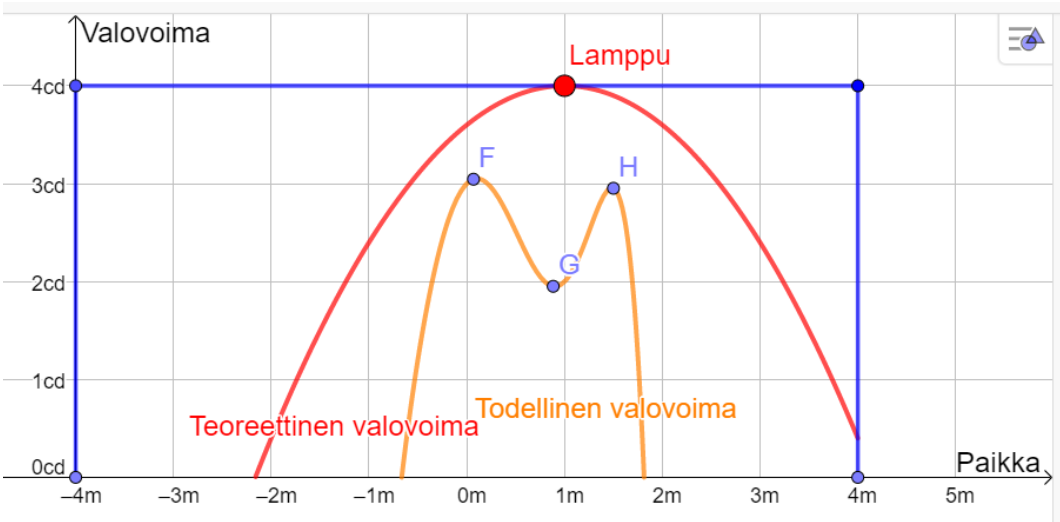
Esimerkki A.8 Miten tekoäly käyttää derivaattaa?

Kuvitellaan tilanne, jossa tekoäly pyrkii ratkaisemaan valoisimman paikan laboratoriossa himmeän valon avulla kasvatettavalle lääkkeen raaka-aineena toimivalle levälle.

Mallinnetaan tilannetta hieman. Jos laboratorion pituus olisi esimerkiksi 8 m, ja lamppu sijaitsisi metrin verran kasvihuoneen keskikohdasta oikealle ovelta katsottuna ja himmeän lampun valovoima olisi 4 kandelaa, voisimme esimerkiksi antaa lampulle x-koordinaatiksi 1, y-koordinaatiksi valovoiman suuruuden 4 ja piirtää kuvan tilanteesta.



Laboratoriossa kasvaa kuitenkin muitakin kasveja ja katossa kulkee erilaisia putkia. Nämä esteet tuottavat katveita lampun tuottamalle valolle himmentäen sitä. Nyt todellinen laboratoriossa havaittu valovoima on mallinnettu oranssilla ja alkuperäinen punainen kuvaa lampun teoreettista valovoimaa, jossa ei ole huomioitu valon kulkua estäviä tekijöitä.



Nyt havaitaan, ettei todellinen valoisin paikka sijaitsekaan suoraan lampun alla, vaan lähempänä huoneen keskustaa.

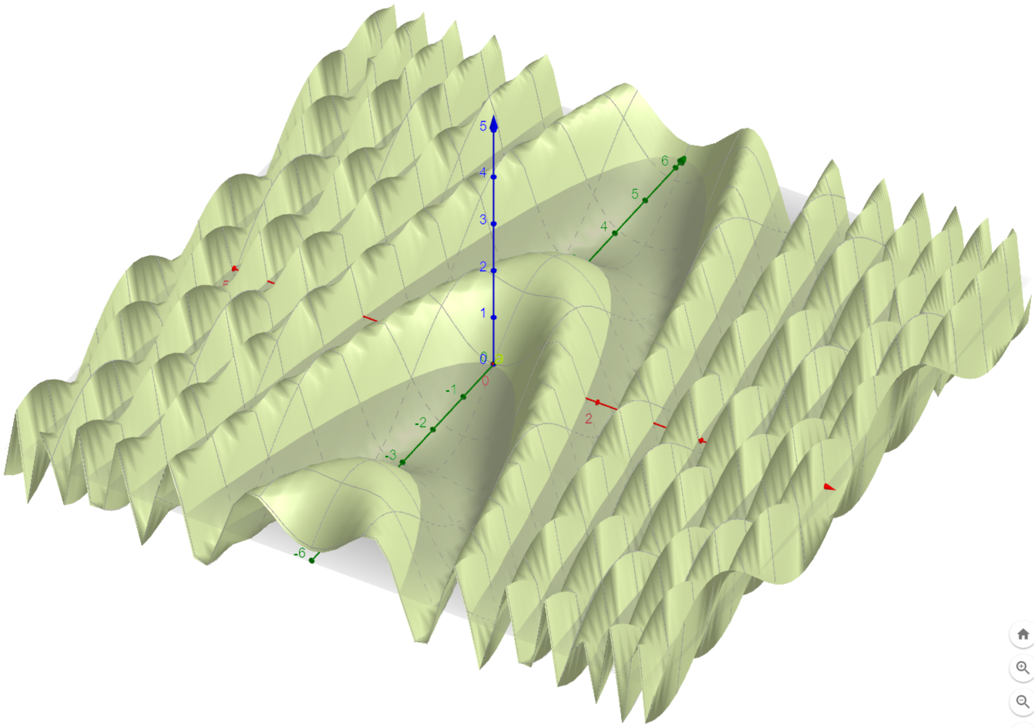
Ja miten tämä liittyy tekoälyyn tai derivaattaan?

Tekoäly voi nyt sovittaa mitattuun, todelliseen valovoimaan (oranssi) kuvaajan ja etsiä sieltä ne pisteet, joissa kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla, sillä näissä pisteissä saattaisi sijaita kuvaajan huippukohta, toisin sanoen se paikka laboratoriossa, jossa lampusta saatava valovoima on suurimmillaan. Toisaalta nollakohdassa voi myös sijaita minimi, jolloin kyseessä on paikallisesti kaikkein varjoisin alue.

Tekoäly siis etsii derivaatan nollakohtia todellisen valovoiman kuvaajalta (oranssi) ja vertailee niitä keskenään löytääkseen optimaalisimman paikan leväkasvustolle.

Löydettyään nollakohdat tekoäly havaitsee, että valoisin paikka ei olekaan suoraan lampun alla pisteessä G, vaan esimerkiksi pisteissä F ja H olisi parempi paikka.

Tekoäly on kuitenkin ihmisen ohjelmoima, joten ohjelmoinnin ammattilaisten on hyvä tuntea matematiikan tarjoamat mahdollisuudet. Tässä esimerkissä kyseessä oli kaksiulotteinen tilanne, mutta derivaattoja on mahdollista käsitellä useammissakin ulottuvuuksissa, kun optimoidaan monimutkaisempia tilanteita. Esimerkiksi jo 3-ulotteinen funktio näyttää huomattamavasti monimutkaisemmalta, mutta idea on sama: tekoäly etsii kuvaajalta huippuja ja laakson pohjia. Monimutkaisessa tilanteessa niitä voi olla useita, jolloin niiden laskeminen käy tietotekniikalta huomattavasti ihmistä tehokkaammin.



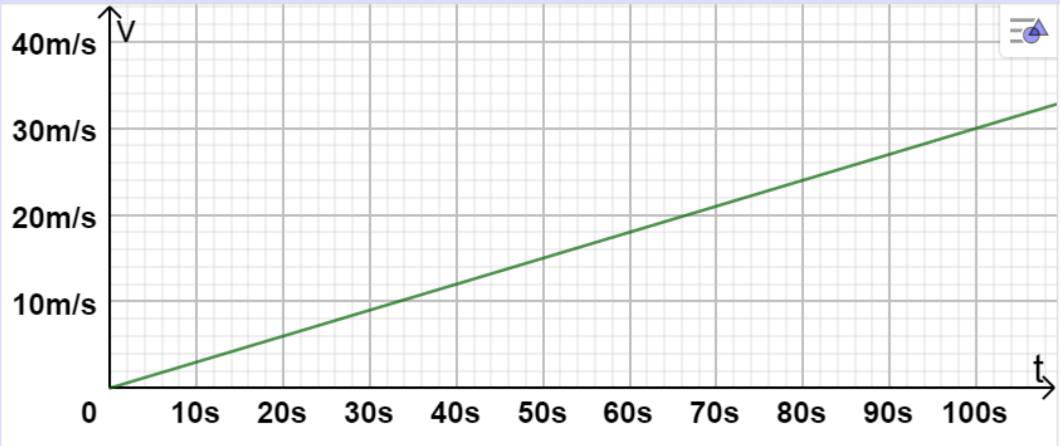
Tässä esimerkissä ”tekoäly” ratkaisi kiireettömän ongelman, mutta ajattelemisen aihetta antavat esimerkiksi autot, joissa ohjaamisen tekee ohjelmisto, jonka algoritmit pohjautuvat *peliteoriaan*, johon liittyvässä optimoinnissa myös derivaatalla on keskeinen rooli. Parasta ja turvallisinta ajoreittiä valittaessa laskennan tulee olla nopeaa ja virheetöntä. Tekoälyn tehdessä tuloaan monilla aloilla syntyy paljon uusia ja mielenkiintoisia työpaikkoja, joihin matematiikan osaaminen avaa ovet. Tässä on yksi hyvä syy opiskella derivaattaa huolella!

Pohdinta A.9 Ota kantaa väitteeseen: tangentin kulmakerroin ei voi olla nolla missään muualla kuin paikallisessa maksimissa (huippu) tai paikallisessa minimissä (kuoppa).

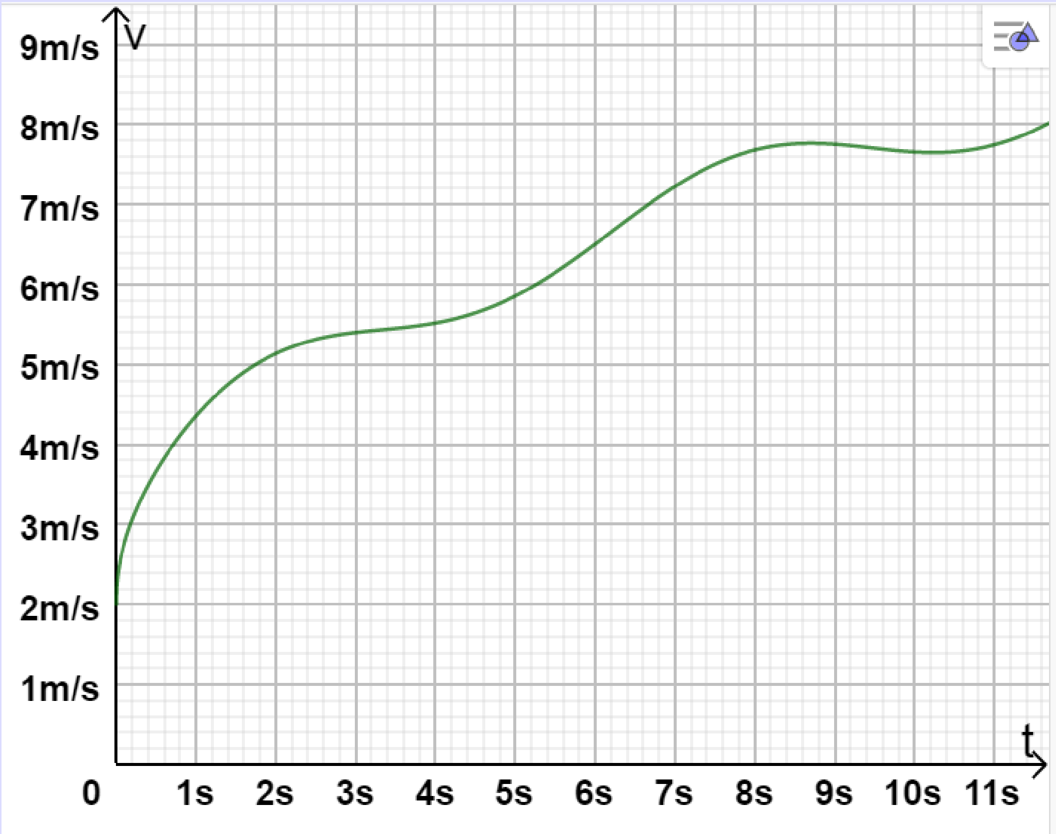
Tarpeettoman vaikeiden, työelämään liittyvien esimerkkien jälkeen on paikallaan kysyä, mitä iloa derivaatasta on meille tässä vaiheessa? Kuten alussa todettiin, derivaatta kuvaa funktion arvojen muutosta suhteessa sen lähtöjoukon arvojen muutokseen, eli se on funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin.

Fysiikasta (FY1) muistetaan, että kiihtyvyys kuvaa nopeuden muutosta ajan suhteen. Jos siis piirrämme kuvaajan, jossa esimerkiksi auton nopeus on pystyakselilla ja aika vaaka-akselilla, voimme kuvaajan kulmakertoimesta määrittää hetkellisen kiihtyvyyden autolle.

Pohdinta A.10 Hahmottele, miten määrittäisit seuraavasta kuvaajasta vanhan rekan kiihtyvyyden. Kuvaajassa rekan nopeus v on esitetty ajan t funktiona



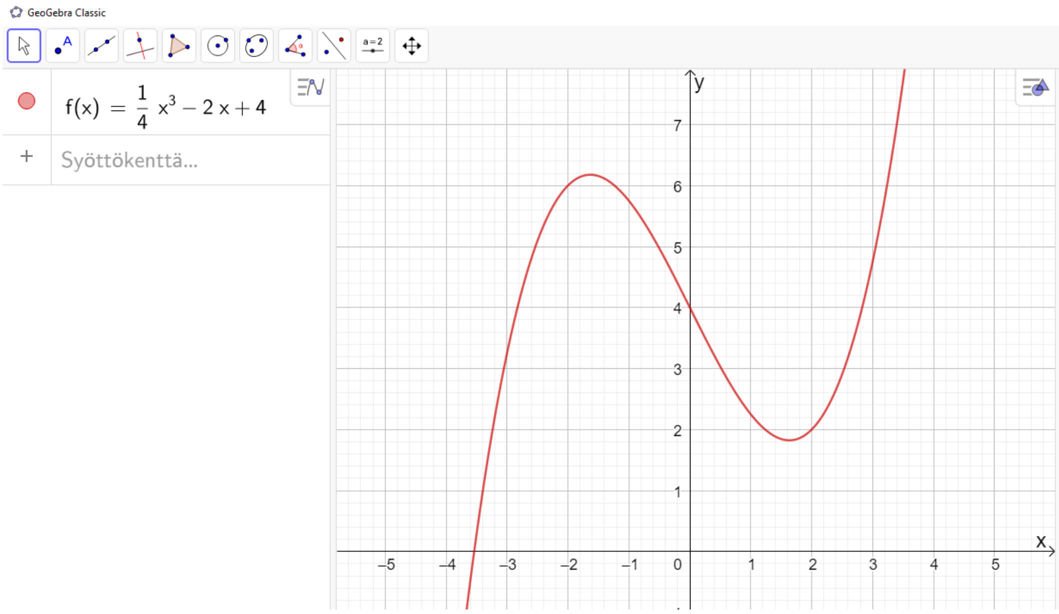
Entä miten määrittäisit kiihtyvyyden polkupyörälle kuvaajasta, jossa nopeus muuttuu ajan suhteen ensimmäistä kuvaajaa satunnaisemmin? Määritä kiihtyvyys ajan hetkillä 1 s, 4 s ja 9 s.



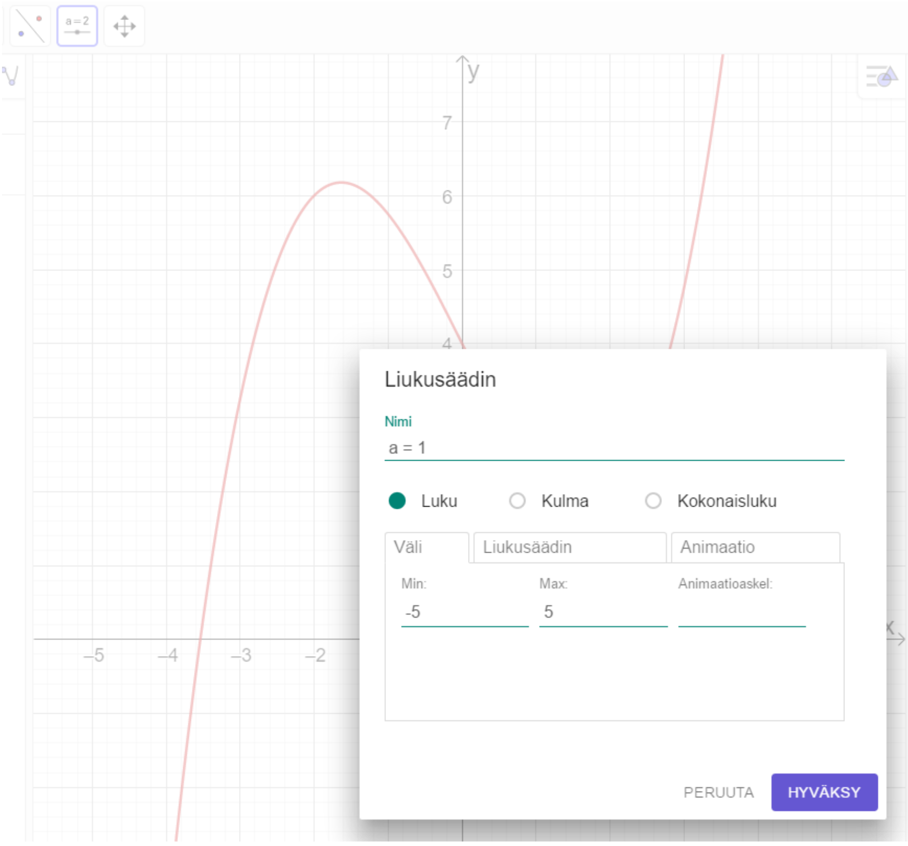
Huomataan, että ensimmäisestä kuvaajasta määritettynä kiihtyvyys on jokaisessa pisteessä sama, sillä nopeutta kuvaavan funktion kulmakerroin ei riipu ajanhetkestä t. Toisessa kuvaajassa tilanne ei ole kuitenkaan näin yksinkertainen, vaan kiihtyvyys saa loputtomasti eri arvoja sen mukaan, missä yksittäisessä pisteessä sitä tarkastellaan.

Kulmakertoimen graafinen määrittäminen tuo varmasti esille yhden selkeän ongelman: Kulmakertoimen suuruus riippuu määrityksen tarkkuudesta. Kun funktion kuvaajalle yritetään piirtää tangenttisuora, jonka pitäisi sivuta kuvaajaa täsmälleen yhdessä pisteessä huomataan, että se on vaikeaa tehdä täysin tarkasti. Tämän epätarkkuuden takia myös tangentin kulmakertoimen täsmällinen määrittäminen on vaikeaa. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaankin funktion tangentin kulmakertoimen määrittämistä GeoGebralla.

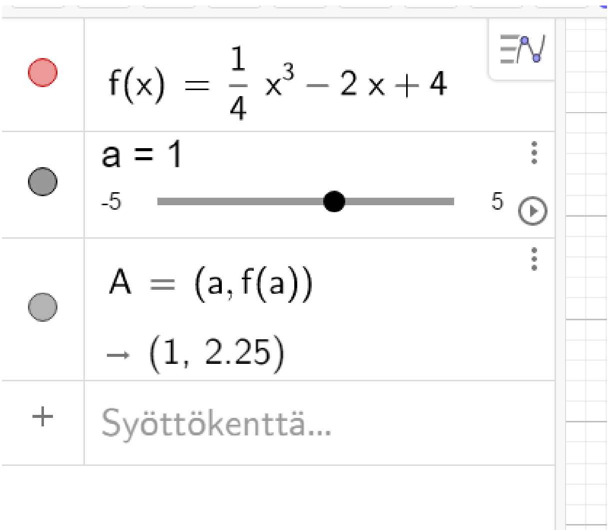
Mallitehtävä A.11 Piirrä geogebralla jokin polynomifunktio, joka on vähintään toista astetta. Tässä esimerkissä funktioksi valittiin $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x + 4$.



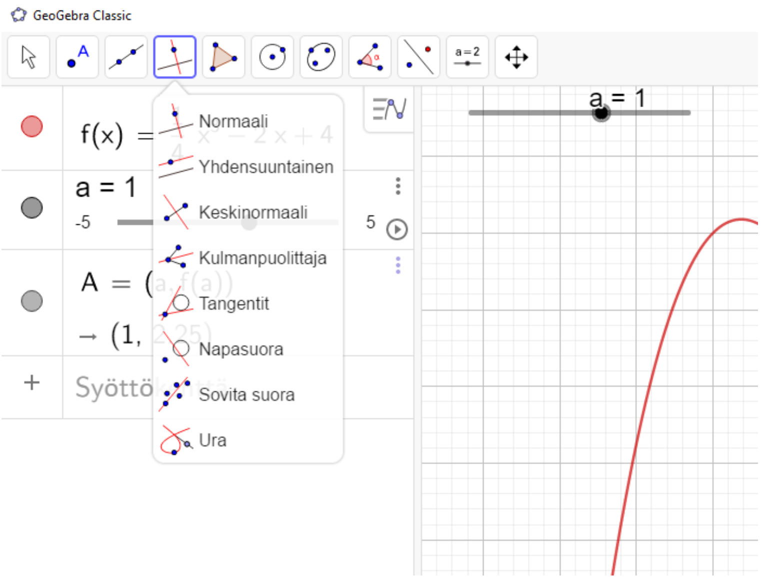
Luo *Liukusäädin* (Slider). Tässä esimerkissä säädin nimetään oletusasetusten mukaisesti a:ksi ja säätörajoiksi suljettu väli $[-5, 5]$.



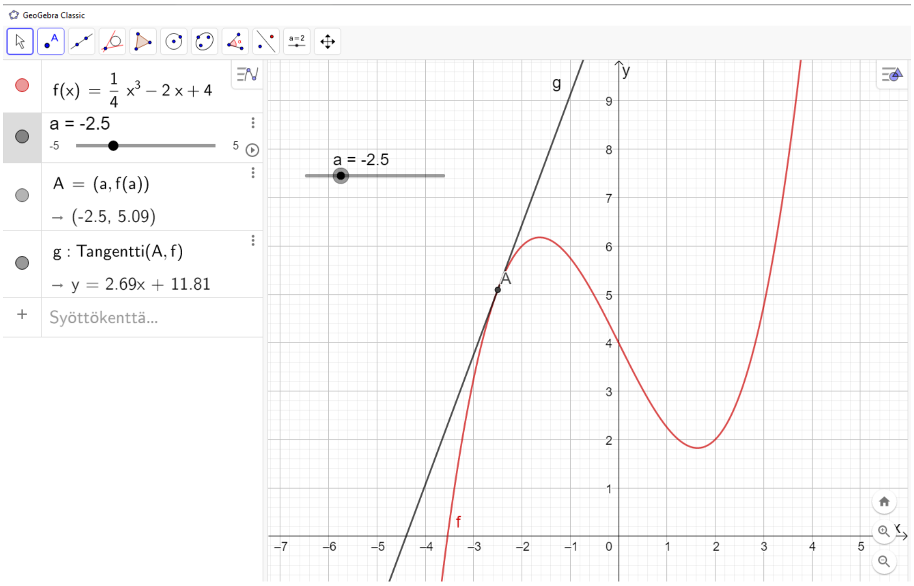
Määritä *Syöttökenttä*-toiminnolla (Input) piste A, jonka koordinaatit vastaavat luomasi liukukytkimen nimeä esimerkiksi $(a, f(a))$.



Seuraavaksi valitse *Tangentit*-toiminto (Tangents). Näpäytä pistettä $A = (a, f(a))$ ja piirtämäsi polynomin kuvaajaa.



Nyt GeoGebra piirtää kuvaajalla olevalle pisteelle $A = (a, f(a))$ tangentin, jonka yhtälö (tässä esimerkissä $g(x)$) ja ennen kaikkea kulmakerroin ovat nähtävissä GeoGebran vasemmassa laidassa. Voit liikuttaa tangenttia siirtämällä pistettä $A = (a, f(a))$ liukusäätimellä ja samalla nähdä, miten tangenttisuoran kulmakertoimen arvo muuttuu reaaliaikaisesti.



Derivaatta on analyyttinen tapa määrittää jatkuvan funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin sen mielivaltaisessa pisteessä. Yleensä tämä tarkoittaa funktion arvojen (siis y-koordinaatin) muutosta x-akselin arvojen suhteen. Toisin sanoen, kun funktio $f(x)$ tunnetaan, voidaan sen kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin eli derivaatta $f'(x)$ määrittää missä tahansa pisteessä, mikäli funktio $f(x)$ on derivoituva.

Merkintä A.12 Funktion f derivaattaa pisteessä a merkitään $f'(a)$.

Lisätieto A.13 Kannattaa opetella käyttämään täsmällisiä ilmauksia matematiikasta puhuttaessa. ”Mielivaltainen” tarkoittaa matematiikassa mitä tahansa yleistä pistettä, toki tämä piste voidaan sitoa johonkin tiettyyn väliin ja arvojoukkoon.

Esimerkiksi

$$x + 10 > 10$$

mille tahansa mielivaltaiselle kokonaisluvulle $x \geq 1$.

Karkeasti voisi yleistää, että siinä missä milleniaali tai nuori sanoo ”random”, matemaatikko sanoo ”mielivaltainen”.

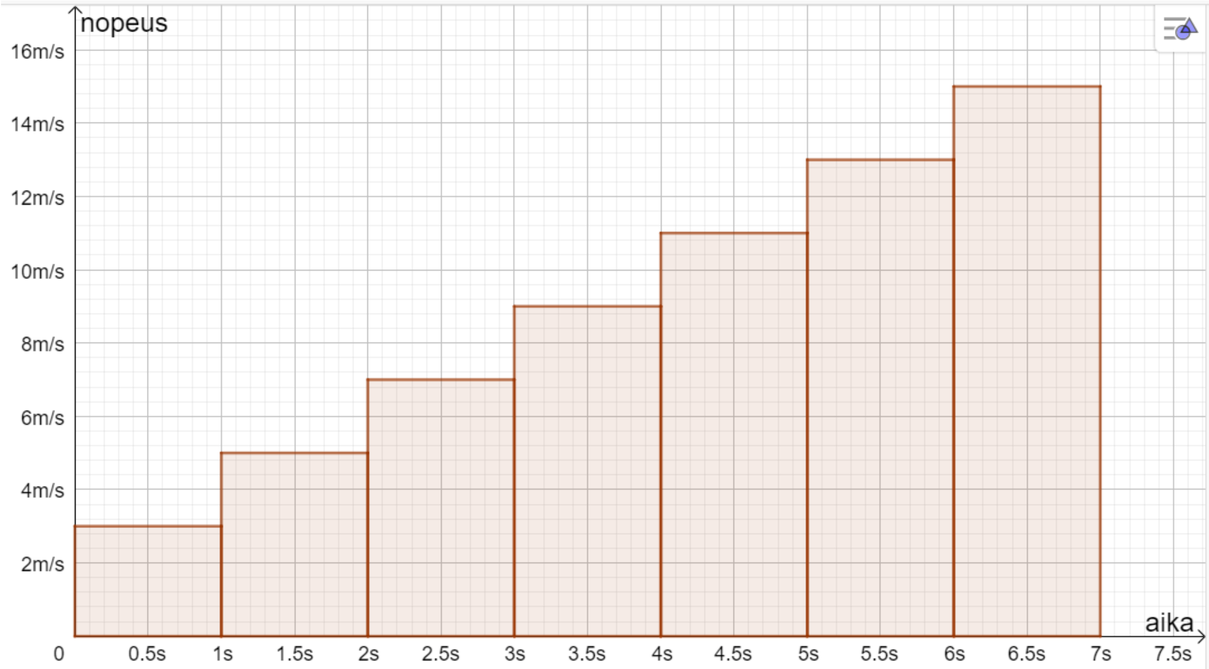
Tämän kurssin aikana opit tuntemaan derivaatan keskeisimmät sovellukset ja käyttökohteet. Opit myös derivoimaan tyypillisimmät funktiot, eli kykenet selvittämään niiden kuvaajien tangenttien kulmakertoimet kaikkialle, missä se on mahdollista.

Derivaatan käyttäminen ja täydellinen ymmärtäminen ei kuitenkaan onnistu, ellei ensin oteta käyttöön sen määrittelemisen kannalta kahta keskeistä matemaattista työkalua: *erotusosamäärää* ja *raja-arvoa*.

Erotusosamäärään ja raja-arvoon pureudutaan tiukemmin seuraavien tuntien aikana. Tässä kohtaa niistä ei tarvitse tietää kuin nimet.

A.1.1 Harjoitustehtäviä

1. Nicole Oresme oli ranskalainen tiedemies, joka tunnetaan erityisesti derivaatan pioneerina. Häntä kiinnosti erityisesti nopeuden muutoksen graafinen analysointi. Oresme mallinsi kappaleen havaittua nopeutta pystypalkeilla ja havaitsi, että kappaleen nopeuden kasvaessa tasaisesti sen kiihtyvyys on vakio.



Vastaa nyt yllä olevan kuvaajan perusteella seuraaviin kysymyksiin.

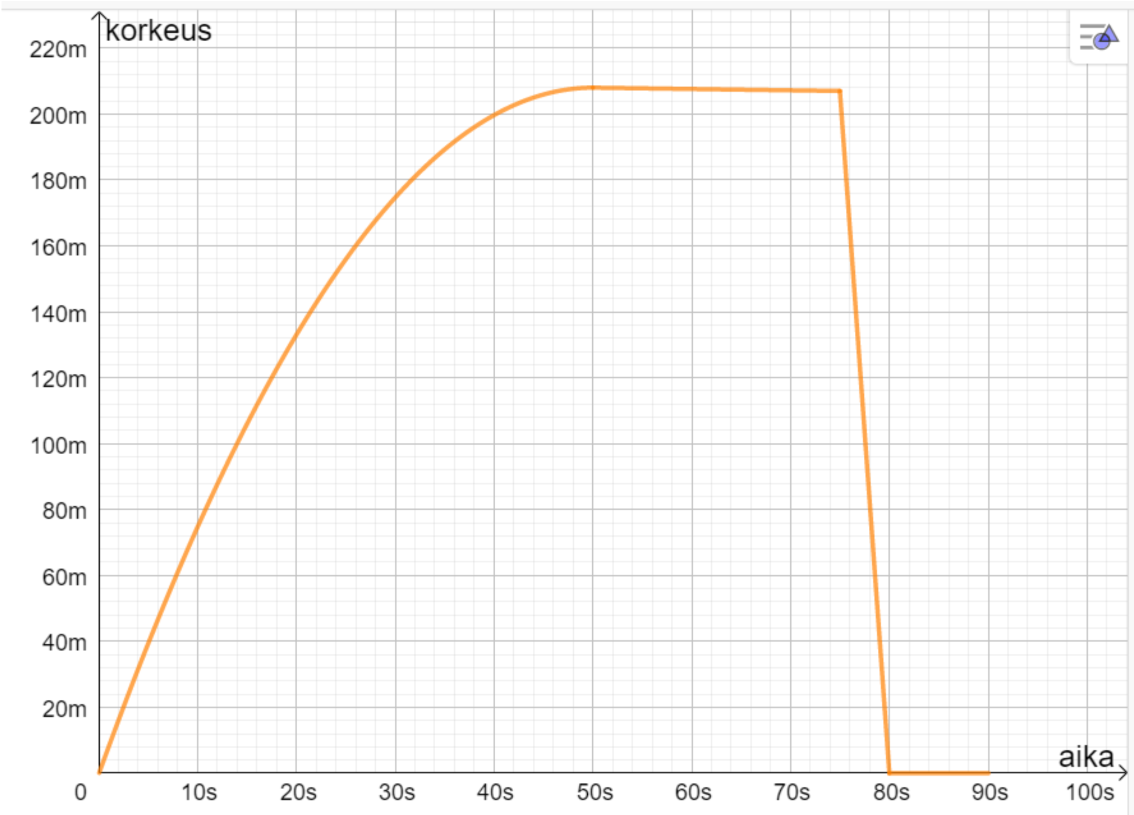
a) Mikä on kappaleen alkunopeus?

b) Mikä on kappaleen loppunopeus?

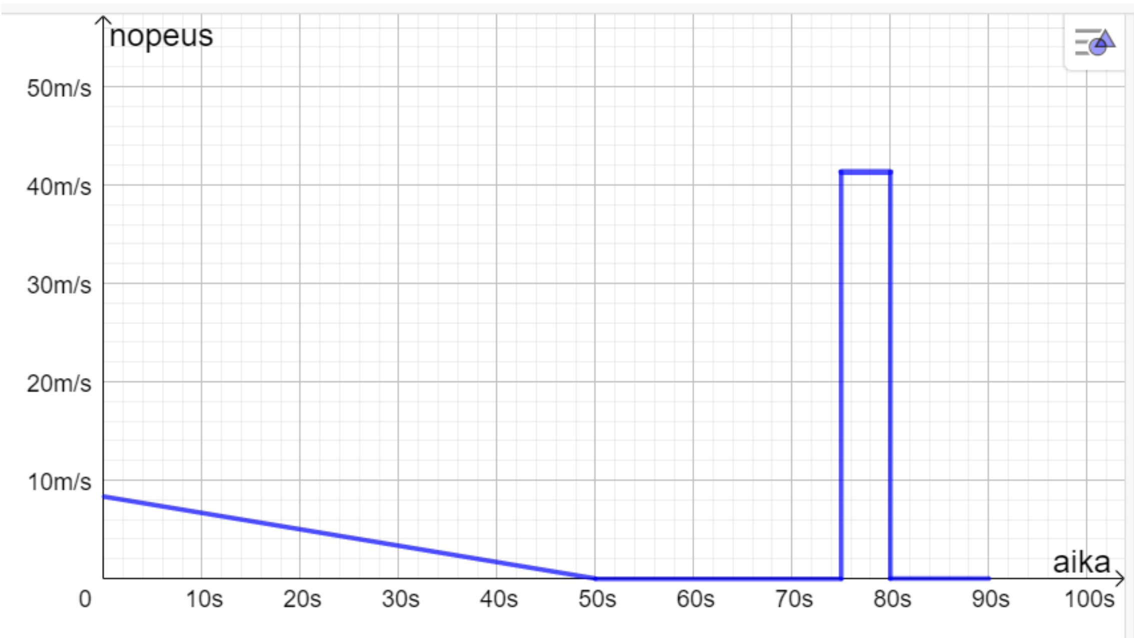
c) Mikä ongelma tulee vastaan alku- ja loppunopeuden määrittämisessä?

d) Mikä on kappaleen kiihtyvyys?

2. Antti ja Reetta ovat mallintaneet Hertta-haukan lentoa gps-tutkapannalla. Antti on piirtänyt kuvaajan, jossa vaaka-akselilla on kulunut aika ja pystyakselilla Hertan lentokorkeus lähtöpisteestä mitattuna.



Reetta puolestaan on seurannut Hertan lentovauhtia ja piirtänyt kuvaajan, jossa aika on vaaka-akselilla ja haukan nopeus (vauhti) on pystyakselilla.



Kumpikin on kiinnostunut siitä, milloin haukka havaitsi metsästämänsä jäniksen ja syöksyi sen perään, sekä milloin haukka sai jäniksen kiinni. Voidaanko nämä hetket havaita suoraan tai epäsuorasti

a) Antin kuvaajalta,

b) Reetan kuvaajalta,

c) Molemmilta kuvaajilta,

d) Ei kummaltakaan kuvaajalta?

Lisäksi merkitse molempiin kuvaajiin ne hetket, kun

e) Hertta-haukan nopeus oli suurimmillaan ja

f) Hertta-haukan nopeus oli pienimmillään.

3. Piirrä GeoGebralla funktio $f(x) = \sin(x)$.

Seuraavaksi luo liukusäädin pisteelle A, ja määrittele säädin toimimaan suljetulla välillä $[-1, 7]$, sekä määrittele liukusäädintä vastaavan pisteen A koordinaateiksi $(a, f(a))$.

Kolmanneksi luo tangentti, joka kulkee pisteen $(a, f(a))$ kautta.

Nyt käyttämällä liukusäätimiä lue sekantin kulmakertoimen arvo, kun

a) $a = 0$,

b) $a = \frac{1}{2}\pi$,

c) $a = \pi$,

d) $a = \frac{3}{2}\pi$ ja

e) $a = 2\pi$.

f) Minkä tutun trigonometrisen funktion arvoja kyseisissä pisteissä luetut tangentin kulmakertoimen arvot vastaavat?

A.2 Erotusosamäärä

Pohdinta A.14 Mininäytelmä

Roolihahmot: Anja ja Eila.

Paikka: Kotona.

Anja ja Eila tekevät kemian työselostusta.

Anja: *Mitä mieltä soot tästä suhtehesta?*

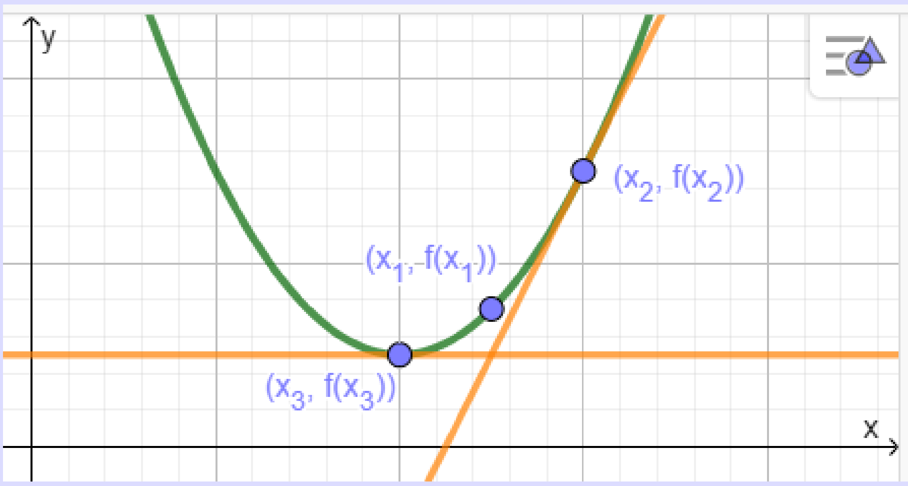
Eila: *No mie aattelen et myö ollaan kyl tosi hyvvii ystävii, vaik joskus sie kyl mökötät ihan turhaa ja...*

Anja: *Ei kun tästä y- ja x-koordinaatien muutoksien suhtehesta pistehessä* $(x_1, f(x_1))$*!*

Eila: *Ai siit, heh... Miun mielest näyttää ihan oikeelt, vaik onkin vähä eri ku miul, mut kulmakertoime yksikkö on sama, joten siit päätelle mie sanosi et oikkee se o.*

Anja: *No hyvä, kai tää kuvaaja eres on sitten oikehen piirretty. Näitä tangentteja on vaan niin vaikia asettaa tarkasti käsin.*

Eila: *Sithän miekii. Vaan katsoha sie mit mie olen tehnyt. Mie piirsin kaks tangenttiloist lähekkäin pisteisii* $(x_2, f(x_2))$ *ja* $(x_3, f(x_3))$ *ja otin niist keskiarvon.*



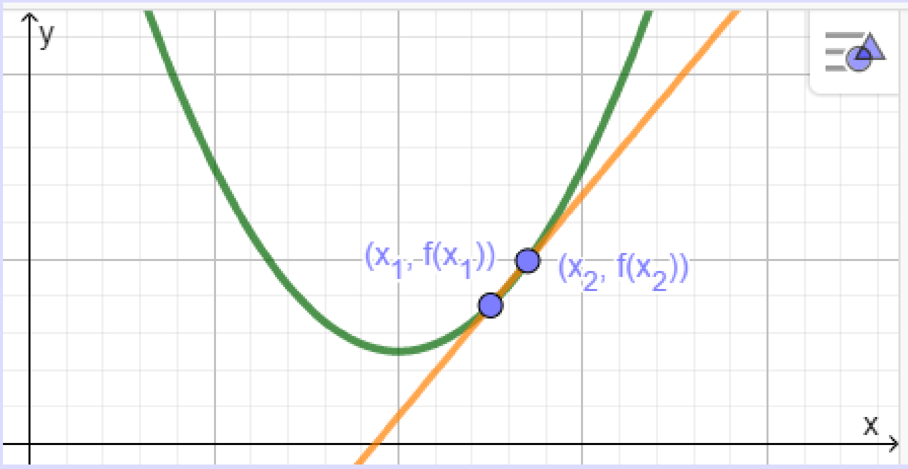
Anja: *Ei mutta tuossahan on jo irean poikaasta. Moon silti sitä mieltä, notta soot teheny tuos vähän turhaaki työtä.*

Eila: *Usot sie? Näytähän sie mist kohin vois viel oikoo.*

Anja: *No kyllähän täs sunki tavas olis yhyrellä viivalla pärijätty ja käytännös samahan lopputuloksehen päästy! Toki pitää kattua vähän notta mihinkä ne pistehet laittaa ja viivat piirtää.*

Eila: *Mit sie oikee mienaat?*

Anja: *Kyllähän tuo kaharen tangentin keskiarvo voi antaa kelevollisen approksimaation, mutta ei se aina toimi. Sen sijaan päästähän priimahan lopputuloksehen, kun vierähän sen toisen tangentin piste siihen pisteesehen* $(x_1, f(x_1))$, *josta oltiin alunperinkin kiinnostuneita, ja vierähän se toinen piste* $(x_2, f(x_2))$ *vaan torella lähelle ensimmäästä pistettä* $(x_1, f(x_1))$. *Sitten vaan piirretähän yks viiva. Kas näin!*



Vilkas karjalainen Eila keksi määrittää kuvaajan kulmakertoimen tarkemmin yhden tangentin sijaan kahden tangentin avulla. Jäyhä pohjalainen Anja keksi ongelman Eilan tavasta, mutta samalla jalosti ideaa ainakin omasta mielestään paremmaksi.

a) Mikä yleisen tason ongelma on Eilan tavassa määrittää tangentin kulmakerroin pisteessä $(x_1, f(x_1))$ kahden tangentin muun tangentin kulmakertoimen keskiarvona?

b) Miten Anjan tapa määrittää kulmakerroin tangetille on parempi kuin Eilan?

Tämän tunnin aihe on *erotusosamäärä*. Lyhyesti voitaisiin sanoa, että erotusosamäärä kuvaa funktion arvojen muutoksen suhdetta lähtöjoukon arvojen muutokseen eli funktion kuvaajan jyrkkyyttä. Täsmällisempi matemaattinen määritelmä erotusosamäärälle saadaan, kun määritellään suhde y- ja x-koordinaattien muutokselle.

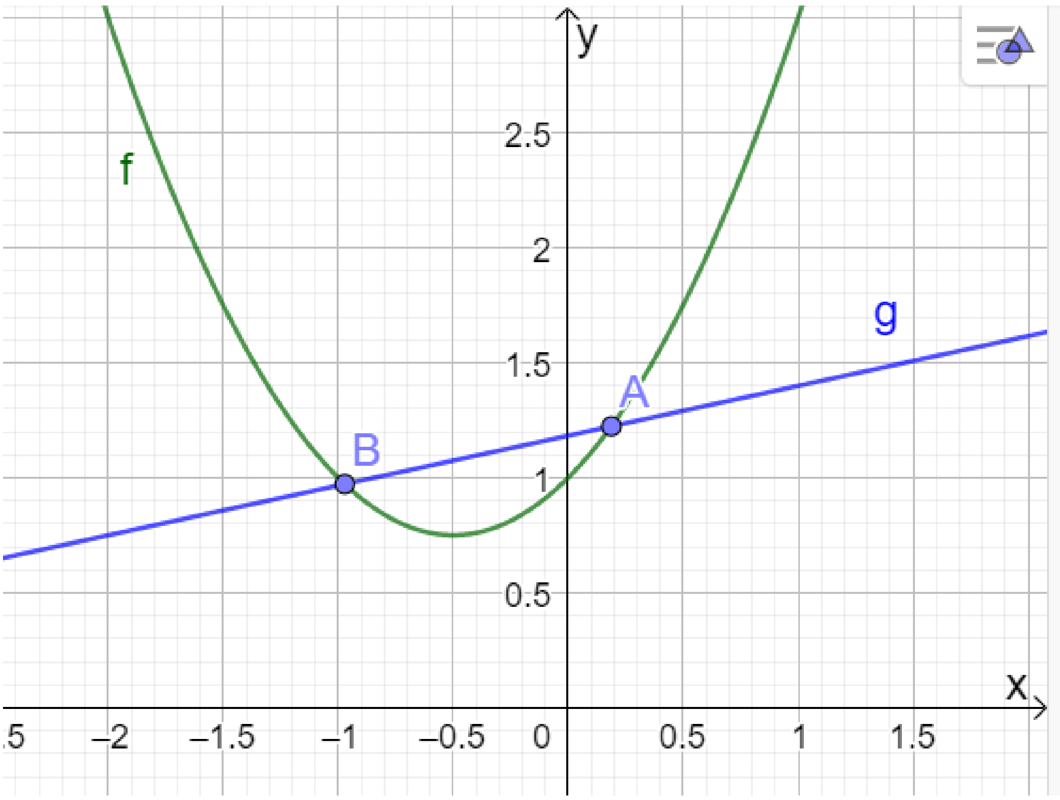
Tähän asti on puhuttu, että derivaatta on funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin, mutta se ei ole aivan koko totuus. Käytännön tasolla asia on näin, mutta analyyttisessa tavassa tutkia matematiikkaa tämä määritelmä kaipaa jotain lisää. Muistetaan, että funktion kuvaajan kylkeen piirretty tangentti on siis suora, joka sivuaa funktiota paikallisesti yhdessä pisteessä. Toisin sanoen, tangenttisuoralla ja funktion kuvaajalla on tällöin ainakin yksi yhteinen piste.

On mahdollista, että funktion kuvaaja mutkittelee koordinaatistossa ollessaan esimerkiksi kolmatta astetta ja tällöin tangettisuoralla on useita yhteisiä pisteitä funktion kuvaajan kanssa. Nyt ollaan kuitenkin kiinnostuneita funktion kulusta siinä pisteestä, jossa tangenttisuora nimenomaan sivuaa funktion kuvaajaa.

Tangenttisuoran määrittäminen funktion mielivaltaiseen kohtaan ei kuitenkaan aina ole helppoa – saati sitten kätevää. Matemaattisesti analyyttisempi tapa tutkia funktion kuvaajan käyttäytymistä tässä tilanteessa on *sekantti*.

Määritelmä A.15 Sekantti on suora, joka kulkee kahden funktion kuvaajaan kuuluvan pisteen kautta.

Esimerkki A.16 Kuvassa toisen asteen polynomifunktion f kuvaajalle on piirretty pisteiden A ja B kautta kulkeva sekantti, eli suora g.

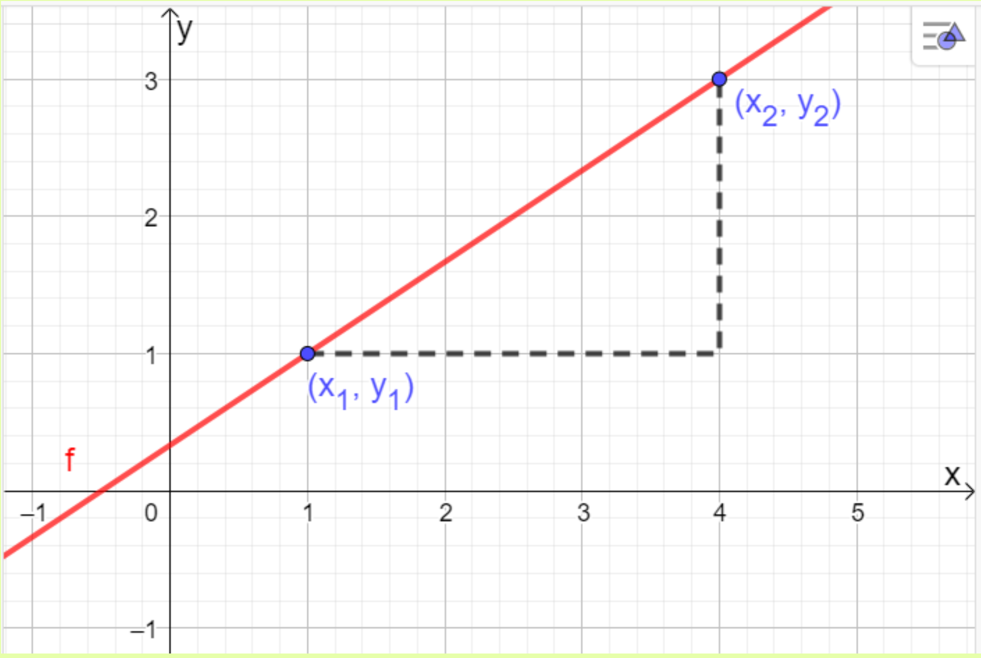


Sekantin etuna tangenttiin nähden voidaan pitää helpompaa määrittelyä. Tangenttia varten tarvitaan yksi piste halutun funktion f kuvaajalta, mutta sen jälkeen voi olla vaikea määrittää tangentti niin, että tangentti vain ja ainoastaan sivuaa funktiota f tässä pisteessä.

Sekantti puolestaan on aina helppo määrittää funktion f avulla. Riittää, että selvitetään kaksi pistettä funkion f kuvaajalta ja muodostetaan niiden väliin suora.

Huomautus A.17 Pisteiden $(x_1,\ y_1)$ ja $(x_2,\ y_2)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ .$$



Erotusosamäärä on sekantin kulmakerroin: toisin sanoen se kuvaa sekantin kulkua, eli sen y- ja x-koordinaattien muutoksien suhdetta. Fysiikastakin tutuin merkinnöin erotusosamäärä voidaan määritellä seuraavasti.

Määritelmä A.18 Välillä $[x_1,\ x_2]$ määritellyn funktion f erotusosamäärä on suhde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\ .$$

Funktion erotusosamäärä siis kuvaa pisteiden $(x_1,\ f(x_1))$ ja $(x_2,\ f(x_2))$ välille piirretyn suoran eli sekantin kulmakerrointa.

Moni fysikaalinen suure on määritellään kahden muun suureen keskinäisen muutoksen suhteena. Tutkitaan seuraavaksi muutamaa fysiikasta tuttua näin määriteltyä suuretta.

Pohdinta A.19 Vertaa erotusosamäärän määritelmää nopeuden määritelmään

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \; ,$$

kiihtyvyyden määritelmään

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

sekä tehon määritelmään

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \Delta s}{\Delta t} \; .$$

Miten voisit graafisesti esittää suureet v, a ja P ? Miten ne ovat keskenään samanlaisia ja mitä eroja niissä on?

Selvitetään nyt, mitä tietoa funktiosta erotusosamäärä tuo ja millä ehdoilla.

Pohdinta A.20 Onko erotusosamäärän tulkinta erilainen eri funktiolla? Vertaile esimerkiksi keskenään funktioita

$$f(x) = 2x \; ,$$
$$g(x) = \sin(x) \text{ ja}$$
$$h(x) = \log_{10}(x) \; .$$

Miten pisteiden x_1 ja x_2 valinta vaikuttavat erotusosamäärän tulkintaan?

Kun pisteiden valinnan merkitys erotusosamäärän tulkintaan on alkanut selviämään, otetaan seuraavaksi askel kohti abstraktimpaa ajattelua.

Pohdinta A.21 Kuvitellaan tilanne, jossa funktion tarkka piirtäminen ei olisi jostain syystä mahdollista. Kuitenkin itse funktio tunnetaan ja sen arvot osataan helposti laskea kaikissa sen määrittelyalueen pisteissä. Tehtäväsi on nyt esittää approksimaatio tämän funktion kuvaajalle pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ piirretystä tangentista.

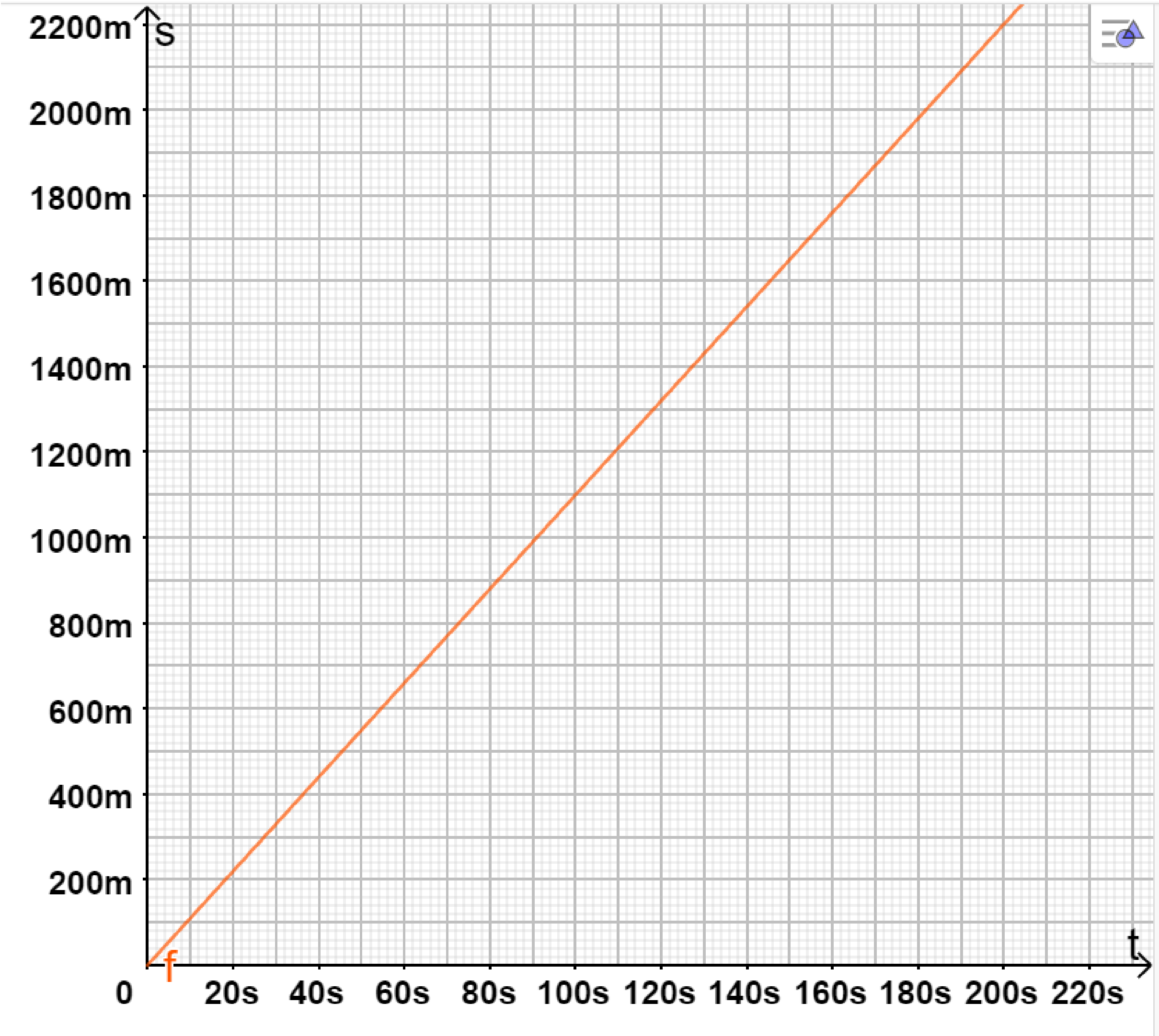
Miten voisit laatia hyvän arvion tangentin yhtälöstä ja sen kulmakertoimesta tässä tilanteessa?

Vinkki: voit hahmotella, mutta et ratkaista tilannetta lyijykynällä ja paperilla.

Pisteiden valinnan merkityksen ymmärtäminen avaa mahdollisuuden opiskella, oppia ja ymmärtää itse derivaatan syvintä olemusta, johon mennään seuraavassa kappaleessa.

A.2.1 Harjoitustehtäviä

4. Määritä funktiolla f kuvattu mopon nopeus aika-matka -kuvaajasta erotusosamäärän avulla.



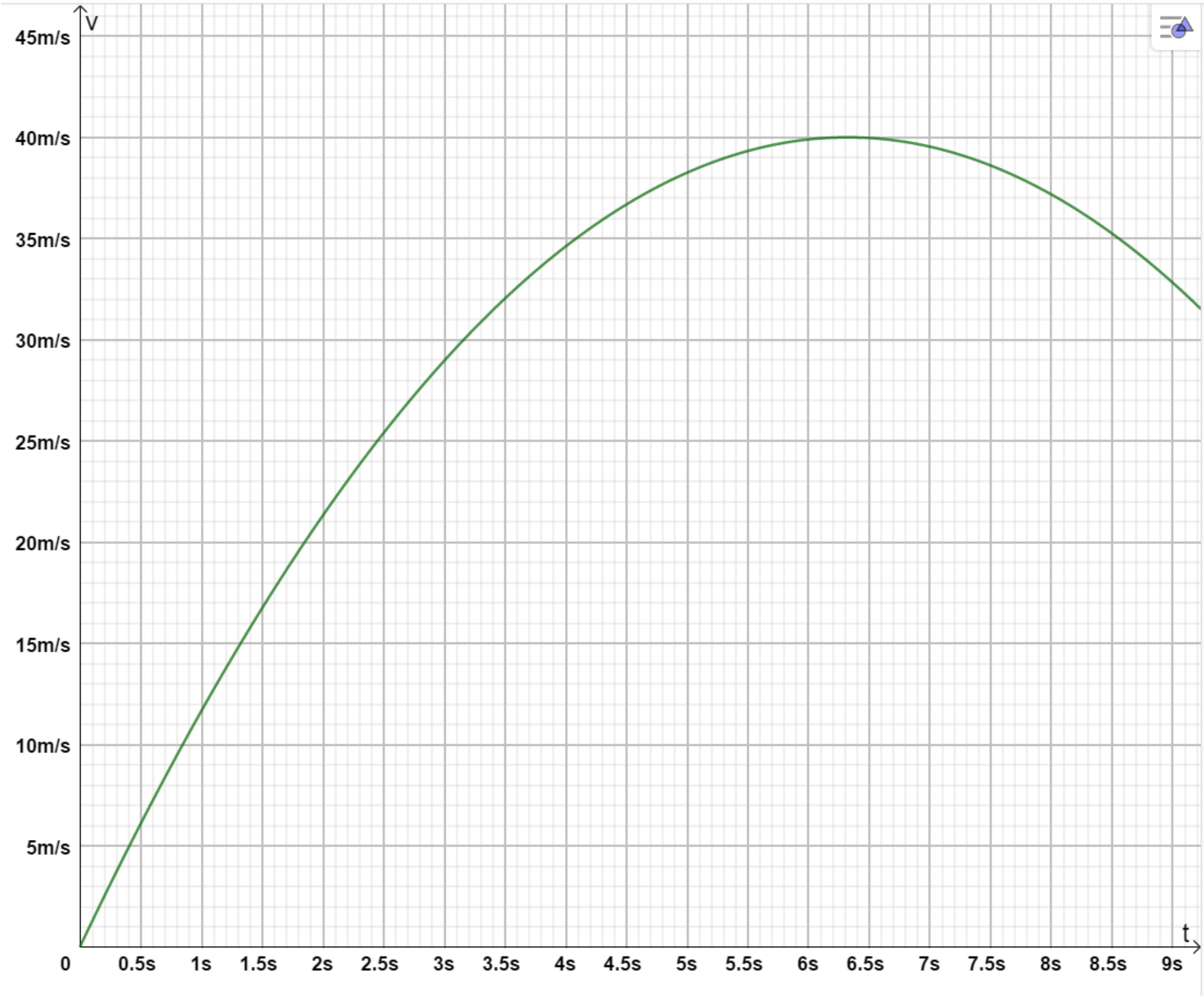
5. Määritä ratamoottoripyörän kiihtyvyys aika-nopeus -kuvajaasta erotusosamäärän avulla, kun

a) $x_1 = 1\ s$ ja $x_2 = 7\ s$,

b) $x_1 = 3\ s$ ja $x_2 = 5\ s$,

c) $x_1 = 3,5\ s$ ja $x_2 = 4,5\ s$.

d) Mikä on se ajanhetki, johon liittyvää ratamoottoripyörän liikettä kohdissa a), b) ja c) on pyritty kuvaamaan?



6. Teho $P(t)$ kuvaa sitä, miten nopeasti fysikaalista työtä W tehdään, eli teho on tehdyn työn ja siihen käytetyn ajan erotusosamäärä. Käyttämällä GeoGebraa

a) piirrä mielivaltainen, vähintään toista astetta oleva $(t,\ W)$-kuvaaja ja

b) määritä piirtämältäsi kuvaajalta hetkellinen teho erotusosamäärän avulla kolmessa eri pisteessä.

c) Mitä määrityksen tarkkuudelle tapahtuu, kun käytät zoom-toimintoa eri suuntiin?

7. Tutustu erotusosamäärän merkitykseen fysiikassa. Voit käyttää tässä apuna esimerkiksi MAOL-taulukoita.

Yhdistä keskenään seuraavat suureet, niiden SI-järjestelmän mukaiset symbolit, niiden matemaattiset määritelmät ja niiden fysikaalinen merkitys.

SUURE		SYMBOLI		MATEMAATTINEN MÄÄRITELMÄ		MERKITYS
nopeus		$\boldsymbol{F}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}}$		**Paikan muutos ajan suhteen**
kiihtyvyys		$\boldsymbol{\omega}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{W}}{\Delta \boldsymbol{t}}$		**Kulman muutos ajan suhteen**
teho		$\boldsymbol{\alpha}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{liike}}}{\Delta \boldsymbol{v}}$		**Nopeuden muutos ajan suhteen**
kulmanopeus		$\boldsymbol{a}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta \boldsymbol{t}}$		**Tehdyn työn muutos paikan suhteen**
liikemäärä		$\boldsymbol{v}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta \boldsymbol{t}}$		**Kulmanopeuden muutos ajan suhteen**
voima		$\boldsymbol{p}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{W}}{\Delta \boldsymbol{s}}$		**Tehdyn työn muutos ajan suhteen**
kulmakiihtyvyys		$\boldsymbol{P}$		$\frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta \boldsymbol{t}}$		**Liike-energian muutos nopeuden suhteen**

A.3 Erotusosamäärän raja-arvo

Pohdinta A.22 Mininäytelmä.

Roolihahmot: Antti ja Reetta.

Paikka: Pöydän ääressä, esimerkiksi keittiössä.

Antti ja Reetta istuvat iltaa. Jostain ihmeen syystä leppoisa keskustelu urheilusta on kuitenkin alkanut saamaan lähes filosofisia* piirteitä.

Antti: *Mä oon tässä miettinyt, että satasen lähtö olympialaisissa on paljon reilumpi kuin maratonin massalähtö.*

Reetta: *Miten niin?*

Antti: *No katsos, kun sataselle juoksijat lähtee rinnakkain ja yhtä aikaa, niin silloinhan on ihan selvää, että maaliin tulee ensin nopein juoksija, vai mitä?*

Reetta: *Tyypillisesti tosiaan voittaa se juoksija, jolla on suurin keskinopeus. Mitä ajat takaa?*

Antti: *Maratonillahan voi käydä niin, että nopeampi juoksija joutuu lähtemään hitaamman juoksijan takaa. Tällöin hän ei ikinä saa hitaampaa kiinni.*

Reetta: *Totta kai saa, miten esimerkiksi hippa-leikki toimisi muuten?*

Antti: *Ihan hyvä pointti, mutta mietipä nyt matemaattisesti. Sekä nopeampi että hitaampi juoksijahan ovat molemmat koko ajan liikkeessä, vai mitä?*

Reetta: *Totta kai ovat.*

Antti: *Jos molempien liike on tasaista, niin lopputuloshan on tämä: nopeampi juoksija tulee siihen paikkaan, josta hitaampi on lähtenyt liikkeelle. Tällä välin hitaampi on edennyt lähtöpaikastaan jonkin verran. Kun nopeampi tulee siihen paikkaan, missä hitaampi oli hänen tullessa tämän lähtöpaikalle, on hitaampi edennyt taas jo seuraavaan paikkaan. Nopeampi juoksija siis kyllä tulee koko ajan lähemmäs hitaampaa, mutta ei tavoita tätä ikinä, vaikka juoksisi kuinka kovaa tahansa. On siis mahdotonta ottaa edellä vakionopeudella menevää juoksijaa kiinni, ihan sama onko se sua hitaampi vai nopeampi.*

Reetta: *Ootko nyt ihan varma, että se menee noin? Mitä jos takana tuleva juoksija on vaikka kymmenen kertaa nopeampi kuin se edellä menevä hitaampi juokisja?*

Antti: *Kuinka paljon hitaampi on saanut etumatkaa lähdössä?*

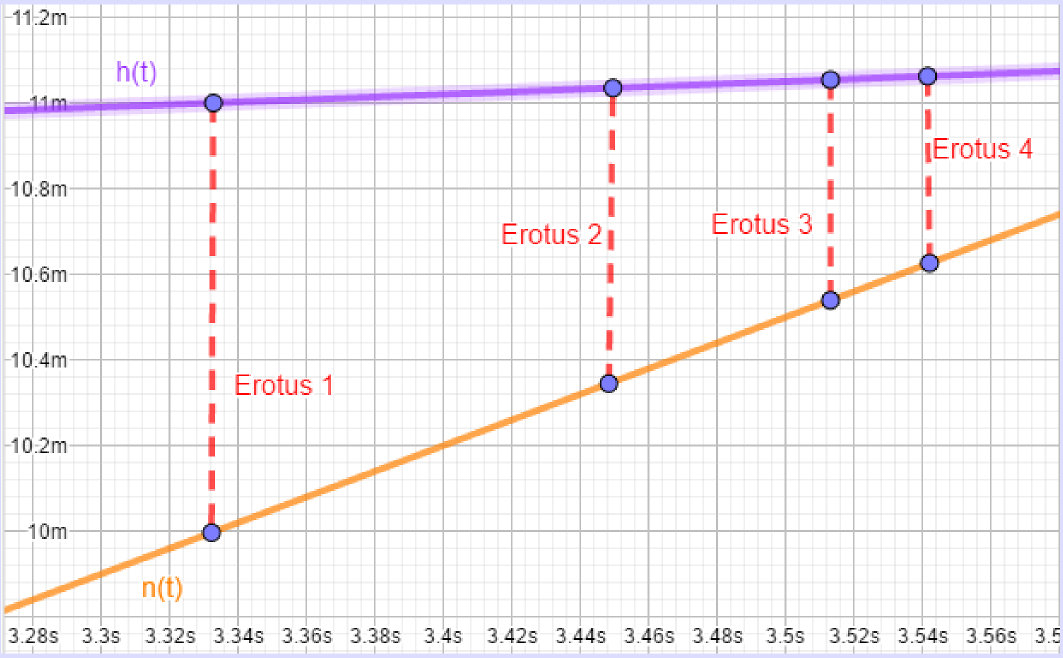
Reetta: *Sovitaanko vaikka 10 metriä?*

Antti: *Joo. Se on hyvä. Voin todistaa sulle ettei se nopeampi saavuta hitaampaa.*

Reetta: *Yritä vaan!*

Antti: *Kun kymmenen kertaa nopeampi juoksija on tullut hitaamman lähtöpaikalle, on hitaampi edennyt metrin. Kun nopeampi juoksija etenee sen metrin, on hitaampi edenny 10 cm. Kun nopeampi on juossut sen 10 cm, niin hitaampi* *on edennyt yhden senttimetrin. Kun nopeampi on edennyt sen senttimetrin, niin hitaampi on edennyt millimetrin. Voisin jatkaa tätä loputtomiin, mutta lopputulos on ja pysyy: nopeampi juoksija ei tavoita hitaampaa, vaan lähestyy tätä koko ajan tullen lähemmäs ja lähemmäs, vaan koskaan ei täysin saavuta.*

Katsopa tätä, piirsin oikein GeoGebralla kuvan tilanteesta! Merkitsin siihen hitaamman juoksijan etenemisen ajan funktiona $h(t)$ ja nopeamman $n(t)$. Kuten näet, on kuvaajien erotus koko ajan pienevä, mutta voisin loputtomasti piirtää sinne noita hetkiä, joissa hitaampi on nopeampaa edellä. Loputon määrää hetkiä tarkoittaa loputonta määrää aikaa, jolloin on täysin loogista, ettei nopeampi saavuta hitaampaa ikinä.



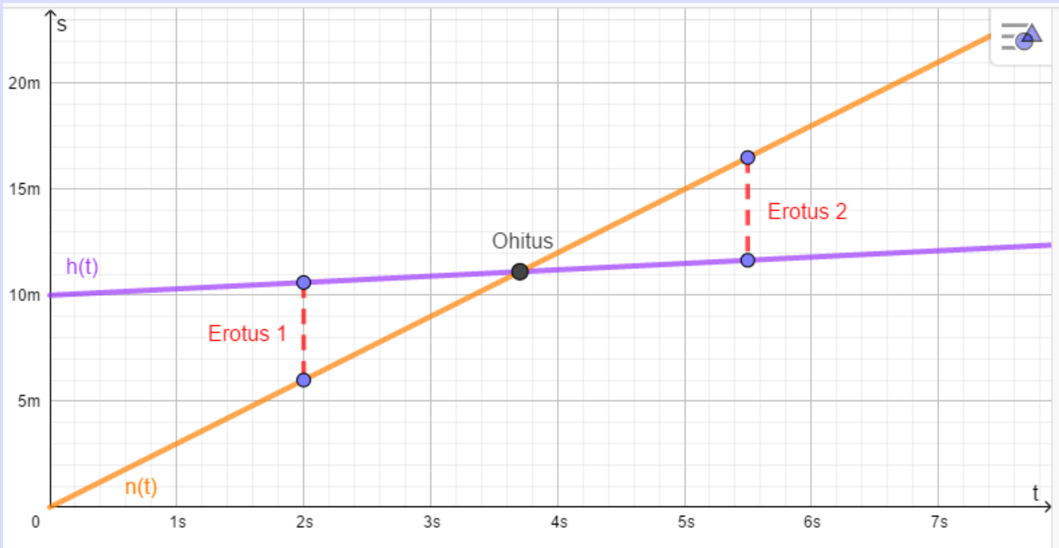
Reetta: *Etkö sä oo muka ikinä oikeesti jääny kiinni siinä hipassa tai eikö kukaan oo koskaan ohittanut sua autolla? Ethän sä nyt oikeesti voi ajatella että tossa päättelyssä on logiikkaa!*

Antti: *Helposti voin.*

Reetta: *No ajattele nyt käytännöllisemmin; mitäs sitten kun ne on tyyliin elektronin halkaisijan päässä toisistaan?*

Antti: *Ei se sitä silti saavuta. Kuten näet, niin hitaammaan juoksijan kuvaaja eli $h(t)$ on koko ajan ylempänä, siis kauempana kuin nopeamman eli $n(t)$.*

Reetta: *Väitän että saavuttaa, ja menee vielä ohi! Annapas kun katson sitä sun kuvaajaa vähän. Zoomataan kauemmas ja... kas noin! Nyt nähdään juoksijoiden välimatka ja se, että jos ajassa mennään riittävän paljon eteenpäin, niin nopeampi on juossut pidemmälle, toisin sanoen ohittanut hitaammaan.*



Voidaanko tämän keskustelun pohjalta todeta Antin saavuttaneen korkeamman tietoisuuden tason, vai onko hän kömmähtänyt omaan nokkeluuteensa?

a) Mikä ongelma on Antin logiikassa?

Kokemuksesta tiedetään, että Reetan täytyy olla oikeassa. Mutta tutkitaan silti Reetan kuvaajaa vielä tarkemmin.

b) Mitä lukua funktioiden $h(t)$ ja $n(t)$ erotuksien 1 ja 2 arvot lähestyvät juuri ennen ja jälkeen ohitustilanteen?

*Lisätietoja aiheesta löydät esimerkiksi hakusanoilla ”Zenonin paradoksit” tai ”Akhilleus ja kilpikonna”.

Erotusosamäärään liittyvien pohdintojen ja tehtävien yksi tarkoitus oli osoittaa, miten erotusosamäärän tarkastikin määritetty arvo vain *approksimoi* eli kuvasi likimääräisesti funktion kuvaajan tangentin kulmakerrointa jossain välillä $[x_1,\ x_2]$ tai pisteessä $(x_1, f(x_1))$, mutta toisaalta miten approksimaatio parani sen mukaan, kun pisteet x_1 ja x_2 lähestyivät toisiaan.

Keskeinen havainto edellisen kappaleen lopussa oli, että erotusosamäärä alkoi muistuttamaan tangentin kulmakerrointa pisteessä $(x_1, f(x_1))$, kunhan vain piste valittiin sopivasti ja riittävän läheltä. Vielä ei tosin saatu selvyyttää siihen, olisiko erotusosamäärällä mahdollista kuvata täydellisesti tangentin kulmakertoimen arvoa, jos pisteen $(x_2, f(x_2))$ voisi viedä riittävän lähelle pistettä $(x_1, f(x_1))$.

Nyt uteliaassa ihmisessä herääkin jatkokysymys siitä, kuinka lähelle toisiaan voimme kaksi pistettä matematiikan keinoin viedä? Tarve päästä todella lähelle jotain haluttua lukua johtaa meidät *raja-arvon* käsitteen äärelle.

Funktion raja-arvo voidaan tässä lyhyesti määritellä arvona, jota funktion arvo $f(x)$ lähestyy, kun sitä vastaava lähtöjoukon muuttujan arvo x lähestyy jotain tiettyä arvoa x_0. Esimerkiksi funktion $f(x) = 2x$ arvo lähestyy 2:sta, kun muuttujan x arvo lähestyy 1:stä.

Merkintä A.23 Merkitään funktion raja-arvoa seuraavasti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

Tämä luetaan "funktion raja-arvo on L, kun muuttujan x arvo lähestyy arvoa x_0". Äskeiselle esimerkkifunktiolle $f(x) = 2x$ voisi siis kirjoittaa

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2\,,$$

joka luettaisiin "funktion f raja-arvo on 2, kun muuttujan x arvo lähestyy arvoa 1".

Lisätieto A.24 Raja-arvon merkintä *lim* juontaa juurensa latinan sanasta *limes* eli "raja". Esimerkiksi roomalainen rajapuolustusjärjestelmä tunnettiin nimellä *Limes Romanus*.

Perehdytään seuraavaksi visuaalisesti funktion raja-arvoon. Kuten hyvin tiedetään, nollalla jakaminen on ankarasti laskusääntöjen vastaista. Katsotaan nyt kuitenkin, mitä tapahtuu trigonometrisen funktion arvolle, kun sen sisäfunktion nimittäjän arvo lähestyy nollaa.

Pohdinta A.25 Syötä GeoGebraan tai vastaavaan kuvaajanpiirto-ohjelmaan funktio

$$f(x) = \sin(\frac{10}{x})\,,\ x > 0\,.$$

Voitko nyt mitenkään kuvaajan avulla sanoa, mikä on funktion $f(x)$ raja-arvo, kun x lähestyy lukua 0?

Entä mitä tapahtuu raja-arvolle, jos muutamme funktiota hieman kertomalla sitä muuttujalla x, jolloin funktioksi saadaan

$$f(x) = x\sin(\frac{10}{x})\,,\ x > 0\,?$$

Raja-arvoihin liittyy useita mielenkiintoisia ominaisuuksia ja laskusääntöjä, joihin tutustutaan tällä kurssilla tarkemmin myöhemmin.

Kaikki tähän asti tehty ja opittu on kuitenkin johtanut meidät *erotusosamäärän raja-arvon* äärelle. Käydään siis suoraan asiaan. Oletetaan nyt, että eri pisteet x_0 ja x sijaitsevat hyvin lähellä toisiaan. Tällöin erotusosamäärästä

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

voidaan muodostaa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

joka kuvaa funktion f kuvaajan tangentin kulmakerrointa pisteessä x_0. Koska funktion tangentin kulmakerroin pisteessä x_0 on sama asia kuin funktion derivaatta pisteessä x_0, voidaan todeta, että *derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo.*

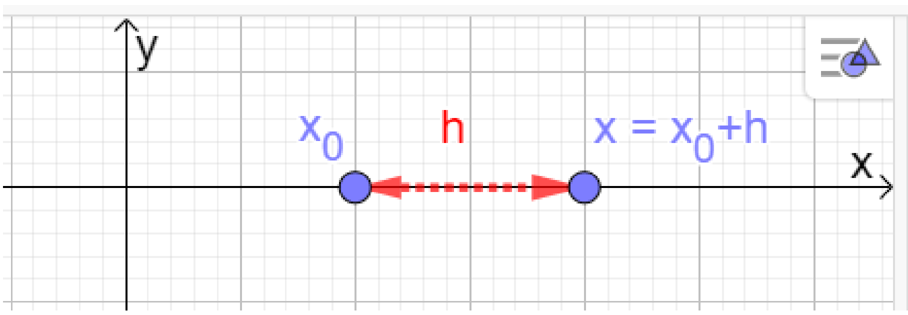
Määritelmä A.26 Funktion $f(x)$ *derivaatta* pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

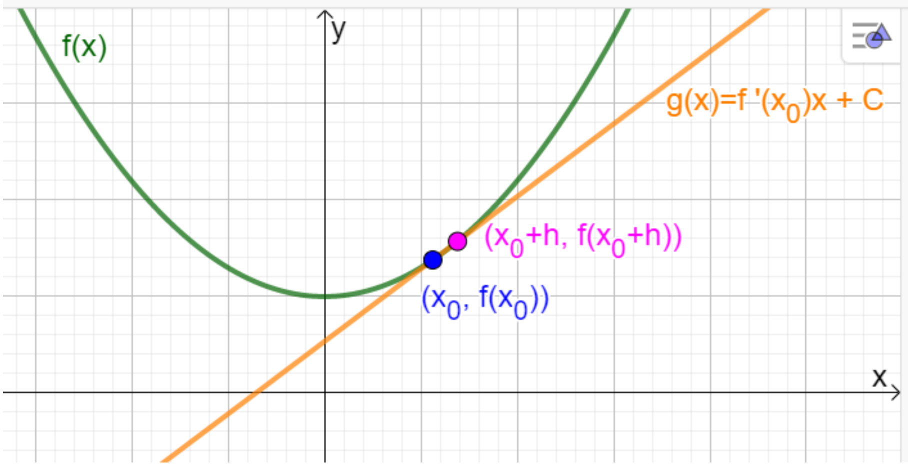
Huomautus A.27 Nyt on tärkeää havaita, että derivaatalla ei kuvata pisteiden x_0 ja x väliin jäävälle pisteelle piirretyn tangentin kulmakerrointa, vaan nimenomaan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin kulmakerrointa.

Tilanteen hahmottamista helpottaakseen voi ajatella niin, että x_0 on "kiinteä" piste, ja x on "liikkuva" piste (toisin sanoen muuttuja), jonka arvo tuodaan lähelle pisteen x_0 arvoa.

Väli $[x_0, x]$ voidaan kirjoittaa $[x_0, x_0 + h]$ eli siirtymä x-akselilla pisteestä toiseen voidaan kuvata toisen pisteen ja pisteiden keskinäisen välimatkan h avulla.



Esimerkki A.28 Funktion f derivaatta pisteessä x_0 kuvaa nyt sitä paremmin funktion f kuvaajan tangentin kulmakerrointa pisteessä x_0, mitä lähempänä pisteet x_0 ja x sijaitsevat toisiaan.



Tässä on huomattava, että funktion f derivaatta pisteessä x_0 on $f'(x_0)$ eli tangentin kulmakerroin, eikä tangentti itse. Kulmakerroin $f'(x_0)$ on siis yksikäsitteinen lukuarvo! Raja-arvona saadun tangentin yhtälö on nyt $g(x) = f'(x_0)x + C$, missä C on ensimmäisen asteen yhtälölle tyypillinen vakiotermi, joka siis kertoo, missä sekantista muodostettu tangentti leikkaa y-akselin.

Pohdinta A.29 Voisiko nyt kirjoittaa derivaatan määritelmän funktiolle f pisteessä x_0 jollain toisella tavalla etäisyyden h avulla? Kirjoita tuo toinen määritelmä alle varattuun tilaan.

Vinkki: käytä hyväksesi sijoitusta $x = x_0 + h$.

Nyt derivaatalle on luotu täsmälliset määritelmät, joten on tullut aika koostaa kaikki tähän asti opittu yhteen. Seuraavassa pohdinnassa nähdään, miksi raja-arvon käsitettä tarvitaan derivaatan täsmällisessä matemaattisessa määrittelyssä.

Pohdinta A.30 Syötä GeoGebraan funktio $f(x) = x^2$. Nyt lähennä näkymää niin paljon, että kuvaaja näyttää suoralta

a) origossa $(0,\ 0)$,

b) pisteessä $(1,\ 1)$,

c) pisteessä $(-1,\ 1)$,

d) pisteessä $(2,\ 4)$,

e) pisteessä $(3,\ 9)$ ja

kirjaa ylös kussakin pisteessä havaitun "suoran" kulmakerroin.

f) Muodosta yhtälö $f'(x)$, joka kuvaa havaitun kulmakertoimen riippuvuutta luvusta x.

g) Osoita kohdassa f) muodostamasi yhtälö oikeaksi derivaatan määritelmän

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

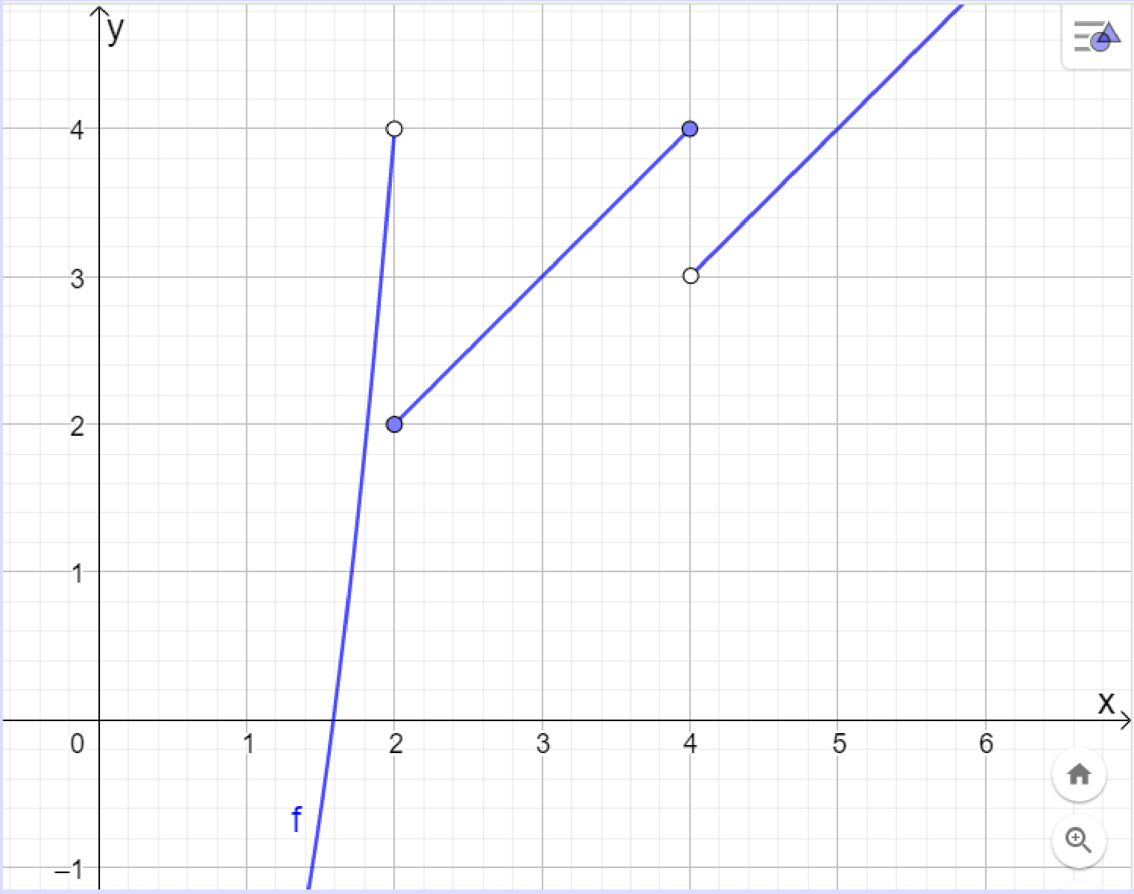
avulla.

Äskeinen pohdinta lupaili jo melkoisen iloisia – ja ehkä yllättäviäkin – uutisia lopullisten derivaattafunktioiden yksinkertaisuudesta, mutta se on vasta tulevien oppituntien asiaa. Lohdutuksena sanottakoon, että derivaattaa ei tulevaisuudessa tarvitse määrittää aina erotusosamäärän raja-arvon kautta, ja on myös olemassa ohjelmistoja, jotka kykenevät derivoimaan funktioita hyvinkin itsenäisesti.

Lopuksi tutustutaan vielä kevyesti yhteen derivaatan olemassaolon kannalta merkittävään funktion ominaisuuteen eli funktion jatkuvuuteen.

Pohdinta A.31 Funktion sanotaan olevan jatkuva, mikäli siinä ei ole epäjatkuvuuskohtia. Toisin sanoen jos funktion kuvaajan voi piirtää nostamatta kynää paperista, se on jatkuva. Epäjatkuvuuskohta voi olla yksittäinen piste, joka puuttuu funktion kuvaajasta tai kohta, jossa funktion arvo hyppää arvosta toiseen arvoon kulkematta välillä olevien arvojen läpi.

Epäjatkuvan funktion kuvaajaa piirrettäessä epäjatkuvuuskohtien luonne merkitään väritetyillä ja värittämättömillä pisteillä, jolloin kuvaajasta saadaan informatiivisempi. Mikäli epäjatkuvuuskohdan päätepiste kuuluu kuvaajaan, se merkitään tummenetulla pallukalla ja mikäli se ei kuulu, merkitään päätepisteen laatu värittämättömällä pallukalla.



Mitä funktion derivaatalle tapahtuu epäjatkuvuuskohdissa?

Vinkki: mieti tangentin piirtämiseen liittyviä tekijöitä.

Huomautus A.32 Funktion jatkuvuus on ehdoton vaatimus funktion derivoituvuuden kannalta. Funktion jatkuvuudesta ei kuitenkaan seuraa sen derivoituvuutta!

Funktion derivoituvuudesta kuitenkin seuraa aina funktion jatkuvuus. Funktio on siis jatkuva kaikkialla, missä se on derivoituva, mutta funktio ei välttämättä ole derivoituva kaikkialla, missä se on jatkuva.

A.3.1 Harjoitustehtäviä

8. Syötä GeoGebraan funktio

$$f(x) = \frac{15x}{x^2 + 5}$$

ja luo kaksi liukusäädintä, aseta niille pisteiksi a ja b sekä molemmille toimintaväliksi vähintään suljettu väli $[-5, 5]$.

Luo kuvaajalle $f(x)$ pisteet $A = (a, f(a))$ ja $B = (b, f(b))$.

Erota pisteet liukytkimellä toisistaan siten, että voit piirtää niiden väliin suoran $g(x)$ *Suora kahden pisteen kautta* -toiminnolla.

Saat nyt näkyviin luomasi suoran $g(x)$ yhtälön muodossa $ax + by = c$. Saadaksesi suoran kulmakertoimen selville, käytä toimintoa *Kulmakerroin* tai määritä kolmas yhtälö $h(x) = g(x)$. Tällöin GeoGebra näyttää yhtälön muodossa $h(x) = g(x) = y = kx + c$, jolloin kulmakerroin k on helppo lukea.

Liikuttamalla pisteitä A ja B sopiviin paikkoihin, selvitä funktion kulmakerroin, kun

a) $x = -2$,

b) $x = 0$ ja

c) $x = 4$.

Mitä tapahtuu tuloksen tarkkuudelle, kun pisteet A ja B lähestyvät toisiaan, olematta kuitenkaan samat? Entä mitä tapahtuu, kun pisteet ovat samat ja miksi niin käy?

9. Laske derivaatan määritelmää

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

käyttäen funktion $f(x) = 2x^2$ derivaatan arvot, kun

a) $x_0 = 1$,

b) $x_0 = 2$,

c) $x_0 = -1$ ja

d) $x_0 = -2$.

Vinkki: käsittele muuttujaa h summissa, erotuksissa ja tuloissa niin kuin sen arvo olisi nolla.

Lisätehtävä: osoita määritelmää apuna käyttäen, että funktion $f(x) = 2x^2$ derivaatta on muotoa $f'(x) = 4x$.

10. Syötä GeoGebraan funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Nyt lähennä näkymää niin paljon, että kuvaaja näyttää suoralta ja selvitä ”suoran” kulmakerroin, kun muuttuja x saa arvot a) – g).

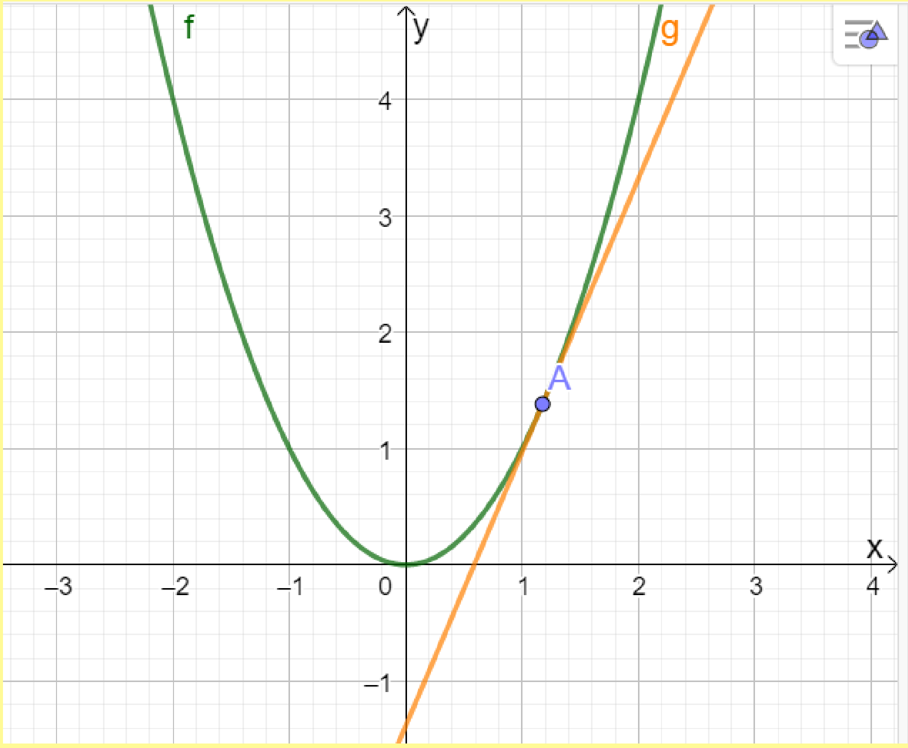
Muuttujan x arvo	**"Suoran" kulmakerroin**
a) $x = -3$	
b) $x = -2$	
c) $x = -1$	
d) $x = 0$	
e) $x = 1$	
f) $x = 2$	
g) $x = 3$	

Muodosta yhtälö $f'(x)$, joka kuvaa kulmakertoimen riippuvuutta luvusta x.

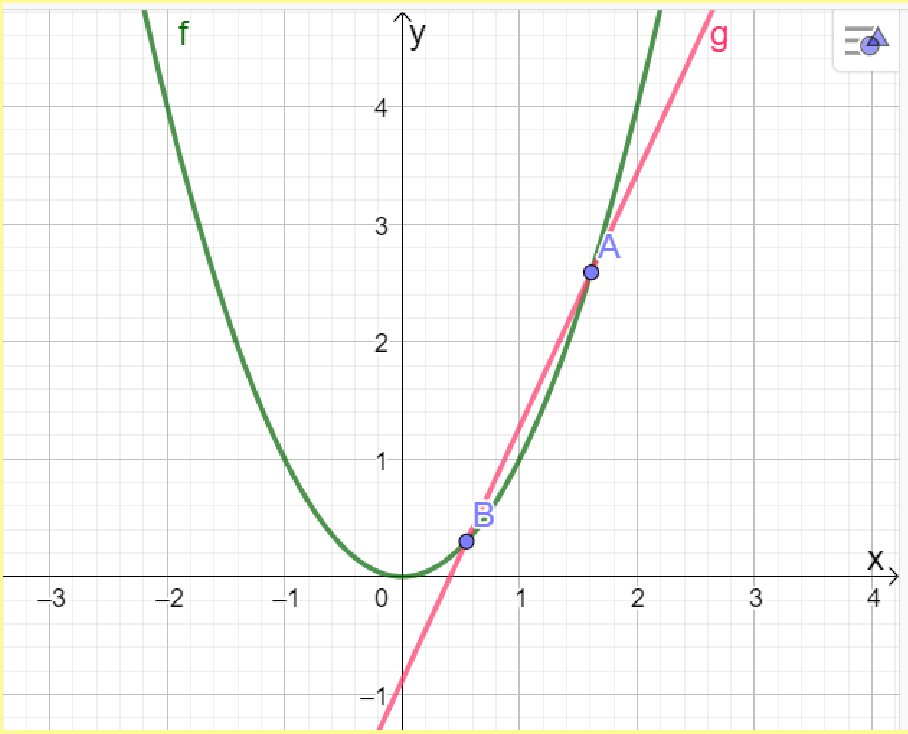
Vinkki: Voit halutessasi käyttää apuna pistettä A ja piirtää tangenttisuoran sen avulla. Kun tangenttia ei voi erottaa funktion kuvaajasta, olet lähestynyt kysyttyä pistettä tarpeeksi paljon.

A.4 Yhteenveto ja lisätietoutta

Kertaus A.33 *Tangentti* on suora, joka paikallisesti sivuaa funktion kuvajaa yhdessä pisteessä.



Sekantti on kahden funkion kuvaajalle piirretyn pisteen kautta kulkeva suora.



Erotusosamäärä kuvaa funktion y-koordinaatin ja x-koordinaattien muutoksen suhdetta.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Funktion raja-arvo on se arvo L, jota funktion arvo lähestyy, kun muuttujan x arvo lähestyy arvoa x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

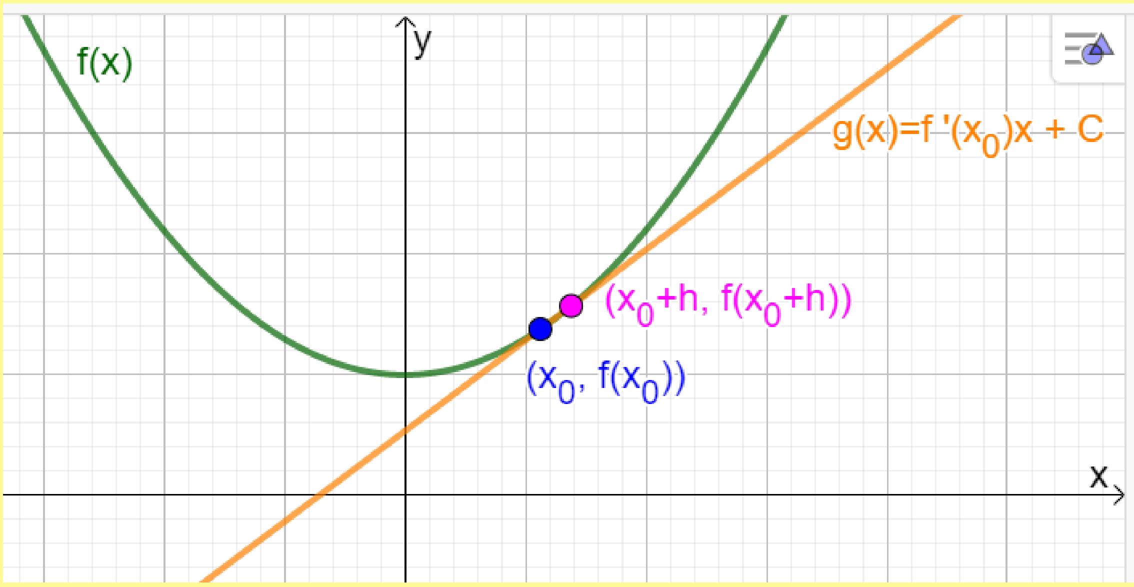
Derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo!

Funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eli

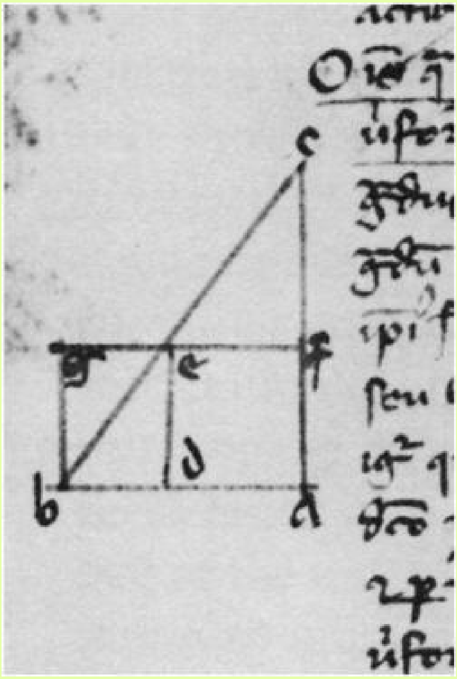
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$



Lisätieto A.34

Derivaatan historiaa

Matematiikassa ongelmien visualisointi kuvaajien avulla on meille nykyään itsestäänselvyys, mutta aina niin ei ole ollut. Matematiikan pitkästä historiasta huolimatta vasta 1300-luvun puolivälissä ranskalainen tiedemies Nicole Oresme piirsi ensimmäiset tunnetut kuvaajat, joissa nopeus ajan funktiona esitettiin palkkien avulla. Oresmen ajatus oli, että geometristen muotojen, kuten viivojen ja nelikulmioden, avulla voitiin esittää muuttujien käyttäytymistä esimerkiksi ajan suhteen. Oresme myös ymmärsi, että tasainen nopeuden kasvu kertoo tasaisesta kiihtyvyydystä ja että aika-nopeus -kuvaajassa graafin ja aika-akselin väliin jäävä pinta-ala kertoo kuljetun matkan. Alla on kuva Oresmen teoksessaan "De configura-tionibus qualitum" esittämästä todistuksesta kiihtyvässä liikkeessä olevan kaapaleen keskinopeuden määrittämiseksi.



Analyyttisen derivaatan historia on suhteellisen lyhyt, sillä se alkaa vasta 1600-luvulta. Ennen sitä funktioden arvojen muutosta ei juurikaan oltu analyyttisesti tutkittu. Derivaatan idean päivänvaloon toivat Isaac Newton ja Gottfried Leibniz päätyen keskinäiseen kiistaan siitä, kumpi oli todellisuudessa keksinnön takana. Newtonin aikanaan käyttämä nimitys derivaatasta oli kuitenkin "fluxion" (= virtaus) ja nimen "derivaatta" otti käyttöön vasta italialais-ranskalainen matemaatikko ja astronomi Joseph-Louis Lagrange 1700-luvun lopulla.

Alunperin derivaatan tulkittiin kuvaavan funktion arvojen muutoksen suuruutta, kun lähtöjoukossa arvot muuttuivat infinitesimaalisen verran, siis todella, todella vähän. Kuitenkin 1900-luvulle tultaessa matematiikot halusivat ottaa käyttöön yleisemmän ja formaalimman määritelmän, jolloin derivaatta oli mielekkäämpi määritellä erotusosamäärän raja-arvona, kuten se tässäkin kirjassa tehdään. Ajatus differentiaaliyhtälöiden laskemisesta infinitesimaalien avulla elää kuitenkin edelleen vahvana esimerkiksi fysiikan ja tekniikan aloilla, sillä se on useasti käytännöllinen ja hyvä keino päästä täysin samaan lopputulokseen kuin raja-arvon avulla.

B Opettajan opas

B.1 Johdanto

Opetushallituksen *Lukion opetussuunnitelman perusteissa* (2019) lukion matematiikan pitkän oppimäärän kurssin MAA6 ”Derivaatta” tavoitteiksi asetetaan, että opiskelija

”tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla, omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta ja ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena”.

Etenkin näihin tavoitteisiin pureudutaan tässä kirjan ensimmäisessä luvussa. Tavoitteena on, että opiskelijalle tuotetaan vahva visuaalinen ymmärrys funktion muutosnopeuden määrittämisestä ja siihen liittyvistä haasteista, jotka pyritään ratkaisemaan kurssin edetessä analyyttisen matematiikan keinoin. Tämän oppimateriaalin on tarkoitus soveltua sekä 45 että 75 minuutin oppitunneille ja seuraavaksi esitetään ehdotus tuntijaosta.

Mikä ihmeen derivaatta? 1 x 75min tai 1,5 x 45 min

Erotusosamäärä 1 x 75min tai 1,5 x 45 min

Erotusosamäärän raja-arvo 1 x 75min tai 1,5 x 45 min

Johdanto-osion eli kappaleen ”Mikä ihmeen derivaatta?” voi mahdollisesti käydä nopeamminkin, mikäli esimerkiksi opettavan ryhmän taidot ovat selvästi niin hyvät, ettei kulmakertoimen määrittämistä tarvitse kerrata pitkän kaavan kautta. Johdanto-osioon on kuitenkin tehty laajoja esimerkkejä derivaatan merkityksestä eri tieteenaloilla ja näitä esimerkkejä kannattaa käyttää keskustelun herättämiseen ja opiskelijoiden motivoimiseen.

Tämän materiaalin keskeinen piirre on, että derivaattaa aletaan opettamaan oppiainerajat ylittävien arki- ja työelämään liittyvien tehtävien pohjalta siten, että esimerkiksi keskeisinä tekijöinä oppimateriaalissa esiintyvää suureet *nopeus* ja *kiihtyvyys*. Oppimateriaalissa opiskelua ja oppimista kuljettavina tekijöinä ovat *esimerkit* ja niihin liittyvät *pohdintatehtävät*. Yleissivistävänä höysteenä materiaaliin on myös siroteltu aiheeseen liittyviä historiallisia faktoja ja nippelitietoa.

Tässä oppimateriaalissa pohdintatehtävät toimittavat tuntitehtävien virkaa, ja jokaisen kappaleen lopusta löytyy kappaleeseen liittyviä harjoitustehtäviä, jotka sopivat kotitehtäviksi. Tarkoitus on, että nämä luonteeltaan kaikkein johdattelevimmat oppitunnit ovat yhteistä perusteiden luomista, jossa teoria ja pohdintatehtävät vuorottelevat opettajan toimiessa tahtia ylläpitävänä kapellimestarina.

Kirjoittajan tavoitteena on, että tällä oppimateriaalilla matematiikan opiskelusta ja oppimisesta pyritään luomaan yhteisöllinen kokemus opetusryhmälle. Tarkoitus on, että opettaja osallistaa opiskelijoita ajankäytön puitteiden ja ryhmän sosiaalisten taipumusten mukaan mahdollisimman paljon opetuksessa antamalla tilaa opiskelijoiden omalle ajatustyölle etenkin pohdintatehtävissä. Tämän oppimateriaalin tarkoitus on myös ryhmäyttää opetusryhmää sekä tuottaa luokkaan ilmapiiri, jossa matematiikasta keskusteleminen koetaan normaalina osana opetusta ja oppimista.

B.2 Pohdintatehtävät

Mikä ihmeen derivaatta?

Pohdinta A.1

Näytelmän tarkoitus on tuoda esille syitä opiskella derivaattaa ja derivoimista sekä toisaalta nostaa esiin jo opiskelijoiden olemassa olevaa tietoutta funktioiden käyttäytymisestä. Tarkoituksena on myös havainnollistaa, ettei ole eksaktia puhua ”funktion kulmakertoimesta”, vaan oikea ilmaus on ”funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin”. Lisäksi pohdinnan tarkoitus on herättää keskustelua siitä, minkälaisen matemaattisen tiedon johtaminen funktiosta on ylipäätään mahdollista.

Pohdinta A.6

Tehtävän tarkoitus kohdassa a) on palauttaa mieliin hetkellisen nopeuden määrittäminen tangentin kulmakertoimen avulla. Lisäksi tutustutaan tangentin kulmakertoimesta saataavaan tietoon sekä opetellaan tulkitsemaan sen muutoksien merkitystä ilmiön kannalta. Kohdassa b) siis haetaan kuvaajan huippuja ja pohjia, kun taas kohdassa c) tulisi havaita, että jousen pään nopeus on suurimmillaan kun se ohittaa korkeuden $0\,cm$ Kohdassa d) tulisi havaita, miten keskinopeus voi olla nolla, vaikka jousen liiketila onkin jatkuvassa muutoksessa.

Pohdinta A.9

Pohdinnan on tarkoitus osoittaa opiskelijalle, että tutkittava funktio voi olla vakiofunktio tai, että monimutkaisemmassakin funktiossa voi esiintyä porrasmaisia tasannekotia. Opiskelijan tulisi havaita, että pelkkä tieto derivaatan nollakohdasta ilman tietoa sen ympäristöstä ei vielä välttämättä tuo toivottua ratkaisua.

Pohdinta A.10

Ensimmäisen asteen polynomin kuvaajan tangentin kulmakertoimesta saadaan rekan kiihtyvyyden arvoksi $0,3\ m/s^2$.

Monimutkaisemman polynomin kuvaajan tangentin kulmakertoimesta saadaa polkupyörän kiihtyvyyden arvoiksi:

$t = 1 :\approx 1\ m/s^2$

$t = 4 :\approx 0,25\ m/s^2$

$t = 9 :\approx -0,08\ m/s^2$

Pohdinnan tarkoitus on osoittaa, miten pisteiden valinta vaikuttaa saadun lopputuloksen laatuun. Toisin sanoen keskeinen havainto olisi, että joistain funktioista niiden kuvaajan kulmakerroin voidaan määrittää mielivaltaisesta pisteestä, mutta joskus on syytä olla kiinnostunut kulmakertoimesta jossain tietyssä pisteessä.

Erotusosamäärä

Pohdinta A.14

Näytelmän tarkoitus on viedä opiskelijoiden ajatukset tangentista sekanttiin ja siten erotusosamäärän idean äärelle. Tangentin korvaaminen sekantilla pyritään oikeuttaamaan ajatuksella sekantista tangentin helppona approksimaationa, joka saadaan aikaan valitsemalla sekantin määrittelyssä käytetyt pisteet sopivasti ja läheltä toisiaan. Dialogi on muista materiaalin vuoropuheluista poiketen kirjoitettu vahvalla itä- ja länsimurteella ja hahmojen keskustelutapaan on liitetty eritoten karjalaisiin ja pohjalaisiin ihmisiin yhdistettyjä luonteenpiirteitä.

a) Eilan tavassa ongelmana on, että jos funktio kulkee sopivasti valittujen pisteiden välillä, voi keskiarvo kulmakertoimelle olla jopa erimerkkinen kuin tangentin kulmakerroin siinä pisteessä jossa sitä haluttiin kuvata.

b) Anjan tapa tuottaa hyvän approksimaation tangentille sekantin avulla, kunhan pisteet valitaan sopivasti, eli käytännössä riittävän läheltä toisiaan. Myös se, että kuvattua pistettä käytetään määrityksessä, pienentää virheen mahdollisuutta.

Pohdinta A.19

Tehtävän tarkoitus on ensisijaisesti osoittaa, että moni fysikaalinen suure on erotusosamäärä. Hyvä huomio ja keskustelunaihe on myös kiihtyvyyden matemaattinen luonne nopeuden – joka itsessään on jo erotusosamäärä – ja ajan erotusosamääränä. Kulmakertoimellakin voi siis olla kulmakerroin! Ylöspäin eriyttämistä ajatellen tehon kaavan on tarkoitus johtaa havaintoon, että pystyakselin yksikkö voi olla tulo $F\Delta s$ (eli vastaa pinta-alaa, jolloin tehoa voi ajatella kolmiulotteisena matemaattisena ”oliona”) sekä havaintoon $P = Fv$.

Pohdinta A.20

Tämän tehtävän tarkoitus on johtaa ajatukset kohti raja-arvoa, sillä erotusosamääränä saatavan sekantin kulmakertoimen tarkkuus suhteessa funktion kuvaajalle piirrettyyn tangentin todelliseen kulmakertoimeen riippuu valittujen pisteiden x_1 ja x_2 keskinäisestä etäisyydestä sekä funktion käyttäytymisestä pisteiden välillä. Pohdinnan aikana on mahdollista tehdä havainnot erityisesti funktioiden $f(x) = 2x$ ja $g(x) = \sin(x)$ erotusosamäärän luonteesta, sen sijaan funktion $h(x) = \log_{10}(x)$ erotusosamäärän yleistä muotoa voi tuskin mitenkään helposti tässä kohden kurssia havaita.

Pohdinta A.21

Tämän pohdinnan on tarkoitus on johtaa seuraavan kappaleen kannalta merkittävään havaintoon ja viimeistään herättää opiskelijassa tarve päästä todella lähelle pistettä x_1. Tehtävän ideana on havaita, että mikäli funktion kuvaajan käyttäytymistä ei tunneta, eikä graafista ratkaisua sen tangentille voida tehdä, voidaan tangentin yhtälöä laskennallisesti approksimoida käyttämällä kahden todella lähellä toisaan olevan pisteen välistä sekanttia tangentin korvikkeena. Vinkin tarkoitus on havainnollistaa opiskelijalle, että piirsipä hän millaisen tahansa (derivoituvan) funktion, niin parhaan approksimaation tangentille hän saa sekantin avulla, kun pisteet $(x_1, f(x_1)$ ja $(x_2, f(x_2))$ ovat todella lähellä toisiaan.

Erotusosamäärän raja-arvo

Pohdinta A.22

Näytelmä on toisaalta yleissivistävä katsaus antiikin filosofiaan, toisaalta se vie ajatukset kohti infinitesimaalisia kokoluokkia. Sokraattisen keskustelun muotoon kirjoitetussa näytelmässä Antti on vakuuttunut siitä, ettei nopeampi juoksija voi ollenkaan tavoittaa hitaampaa, sillä joka kerta, kun nopeampi on tullut siihen paikkaan, jossa hitaampi hetki sitten oli, hitaampi on ehtinyt edetä hieman kauemmas.

a) Antin logiikan ongelmana on se, että Antti tarkastelee vain ohitusta edeltäviä hetkiä aina lyhentäen tarkasteluväliä omaan logiikkaansa sopivalla tavalla, jolloin voi syntyä paradoksaalinen illuusio siitä, ettei nopeampi juoksija tavoita hitaampaa tai Akhilleus kilpikonnaa.

b) Opiskelijan tutkiessa Reetan kuvaajaa tilanteesta käy ilmi, että kun juoksijoiden paikan kuvaajat leikkaavat, kuvaajien erotuksien suuruus lähestyy tällöin lukua nolla sekä ennen ja jälkeen ohitushetken.

Pohdinta A.25

Funktiolle $f(x) = \sin(10/x)$ on mahdoton määrittää raja-arvoa kun $x \to 0$, sillä funktio $f(x)$ oskilloi niin voimakkaasti.

Muokattu funktio $f(x) = x \sin(10/x)$ sen sijaan näyttää saavan origossa raja-arvon nolla, jota funktion arvot lähestyvät molemmilta puolilta y-akselin suhteen.

Pohdinta A.29

Tässä pohdinnassa annetaan noheville opiskelijoille mahdollisuus kirjoittaa derivaatan määritelmä muodossa, jossa piste x on muodostettu vakion h avulla $x = x_0 + h$, jolloin derivaatan määritelmä funktiolle f pisteessä x_0 tulee muotoon

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Pohdinta A.30

Tässä pohdinnassa halutaan koota kaikki opittu yhteen ja yhdistää derivaatan visuaalinen hahmottaninen sen analyytiseen käsittelyyn. Kulmakertoimiksi ”suoralle” tulisi havaita

a) 0 ,

b) 2 ,

c) -2 ,

d) 4 ja

e) 6 .

f) Opiskelijan tulisi havaita, että kulmakerroin riippuu luvusta x yhtälön $f'(x) = 2x$ mukaisesti.

g) Tarkoituksena on, että opiskelija käyttää derivaatan määritelmää ja binomin neliön kaavaa johtaakseen kohdassa f) muodostetun yhtälön. Muuttujan h raja-arvon käsittelyssä opettajan todennäköisesti tarvitsee ottaa johdatteleva rooli, sillä tämä on ensimmäinen kerta, kun opiskelija joutuu käsittelemään raja-arvoja analyyttisesti – kaiken lisäksi ilman tietoa niiden laskusäännöistä.

Pohdinta A.31

Epäjatkuvuuskohdassa funktiolla ei ole derivaattaa. Tätä pohdintaa voi esimerkiksi miettiä ihan paperille piirtämällä. Funktion kuvaajan epäjatkuvuuspisteeseen on mahdotonta piirtää derivaattaan liittyvää tangenttia, sillä päätepisteessä tangentille voidaan määrittää mielivaltaisesti erilaisia arvoja. Tilannetta voi kuvata opiskelijoille esimerkiksi seuraavasti: tangentti kuvaajan epäjatkuvuuspisteessä on kuin kiikkulauta kapean tukipisteen päällä, toisin sanoen asennoltaan – ja siten arvoltaan – epämääräinen.

B.3 Lisähuomioita opettajalle

Harjoitustehtävässä 7. on mahdollista vertailla erityisesti voiman ja tehon määritelmiä, joissa havaitaan niiden yhtäläiset lähtökohdat fysikaalisen työn derivaattoina, toinen paikan ja toinen ajan suhteen. Mielenkiintoisena ja ammattimaiseen fysiikkaan liittyvänä lisätietona voi opiskelijoille esittää myös voiman liikemäärän derivaattana ajan suhteen

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}p(\mathbf{v}) = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,.$$

Harjoitustehtävää 7 tarkistettaessa pähkäilyä voi ketjuttaa vielä pidemmälle miettimällä eri suureiden differentiaalisia yhteyksiä: toisaalta voima on liikemäärän muutos ajan suhteen, toisaalta liikemäärä on liike-energian muutos nopeuden suhteen ja toisaalta nopeus on paikan muuotos ajan suhteen.

Harjoitustehtävässä 9 opiskelija perehtyy derivaatan määritelmän laskennalliseen käyttämiseen ja tehtävän *Lisätehtävä*-osiossa opiskelija joutuu osoittamaan yksinkertaisen derivaatan yhtälön todeksi käyttämällä derivaatan määritelmää. Harjoitustehtävän ja etenkin *Lisätehtävä*-osion sujuvuuden kannalta on tärkeää, että pohdinnan A.30 kohta g) on käyty hyvin yhdessä läpi oppitunnilla, sillä muuten raja-arvojen laskeminen voi olla turhan haastavaa tässä vaiheessa kurssia.

C Tehtävien vastaukset

Mikä ihmeen derivaatta

Tehtävä 1

a) $1\ \frac{m}{s}$, $2\ \frac{m}{s}$ tai $3\ \frac{m}{s}$ ($0\ s$, $0{,}5\ s$ tai $1\ s$)

b) $14\ \frac{m}{s}$, $15\ \frac{m}{s}$ tai $16\ \frac{m}{s}$ ($6\ s$, $6{,}5\ s$ tai $7\ s$)

c) On vaikea sanoa, mitä hetkeä palkin esittämä nopeus kuvaa.

d) $2\ \frac{m}{s^2}$

Tehtävä 2

Oikea vastaus:

c) Molemmilta kuvaajilta.

Halutut hetket:

e) Nopeus on suurimmillaan, kun $t = [75\ s, 80\ s]$.

f) Nopeus on nolla, kun $t = [50\ s, 75\ s]$ ja $t = [85\ s, 90\ s]$.

Tehtävä 3

a) ≈ 1

b) ≈ 0

c) ≈ -1

d) ≈ 0

e) ≈ 1

d) Tangentin kulmakertoimen arvot ovat lähellä tai täsmälleen cosini-funktion arvoja samoilla muuttujan x arvoilla.

Erotusosamäärä

Tehtävä 4

$11\ m/s$

Tehtävä 5

a) $\frac{39{,}5\ \frac{m}{s} - 12\ \frac{m}{s}}{6\ s} \approx 4{,}58\ \frac{m}{s^2}$

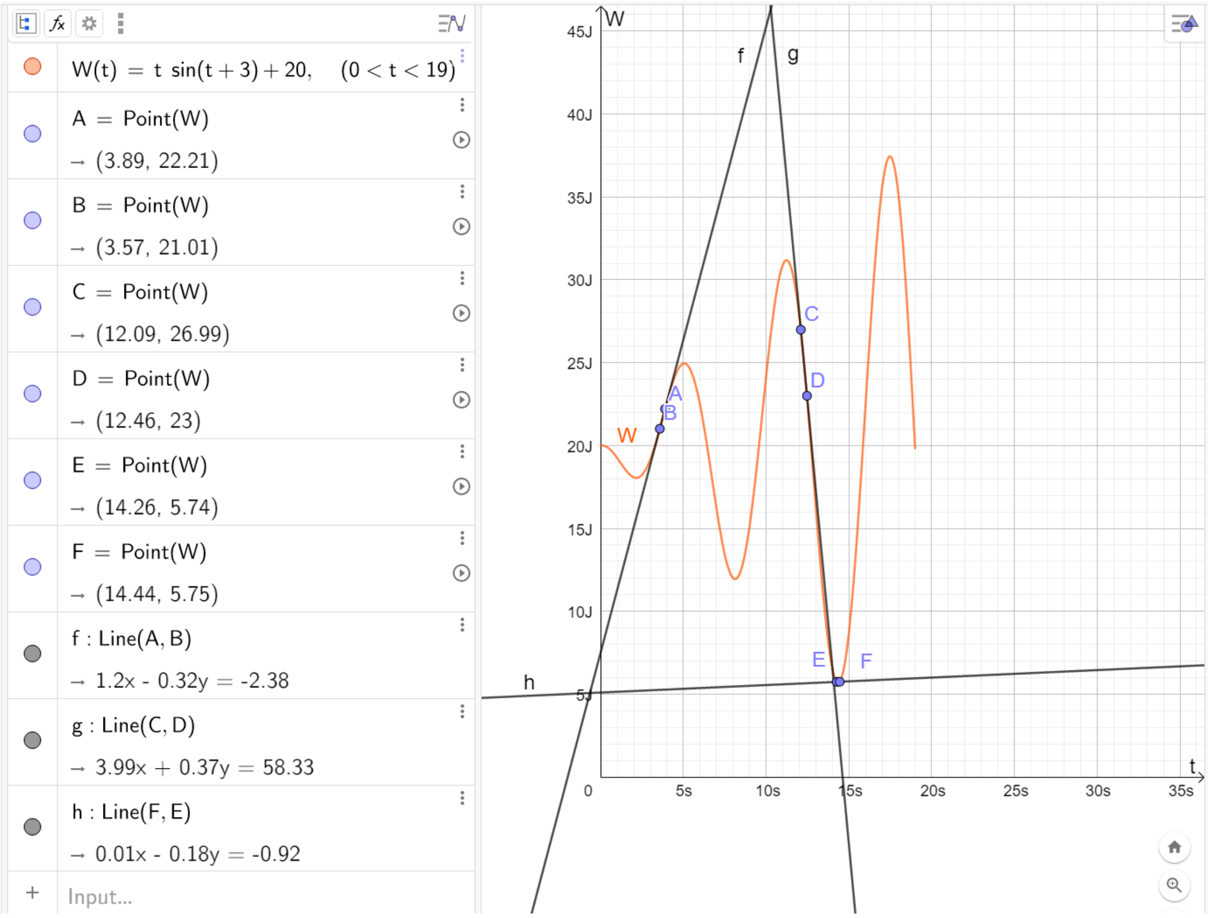
b) $\frac{37\ \frac{m}{s} - 29\ \frac{m}{s}}{2\ s} \approx 4\ \frac{m}{s^2}$

c) $\frac{36{,}5\ \frac{m}{s} - 32\ \frac{m}{s}}{1\ s} \approx 4{,}5\ \frac{m}{s^2}$

Hetki, josta ollaan kiinnostuneita on $t = 4{,}0\ s$

Tehtävä 6

Esimerkkiratkaisu:



c) Määrityksen tarkkuus kasvaa lähestyttäessä kysyttyä pistettä ja vastaavasti pienee, kun kysytystä pisteestä loitotaan kauemmas

Tehtävä 7

SUURE	SYMBOLI	MATEMAATTINEN MÄÄRITELMÄ	MERKITYS
nopeus	$\boldsymbol{v}$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	**Paikan muutos ajan suhteen**
kiihtyvyys	$\boldsymbol{a}$	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$	**Nopeuden muutos ajan suhteen**
teho	$\boldsymbol{P}$	$\frac{\Delta W}{\Delta t}$	**Tehdyn työn muutos ajan suhteen**
kulmanopeus	$\boldsymbol{\omega}$	$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	**Kulman muutos ajan suhteen**
liikemäärä	$\boldsymbol{p}$	$\frac{\Delta E_{liike}}{\Delta v}$	**Liike-energian muutos nopeuden suhteen**
voima	$\boldsymbol{F}$	$\frac{\Delta W}{\Delta s}$	**Tehdyn työn muutos paikan suhteen**
kulmakiihtyvyys	$\boldsymbol{\alpha}$	$\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	**Kulmanopeuden muutos ajan suhteen**

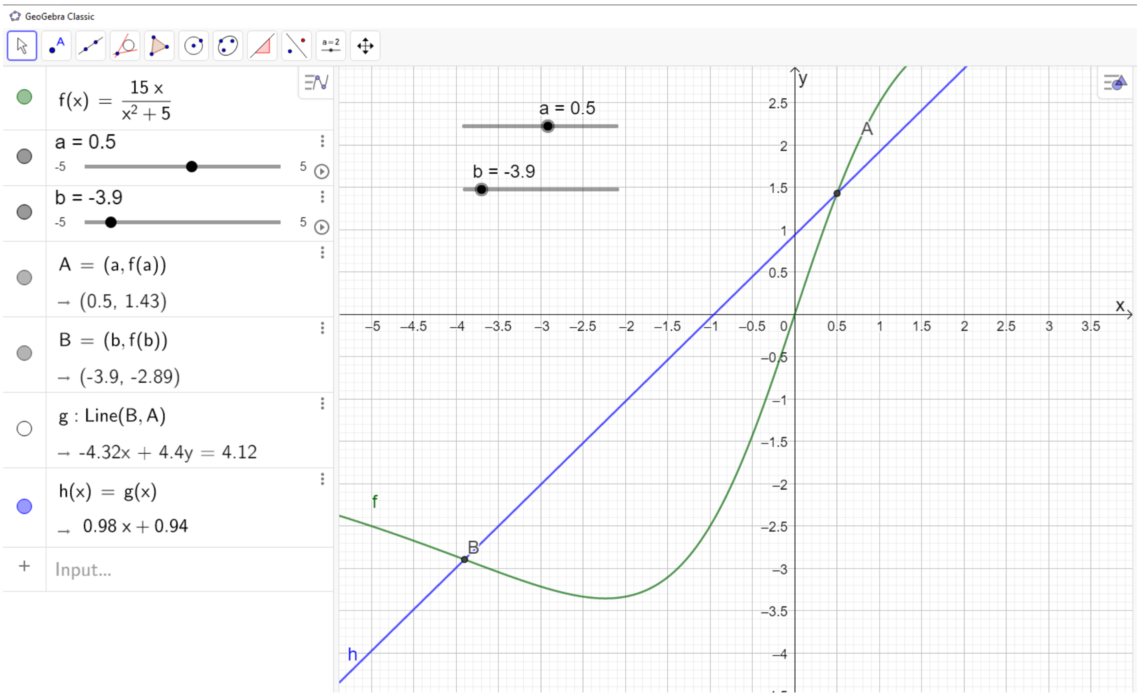
Erotusosamäärän raja-arvo

Tehtävä 8

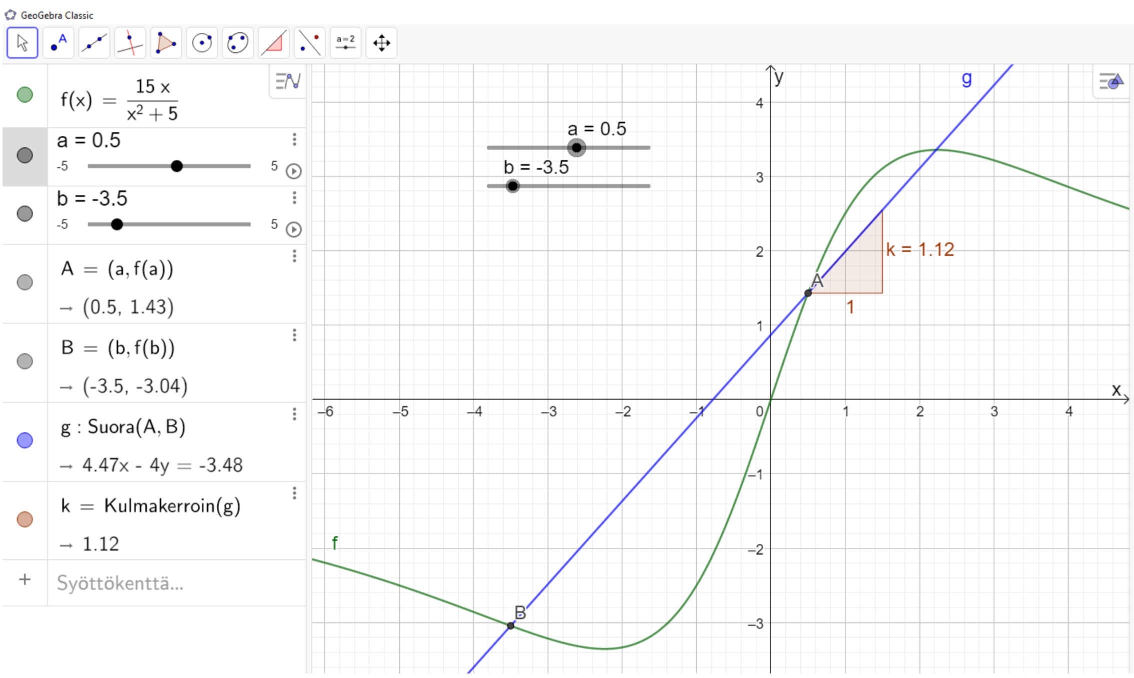
a) $\frac{5}{27} = 0,185185...$

b) 3

c) $\frac{-55}{147} = -0,374149...$



tai



Tuloksen tarkkuus paranee, kun pisteet A ja B lähestyvät toisiaan. Mikäli pisteet A ja B ovat samat, ei ole mahdollista määrittää suoraa niiden avulla.

Tehtävä 9

a) 4

b) 8

c) −4

d) −8

Lisätehtävä: funktion $f(x) = 2x^2$ derivaattafunktio on:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h(2x+h)}{h} = 4x\,.$$

Tehtävä 10

Muuttujan x arvo	**"Suoran" kulmakerroin**
a) $x = -3$	9
b) $x = -2$	4
c) $x = -1$	1
d) $x = 0$	0
e) $x = 1$	1
f) $x = 2$	4
g) $x = 3$	9

Haluttu yhtälö:

$$f'(x) = x^2\,.$$