Kvanttorit ja suora todistaminen lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Katja Kinnunen
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2020

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikan merkitys oppiaineena on muuttunut Suomessa vuosien saatossa. Samalla, kun uutisoidaan matematiikan osaamisen heikentymisestä, opiskelijavalintauudistukset ja teknologian kehittyminen tekevät matemaattisesta osaamisesta yhä tärkeämpää [2]. Eritoten opiskelijavalintauudistus on lisännyt pitkän matematiikan kysyntää suomalaisissa lukioissa ja eritasoiset opiskelijat luovat stressiä niin opiskelijoille itselleen kuin opettajillekin [11]. Ei sovi myöskään unohtaa uudistuneita ylioppilaskirjoituksia, joiden sähköistyminen on matematiikan osalta herättänyt kritiikkiä [10, 12]. Näihin uusiin haasteisiin tulee pyrkiä vastaamaan uusimalla opetusmenetelmiä ja -materiaaleja.

Tämä pro gradu -tutkielma on osa isompaa oppikirjaprojektia, jossa pyritään tuottamaan tutkimusten avulla perusteltua opiskelumateriaalia vapaaseen käyttöön. Tutkielma on toinen osio lukion pitkän matematiikan kurssille *Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)* tarkoitetusta viisiosaisesta oppikirjasta, jossa käsitellään kvanttoreita ja suoraa todistusta. Todistaminen on pienissä määrin esillä myös muilla matematiikan kursseilla, mutta sen perusteisiin perehdytään tarkemmin ensimmäistä kertaa, eikä kvanttoreita ole käsitelty aiemmin lainkaan. Kvanttorit ja todistaminen ovat kuitenkin tärkeä osa matematiikan jatko-opintoja ja niiden ymmärtäminen osoittaa syvempää matemaattista osaamista. Tutkielmassa kiinnitetäänkin huomiota yleisiin kompastuskiviin ja perusteiden hyvään hallintaan.

Oppikirjakokonaisuuden pedagogiset lähtökohdat ja yleiset säännöt on päätetty yhdessä projektiryhmän kesken, mutta osioiden toteuttamiseen on annettu vapaat kädet. Materiaalin ero perinteiseen oppikirjaan tulee esille pohdintatehtävissä, jotka on laadittu tieteellisten artikkeleiden pohjalta ja lukion opetussuunnitelmien perusteita myötäillen. Teoriaa käydään läpi pohdintojen avulla ja ne pyrkivät liittämään uutta tietoa jo aiemmin opittuun. Tämä mahdollistaa itsenäisemmän opiskelun ja opiskelun eriyttämisen tunneilla. Oppikirjan tehtävät perustuvat osittain myös konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jonka mukaan opiskelija toimiii itse oman tietonsa rakentajana ja uusi tieto perustuu aina aiemmin opittuun [17]. Tätä edustaa myös lukion opetussuunnitelmien perusteiden mukainen oppimiskäsitys [13, 14].

Kirja on jaettu kolmeen osioon. Perusteluosassa esitellään kirjan pohjalla olevat artikkelit ja niiden vaikutukset pohdintatehtävien sisältöön. Lisäksi tutustutaan tarkemmin opetussuunnitelmien perusteisiin sekä yleisesti että kurssin osalta. Kirjaosio sisältää itse oppimateriaalin ja se on jaettu kahteen kappaleeseen, jotka sisältävät kurssille tarkoitetun tiedon kvanttoreista ja suorasta todistamisesta. Oppimateriaalin jälkeen on lisä- ja kotitehtävinä toimivia harjoitustehtäviä. Opettajan oppaassa pohdintatehtävien tarkoitusperiä selitetään hieman tarkemmin ja samalla annetaan ratkaisut ja vinkkejä pohdintojen hyödyntämiseen tunneilla. Lopussa ovat harjoitustehtävien oikeat vastaukset tai tehtäväkohtaisia vinkkejä opiskelijoille.

2 Yleistä tietoa kirjasta

2.1 Yleiset tavoitteet

Oppimateriaali on tehty uusimman käytössä olevan lukion opetussuunnitelman perusteiden tavoitteita noudattaen (LOPS 2015), sekä myötäillen uusia perusteita (LOPS 2019), jotka julkaistiin kesken materiaalin työstämisen. Oppikirjakokonaisuuden suurin tavoite on tuoda lukiolaisille uudenlainen ilmainen oppikirja, joka poikkeaa perinteisestä kirjamallista erityisesti opettamalla sisältöä erilaisten pohdintatehtävien kautta, tietoiskujen ja esimerkkilaskujen sijaan. Kirjan tarkoituksena ei ole parjata perinteistä oppikirjamallia, vaan kehittää uudenlaisia menetelmiä oppimistulosten parantamiseksi. Pohdintatehtävät perustuvat opetussuunnitelmien perusteiden lisäksi matematiikan oppimista käsitteleviin artikkeleihin ja tutkimuksiin. Erityisesti tehtävien laatimisessa on käytetty hyväksi artikkeleita *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [3] ja *Collaborative Learning in Mathematics* [21].

2.2 Opetussuunnitelma

Vuonna 2015 julkaistun ja kirjoitushetkellä voimassaolevien lukion opetussuunnitelman perusteiden oppimiskäsityksen mukaan opiskelijat tulkitsevat, analysoivat ja arvioivat eri muodoissa esitettyä informaatiota, rakentavat uutta tietoa ja syventävät osaamistaan aikaisempien kokemusten ja tietojen pohjalta [13]. Perusteiden mukaista oppimiskäsitystä voidaan siis pitää konstruktivistisena, jossa oppijaa kohdellaan aktiivisena subjektina, joka tulkitsee oppisisältöjä omien ennakkokäsitystensä avulla [17]. Matematiikka tunnetaan kumulatiivisena tieteenä, jolloin uutta tietoa rakennetaan vanhan päälle. Kumulatiivisuutta voidaankin pitää matemaattisen todistamisen peruspilarina. Opiskelijoita tulisi ohjata havaitsemaan käsitteiden välisiä yhteyksiä sekä soveltamaan aiemmin opittua muuttuvissa tilanteissa [13]. Tutkimiseen, kokeilemiseen ja ongelmanratkaisuun perustuvat opiskelumenetelmät kehittävät muun muassa kriittistä ja luovaa ajattelua, joka sekin on tärkeää matemaattisen todistamisen kannalta, kun tutkitaan erilaisten todistusten pätevyyttä.

Yleisissä tavoitteissa opetussuunnitelman perusteet keskittyvät opiskelijoiden tiedonhankinta-, ongelmanratkaisu- ja soveltamistaitojen kehittämiseen, sekä tutkivaan oppimiseen. Opetuksen tulisi vahvistaa opiskelijan monilukutaitoa, jolloin hän kykenee ymmärtämään eri tieteen- ja taiteenaloille ominaista kieltä sekä tuottamaan tekstiä. [13]

Vuonna 2019 julkaistun lukion opetussuunnitelman perusteiden mukainen oppimiskäsitys ja opetuksen yleiset tavoitteet heijastavat vahvasti vuoden 2015 vastaavia, eikä eroja juuri ole.

Matematiikkaa koskevista yleisistä tavoitteista perusteet nostavat erityisesti esille matemaattisen tiedon ymmärtämisen, hyödyntämisen ja tuottamisen. Opiskelijoiden tulisi tutustua matemaattiseen ajatteluun ja sen malleihin sekä oppia käyttämään matematiikan kieltä. Näiden lisäksi matematiikan opetuksen tulisi tukea laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Opetustilanteiden tulisi olla sellaisia, että ne herättävät opiskelijoissa havaintojen pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä. Heidän tulisi myös pyrkiä perustelemaan heränneitä ajatuksia. Opiskelijaa rohkaistaan käyttämään myös ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä. [13]

Uusien perusteiden mukaiset yleiset tavoitteet ovat säilyneet suhteellisen samanlaisina, mutta niissä painotetaan opiskelijoita ymmärtämään matematiikan merkitystä kulttuureissa ja historian kehityksessä sekä sen luonnetta universaalina kielenä [14]. Lisäksi yleiset tavoitteet mainitsevat uutena asiana tarkoituksenmukaisten matemaattisten menetelmien ja ohjelmistojen käyttämisen ja sen, että ohjelmiston tuottama tulos ei yksinään riitä osoitukseksi, todistukseksi tai perusteluksi [14]. Väitteiden oikeaoppinen perusteleminen on tämän kirjan osion päätavoitteita, vaikka ohjelmistoja ei päästäkään käyttämään kuin vain vähän.

Kurssi, jolle kirja on tarkoitettu on eri opetussuunnitelmien aikana kokenut muutoksia asiakokonaisuuksien painotuksien osalta. Kirjoitushetkellä voimassa olevien perusteiden mukainen kurssin nimi on *Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)* ja sen keskeisinä tavoitteina on, että opiskelija

- perehtyy logiikan alkeisiin, tutustuu todistusperiaatteisiin ja harjoittelee todistamista
- hallitsee lukuteorian peruskäsitteen ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujen ominaisuuksien tutkimisessa [13]

Näistä tavoitteista tässä kirjan osiossa keskitytään todistusperiaatteisiin tutustumiseen ja todistamisen perusteelliseen harjoittelemiseen.

Suunnitteluvaiheessa projektiryhmä päätyi ottamaan vuonna 2015 ilmestyneet perusteet lähtökohdaksi, sillä seuraavassa uudistuksessa kurssin todistusosio poistuisi kokonaan. Moduulin nimi vuoden 2019 perusteissa on *Algoritmit ja lukuteoria* ja matemaattista todistamista ei mainita myöskään muiden moduulien keskeisissä sisällöissä. Matemaattinen todistaminen on kuitenkin erittäin tärkeää matematiikan jatko-opintojen kannalta, eikä perusteiden mukaisia opetussuunnitelmia ole päästy kirjoitushetkellä vielä toteuttamaan. Tämän vuoksi oppimateriaalissa viitataan lähinnä vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Kuitenkin, vaikka todistaminen on ainakin nimellisesti poistettu kurssilta, uudet perusteet mainitsevat *vuokaavion* yhtenä keskeisistä sisällöistä ja sitä käytetään yhtenä todistamisen apuvälineenä.

2.3 Ajattelutottumukset

Matematiikan opetus on viime vuosien aikana kokenut Suomessa mullistuksia. Mekaanisen opettelun sijaan, nykyään matematiikan oppimisessa painotetaan yhä enemmän laskujen takana olevien ilmiöiden ymmärrystä. Ylioppilaskokeet heijastavat samoja tavoitteita ja niissä esiintyy yhä enemmän tehtäviä, jotka mittaavat kokelaiden kykyä vertailla valmiita ratkaisuja ja päätelmiä sekä korjata niiden mahdollisia virheitä. Tällaisia tehtäviä on esiintynyt esimerkiksi syksyn 2017 ja kevään 2019 kokeissa [22, 23]. Se, mitä matematiikan opetuksessa pidetään tärkeänä muuttuu koko ajan ja siksi joidenkin tutkijoiden mielestä pelkän sisältöoppimisen sijaan, oppilaille ja opiskelijoille tulisi opettaa matemaattisen ajattelun taitoja [3]. Ajatusmaailman pitäisi tulla niin tutuksi, että opiskelijoille tulee taipumus toteuttaa sitä arkipäiväisissäkin tilanteissa [3]. Näitä niin kutsuttuja ajattelutottumuksia käsitellään artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Tarkoituksena on auttaa opiskelijoita oppimaan ja omaksumaan joitakin niitä tapoja, joilla matemaatikot lähestyvät ongelmia [3]. Kaikki artikkelissa esitetyt ajattelutottumukset ovat hyviä ja tavoiteltavia, mutta niiden läpikäyminen ei ole kirjan selkeyden ja yhteneväisyyden kannalta välttämätöntä. Sen sijaan projektiryhmä päätti ottaa seuraavat neljä keskeisiksi tavoitteiksi:

1. Säännönmukaisuuksien löytäminen (*Pattern sniffers*)
2. Kuvaileminen (*Describers*)
3. Nikkaroiminen (*Tinkerers*)
4. Visualisoiminen (*Visualizers*) [3]

Säännönmukaisuuksien löytäminen tarkoittaa eräänlaista salapoliisityötä; tutkimalla erilaisia matemaattisia ongelmia opiskelijan tulisi pyrkiä etsimään samalla ongelmien ja niiden ratkaisujen välille yhtäläisyyksiä [3]. Opiskelijoiden tulisi jatkuvasti etsiä oikoreittejä, jotka nousevat esiin matemaattisista malleista [3]. Oikoreittien käyttäminen peilautuu hyvin todistamiseen, sillä usein sujuvuuden kannalta todistusten apuna käytetään erilaisia välituloksia määritelmien lisäksi. Säännönmukaisuuksien löytäminen on välttämätöntä, sillä usein lukiotasoisissa todistuksissa tarvitaan toistuvasti samoja määritelmiä. Ymmärtämällä yhtäläisyydet, opiskelijat ovat valmiita rakentamaan omia todistuksiaan esimerkkien pohjalta.

Kuvailemisen taito on olennainen osa matematiikkaa, onhan matematiikalla oma kielensäkin. Kuvailemisella tarkoitetaan tässä tapauksessa montaa asiaa. Hyvä matemaatikko osaa kuvailla laskujensa vaiheita myös kirjallisesti, sillä tällöin osoitetaan tietoa laskujen takana olevista periaatteista ulkoaopettelun sijaan. Kirjallinen esitystapa tulee taas osata tietyissä tapauksissa muuttaa matematiikan merkintätavoille, sillä kompaktius ja jaarittelemattomuus on matemaattisessa todistamisessa tärkeää [16]. Tämä taito tulee tarpeeseen, kun tavallisia lauseita kirjoitetaan matematiikan symbolein pohdintatehtävissä.

Tässä kontekstissa nikkaroinnilla tarkoitetaan erilaisten ideoiden ja ajatusten purkamista pienempiin osiin ja kokoamista takaisin yhtenäisiksi käsitteiksi [3]. Mitä voikaan tapahtua, jos todistuksesta jätetään välivaiheita merkitsemättä? Entä pysyykö matematiikan symbolein kirjoitetun lauseen idea samana, mikäli symbolit asetetaan uuteen järjestykseen? Uudelleenjärjestely ja välivaiheiden tärkeyden tarkastelu on olennaista syvemmän ymmärtämisen kannalta ja tätä harjoitellaan pohdinnoissa.

Visualisointi helpottaa muuten abstraktien ongelmien ymmärtämistä ja sen avulla voidaan päästä käsiksi myös ongelmiin, jotka eivät ole lähtökohdiltaan visuaalisia [3]. Kvanttoreita ja konnektiiveja voidaan visualisoida erilaisten diagrammien ja muotojen avulla, mutta samoin todistamisen apuna voidaan käyttää erilaisia visuaalisia apuvälineitä, kuten vuokaavioita. Visuaalista esitystapaa käytetään matematiikassa jo oppimisen alkumetreillä, sillä usein alaluokkalaisille esitellään parillisia ja parittomia lukuja juuri kuvien avulla.

Kaikki kirjassa tavoiteltavat ajattelutottumukset ovat erityisen tärkeitä logiikassa ja matemaattisessa todistamisessa. Olisi hankala kuvitella todistusta, jossa ei tulisi käytettyä hyväksi apukuvia, matematiikan säännönmukaisuuksien tuomia apuja tai matematiikan symboleja.

2.4 Tehtävätyypit

Kirjan tehtävät koostuvat pääasiassa pohdintatehtävistä ja harjoitustehtävistä. Näiden lisäksi joidenkin uusien menetelmien avaamiseksi käytetään mallitehtäviä, jotka opastavat menetelmien käytössä. Tärkeimmän kirjan osion muodostavat erilaiset pohdinnat, jotka on suunniteltu sekä luokkatyöskentelyn että itsenäisen opiskelun kannalta. Pohdintojen suurin hyöty saavutetaan kuitenkin, kun niistä voidaan käydä keskustelua niin opiskelijoiden kesken kuin opettajankin kanssa. Harjoitustehtäviä on vain muutamia ja ne on sijoitettu oppimateriaalin loppuun. Tehtävien ratkaisemisen apuna toimivat niin pohdinnat kuin mallitehtävätkin. Artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [21] valitiin kolme erilaista tehtävätyyppiä, joita hyödynnettiin pohdintatehtävien rakentamisessa. Tehtävätyypit on valittu juuri kurssia MAA11 varten ja niiden tarkoituksena on tukea kurssin sisältöjen oppimista. Kuitenkaan kaikki pohdinnat eivät noudata tehtävätyyppien kaavaa.

1. Päättelyn ja ratkaisujen analysointi (*Analyzing reasoning and solutions*)
2. Matemaattisten lauseiden ja väitteiden arviointi (*Evaluating mathematical statements*)
3. Ongelmien ja tehtävien nikkarointi (*Creating problems*) [21]

Päättelyn ja ratkaisujen analysoinnissa tavoitteena on päästää irti pelkän vastauksen saamisesta ja tavoitella kykyä arvioida ja vertailla eri ratkaisutapoja [21]. Opiskelijat ovat kiinni niin sanotussa "oikeassa tavassa" ratkaista ongelma ja mikäli he eivät osaa tätä tapaa, he eivät edes yritä ratkaista ongelmaa [21]. Erilaisten ratkaisutapojen analysointi auttaa opiskelijoita päästämään irti ainoan oikean ratkaisutavan tavoittelusta, ja he ovat avoimempia ratkaisujen yrittämisessä. Erilaisia ratkaisutapoja esitellään ensimmäisessä todistamiseen liittyvässä pohdinnassa A.9, jossa opiskelijoiden tulee yhdistää kahden eri todistusmenetelmän samat vaiheet toisiinsa. Toinen artikkelin esittelemä analyysin muoto on päättelyvirheiden korjaaminen, jolloin opiskelijoiden täytyy kohdata ja kommentoida erilaisia ratkaisutapoja. He joutuvat ottamaan harteilleen neuvonantajan roolin ja käsittelemään ratkaisuja kriittisesti [21]. Kriittinen ajattelutapa on matematikolle hyödyksi, koska hyvä todistus on sellainen, mikä vakuuttaa reilun, mutta "kovan" vastustajan [5]. Virheitä etsitään pohdinnoissa A.8, A.19, A.27 ja A.28. Kolmas tehtävätyyppi perustuu opiskelijoiden kohtaamiin vaikeuksiin tuottaa pitkiä päättelyketjuja. Ketjujen rakentamista voidaan helpottaa antamalla opiskelijoille ketjujen vaiheet, jotka tulee laittaa oikeaan järjestykseen [21]. Eräänlaista päättelyketjun rakentamista harjoitellaan pohdinnoissa A.20 ja A.21, joissa todistuksen vaiheet pitää asetella oikeille paikoilleen.

Matemaattisten lauseiden ja väitteiden arvioinnissa kehitetään kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa [21]. Väitteiden todistaminen ja todistusten vaiheiden paikkansapitävyyksien tutkiminen on tämän osion tärkeimpiä aktiviteetteja ja erilaisten väitteiden todenperäisyyksiä tutkitaan useissa pohdinnoissa. Kun opiskelijoiden täytyy pohtia onko väittämä aina, joskus vai ei koskaan totta, he joutuvat miettimään ongelmia useista eri näkökulmista ja miettimään, minkälaiset tekijät vaikuttavat todenperäisyyteen.

Ongelmien ja tehtävien nikkaroinnissa luodaan uusia ongelmia ja niiden ratkaisuja [21]. Eritoten ratkaisun purkaminen ja kokoaminen on todistusten kannalta tärkeää ja se kehittää opiskelijoiden ongelmanratkaisu- ja soveltamistaitoja, mikä oli mainittu opetussuunnitelman perusteiden yhtenä tavoitteena [13].

2.5 Oppimateriaalin perustelu

2.5.1 Avoin lause ja kvanttorit

Opetuksen koetaan olevan tehokkaampaa, kun se rakentaa uutta tietoa vanhan päälle [21]. Tätä tukee myös matematiikan kumulatiivisuus, jossa uusi tieto perustuu aina vanhaan tietoon. Lauseiden totuusarvoja on päästy tutkimaan kirjan edellisessä osiossa ja uuden asian käsittely aloitetaan ryhmittelemällä lauseita avoimiin ja suljettuihin lauseisiin pohdinnassa A.1. Tutkimalla lauseita, opiskelijat etsivät niistä säännönmukaisuuksia, mikä edistää heidän matemaattista osaamistaan [3]. Samoin kuin säännönmukaisuuksien etsiminen, myös visualisointi oli yksi kirjaan valituista ajattelutaidoista, ja sitä käytetään hyödyksi seuraavassa pohdinnassa A.2, jossa avoimen lauseen ratkaisujoukkoa tutkitaan ensimmäistä kertaa kuvioiden avulla.

Avoimen lauseen opettelua jatketaan pohdinnassa A.4, jossa uutena käsitteenä ovat kvanttorit. Ensimmäiset tehtävät ovat yksinkertaisia, mutta formaalin kielen lauseet muuttuvat koko ajan monimutkaisemmiksi ja viimeisten kohtien ratkaisemiseksi vaaditaan jo syvempää ymmärrystä. Tutkiva oppiminen mainitaan opetussuunnitelmissa matematiikan osalta useaan kertaan [13], ja sitä päästään harjoittelemaan sekä tässä pohdinnassa että pohdinnassa A.5. Matematiikan luonnetta universaalina kielenä painotettiin uusissa opetussuunnitelman perusteissa [14] ja matematiikan kielen käyttämisen tärkeys mainitaan myös vanhemmissa perusteissa [13]. Pohdinnat A.4, A.5, A.6, A.7 ja A.8 tukevat näitä tavoitteita, sillä kaikissa niissä käsitellään luonnollisen kielen ja matematiikan symbolein avulla kirjoitetun kielen välistä yhteyttä. Matemaattisten lauseiden arviointi oli yksi valituista tehtävätyypeistä, ja tätä harjoitellaan myös kyseisissä pohdinnoissa tutkimalla väitelauseiden todenperäisyyksiä. Koska kvanttoreita sisältävät lauseet ovat suljettuja, pohdinnoissa ei oteta huomioon tehtävätyypin ehdottamaa "joskus" vaihtoehtoa.

Kahden kvanttorin kanssa toimiessa tulee olla varovainen kvanttorien järjestyksen suhteen [8, 15]. Eritoten on huomattu, että olemassaolokvanttorin edeltäessä kaikkikvanttoria, lauseen ymmärtäminen ja todistaminen vaikeutuu [15]. Kvalitatiivisessa tutkimuksessaan koskien opiskelijoiden ymmärrystä kvanttoreita sisältävistä lauseista, tutkija Piatek-Jimenez sai näyttöä siitä, että kahden samankaltaisen lauseen vertailusta voi olla hyötyä. Tutkimuksessaan hän ehdottaa, että mikäli lauseet sisältävät samat sisällöt, mutta niiden kvantifioidut osat ovat eri järjestyksessä, opiskelijat oppivat ymmärtämään eritoten olemassaolokvanttorilla alkavia lauseita paremmin [15]. Järjestyksen tärkeyttä teroitetaan pohdinnassa A.6, jossa kaksi täsmälleen samat symbolit sisältävää formaalia lausetta tarkoittavat kuitenkin eri asioita. Edelleen tutkimuksessaan Piatek-Jimenez huomasi, että ongelmat helpottivat osalla oppilaista hieman, koska matematiikan kielen säännöt ovat tarkkoja [15]. Matemaattisen lauseen järjestyksen tärkeyden tutkimista jatketaan pohdinnassa A.7, jossa symbolein kirjoitetut lauseet sisältävät matemaattista sisältöä, ja sanajärjestystä painotetaan myös muuten materiaalissa.

Kaikki kvanttoreihin ja avoimeen lauseeseen liittyvät pohdinnat kehittävät opiskelijoiden taitoja kirjottaa ja tulkita matematiikan kieltä, mikä on opetussuunnitelmien perusteissa mainittu useaan otteeseen matematiikan saralla [13, 14].

2.5.2 Suora todistaminen

Opiskelijoilla on huomattu olevan ongelmia kehäpäätelmien kanssa [6, 7]. Kehäpäätelmä ei ole pätevä todistus, sillä se käyttää todistettavaa väitettä yhtenä oletuksista [7]. Tutkiessaan yläkouluikäisten japanilaisten oppilaiden geometrisen todistamisen oppimisprosessia, tutkijat Fujita, Jones ja Miyazaki huomasivat niin kutsuttujen "vuokaavioiden" helpottavan kehäpäätelmistä eroonpääsyä. Kaaviossa väite on viimeisenä, omana laatikkonaan, jolloin vahingolliset väitteen hyödyntämiset todistusprosessissa vähenevät. Vuokaavioita hyödynnetään pohdinnoissa A.17, A.20 ja A.21. Yleisesti suoran todistamisen hyvä lähtökohta on kirjoittaa todistuksen ensimmäinen ja viimeinen lause heti aluksi, jolloin todistuksen tavoite pysyy jatkuvasti tähtäimessä [8]. Vuokaaviot edesauttavat tällaista menetelmää.

Toisessa tutkimuksessa, Fujita, Jones ja Miyazak pyrkivät edesauttamaan kehäpäätelmistä eroonpääsyä digitaalisen vuokaavio-ohjelman avulla [7]. Ohjelma ilmoitti mikäli ratkaisussa käytettiin hyväksi väitettä, eikä täten hyväksynyt vastausta. Edelleen he saivat näyttöä siitä, että oppilaat, jotka eivät näe oletusten ja lopputulosten välisiä yhteyksiä, eivät myöskään pysty tunnistamaan kehäpäätelmiä. Toistojen ja korjausten jälkeen oppilaat saivat lopulta ratkaistua tehtävät oikein. Oletusten ja väitteiden välisten rakenteellisten yhteyksien löytämisessä tarvitaan siis ulkopuolista tukea [7]. Vuokaaviota käytetään digitaalisesti pohdinnassa A.21, mutta tehtävänä on asettaa välivaiheet ja lopullinen väite oikeille paikoilleen. Koska välivaiheet on annettu valmiiksi, opiskelijoilla on hankalampaa käyttää väitettä hyväksi todistuksessa. Sähköisten ohjelmistojen käytön opettelua painotetaan lukion opetussuunnitelmien perusteissa ja niitä päästään harjoittelemaan tässä tehtävässä, jonka rakentamisessa on käytetty apuna Tekijä-sarjan kirjaa [9]. Kehäpäätelmästä eroonpääsyyä helpottaa myös oletuksen ja väitteen erotteleminen väitelauseista, silloin kun se on mahdollista. Tätä harjoitellaan pohdinnassa

A.12 sekä arkipäiväisten että matemaattisten väitelauseiden muodossa.

Matematiikan kumulatiivisuuteen viitattiin jo aiemmissa kappaleissa ja se on koko matemaattisen todistamisen perusta. Todistaminen onnistuu, koska pohjalla on erilaisia aksioomia, määritelmiä ja todistettuja lauseita. Suoran todistamisen lähtökohdat ovat logiikassa ja tätä käsitellään pohdinnassa A.11, jossa todistusperiaate tulee perustella totuustaulun avulla. Samalla totuustaulu toimii visuaalisena apukeinona.

Nikkarointi oli yksi kirjaan valituista "ajattelutaidoista" ja tämä esiintyy muun muassa todistusten purkamisella ja uudelleen rakentamisella. Kirjoittajat Stewart ja Tall esittävät, että matemaattista todistamista voidaan ajatella loogisten päättelyjen ketjuna, mutta tällainen ajattelutapa johtaa pitkiin ja jaaritteleviin todistuksiin [16]. Siksi he esittävätkin, että oikeanlaisen matemaattisen todistuksen kirjoittamiseen vaaditaan hyvää arvostelukykyä; on syytä tietää, mikä kaikki tieto on *välttämätöntä* todistuksen kannalta, ja mitä voi taas jättää pois. Tätä ajattelutapaa voi hyödyntää monentasoiset matemaatikot, joskin "poisjätettävät", todistuksen kannalta triviaalit faktat ovat eritasoisia [16]. Myös Stylianides esittää, että todistukset riippuvat siitä, mitä hyväksytään ja tiedetään, tai mikä on ajatuksentasolla saavutettavissa luokkahuoneessa minäkin aikana [18]. Pohdinnassa A.18 opiskelijat pääsevät tutkimaan valmista todistusta, jossa välivaiheita on merkitty näkyviin runsaasti. Kysymykset välivaiheiden tarpeellisuudesta johdattelevat opiskelijoita miettimään, mikä kaikki on todistuksen kannalta oleellista kirjata ylös. Pohdinnassa A.19 on esitettynä pätevältä näyttävä todistus, joka johtopäätökseltään on kuitenkin selvästi väärä. Tehtävän tarkoituksena on saada opiskelijat tarkastelemaan todistuksen eri vaiheita ja löytää sinne piilotettu virhe. Tehtävässä päästään harjoittelemaan matemaattisten lauseiden ja väitteiden arviointia sekä ratkaisun purkamista. Samoin pohdinnassa A.20 todistuksen vaiheet on kirjattu näkyviin, mutta ne ovat sekalaisessa järjestyksessä. Tehtävänä on asettaa todistus oikeaoppiseen järjestykseen edellä mainitun vuokaavion avulla, ja täten lajitella välivaiheet lausekkeisiin ja oletuksiin. Näin ollen pohdinta on myös osana nikkarointitavoitetta.

Tutkimusten mukaan, opiskelijoilla on hankaluuksia toimia määritelmien, teoreemien ja eri menetelmien kanssa, jotta he voisivat tehdä päteviä todistuksia [1, 4]. Myös Stylianides esittää, että matemaattisen todistamisen eräänlainen abstraktius on opiskelijoiden esteenä kaikilla luokka-asteilla [18] . Luokka-asteesta riippuen väitettä voidaan pitää aksioomana tai todistettavana lauseena. Tätä vastaan voi hänen mukaansa taistella asettamalla todistuksille kolme perussääntöä:

1. Todistus käyttää hyödyksi toteamuksia, jotka luokkayhteisö hyväksyy, jotka ovat tosia ja joita ei tarvitse perustella enempää. *(Hyväksyttävien lausekkeiden kokoelma)*

2. Todistus käyttää sellaisia järkeilyn tapoja, jotka ovat päteviä ja joko luokkayhteisön tiedossa tai helposti tiedostettavissa. *(Argumentoinnin muodot)*

3. Todistus ilmaistaan asianmukaisella ja luokkayhteisön tiedossa tai helposti tiedostettavissa olevalla tavalla. *(Argumenttien esittämisen muodot)* [18]

Voidaakseen muodostaa päteviä todistuksia, opiskelijan tulee tietää sallitut oikoreitit. Tämän vuoksi hyväksyttäviä lausekkeita painotetaan oppimateriaalissa ja niihin on hyvä kiinnittää huomioita myös luokkahuonetilanteessa. Argumentoinnin muodoista tärkeimpänä esille tulevat vastaesimerkkien rakentaminen ja kaikkien mahdollisten tapausten systemaattinen läpikäynti [18], mikä tulee esille "on olemassa" -väitteiden kumoamisessa pohdinnoissa A.23 ja A.25. Kolmas sääntö tulee esille perinteisen todistuksen muodossa, mutta myös uudemmassa vuokaaviossa [6, 7]. Esittämisen muotoja voi kuitenkin olla monenlaisia ja kirjassa esiintyvät muodot ovat enimmäkseen symbolisia ja algebrallisia. Luokkahuonetilanteissa on hyvä pitää mielessä, että keskustelukin on hyväksyttävä esittämisen muoto. Lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaiset kurssille kuuluvat todistukset ovat lyhyitä, joten argumentoinnin muodot ovat kaikkiaan yksinkertaisia.

Tutkija Epp ehdottaa artikkelissaan "The Use of Logic in Teaching Proof" [4], että eräs tapa auttaa opiskelijoita ymmärtämään tarvittavien määritelmien sisältöä paremmin, on käyttää hyödyksi määritelmiin liittyviä esimerkkejä. Eritoten parillisuuden, parittomuuden ja rationaalisuuden määritelmien ymmärtäminen helpottuu, kun opiskelijoita pyydetään selittämään, miksi esimerkkiluvut ovat parillisia, parittomia tai rationaalisia [4]. Opiskelijoiden tulee huomata, että määritelmiin viittaaminen riittää ja näin he oppivat luottamaan määritelmien olevan totta [4]. Määritelmien käyttämisen hankaluus esiintyy osalla opiskelijoista myös muuttujien väärinymmärtämisenä [4]. Mikäli opiskelijoille annetaan vain parillisuuden määritelmä, he saattavat todistuksissa käyttää samaa kokonaislukumuuttujaa kaikille parillisille luvuille, jolloin todistuksesta tulee epäpätevä. Ongelmaa pyritään ehkäisemään esittämällä pian määritelmien jälkeen mallitehtävä, joka havainnollistaa määritelmien oikeaoppista hyödyntämistä. Epp esittää myös, että opiskelijoita tulisi pyytää täydentämään muutamia osittain täytettyjä todistuksia, ennen kuin heitä pyydetään rakentamaan kokonainen todistus alusta loppuun. Tätä lähestymistapaa hyödynnetään pohdinnassa A.17 sekä harjoitustehtävissä.

Opiskelijoilla on huomattu olevan eräänlaisia perustelujärjestelmiä. Perustelujärjestelmänä pidetään sitä tapaa, jolla opiskelija perustelee itselleen ja muille väitteen paikkansapitävyyden. Toisin sanoen, minkä tavan opiskelija hyväksyy päteväksi todistukseksi. Yksi "vääristä" perustelujärjestelmistä on niin kutsuttu "empiirinen perustelujärjestelmä", jonka on havaittu olevan takertunut monien opiskelijoiden mieliin hanakasti luokka-asteesta riippumatta. Empiiriset argumentit antavat puutteellista tietoa muutamien esimerkkien nojalla väitteen paikkansapitävyydestä, kun taas todistukset antavat lopullista tietoa väitteestä ottamalla kaikki mahdolliset tapaukset huomioon yleistyksessä. Opiskelijat pyritään saamaan pohtimaan empiiristen väitteiden epäpätevyyttä pohdinnoissa A.22 ja A.27. [20]

Kuvaileminen oli yksi kirjaan valituista ajattelutaidoista ja sitä harjoitellaan ensimmäisessä todistamiseen liittyvässä pohdinnassa A.9. Pohdinnassa esitellään kirjallinen ja algebrallinen todistus samasta lauseesta ja opiskelijoiden tulee yhdistää todistusten vastaavat vaiheet toisiinsa, jolloin he oppivat ymmärtämään algebrallisia merkintöjä paremmin. Ratkaisujen vertailu on yleistyvä tehtävämalli ylioppilaskokeissa ja pohdinnan yksinkertaisuus madaltaa kynnystä tarttua samankaltaisiin tehtäviin tulevaisuudessa. Samoin kuin kuvailemista ja nikkarointia, myös visualisointia harjoitellaan pohdintatehtävien avulla. Pohdinnassa A.23 mietitään väitelauseiden paikkansapitävyyksiä kuvan avulla, joka rajaa vastauksia paremmin kuin yleiset väitelauseet. Samoin pohdinnassa A.27 esitetään pelikortteja kirjallisen selityksen lisäksi myös kuvana, joka helpottaa toiseen ratkaisumahdollisuuteen piilotetun virheen hoksaamista. Visuaalista puolta löytyy myös pohdinnasta A.22, jossa visuaalisin keinoin samalla kumotaan väitelause, mutta todistetaan empiiristen todistusten riittämättömyys. Usein vastaesimerkin löytämistä, ja siten väitelauseen kumoamista, pidetään helpompana kuin yksinkertaisimmankin suoran todistuksen rakentamista [4]. Pohdinta pyrkii tuomaan esille, miten väitteen kumoaminen eroaa väitteen todeksi todistamisesta.

Opiskelijoilla on myös huomattu olevan epäselvyyksiä siitä, voivatko todistus ja vastaesimerkki olla voimassa yhtä aikaa samalle väitelauseelle [19]. Tutkimuksessaan Stylianides ja Al-Murani uskoivat, että joillakin oppilaista olisi tällainen väärinkäsitys, mutta tuloksissaan he joutuivat toteamaan, että he eivät saaneet tarpeeksi näyttöä väärinkäsityksen yleisyydestä [19]. Kuitenkin heidän tutkimuksessaan joillakin oppilailla oli hankaluuksia tunnistaa useiden ratkaisujen seasta oikea ratkaisu, kun pätevän todistuksen lisäksi esiteltiin vääränlainen vastaesimerkillä kumoaminen. Tätä hankaluutta pyritään helpottamaan pohdinnassa A.27, joka perustuu Stylianideksen ja Al-Muranin tutkimuksessa esiintyvään tehtävään. Useiden ratkaisujen sijaan ratkaisuvaihtoehtoja esitellään vain kaksi, joista toisessa väitelausetta pyritään kumoamaan, samalla tavalla väärin kuin tutkimuksessa, ja toisessa väitelause pyritään todistamaan empiirisellä tavalla. Pohdinta itsessään johdattelee ratkaisujen väliseen ristiriitaan, sillä kahdesta erilaisesta lopputuloksesta toisen täytyy olla väärä. Samalla opiskelijoita johdatellaan oikean ratkaisun äärelle lisäkysymysten avulla.

Lähdeluettelo

[1] A.W. Bell. *The Learning of General Mathematical Strategies*. Väitöskirja, University of Nottingham, 1979. Noudettu: http://eprints.nottingham.ac.uk/13647/1/252613.pdf

[2] Paula Collin. *Suomalaiset osaavat matematiikkaa yhä huonommin, vaikka sitä tarvittaisiin koko ajan enemmän – Professori: Teknologinen kehitys lisää matematiikan merkitystä*. https://yle.fi/uutiset/3-10353905, 2018. Noudettu 6.4.2020.

[3] A. Cuoco, E. P. Goldenberg & J. Mark. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Journal of Mathematical Behavior, 15:375-402, 1996.

[4] Susanna S. Epp. *The Use of Logic in Teaching Proof*. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles MAA notes 74, Brian Hopkins (ed.), Washington: The Mathematical Association of America, s.313-322, 2009.

[5] Rohan French & Catarina Dutilh Novaes. *Paradoxes and Structural Rules from a Dialogical Perspective*. Philosophical Issues, Vol. 28, No. 1, s.129-158, 2018.

[6] Taro Fujita, Keith Jones & Mikio Miyazaki. *Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs*. ZDM Mathematics Education 47:1211–1224, 2015.

[7] Taro Fujita, Keith Jones & Mikio Miyazaki. *Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: the use of the flowchart proof learning platform*. Conference: 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics EducationAt: Ankara, Turkey: Middle East Technical University, Vol. 2, 2011.

[8] Richard Hammack. *Book of Proof*. Edition 3.1, 2018. Noudettu: http://www.people.vcu.edu/ rhammack/BookOfProof/Main.pdf

[9] Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas & Jorma Tahvainen. *Tekijä Pitkä matematiikka 11 Lukuteoria ja todistaminen*. SanomaPro Oy, 2019.

[10] Jenni Honkanen. *Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä – YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin*. https://yle.fi/aihe/artikkeli/2018/02/13/matematiikan-sahkoistyminen-herattaa-kritiikkia-ytl-vastaa-useimmiten, 2018. Noudettu 7.4.2020.

[11] Kaisu Jansson & Petra Ristola. *Syökö pitkän matikan suosio yleissivistystä? Yle kysyi rehtoreilta – "Opiskelijoiden jaksaminen on heikentynyt ja taito- sekä taideaineiden opiskelu on vähentynyt"*. https://yle.fi/uutiset/3-10826054, 2019. Noudettu 6.4.2020.

[12] Anniina Nirhamo. *Tekniset apuvälineet ja ajankäyttö mietityttivät ensimmäisessä sähköisessä matematiikan yo-kokeessa*. https://yle.fi/aihe/artikkeli/2019/03/28/tekniset-apuvalineet-ja-ajankaytto-mietityttivat-ensimmaisessa-sahkoisessa, 2019. Noudettu 7.4.2020.

[13] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*

[14] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*

[15] Katrina Piatek-Jimenez. *Students' Interpretations of Mathematical Statements Involving Quantification*. Mathematics Education Research Journal, Vol. 22, No. 3, s. 41-56, 2010.

[16] Ian Stewart & David Tall. *The Foundations of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1977.

[17] Pauli Siljander. *Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen: Peruskäsitteet ja pääsuuntaukset*. Tampere: Vastapaino, 2014.

[18] Andreas J. Stylianides. *Proof and Proving in School Mathematics.* University of Oxford, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 38, No.3, 289-321, 2007.

[19] Thabit Al Murani & Andreas J. Stylianides. *Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation*. Research in Mathematics Education Vol.12, No. 1, s.21-36, 2010.

[20] Andreas J. Stylianides & Gabriel J. Stylianides. *Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 40, No. 3, s.314-352, 2009.

[21] Malcolm Swan. *Collaborative Learning in Mathematics*. A Challenge to our Beliefs, s.162–176, 2006.

[22] Ylioppilastutkintolautakunta. Matematiikan ylioppilaskoe, pitkä oppimäärä, syksy 2017.

[23] Ylioppilastutkintolautakunta. Matematiikan ylioppilaskoe, pitkä oppimäärä, kevät 2019.

A Todistamisen alkeet

A.1 Kvanttorit ja avoin lause

Logiikan osiossa opeteltiin kirjoittamaan luonnollisen kielen lauseita matematiikan symbolein käyttämällä erilaisia konnektiiveja. Kuitenkaan kaikissa tapauksissa pelkästään konnektiivit eivät riitä, vaan tarvitsemme uusia työkaluja. Näihin uusiin symboleihin tutustutaan tässä osiossa hieman tarkemmin.

Pohdinta A.1 Tutki seuraavia lauseita:

a) Luku x on jaollinen luvulla kolme.

b) Henkilö x tykkää suklaasta.

c) Neliö on suunnikas.

d) Maija on matemaattisesti lahjakas.

e) Hyönteinen x tekee hunajaa.

f) Luonnollinen luku on positiivinen.

Ryhmittele lauseet kahteen eri ryhmään. Mitä eroa ryhmien lauseilla on? Yritä miettiä lauseiden totuusarvoja.

Lausetta, jonka todenperäisyys riippuu yhdestä tai useammasta muuttujasta kutsutaan *avoimeksi lauseeksi.* Suljetulla lauseella on totuusarvo, mutta avoimen lauseen todenperäisyys saadaan selville, kun tunnetaan muuttuja x. Joukkoa, jossa avoimen lauseen todenperäisyyttä tutkitaan, kutsutaan *perusjoukoksi*. Alkiot, jotka toteuttavat avoimen lauseen, muodostavat *ratkaisujoukon.*

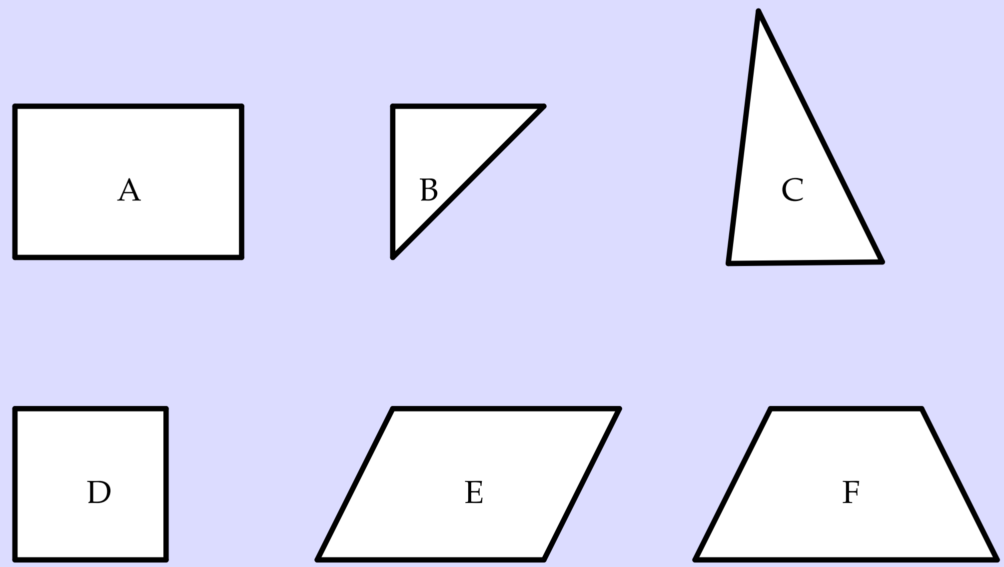
Pohdinta A.2 Olkoon $T(x)$ avoin lause "kuviossa x on suorakulma" ja $S(x)$ avoin lause "kuvio x on suunnikas". Pohdi, mitkä kuvioista toteuttavat seuraavat lauseet:

a) $T(x)$

b) $S(x)$

c) $T(x) \wedge S(x)$

d) $\neg T(x) \vee S(x)$



Määritelmä A.3 Merkintä $\forall x : T(x)$ tarkoittaa "kaikille x pätee $T(x)$". Merkintä $\exists x : T(x)$ tarkoittaa "on olemassa x, jolle pätee $T(x)$".

Pohdinta A.4 Olkoon $R(x)$ lause "x on Matildan ystävä" ja $S(x)$ lause "x on Matin ystävä". Perusjoukkona on maapallon ihmisten joukko.

Muuta seuraavat lauseet luonnolliselle kielelle:

a) $\exists x : R(x) \land S(x)$

b) $\exists x : R(x) \land \neg S(x)$

c) $\forall x : R(x) \lor S(x)$

d) $\exists x \exists y : (\neg R(x) \land \neg R(y)) \Rightarrow \neg R(\text{Matti})$

e) $\forall x : (R(x) \land S(x)) \lor \neg R(x)$

Voivatko lauseet a) ja b) olla molemmat totta? Entä lauseet b) ja c)?

Pohdinta A.5 Olkoon tutkittava joukko pohdinnan A.2 monikulmioiden joukko ja avoimet lauseet $T(x)$ ja $S(x)$ samoja kuin tehtävässä. Lisäksi olkoon $P(x)$ avoin lause "kuvio x on kolmio". Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia?

a) $\exists\, x : T(x) \wedge S(x)$

b) $\forall\, x : T(x) \vee P(x)$

c) $\exists\, x : P(x) \wedge \neg T(x)$

d) $\forall\, x : S(x) \vee P(x)$

e) $\exists\, x : T(x) \wedge (\neg S(x) \wedge \neg P(x))$

Kirjoita symbolein "On olemassa kuvio x, jossa ei ole suoraa kulmaa, joka ei ole suunnikas ja joka ei ole kolmio". Onko lause tosi vai epätosi kyseisten monikulmioiden joukossa?

Voitko muodostaa lauseen, joka on tosi kaikilla x?

Symbolit $\forall$ ja $\exists$ ovat *kvanttoreita*. Nimi selventyy miettimällä englanninkielisestä sanaa "quantity", joka tarkoittaa määrää. Symbolia $\forall$ kutsutaan "kaikkikvanttoriksi" ja symbolia $\exists$ "olemassaolokvanttoriksi" tai "eksistenssikvanttoriksi". Nimensä mukaisesti kaikkikvanttori esittää väitelauseen pätevän kaikilla muuttujilla x, kun taas olemassaolokvanttori esittää väitelauseen pätevän jollakin muuttujalla x. Aiemmin määriteltiin avoimen lauseen totuusarvon riippuvan muuttujista. Kvanttoreilla avoin lause saadaan muutettua suljetuksi lauseeksi, jolla on totuusarvo.

Pohdinta A.6 Olkoon $R(x, y)$ lause "x rakastaa y:tä", kun perusjoukkona on maapallon ihmisten joukko. Pohdi seuraavaksi lauseita:

$$\exists\, x\, \forall\, y : R(x, y)$$
$$\forall\, x\, \exists\, y : R(x, y)$$

Lauseet sisältävät täsmälleen samat symbolit. Onko lauseilla merkityseroa? Yritä kääntää lauseet ensin luonnolliselle kielelle.

Suomen kielessä sanojen järjestystä voi muuttaa melko vapaasti lauseen merkityksen muuttumatta. Samaa ei voi tehdä matemaattisissa lauseissa, joissa symbolit ja operaattorit ovat vahvasti yhteydessä toisiinsa. Järjestystä muuttamalla, koko lauseen merkitys voi kääntyä päälaelleen.

Pohdinta A.7 Olkoon $T(x)$ lause "luku x on pariton", kun perusjoukkona on kokonaislukujen joukko. Pohdi seuraavia lauseita:

$$\forall\, x : \neg T(x)$$
$$\neg(\forall\, x : T(x))$$

Käännä lauseet luonnolliselle kielelle. Kumpi niistä on totta?

Kaikkikvanttorin negaatio toimii seuraavasti

$$\neg(\forall\ : T(x)) = \exists\, x : \neg T(x).$$

Lauseet ovat loogisesti ekvivalentit, joten niillä on sama totuusarvo.

Olemassaolokvanttorin negaatio toimii vastaavalla tavalla

$$\neg(\exists\, x : T(x)) = \forall\, x : \neg T(x).$$

Pohdinta A.8 Olkoon $R(x, y)$ avoin lause "luku x on suurempi kuin luku y" ja $S(x, y)$ avoin lause "henkilö x rakastaa henkilöä y". Avoimen lauseen $R(x, y)$ perusjoukkona on kokonaislukujen joukko ja lauseen $S(x, y)$ perusjoukkona on kaikkien maapallon ihmisten joukko. Tutki lauseita ja korjaa niitä vastaavien formaalien lauseiden virheet.

"Kaikille kokonaisluvuille y löytyy luku x siten, että x on suurempi kuin y."

$$\forall\, x\, \exists\, y : R(x, y)$$

"On olemassa henkilö x, joka ei rakasta ketään."

$$\neg(\exists\, x\, \forall\, y : S(x, y))$$

"Kaikille maailman ihmisille on olemassa joku, joka rakastaa häntä."

$$\forall\, x\, \exists\, y : S(x, y)$$

"Ei ole olemassa lukua x siten, että se olisi suurempi kuin kaikki luvut y."

$$\exists\, x\, \forall\, y : \neg R(x, y)$$

A.2 Suora todistaminen

Matematiikka on tunnettu kumulatiivisena tieteenä, jolloin tieto ei käytännössä vanhene koskaan. Uutta tietoa rakennetaan aina vanhan päälle ja tämän uuden tiedon tulee aina perustua jo johonkin aiemmin tunnettuun, jo oikeaksi osoitettuun tietoon. Näin matematiikka eroaa kokeellisista tieteistä, kuten fysiikasta, joissa uudet löydökset voivat kumota vanhoja käsityksiä.

Juuri tähän tiedon kumulatiivisuuteen matemaattinen todistaminen perustuu. Todistettavana on *väite*, joka osoitetaan joko todeksi tai epätodeksi annettujen *oletusten*, *määritelmien* ja jo todeksi osoitettujen lauseiden avulla.

Erilaisia todistamisen keinoja on monia ja "paras" keino riippuu itse väitteestä. Todistamisen vaiheet eivät siis ole täysin kiveen hakattuja, vaan mahdollisuuksia annetaan monenlaiselle ajattelulle.

Tässä kirjan osiossa tutustutaan suoraan todistamiseen, jossa lähdetään liikkeelle oletuksista ja osoitetaan väitteen paikkansapitävyys käyttämällä hyväksi tunnettuja matematiikan totuuksia ja loogista päättelyä.

Pohdinta A.9 Matilla ja Maijalla on molemmilla pariton määrä kyniä ja he yrittävät todistaa Matildalle kynien kokonaismäärän olevan parillinen.

Maija	**Matti**
Parittomassa määrässä kyniä on yksi "ylimääräinen".	Paritonta määrää voidaan merkitä $2k+1$. Minulla on $2k+1$ määrä kyniä ja Maijalla on $2l+1$ määrä.
Jos meillä molemmilla on pariton määrä kyniä, ylimääräiset kynät muodostavat parin.	Tällöin summaksi saadaan $2k+1+2l+1 = 2k+2l+2 = 2(k+l+1).$
Täten kyniä on yhteensä parillinen määrä.	

Vertaile Maijan ja Matin todistuksia ja yhdistä toisiaan vastaavat kohdat toisiinsa.

Vaikka matemaattiseen ongelmanratkaisuun voi käyttää erilaisia ajattelutapoja ja ratkaisumenetelmiä, on matemaattisen todistuksen rakenne kuitenkin vakiintunut.

Suora todistus

Väitelause on muotoa "Oletuksesta P, seuraa väite Q" ja se on tosi, mikäli oletuksen ollessa totta myös väite on totta.

Suoran todistuksen rakenne:

Oletus: P

Väite: Q

Todistus: Otetaan oletus P lähtokohdaksi ja johdetaan siitä, että Q on totta. □

Todistusmenetelmiä on useita. Suora todistus sanana viittaa menetelmään, jossa oletuksesta päästään suoraan väitteeseen tekemättä ylimääräisiä oletuksia.

Huomautus A.10 Todistuksen loppuun merkitään joko laatikko, kirjainyhdistelmä QED, joka tulee latinan lauseesta *"quod erat demonstrandum"* tai sen suomenkielinen vastine MOT eli *"mikä oli todistettava"*.

Pohdinta A.11 Suoran todistuksen todistusmenetelmän voi perustella totuustaulun avulla. Minkälainen päättelyketju tulee tehdä?

Väitelauseiden formalisointia harjoiteltiin jo kirjan edellisessä osassa. Suoran todistavan mallista huomataan, että väitelauseita voidaan merkitä implikaatioilla. Usein lauseet ovatkin muotoa "Jos P, niin Q". Väitelauseessa ei aina ole selkeää oletusta, mutta todistettavan väitteen erottaminen on tärkeä osa todistusprosessia.

Pohdinta A.12 Erottele seuraavista väitelauseista oletukset ja väitteet. Itse väitelauseiden paikkansapitävyyksistä ei tarvitse välittää.

1) Jos Aurinko paistaa, on lämmin.
2) Parittoman luvun kuutio on aina pariton.
3) Kaikki alkuluvut, jotka ovat suurempia kuin kaksi, ovat parittomia.
4) Kaikilla lukiolaisilla on kannettavat tietokoneet.
5) Jos luku n on luonnollinen luku, se ei voi olla 0.
6) $2^7 + 3^{11}$ on jaollinen luvulla 7.

Vaikka oletusten ja väitteiden erottaminen on osa todistusprosessia, ei niiden olemassaoloa pidä pitää absoluuttisena totuutena. Myöhemmin tutustutaan todistuksiin, joissa lähtökohtana olevaa oletusta ei välttämättä esiinny väitelauseessa lainkaan.

Kuten kappaleen aloituksessa todettiin, todistamisen apuna käytetään erilaisia määritelmiä, aiemmin todistettuja lauseita ja annettuja oletuksia. Jatkossa tullaan tarvitsemaan seuraavia parillisuuden, parittomuuden ja rationaalisuuden määritelmiä.

Määritelmä A.13 Kokonaisluku a on *parillinen*, jos on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}$, että $a = 2n$.

Määritelmä A.14 Kokonaisluku a on *pariton*, jos on olemassa sellainen $m \in \mathbb{Z}$, että $a = 2m + 1$.

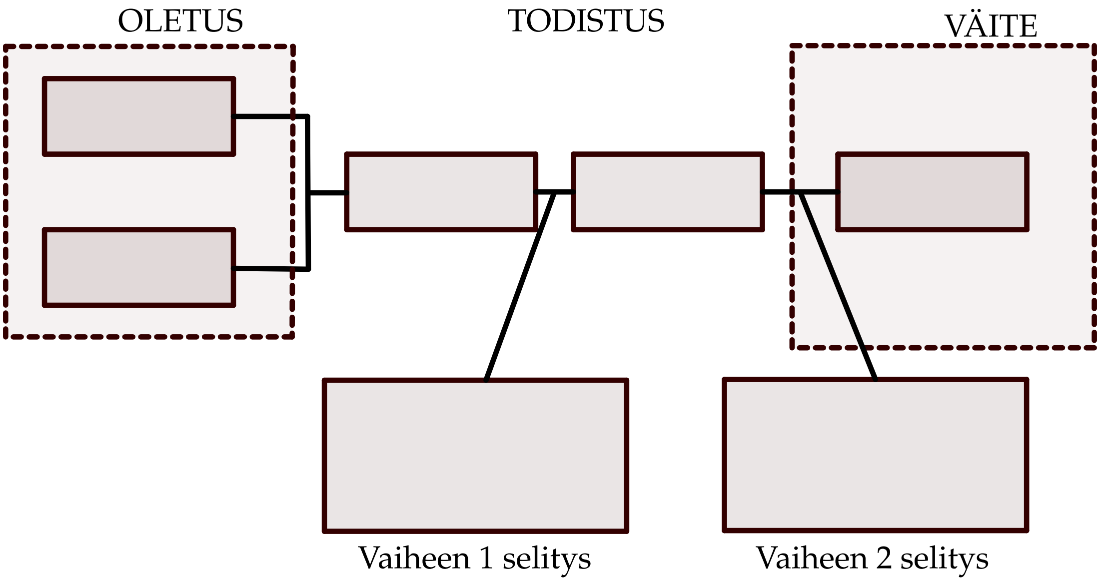
Määritelmä A.15 Reaaliluku a on *rationaaliluku* jos ja vain jos on olemassa sellaiset $m, n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$, että

$$a = \frac{m}{n}.$$

Tällöin voidaan merkitä $a \in \mathbb{Q}$.

Reaaliluku a on *irrationaaliluku*, mikäli se ei ole rationaaliluku.

Todistuksen ymmärtämisen ja jäsentelemisen apuna voidaan käyttää *vuokaavioita*. Tyypillisesti vuokaavio jaetaan kolmeen osaan: oletuksiin, itse todistusprosessiin ja väitteeseen. Näiden "laatikoiden" alle selitetään, mihin välivaiheet perustuvat. Alla esitettynä eräänlainen vuokaavio, mutta vuokaavio voi näyttää periaatteessa miltä tahansa, kunhan sen järjestys on looginen ja selityksiä on riittävästi.



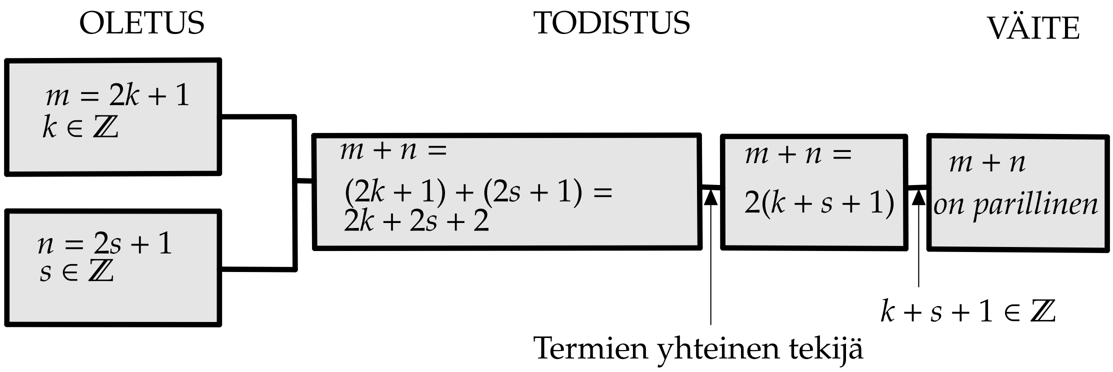
Mallitehtävä A.16 Todista lause "Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen" käyttämällä hyväksi vuokaaviota.

Ratkaisu: Erotetaan lauseesta oletus ja väite:

Oletus: Kokonaisluvut m ja n ovat parittomia.

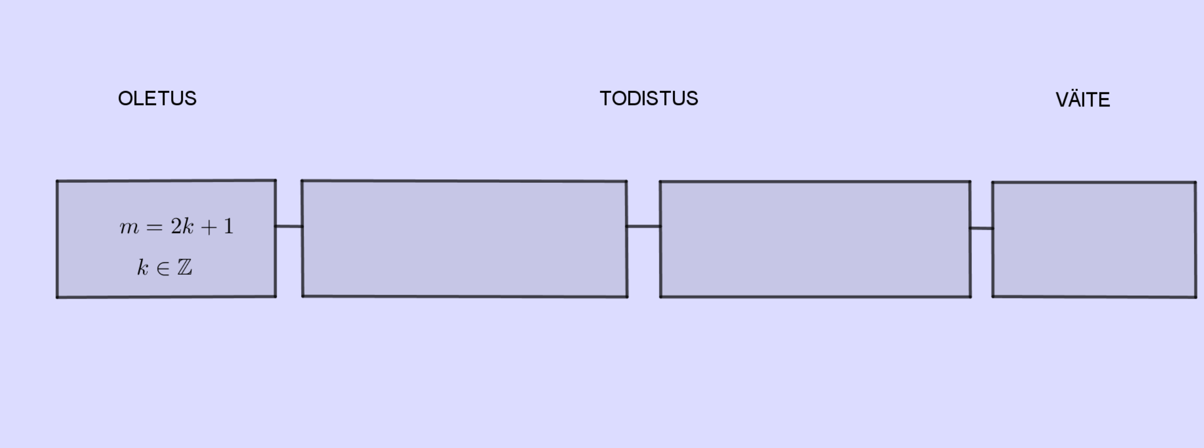
Väite: Luku $m + n$ on parillinen.

Tehdään vuokaavio:



Vastaus: Luku $m + n$ on parillinen. □

Pohdinta A.17 Todista Pohdinnan A.12 kohdan 2) väitelause "Parittoman luvun kuutio on aina pariton", käyttämällä hyväksi alla olevaa vuokaaviota. Käytä omaa harkintakykyäsi; tarvitaanko välivaiheita enemmän?



Niin perinteisissä todistuksissa kuin vuokaaviotodistuksissakin, oletus ja väite on hyvä laittaa paikoilleen ensimmäisenä ja vasta sitten täyttää välivaiheet.

Pohdinta A.18 Ohessa on todistettu väite "Parittoman kokonaisluvun neliö on pariton". Käy todistus tarkasti läpi.

Oletus: Olkoon n pariton kokonaisluku

Väite: n^2 on pariton

Todistus: Jos n on pariton kokonaisluku, on olemassa sellainen luku $k \in \mathbb{Z}$, että $n = 2k + 1$.

Nyt

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 2k \cdot 2k + 2k \cdot 1 + 1 \cdot 2k + 1 \cdot 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Koska $2k^2 \in \mathbb{Z}$ ja $2k \in \mathbb{Z}$, niin $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$. Näin ollen luku $2(2k^2 + 2k) + 1$ on parittomien lukujen määritelmän nojalla pariton luku. $\square$

Onko tämä todistus mielestäsi pätevä? Miten itse muokkaisit todistusta? Ottaisitko välivaiheita pois, vai selittäisitkö niitä vielä lisää?

On tärkeää pitää mielessä, mikä kaikki on todistuksen kannalta tärkeää tietoa. Ylläolevassa todistuksessa olisi myös suvaittavaa käyttää binomin neliön muistikaavaa, sillä sen todistaminen ei ole itse todistuksen kannalta merkittävää. Liika oikominen voi kuitenkin johtaa epäpätevään todistukseen, joka ei sisällä kaikkea tarpeellista tietoa. Näin voidaan päätyä vääränlaiseen johtopäätökseen.

Pohdinta A.19 Matilda väittää Matille ja Maijalle, että $2 = 1$. Epäuskoisten katseiden jälkeen, hän näyttää heille todistuksensa:

$$
\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\
(a-b)(a+b) &= b(a-b) \\
a + b &= b \\
a + a &= a \\
2a &= a \\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

Matti menee hieman hämilleen, mutta Maija sen sijaan hymyilee muikeasti. Minkä virheen Matilda on tehnyt todistuksessaan?

Todistusten perusteluissa tarvitaan usein seuraavia kokonaislukuihin liittyviä tuloksia. Olkoon $k, l \in \mathbb{Z}$.

Tällöin

a) $k \cdot l \in \mathbb{Z}$,

b) $k + l \in \mathbb{Z}$,

c) $k - l \in \mathbb{Z}$,

d) Kaikki yllä olevien väittämien keskinäiset yhdistelmät ovat kokonaislukuja.

Edellä olevia tuloksia voi käyttää niihin viittaamatta ja ne on mahdollista myös todistaa, mutta se ei ole lukion pitkän matematiikan kannalta merkittävää. Kohtien voidaan olettaa olevan totta ja eritoten sujuvuuden kannalta kohta d) on tärkein. Kuitenkin on hyvä pitää mielessä, että esimerkiksi jakolasku ei noudata samaa kaavaa, sillä $\frac{4}{2} = 2$ on kokonaisluku, mutta $\frac{1}{2}$ ei ole.

Pohdinta A.20 Alla on esitettynä lauseen "Kahden rationaaliluvun tulo on rationaaliluku" todistuksen osat, mutta ne ovat menneet sekaisin.

1) $nq \neq 0$

2) $\Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$

3) $a = \frac{m}{n}\ b = \frac{p}{q}$

4) $nq \in \mathbb{Z}$

5) $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

6) $ab = \frac{mp}{nq}$

7) $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

8) $mp \in \mathbb{Z}$

Järjestä todistuksen oletukset, välivaiheet ja väite oikeille paikoilleen vuokaavion avulla.

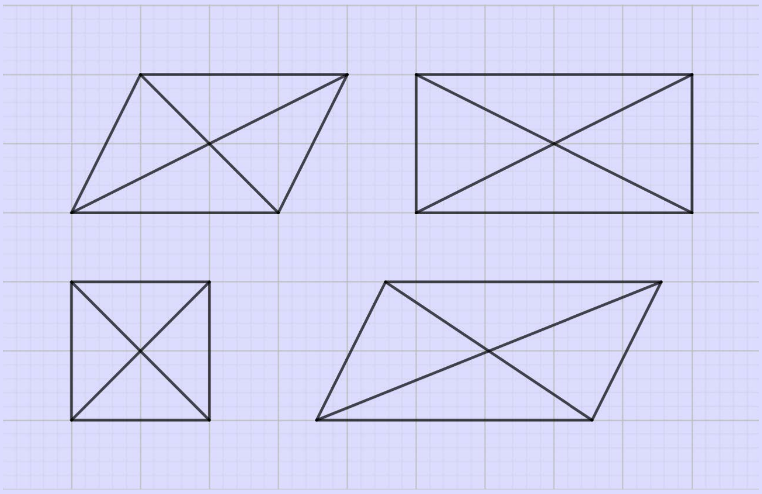
Pohdinta A.21 Osoite ja QR-koodi johtavat GeoGebra-applettiin. Tehtävänä on asettaa väitteen "Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä" todistuksen osaset paikoilleen valmiiksi annettuun vuokaavioon. Appletti toimii kaikista parhaiten tietokoneella.

https://www.geogebra.org/m/d5wrekp9

Pohdinta A.22 Matti ja Maija tutkivat taas matematiikan sisintä olemusta ja pohtivat, että puolittavatko suunnikkaiden lävistäjät aina toisensa.

Matti: Veikkaan, että eivät puolita.

Maija: Olet väärässä, kyllä ne lävistäjät puolittuvat. Tässä kuva todisteeksi



Matti: Hmm, en ole varma olenko täysin vakuuttunut.

Maija: Mitä muuta vielä muka kaipaat?

Kumpi vaikuttaa olevan oikeassa? Entä mitä mieltä olet Maijan todistuksesta?

Matin ja Maijan pohdintoihin palataan harjoitustehtävissä.

Tähän asti todistustehtävissä on tullut todistaa väite todeksi. Joskus väitelause on kuitenkin epätosi ja tällöin voidaan käyttää erilaisia todistusmenetelmiä. Seuraavaksi tutustutaan hieman tarkemmin väitteen *kumoamiseen*.

Pohdinta A.23 Tarkastele alla olevaa kuvaa ja pohdi väitelauseita. Mitkä ovat tosia ja mitkä epätosia? Miten väitelauseiden paikkansapitävyyksien perustelut eroavat toisistaan?

a) Kuvassa on hedelmiä.

b) Kulhossa on omenoita.

c) Pöydällä tai kulhossa on limettejä.

d) Kaikki kuvan satsumat ovat kulhon ulkopuolella.

e) Kulhossa ja pöydällä on viinirypäleitä.

f) Kaikki kuvan sitruunat ovat kulhossa.

g) Pöydällä ja kulhossa on omenoita.

h) Kuvassa on punainen hedelmä.

Vinkki! Voit tutkiskella väitelauseita myös kvanttoreiden ja konnektiivien avulla.

Lause "Kaikille x pätee $Q(x)$" voidaan todistaa epätodeksi vastaesimerkin avulla, mikäli tutkittavasta joukosta löytyy edes yksi x, joka ei toteuta väitettä Q. Aihetta sivuttiin kvanttorikappaleessa kvanttorien negaatioita käsitellessä.

Esimerkki A.24 Väite "Kaikki rationaaliluvut ovat kokonaislukuja" on epätosi, sillä $\frac{1}{3}$ on rationaaliluku, mutta ei kokonaisluku.

Pohdinta A.25 Ota tarkastelujoukoksi luvut $2, 4, 8, 6, 12, 24, 88$ ja 94 ja pohdi seuraavaa väitettä:

"On olemassa luku, joka ei ole parillinen"

Onko väite totta? Miten saat selville sen paikkansapitävyyden?

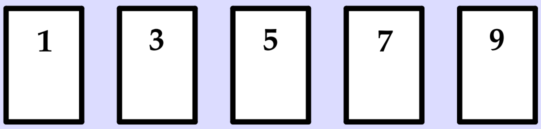
Lause "On olemassa x, jolle pätee $Q(x)$" voidaan todistaa epätodeksi joko käymällä läpi jokainen mahdollinen x ja toteamalla, että $Q(x)$ ei päde tai löytämällä jokin yleinen sääntö, joka pätee kaikille x, jolloin lause voidaan todistaa epätodeksi. Samoin kuin edellä, palauta tarvittaessa mieleesi kvanttorien negaatiot.

Esimerkki A.26 Olkoon tutkittava joukko $3, 7, 67$ ja 81. Väitelause "Joukossa on olemassa parillinen luku." on epätosi, sillä

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 67 &= 2 \cdot 33 + 1 \\ 81 &= 2 \cdot 40 + 1. \end{aligned}$$

Siispä kaikki joukon luvut ovat parittomia.

Pohdinta A.27 Matti esitteli ystävilleen Maijalle ja Matildalle viittä korttia. Korteissa oli esitettynä numerot $1 - 10$ siten että numerot 1 ja 2 olivat saman kortin vastakkaisilla puolilla, numerot 3 ja 4 saman kortin vastakkaisilla puolilla ja niin edelleen:



Seuraavaksi Matti esitti Maijalle ja Matildalle väitteen: "Mikäli kortit heitettäisiin maahan ja vain kaksi korteista olisi parillisia, korttien numeroiden summa olisi 27."

Maija ja Matilda pohtivat väitettä hetken ja esittivät sitten kumpikin oman ratkaisunsa:

Maija: "Käytin esimerkkinä seuraavia numeroita: $2, 4, 5, 7, 9$. Niiden summaksi saadaan 27. Samoin numeroiden $2, 3, 6, 7, 9$ summaksi saadaan 27. Mitkä tahansa numerot otan esimerkiksi, summasta tulee aina 27. Väite on siis tosi."

Matilda: "Käytin esimerkkinä numeroita $2, 4, 5, 6, 9$, joiden summaksi saadaan 26. Väite on siis epätosi."

Matti: "Hmm. Toisen teistä täytyy olla väärässä, mutta kumpikaan ei täysin vakuuta minua."

Kumman johtopäätös on väärä ja millä perusteella? Entä onko Matti oikeassa epäillessään molempien todistusta? Miten korjaisit oikeaan johtopäätökseen päässeen henkilön ratkaisua? Entä keksitkö muita ratkaisutapoja?

Vastaesimerkkien tekemisessä tulee olla tarkkana, että ne noudattavat tehtävänantoa.

Pohdinta A.28 Tutkitaan neljän tavallisen kuusitahkoisen nopan silmälukuja ja niistä esitettyä väitettä:

"Kolme nopista saa parittoman silmäluvun. Riippumatta neljännen nopan silmäluvusta, kaikkien noppien silmälukujen summa tulee olemaan pariton."

Todista lause todeksi tai epätodeksi. Jos väite on mielestäsi tosi, muokkaa siitä lause, joka on aina epätosi. Mikäli väite on mielestäsi epätosi, korjaa sitä siten että se on aina tosi.

A.3 Harjoitustehtävät

Muista merkinnät:

$x \in \mathbb{Z}$= "luku x kuuluu kokonaislukujen joukkoon"

$\mathbb{R}$=reaalilukujen joukko, $\mathbb{N}$= luonnollisten lukujen joukko ja $\mathbb{Q}$=rationaalilukujen joukko

1. Olkoon $R(x, y)$ avoin lause "x ostaa y:lle uuden puhelimen". Suomenna lauseet

   a) $\forall y : R(\text{Matti}, y)$
   b) $\exists x : \neg R(x, \text{lapsi})$
   c) $\forall y \, \exists x : \neg R(x, y)$

2. Formalisoi lauseet

   a) Jokainen luonnollinen luku on epänegatiivinen.
   b) On olemassa kokonaisluku, jonka neliö on luku itse.
   c) On olemassa kokonaisluvut x ja y siten, että $x - y = 2$.
   d) On olemassa sellainen kokonaisluku x, että kaikille kokonaisluvuille y pätee $xy = 1$.

   Ovatko lauseet totta? Jos ne eivät ole, miten muokkaisit niitä?

3. Olkoon $T(x, y)$ väite $x + y = 0$, kun perusjoukkona on kokonaislukujen joukko. Ovatko lauseet totta?

   a) $\exists x \, \forall y : T(x, y)$
   b) $\forall x \, \exists y : T(x, y)$
   c) $\forall x \, \forall y : T(x, y)$
   d) $\exists x \, \exists y : T(x, y)$

   Ovatko lauseet totta, jos perusjoukkona on luonnollisten lukujen joukko?

4. Määritä avoimen lauseen $x^2 \leq 36$ ratkaisujoukko, kun perusjoukkona on

   a) reaalilukujen joukko
   b) kokonaislukujen joukko
   c) luonnollisten lukujen joukko

5. Erottele lauseista väitteet ja oletukset.

   a) Jos on talvi, on kylmä.
   b) Kaikki opiskelijat inhoavat matematiikkaa.
   c) Kaikki kokonaisluvut voidaan esittää murtolukuina.
   d) On olemassa luku, jonka neliö on luku itse.

6. Olkoot m ja n kokonaislukuja joista toinen on parillinen ja toinen pariton. Todista, että niiden summa on pariton.

7. Itseisarvon määritelmä on seuraava

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

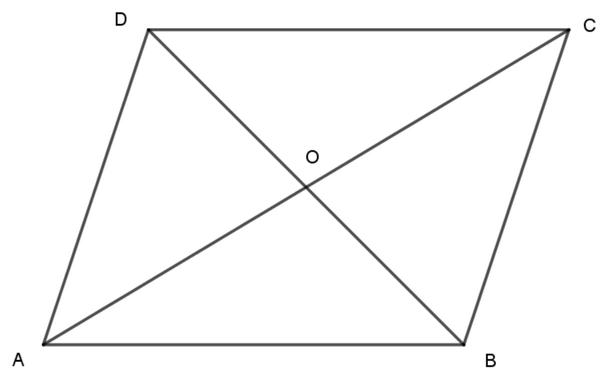
   Todista määritelmän avulla, että $|x||y| = |xy|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

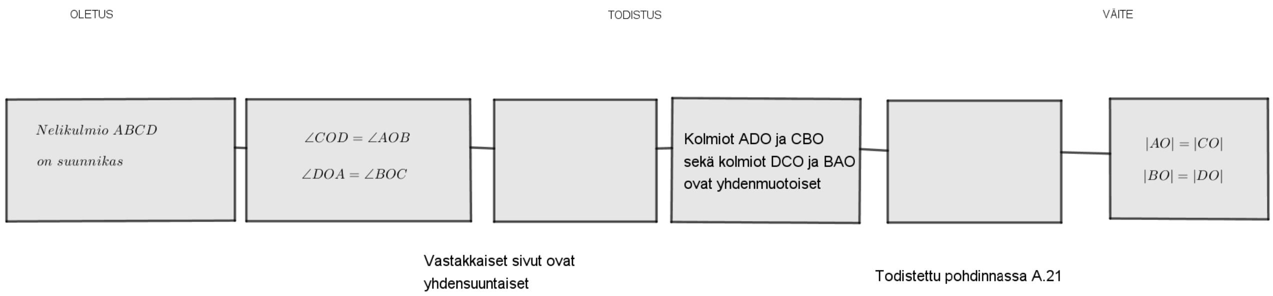
8. Ovatko seuraavat väitelauseet tosia vai epätosia?

   a) $n^2 > n \quad, \forall n \in \mathbb{N}$
   b) Jos $n \in \mathbb{Z}$, niin $n^3 + n$ on parillinen.
   c) Irrationaaliluvun neliö on aina irrationaaliluku.
   d) $\exists x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 \geq 1$

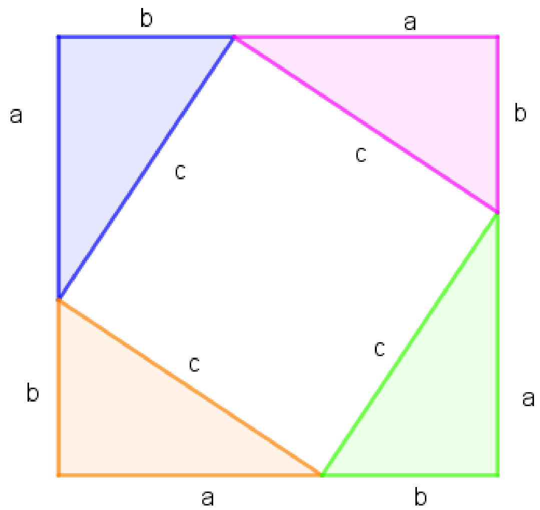
   Perustele vastauksesi.

9. Todista, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Käytä hyväksesi osittain täytettyä vuokaaviota. Muista, että välivaiheita tulee selittää laatikoiden alle tai väleihin. Halutessasi voit lisätä välivaiheita, vuokaavio on suuntaa antava.





10. Todista Pythagoraan lause. Käytä hyväksesi alla olevaa kuvaa.



11. Todista lause "Kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina parillinen" epätodeksi
    a) vastaesimerkin avulla
    b) yleisellä tasolla.

B Opettajan opas

B.1 Yleinen opas

Oppikirja on tarkoitettu oppimateriaaliksi lukion pitkän matematiikan kurssille *Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)*. Kirjan tässä osassa käsitellään kvanttoreita ja avointa lausetta, sekä suoraa todistamista ja muita matemaattisen todistamisen perusperiaatteita.

Esimerkki mahdollisesta tuntijaosta 75 minuuttisille ja 45 minuuttisille oppitunneille:

	75 min	45 min
Kvanttorit ja avoin lause	1	2
Suora todistaminen	2	3

B.2 Pohdintatehtävät

Tässä osiossa selitetään pohdintatehtävien tarkoitusta tarkemmin ja annetaan vinkkejä opettajalle pohdintojen käyttämiseen tunneilla.

B.2.1 Kvanttorit ja avoin lause

Pohdinta A.1

Lauseet on tarkoituksena ryhmitellä avoimiin ja suljettuihin lauseisiin. Tutkimalla lauseita, opiskelijoiden tulisi ymmärtää, että x:n sisältämien lauseiden todenperäisyydestä ei voida sanoa mitään.

Pohdinta A.2

Pohdinta johdattelee kvanttoreihin käyttämällä hyväksi visuaalisia menetelmiä. Kuvan geometriset kuviot ovat opiskelijoille geometrian tunneilta tuttuja ja niiden eritteleminen suunnikkaisiin ja suorakulman sisältäviin kuvioihin on suhteellisen yksinkertaista. Konnektiivit ovat myös tuttuja kirjan edellisestä osiosta, joten ainoa uusi asia tulisi olla $T(x)$ merkintä, joka sekin muistuttaa tuttua funktion merkintätapaa. Mikäli opiskelijoilla on vaikeuksia, heitä voidaan kehottaa suomentamaan avoimet lauseet kokonaisuudessaan ja jopa lukemaan lauseet itselleen ääneen.

Vastaukset:

a) A, B ja D

b) A, D ja E

c) A ja D

d) A, C, D, E ja F

Vastaukset voi halutessaan esittää myös ratkaisujoukkoina: $\{A, B, D\}$.

Pohdinta A.4

Pohdinta jatkaa kvanttorien käsittelemistä ja käsittelee luonnollisen ja formaalin kielen välistä yhteyttä. Tehtävässä mietitään voiko kaksi näennäisesti keskenään ristiriidassa olevaa lausetta olla olemassa yhtä aikaa ja samalla harjoitellaan formaalien lauseiden muuttamista luonnolliselle kielelle. Kaksi viimeistä kohtaa ovat monimutkaisempia, joten opiskelijoiden kannattaa purkaa ne ensin pienempiin osiin ja koota vastaukseksi pala palalta.

Vastaukset:

a) "On olemassa henkilö x, joka on sekä Matildan, että Matin ystävä."

b) "On olemassa henkilö x, joka on Matildan, mutta ei Matin ystävä."

c) "Kaikki ihmiset ovat Matildan tai Matin ystäviä."

d) "On olemassa henkilöt x ja y siten, että jos he eivät ole Matildan ystäviä, niin Matti ei ole Matildan ystävä."

e) "Kaikki ovat Matildan ja Matin ystäviä tai he eivät ole Matildan ystäviä."

Sekä lauseet a) ja b), että lauseet b) ja c) voivat olla yhtä aikaa totta.

Pohdinta A.5

Kvanttoreita harjoitellaan ensin yksinkertaisilla lauseilla, mutta monimutkaisemmat lauseet vaativat todennäköisesti enemmän yhteistä läpikäymistä opiskelijoiden kanssa. Viimeisen kysymyksen voi jättää vapaaehtoiseksi, mutta se olisi hyvä käydä läpi taululla, sillä se syventää ymmärrystä kvanttorien toiminnasta.

Vastaus:

a) tosi

b) epätosi

c) tosi

d) epätosi

e) epätosi

$\exists x : (\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \wedge \neg P(x)$

Lause on tosi, sillä sen tyydyttää kuvio F.

Lause, joka tyydyttää kaikki kuviot x on olemassa.

Esimerkiksi: $\forall x : \ (P(x) \vee S(x)) \vee \neg S(x))$

Pohdinta A.6

Koska matematiikassa symbolien järjestyksellä on väliä, järjestyksen muuttamisen aiheuttamaa eroa pyritään alleviivaamaan tässä pohdinnassa. Lauseiden purkaminen kannattaa aloittaa kääntämällä lauseet luonnolliselle kielelle. Opiskelijoille kannattaa painottaa, että luonnollisen kielen lauseet eivät välttämättä ole "hyvää suomen kieltä", vaan ne kannattaa pikemminkin kääntää aluksi symboli symbolilta, jotta lauseiden välistä eroa voidaan tarkastella paremmin. Käyttämällä muuttujia x ja y, luonnolliselle kielelle kääntäminen on opiskelijoille helpompaa.

"On olemassa x, joka rakastaa kaikkia."

"Kaikille x, on olemassa joku y, jota he rakastavat."

Mikäli aikaa ja halua on, lauseet voi kirjoittaa myös luonnollisemmin.

"On olemassa joku, joka rakastaa kaikkia."

"Kaikki rakastavat jotakuta."

Pohdinta A.7

Symbolien järjestyksen tärkeyttä painotetaan lisää tässä pohdinnassa ja lisäksi opiskelijat pääsevät pohtimaan lauseiden totuusarvoja. Koska lauseilla on eri totuusarvot, opiskelijat saavat edelleen paremman käsityksen järjestyksen tärkeydestä. Tällä kertaa osana pohdintaa on kääntää lauseet luonnolliselle kielelle ja kuten edellisessä pohdinnassa, opiskelijat voivat hyötyä siitä, että käännökset tehdään suoraan kääntämällä symbolit järjestyksessä yksi kerrallaan.

Vastaus: Jälkimmäinen lause on totta.

"Kaikki luvut x ovat ei-parittomia."

"Eivät kaikki luvut x ole parittomia."

Hieman tönköistä lauseista voidaan siirtyä pikkuhiljaa luonnollisempiin käännöksiin:

"Kaikki luvut x ovat parillisia."

Jälkimmäisen lauseen käännöksen kanssa tulee kuitenkin olla tarkka, sillä seuraava käännös kuulostaa oikealta, mutta mikäli sen kääntäisi takaisin formaalille kielelle, negaatio tulisi eri paikkaan kuin alkuperäisessä lauseessa

"Kaikki luvut x eivät ole parittomia."

Pohdinta A.8

Pohdinnassa on tarkoituksena harjoitella luonnollisen kielen kääntämistä formaaliksi kieleksi. Lauseet ovat lähellä oikeaa ratkaisua, mutta osa symboleista on vääriä tai ne ovat väärässä järjestyksessä. Symbolein kirjoitettuja lauseita voi pohtia pienissä ryhmissä tai koko luokan kesken taululla

Korjatut lauseet järjestyksessä:

$\forall y \exists x : R(x, y)$

$\exists x \forall y : \neg S(x, y)$

$\forall y \exists x : S(x, y)$

$\neg \exists x \forall y : R(x, y)$

B.2.2 Suora todistaminen

Pohdinta A.9

Suoran todistamisen käsittely aloitetaan vertailemalla kahta erilaista saman lauseen todistusta. Yhdistämällä todistusten vastaavat vaiheet toisiinsa, algebrallisen todistuksen menettelytapa konkretisoituu ja menettelytavan hyödyntämisen kynnys on pienempi, kun opiskelijat pääsevät rakentamaan omia todistuksiaan.

Maija	**Matti**
Parittomassa määrässä kyniä on yksi "ylimääräinen". Jos meillä molemmilla on pariton määrä kyniä, ylimääräiset kynät muodostavat parin. Täten kyniä on yhteensä parillinen määrä.	Paritonta määrää voidaan merkitä $2k+1$. Minulla on $2k+1$ määrä kyniä ja Maijalla on $2l+1$ määrä. Tällöin summaksi saadaan $2k+1+2l+1$ $= 2k+2l+2$ $= 2(k+l+1)$.

Pohdinta A.11

Totuustaulut ovat tuttuja kirjan aiemmasta osiosta ja pohdinnassa mietitään niiden ja suoran todistamisen välistä yhteyttä. Riittävä todistus on implikaation totuustaulu, sillä siitä nähdään, että oletuksen ja väitteen ollessa totta, implikaatio on totta:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tällä tavalla voi kuitenkin päätyä vääränlaisiin päätelmiin, kuten että oletus ja väite voivat molemmat olla epätosia. Siispä opiskelijoita tulisi kehottaa muodostamaan sellainen lause, josta saadaan tautologia:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Lauseen muodostaminen kannattaa tehdä yhdessä taululla tai laittaa opiskelijat miettimään sitä pienissä ryhmissä. Kun implikaation totuustaulu on käsitelty uudelleen vinkiksi voi antaa, että oletuksen ja implikaation tulee olla totta ja tästä seuraa lopullisen väitteen todenperäisyys.

Pohdintoja on runsaasti, joten mikäli aika tulee vastaan oppitunneilla, tämän tehtävän voi jättää lisätehtäväksi.

Pohdinta A.12

Väitelauseen todistamisessa ensimmäinen vaihe on tunnistaa väitteet ja oletukset toisistaan. Osa lauseista on arkipäiväisiä, mikä yksinkertaistaa oletusten löytämistä. Vaikka useat todistettavat lauseet ovat muotoa "Jos...niin...", opiskelijoita on hyvä muistuttaa myös erilaisista lauserakenteista. Matemaattisten lauseiden jäsentämistä voi eriyttää pyytämällä osaa opiskelijoista kirjoittamaan oletukset ja väitteet myös formaalilla kielellä, mikäli tarvittavia käsitteitä ja merkintätapoja on käsitelty jo aiemmin.

Vastaus: Oletus Väite

1) Aurinko paistaa on lämmin
2) Luku a on pariton luvun a kuutio on aina pariton
3) alkuluku a on suurempi kuin kaksi alkuluku a on pariton
4) henkilö on lukiolainen henkilöllä on kannettava tietokone
5) luku n on luonnollinen luku n ei ole nolla
6) $2^7 + 3^{11}$ on luku $2^7 + 3^{11}$ on jaollinen luvulla 7

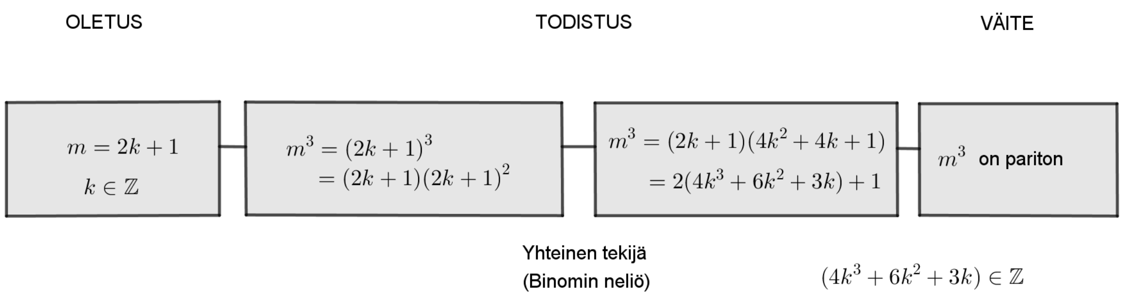
Erottelun voi tehdä myös muokkaamalla oletuksista ja väitteistä kokonaisia lauseita.

Esimerkiksi: Olkoon luku a pariton.

Tällöin luvun a kuutio on aina pariton.

Pohdinta A.17

Pohdinta on ensimmäinen, jossa opiskelijat pääsevät rakentamaan todistuksen alusta loppuun. Pätevän todistuksen perusperiaatteita on pohdittu edellisissä pohdintatehtävissä ja nyt tarkoituksena on yhdistää opittu todistukseksi käyttäen apuna vuokaaviota. Vuokaavioon on helpottamiseksi tehty riittävä määrä laatikoita ja oletus on kirjoitettu valmiiksi. Opiskelijan tehtävänä on täyttää kaavio ja selittää todistuksen välivaiheet samaan tapaan kuten mallitehtävässä. Itse todistus on hyvin yksinkertainen ja opiskelijoita voi ohjata mallitehtävän A.16 todistukseen vinkkejä varten. Todistus tulisi saada mahtumaan annettuihin laatikoihin, mutta ongelmaksi voi pikemminkin muodostua liika oikominen. Kaikkia välivaiheita ei ole tarkoitus kirjoittaa ylös, mutta kannattaa muistuttaa, että todistuksen tulee vakuuttaa kanssaopiskelijat. Todistus, jossa on kaikki riittävä, mutta ei liikaa jaarittelua voi näyttää esimerkiksi tältä:



Binomin neliötä ei tarvitse selittää erikseen, eikä myöskään yhteistä tekijää, näitä on kuitenkin hyvä merkitä ylös eritoten ensimmäisissä todistuksissa. Koska väite suositellaan laittamaan paikoilleen ensimmäisenä, se voi tässä tapauksessa olla kirjallinen.

Pohdinta A.18

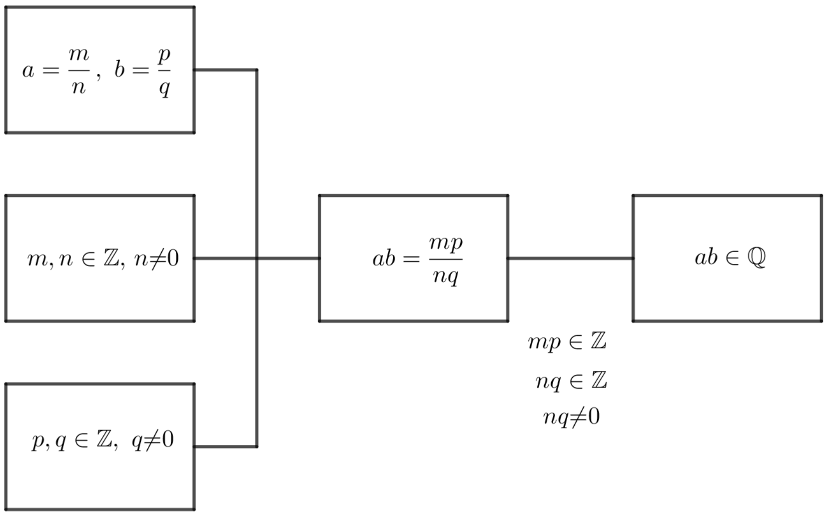
Pohdinnassa esitetään esimerkki suoran todistuksen rakenteesta. Pohdinnan tarkoituksena on saada opiskelijat miettimään, mitkä välivaiheet ovat oikeasti olennaisia todistuksen kannalta ja mitkä olisi mahdollista jättää pois, jotta todistus olisi yhä pätevä. Mahdollinen lähestymistapa on antaa opiskelijoiden lukea todistus läpi ja miettiä ryhmissä mahdollisia "turhia" välivaiheita. Turhia välivaiheita voi koota taululle, jonka jälkeen todistus käytäisiin läpi lause kerrallaan yhdessä. Opiskelijoilta tulee kysyä perusteluita, kuten: "Miksi tämän välivaiheen voi jättää merkitsemättä?" ja "Onko määritelmään viittaaminen jokaisessa todistuksessa tarpeellista?". Lopulta pohdintaan ei oikeastaan ole yhtä ainutta oikeaa vastausta, sillä ihmisten käsitykset tarpeellisesta ja tarpeettomasta vaihtelevat. On siis hyvä tehdä selväksi, että todistus ei ole missään nimessä väärin, vaan sen voisi pikemminkin kirjoittaa myös sujuvammin; jokaista laskuvaihetta ei tarvitse erotella ja tunnettuja laskukaavoja sekä määritelmiä voi käyttää niihin viittaamatta. Kirjassa painotetaan tarvittavia määritelmiä tämän helpottamiseksi, eikä kokonaislukuihin kuuluvuuttakaan tarvitse täten perustella sen kummemmin.

Pohdinta A.19

Edellisen pohdinnan vastakohtana tässä pohdinnassa välivaiheita ei ole selitetty lainkaan ja todistus näyttää pätevältä, mutta lopputulos on selkeästi väärä. Tämän tulisi johdatella opiskelijoita tutkimaan todistusta vielä tarkemmin ja pohtimaan jokaisen laskun välivaiheen pätevyyttä. Opiskelijoita voi pyytää kirjoittamaan jokaisen laskun rivin kohdalle, mitä tällä rivillä on tehty. Mikäli oikeaa johtopäätöstä ei tule, voi esittää tarkentavia kysymyksiä: "Jos $a = b$, niin mitä on $a - b$?". Todistuksen virhe on sellainen, josta jokaisen opiskelijan tulisi ymmärtää, miksi sen on väärin. Opiskelijoita kannattaa kehottaa tarkastelemaan tulevia todistuksiaan samalta kantilta: "Voinko perustella jokaisen välivaiheen?".

Pohdinta A.20

Vuokaavion käyttämistä harjoitellaan edelleen, mutta nyt opiskelijoille annetaan vapaammat kädet. Lause on todistettu valmiiksi, mutta nyt ratkaisu täytyy koota uudestaan päteväksi todistukseksi. Vuokaavio auttaa välivaiheiden järjestyksen visualisoinnissa. Pohdintaa voi eriyttää antamalla osalle opiskelijoista välivaiheet myös sanallisesti, mutta kaikkia kannattaa kehottaa käsittelemään pohdinta myös matematiikan termein. Pohdintaa voi myös yksinkertaistaa tekemällä valmiin täytettävän vuokaaviopohjan. Mikäli opiskelijat eivät pääse tehtävässä alkuun, heiltä kannattaa kysyä tunnistavatko he oletukset ja väitteen, ja näin edetä oletusten lukumäärään ja lopulta itse todistukseen. Vuokaaviotodistusten ulkonäkö riippuu vahvasti niiden tekijästä. Tärkeintä on, että todistukset ovat päteviä ja etenevät loogisesti.



Vuokaaviota apuna käyttäen voi myös tehdä perinteisemmän todistuksen.

Pohdinta A.21

Tässä pohdinnassa päästään hyödyntämään GeoGebra-ohjelmistoa. Kuten pohdinnassa jo eritellään, tehtävä toimii parhaiten tietokoneella, mutta sen saa tarvittaessa tehtyä myös tabletilla tai älypuhelimella. Todistuksen vuokaavio selityslaatikoineen on annettu valmiiksi ja tehtävänä on asettaa väite, välivaiheet ja selitykset oikeille paikoille. Jokainen todistuksen osanen on merkitty kirjaimella ja vastaaminen tapahtuu laittamalla kirjaimet oikeaan järjestykseen vastauslaatikkoon. Huomioitavaa tehtävässä on, että vastauksessa tulee käyttää isoja kirjaimia ja välilyöntejä. Vastausmalli on annettu tehtävässä valmiiksi, jotta opiskelijat huomaavat yhden laatikon voivan sisältää useamman todistuksen osasen. Osat ovat liikuteltavissa ja niitä tulee siirrellä vuokaaviossa, kunnes todistus näyttää pätevältä ja johdonmukaiselta. Vinkkinä opiskelijoille voi antaa, että kuvat yleensä toimivat apuvälineenä todistuksissa. Siispä ne ovat usein selityksiä.

Vastaus: B, C ja H, G, D, E ja L, I, K, F, A, J

Pohdinta A.22

Tehtävä johdattelee väitteiden kumoamisen ja todistamisen väliseen eroon. Maijan ja Matin väitteet ovat toistensa vastakohdat, mutta siinä missä esimerkit riittävät todistamaan Matin olevan väärässä, ne eivät kuitenkaan riitä todistamaan Maijan väitettä todeksi. Kysymykset on aseteltu avoimesti, jotta ne eivät johdattelisi liikaa oikeaan vastaukseen, vaan herättäisivät opiskelijoiden keskuudessa keskustelua. Maijan väite todistetaan vielä harjoitustehtävissä. Lisäksi voi olla hyödyksi käydä läpi vastaava tehtävä puolisuunnikkaan lävistäjien puolittumisesta, sillä tällöin opiskelijat voivat piirtää itse kumoamiseen riittävän esimerkin.

Pohdinta A.23

Pohdinnassa opiskelijat pääsevät miettimään yksinkertaisia väitelauseita ja niiden todenperäisyyttä. Tarkoituksena on saada opiskelijat miettimään, miten he perustelevat kunkin väitteen todeksi tai epätodeksi. Kuva auttaa rajaamaan väitelauseet siten, että niiden todenperäisyydessä ei pitäisi olla mitään kyseenalaista. Pohdinnan käsittelyn jälkeen opiskelijoilla tulisi olla jonkinlainen käsitys siitä, miten "kaikki" ja "on olemassa" väitteiden kumoaminen eroaa toisistaan. Pohdinnan voi käydä läpi myös ilman kvanttoreita, mutta niiden käyttäminen vahvistaa kvanttoreiden ja todistamisen välistä yhteyttä.

Vastaukset:

a) tosi

b) tosi

c) tosi

d) epätosi

e) tosi

f) tosi

g) epätosi

h) epätosi

Pohdinta A.25

Kaikki pohdinnan luvut ovat sellaisia, että opiskelijoiden tulisi tässä vaiheessa pystyä todistamaan niiden olevan parillisia. Pohdinnan voi tämän vuoksi käydä läpi yhteisesti koko luokan kanssa. Tärkeintä on, että opiskelijat ymmärtävät, että vastaavan "on olemassa" väitteen voi kumota vain todistamalla kaikki mahdollisuudet vääriksi. Mikäli esiintyy ongelmia lukujen käsittelyssä, seuraavassa esimerkissä esitellään pohdintaa vastaava tilanne välivaiheineen.

Pohdinta A.27

Riittävää todistusmenetelmää teroitetaan edelleen tässä pohdinnassa. Maijan todistus on helppo todeta riittämättömäksi, sillä aihetta on käsitelty jo useaan otteeseen. Tärkeää onkin huomata, minkä virheen Matilda on tehnyt omassa todistuksessaan.

Vastaus: Maijan todistus on riittämätön, sillä hän ei todista kaikkia mahdollisia yhdistelmiä.

Matilda on tehnyt todistuksessaan virheen, sillä hänen numerosarjassaan on kolme parillista numeroa. Lisäksi numerot 5 ja 6 eivät voi olla käännettyinä yhtä aikaa.

Jotta Matin väitteen todenperäisyydestä saataisiin tehtyä johtopäätös, yksinkertaisin tapa on jatkaa Maijan aloittamaa todistusta ja käydä läpi kaikki mahdolliset vaihtoehdot. Opiskelijoita kannattaa kuitenkin johdatella myös erilaiseen ratkaisuun:

Mikäli kortti on parillinen, sen luku on yhden suurempi, kuin jos se olisi pariton. Kun kaikki kortit ovat parittomia, niiden summa on 25. Kun kaksi korteista käännetään, summa kasvaa kahdella. Täten Matin väite on totta ja korttien summa on aina 27.

Pohdinta A.28

Pohdinnassa opiskelijoiden tulee todistaa annettu väite joko todeksi tai epätodeksi, mikä antaa heille vapaamman väylän lähteä itse tutkimaan väitettä ja mahdollista todistusmekanismia. Väite on epätosi ja helpoin keino päästä johtopäätökseen on kumota se jollakin vastaesimerkillä:

$1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Tähän johtopäätökseen on helppo päästä, joten opiskelijoita kannattaa pyytää todistamaan sama myös yleisellä tasolla:

Neljäs noppa on parillinen:

$(2k + 1) + (2l + 1) + (2s + 1) + 2t = 2k + 2l + 2s + 2t + 3 = 2(k + l + s + t + 1) + 1$

Neljäs noppa on pariton:

$(2k + 1) + (2l + 1) + (2s + 1) + (2t + 1) = 2k + 2l + 2s + 2t + 4 = 2(k + l + s + t + 2)$

Tästä on hyötyä, kun seuraavaksi väitettä tulee muuttaa siten, että se on aina tosi:

"Kolme nopista saa parittoman silmäluvun. Mikäli neljännen nopan silmäluku on pariton, noppien silmälukujen summa on parillinen ja jos neljännen nopan silmäluku on parillinen, silmälukujen summa on pariton."

C Tehtävien vastaukset

1. a) Matti ostaa kaikille uuden puhelimen.
   b) On olemassa henkilö, joka ei osta lapselle uutta puhelinta.
   c) Kaikille on olemassa joku, joka ei osta hänelle uutta puhelinta.

2. a) $\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$
   b) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$
   c) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x - y = 2$
   d) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z} : xy = 1$

   a) epätosi, b) tosi, c) tosi ja d) epätosi

3. a) epätosi
   b) tosi
   c) epätosi
   d) tosi

   Luonnollisilla luvuilla väitteet ovat epätosia.

4. a) $[-6, 6]$
   b) $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5. Erottelun voi tehdä jakamalla väitelauseet suoraan oletukseen ja väitteeseen tai muokkaamalla niistä kokonaisia lauseita.

   a) Oletus: on talvi
      Väite: on kylmä
   b) Oletus: henkilö on opiskelija
      Väite: henkilö inhoaa matematiikkaa
   c) Oletus: Olkoon luku x mikä tahansa kokonaisluku.
      Väite: Tällöin luku x voidaan esittää murtolukuna.
   d) Oletus: Olkoon n jokin luku.
      Väite: Luvun n neliö on luku itse.

6. Todistus toimii samaan tapaan kuin mallitehtävässä A.16.

7. Käy kaikki vaihtoehdot systemaattisesti läpi.

8. a) Väite on epätosi
   b) Väite on tosi
   c) Väite on epätosi
   d) Väite on tosi

9. Pohdinnasta A.21 voi olla apua ratkaisemisessa.

10. Muodosta yhden kolmion pinta-alalle yhtälö.

11. b) Valitse ensin jokin kokonaisluku n ja mieti miten sen avulla saat ilmoitettua jonkin peräkkäisen kokonaisluvun. Oikeita ratkaisuja on useita.