Lukuteorian alkeita lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Eerika Koskela
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

1 Johdanto

Maailma muuttuu ja matematiikan opetus pyrkii vastaamaan tähän muutokseen. Opetus menee enemmän suuntaan, jossa opiskelijoita rohkaistaan kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan. Tämä pohjautuu oppimiskäsitykseen, jossa opiskelijan omasta aktiivisuudesta, tavoitteellisuudesta ja itseohjautuvuudesta seuraa oppiminen. Tällaisen opetuksen tulisi sisältää tilanteita, jotka herättävät opiskelijat tekemään kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä omien havaintojen pohjalta. Matematiikan opetus korostaa entisestään opiskelijan luovaa ja kriittistä ajattelua sekä ongelmaratkaisutaitojen kehittämistä, joita tarvitaan entistä enemmän tulevaisuudessa. Erityisesti matematiikan opetus pyrkii antamaan opiskelijalle taidot matemaattisen tiedon ymmärtämiseen, soveltamiseen, tuottamiseen sekä arvioimiseen. Tällaista oppimista tukee tehtävät, joissa opiskelija tulkitsee, analysoi ja arvioi tietoa omien tietojen ja kokemuksen avulla. [11] Matematiikan opetusmateriaalin tulisi pysyä tämän muutoksen mukana. Tämä Pro gradu -tutkielma sisältää lukion pitkän matematiikan *Lukuteoria ja todistaminen* -kurssille opetusmateriaalia, joka vastaa muuttuvan matematiikan tarpeita. Opetusmateriaalissa korostetaan opiskelijan kokeilevaa ja tutkivaa toimintaa. Opetusmateriaalissa opiskelijat pääsevät tekemään pohdintatehtäviä, joiden kautta he rakentavat omaa ymmärrystään aiheesta.

Projektin nimi kulkee nimellä *Avoin oppikirja* ja siinä on mukana viisi Oulun yliopiston matematiikan opiskelijaa sekä kaksi ohjaajaa. Jaoimme kurssin aiheet viiteen osaan, joista jokainen loi oman kokonaisuutensa. Tämä kirjan osa aloittaa kurssin lukuteoriaosuuden. Opetusmateriaali sisältää lukuteoriasta jaollisuuden, jakoyhtälön, suurimman yhteisen tekijän, Eukleideen algoritmin sekä pienimmän yhteisen monikerran. Pro gradu -tutkielma lähtee liikkeelle perusteluosalla, jossa esitellään opetusmateriaalin tavoitteet ja tehtävätyypit sekä perustellaan tehtyjä valintoja tieteellisten tutkimusten sekä artikkelien pohjalta. Perusteluosion jälkeen tulee opiskelijoille esitettävät pohdinta- ja harjoitustehtävät sekä aiheisiin liittyvä teoria. Jokaiselle aihealueelle on omat kokonaisuutensa. Lisäksi opetusmateriaaliin kuuluu opettajan opas, joka sisältää opettajaa varten mahdollisen tuntijaon, oppimistavoitteet sekä vinkkejä ja johdattelukysymyksiä opetustilanteita varten. Opettajan oppaasta löytyy lisäksi pohdintatehtävien ratkaisut. Materiaalin lopussa on esitetty vielä harjoitustehtävien vastaukset.

2 Opetusmateriaalin tavoitteet

Opetusmateriaalin tavoitteet koostuvat lukion opetussuunnitelmien perusteiden sekä ryhmän yhdessä valitsemista *Habits of mind* -artikkelin [2] tavoitteista. Tavoitteisiin on käytetty lukion opetussuunnitelmien perusteista tämän hetkistä vuoden 2015 päätöstä [10] sekä tulevaa vuoden 2019 luonnosta [11]. Lisäksi ryhmä valitsi kolme eri tehtävätyyppiä artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [13], joita on käytetty opetusmateriaalissa. Tässä kappaleessa esitellään kyseisistä lähteistä kootut tavoitteet, joiden pohjalta opetusmateriaali on koottu.

2.1 Lukion opetussuunnitelman tavoitteet

Opetushallitus päätti lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 [10], jotka otettiin käyttöön lukion aloittaville 2016. Pitkän matematiikan yleisissä tavoitteissa korostetaan opiskelijan rohkaisemista kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan sekä ratkaisujen kriittiseen arviointiin. Lisäksi yleisissä tavoitteissa tuodaan esille, kuinka opiskelijan tulisi osata käyttää ja lukea matematiikan kieltä sekä keskustella matematiikasta. Erityisesti opiskelijan tulisi osata laatia matemaattisesti päteviä perusteluja sekä arvioimaan niiden yleistettävyyttä. Tavoitteiden mukaan opiskelijan tulisi myös harjaannuttaa päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan sekä hyödyntää niitä käytännön tilanteissa. [10] Nämä opetussuunnitelman pitkän matematiikan yleiset tavoitteet näkyvät vahvasti tämän opetusmateriaalin tavoitteissa ja tehtävätyypeissä.

Lukion opetussuunnitelman perusteet sisältää myös tavoitteet ja keskeiset sisällöt erikseen pitkän matematiikan kurssille *Lukuteoria ja todistaminen* (MAA11). Kyseinen kurssi kuuluu pitkän matematiikan valtakunnallisiin syventäviin kursseihin. Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2015 on esitetty seuraavat tavoitteet ja keskeiset sisällöt kyseiselle kurssille. Kurssin tavoitteista tähän opetusmateriaaliin sisältyy lukuteorian peruskäsitteiden hallitseminen sekä kokonaislukujen jaollisuuden tutkiminen jakoyhtälön avulla. Opetussuunnitelmaan määritetyistä keskeisistä sisällöistä opetusmateriaali sisältää kokonaislukujen jaollisuuden ja jakoyhtälön sekä Eukleideen algoritmin. [10] Opetusmateriaalissa käsitellään lukuteorian peruskäsitteistä jaollisuutta, suurinta yhteistä tekijää ja pienintä yhteistä monikertaa. Aiemmissa kirjan eri osissa on käsitelty logiikkaa ja todistamista. Todistamista käytetään paljon myös tässä kirjan osassa, joten sen hallinta on tärkeää.

Opetusmateriaalin tavoitteissa näkyy myös opetushallituksen tekemä lukion opetussuunnitelman perusteiden luonnos 2019 [11]. Matematiikan osassa on yhteiset yleiset tavoitteet pitkälle sekä lyhyelle matematiikalle. Tavoitteet eivät ole juurikaan muuttuneet vuoden 2015 opetussuunnitelman pitkän matematiikan tavoitteisiin nähden. Opetussuunnitelmaan on kuitenkin lisätty erikseen laaja-alaiset tavoitteet matematiikassa. Niissä tuodaan esille matematiikan ja arkielämän välistä yhteyttä sekä vuorovaikutteisuutta opetuksessa. Opetusta tulisi järjestää niin, että opiskelija voisivat työskennellä yksin ja yhdessä vaihtelevilla työtavoilla. Oppimistilanteissa opiskelijoiden havaintojen tulisi herättää kysymyksiä, päätelmiä sekä omia havaintoja tulisi osata perustella. [11] Kyseiset laaja-alaiset tavoitteet näkyvät opetusmateriaaliin valituissa tavoitteissa ja tehtävätyypeissä.

Kyseinen kurssi esiintyy opetussuunnitelman perusteiden luonnoksessa nimellä *Algoritmit* (MAA11). Kyseisessä opetussuunnitelman perusteiden luonnoksessa on esitetty myös tavoitteet sekä keskeiset sisällön kurssille. Tavoitteet ja keskeiset sisällöt ovat pysyneet melko samana tämän opetusmateriaalin sisältöjen osalta. Tavoitteissa kuitenkin mainitaan erikseen, että opiskelijan tulisi osata tutkia ja selittää, kuinka algoritmit toimivat. [11] Kurssin nimessäkin tulee jatkossa olemaan algoritmit, joten niitä tullaan todennäköisesti käsittelemään laajemmin eikä vain Eukleideen algoritmin tasolla. Erillinen algoritmeihin liittyvä kurssi on todennäköisesti sisällytetty jossakin määrin tähän kurssiin. Tämän takia opetusmateriaalissa esitellään algoritmia hieman yleisestikin.

2.2 Oppikirjan tekijöiden asettamat tavoitteet ja tehtävätyypit

2.2.1 Habits of mind-artikkelin oppimistavoitteet

Opetusmateriaalin tavoitteissa näkyy artikkelissa *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* [2] esitettyjä oppimistavoitteita. Artikkelissa käsitellään matematiikan opetuksen tulevaisuutta. Opetuksen ei tulisi keskittyä matemaattisiin tuloksiin vaan matemaattiseen ajatteluun ja ongelmanratkaisutapoihin, joiden avulla päästään ratkaisuun. Opiskelijat voivat kohdata tulevaisuudessa ongelmia, joita ei vielä ole olemassa. Näin ollen opiskelijalle tulisi tarjota työkaluja, joiden avulla he osaisivat ratkaista vastaan tulevia ongelmia. Artikkelissa esitellään muutamia ajattelutapoja ongelmanratkaisuun, joita opiskelijoille olisi hyvä opettaa. Opetusmateriaaliin tavoitteisiin ryhmämme valitsi neljä eri ajattelutapaa, jotka esitellään seuraavaksi.

Pattern sniffers - mallien etsijät

Tavoitteena on, että opiskelijat oppisivat etsimään ongelmasta malleja ja säännönmukaisuuksia [2]. Artikkelissa puhutaan tässä yhteydessä jaollisuudesta. Opiskelijalle saattaa tulla vastaan ongelma, jossa esimerkiksi täytyy huomata lähteä tarkistamaan lukujen jaollisuutta ja näin ollen löytää säännönmukaisuus. Säännönmukaisuuden huomaaminen on vahvasti esillä myös Eukleideen algoritmin ja yleisestikin algoritmien käytön opettelemisessa. Algoritmeja opetellessa on välttämätöntä ymmärtää niiden säännönmukaisuus.

Describers - kuvailijat

Matematiikalla on oma kielensä, joka sisältää erilaisia rakenteita ja symboleita. Tavoitteena opiskelijan tulisi kehittää omaa taitoaan käyttää matemaattista kieltä. Kuvaileminen on matematiikassa tärkeää ymmärtämisen kannalta. Opiskelijan olisi hyvä kehittää taitoaan kirjoittaa omia ajatuksiaan, perustelujaan ja todistuksiaan matemaattisesti. [2] Lukuteoriassa tulee monia uusia merkintöjä kuten esimerkiksi jaollisuuden tai suurimman yhteisen tekijään merkitseminen. On välttämätöntä oppia hallitsemaan eri merkinnät, jotta on ymmärtää mistä puhutaan. Lisäksi lukuteoriassa on tärkeä osata perustella esimerkiksi jaollisuus tai algoritmien käyttö matemaattisesti.

Tinkerers - nikkarit

Tavoitteena on, että opiskelijalle kehittyisi tapa ottaa ideoita erilleen ja yhdistämään niitä eri tavalla yhteen. Opiskelija oppisi tutkimaan mitä tapahtuu, kun eri ideoita yhdistelee keskenään. [2] Tehtävät, joissa opiskelija pääsee keksimään itse matemaattisia ongelmia vaativat ideoiden yhdistelyä. Opiskelija joutuu miettimään, minkälaisia asioita tehtävään voi yhdistää, jotta se olisi ratkaistavissa. Lisäksi väitetehtävissä opiskelija joutuu miettimään, miten asioiden yhdistely vaikuttaa todenmukaisuuteen.

Visualizers - visualisoijat

Matematiikkaan liittyy vahvasti asioiden visualisoiminen. Visualisointi on usein myös ideoiden ja prosessien hahmottelemista, jotka eivät itsessään ole kovinkaan visuaalisia. Esimerkiksi kertolaskua voidaan visualisoida aluemallin avulla. [2] Opiskelijan olisi hyvä oppia, millaisilla eri tavoilla visualisointia voi käyttää apuna. Pohdintatehtävien avulla, joissa käytetään esimerkiksi aluemallia, voidaan hyvin havainnollistaa opiskelijoille Eukleideen algoritmin ideaa.

2.2.2 Tehtävätyypit

Opetusmateriaalia varten ryhmämme perehtyi artikkeliin *Collaborative Learning in Mathematics* [13]. Artikkelissa tuodaan esille, kuinka perinteisessä tavassa opettaa matematiikkaa annetaan valmiit selitykset ja esimerkit, joiden mukaan tehdään tehtäviä. Tutkimuksen mukaan monet opiskelijat näkevät matematiikan erilaisina menetelminä ja tekniikoina, jotka täytyy muistaa. Matematiikan opiskelun ja opettamisen olisi hyvä perinteisen opetuksen sijaan sisältää keskusteluja ja omien ideoiden esille tuomista. Lisäksi olisi hyvä keksittyä asioiden perustelemiseen sekä ymmärtämiseen. Matematiikan opettamisessa kiinnittää huomiota väärinymmärryksiin ja niistä oppimisen. [13] Artikkelissa esitetään tehokkaita keinoja tällaiseen matematiikan opettamiseen. Ryhmämme valitsi kyseisestä artikkelista kolme eri tehtävätyyppiä, joita käytämme oppimateriaalin tehtävissä. Seuraavaksi esitellään nämä kolme tehtävätyyppiä.

Päättelyn ja ratkaisujen analysoiminen - Analysing reasoning and solutions

Tässä tehtävätyypissä opiskelijat analysoivat tehtyjä perusteluja ja ratkaisuja. Opiskelijat vertailevat erilaisia menetelmiä ratkaista ongelma, järjestävät ratkaisuja tai etsivät virheitä ratkaisusta. Valitsimme erityisesti *correcting mistakes in reasoning*, jossa korjataan ratkaisun virheitä. Näin opiskelijat tarkastelemaan kriittisesti ratkaisua ja analysoimaan yleisiä virhekäsityksiä. Valitsimme kyseisestä tehtävätyypistä myös *putting reasoning in order*, jossa järjestetään ratkaisun välivaiheita oikeaan järjestykseen. Tämä tehtävätyyppi keskittyy kuitenkin logiikkaan ja tehtävän rakenteen eikä niinkään tekniikan virheettömyyteen. Tehtävän analysoiminen auttaa opiskelijoita tunnistaa vaihtoehtoisia tapoja ongelman ratkaisemiseen, jolloin opiskelijat eivät jämähdä yhteen tiettyyn tapaan ratkaista ongelmia. [13] Valmiiden ratkaisujen analysoiminen sopii hyvin esimerkiksi Eukleideen algoritmin käsittelyyn. Tällöin opiskelijalle tulee ymmärrys algoritmin logiikasta ja rakenteesta. Näin ollen algoritmin opettelusta ei tule ulkoa opettelua ilman ymmärrystä.

Matemaattisten väitteiden arvioiminen - Evaluating mathematical statements

Tehtävätyypissä opiskelijat tarkastelevat esitettyjen väitteiden todenperäisyyttä. Kyseisessä tehtävätyypissä opiskelija kohtaa monia yleisiä hankaluuksia esimerkiksi numeroiden kokoon tai operaatioihin liittyen. Tehtävätyyppi kehittää opiskelijoiden todistamistaitoja sekä matemaattista kykyä perustella asioita. Tehtävätyyppi kehittää myös opiskelijoiden taitoa käyttää esimerkkejä ja vastaesimerkkejä perusteluissa. [13] Erityisesti jaollisuutta käsitellessä eteen tulee kysymyksiä ja väitteitä luvun jaollisuuteen liittyen. Pohditaan, onko jokin luku jaollinen jollakin toisella luvulla. Tällaisissa tilanteissa opiskelija harjoittelee jaollisuuden todistamista joko todeksi tai epätodeksi. Jaollisuutta pohtiessa on hyvä miettiä esimerkkien ja vastaesimerkkien kautta.

Omien ongelmien luominen - Creating Problems

Tehtävätyypissä opiskelijat luovat omia ongelmia, joita toiset opiskelijat ratkaisevat. Oppilaita voi pyytää tekemään kokonaan oman ongelman tai muokkaamaan annettua kysymystä. Tehtävätyyppi laittaa opiskelijat pohtimaan milloin ongelma on ratkaistavissa. Opiskelijoiden tulee pohtia, miten tehdyt muutokset vaikuttavat ongelman ratkaisemiseen. [13]

3 Opetusmateriaalin perustelut

3.1 Jaollisuus

Lukuteorian käsittely aloitetaan kokonaislukujen jaollisuudella, sillä se toimii perustana jatkossa käsiteltävissä aiheissa. Jaollisuuteen tutustuminen aloitetaan jo peruskoulussa, mutta on hyvä lähteä perusteista liikkeelle. Näin varmistetaan, että jokaisella opiskelijalla on tarvittavat lähtötiedot jatkoa ajatellen. Kappaleen tavoitteena on, että opiskelija ymmärtäisi jaollisuuden käsitteen ja oppisi perustelemaan matemaattisesti jaollisuutta määritelmän avulla. Jaollisuuden pohtiminen aloitetaan pohdintatehtävällä A.1, jossa tarkoituksena on etsiä yhteinen ominaisuus laatikossa oleville luvuille. Laatikoiden lukuihin tuo hieman lisää mietittävää negatiivinen luku sekä nolla. Tehtävän tarkoituksena on myös herättää keskustelua liittyen eri lukujen jaollisuuteen. Tehtävän loppupuoli on valitsemamme tehtävätyypin kaltainen, jossa opiskelijan on keksittävä ongelma ja annettava se toiselle ratkaistavaksi [13]. Tehtävässä on kaksi tyhjää laatikkoa, joihin opiskelijan on luotava omat luvut jaollisuutta noudattaen. Opiskelija pääsee pohtimaan millaisia lukuja hän voi valita, jotta luvut olisivat tehtävänannon mukaisia ja tehtävä olisi ratkaistavissa [13]. Lopuksi opiskelija antaa täydentämänsä laatikot parillensa mietittäväksi.

Jaollisuutta tutkiessa on tärkeä ymmärtää kerto- ja jakolaskun yhteys. Suomessa tehdyn tutkimuksen mukaan jaollisuutta pidetään usein monimutkaisena käsitteenä. Tähän on syynä esimerkiksi heikko ymmärrys kerto- ja jakolaskun yhteydestä. [6] Pohdintatehtävän A.2 tarkoituksena on laittaa opiskelijat pohtimaan tätä yhteyttä. Tehtävä johdattelee opiskelijoita kohti jaollisuuden määritelmää. Tehtävässä opiskelijan on esitettävä luku 24 positiivisten kokonaislukujen tulona. Näin hän saa selville luvun tekijöitä. Tehtävänä on myös tutkia luvun 24 jaollisuutta keksityillä luvuilla. Tarkoituksena on, että opiskelija huomaa luvun jaollisuuden sen tekijöillä. Näiden parin pohdintatehtävän jälkeen opiskelijoille esitellään jaollisuuden määritelmä. Määritelmä on valittu selkeyden vuoksi niin, että kokonaisluku b on positiivinen. Näin ollen ei tarvitse erikseen aina mainita vastaavia negatiivisia lukuja. Materiaalissa on esitetty asiasta huomautus, jonka voi opiskelijoiden kanssa käydä läpi.

Matematiikassa on tärkeä oppia ymmärtämään eri matemaattiset merkinnät [2]. Jaollisuuden merkitsemistä ja todistamista määritelmän avulla harjoitellaan pohdintatehtävässä A.7. Tehtävä on valitsemamme tehtävätyypin kaltainen, sillä se sisältää viisi väitettä, jotka on osoitettava tosiksi tai epätosiksi [13]. Kolmessa ensimmäisessä väitteessä esiintyy lukuja ja kaksi viimeistä väitettä on esitetty yleisessä muodossa. Jaollisuuden todistaminen tuottaa kuitenkin ongelmia opiskelijoille. Stavour käsittelee artikkelissaan todistamiseen liittyviä yleisiä virheitä. Opiskelijoiden virheitä tutkittaessa huomattiin, että yleisin opiskelijoiden tekemä virhe on väitteen osoittaminen todeksi esimerkin avulla. Artikkelissa käsitellään yhtenä esimerkkinä jaollisuuden todistamista, jossa oppilailla esiintyy kyseinen virhe. Tällöin yleinen jaollisuuteen liittyvä väite perustellaan paikkaansa pitäväksi sillä, että se toimii joillakin tietyillä luvulla. Se ei kuitenkaan ole pätevä todistus kaikille mahdollisille tapauksille. [12] Tehtävässä tuodaan esille, että yleisessä tapauksessa vain virheellisen väitteen voi todistaa esimerkillä vääräksi.

Jaollisuuteen liittyen materiaalissa on kolme tehtävää. Ensimmäinen harjoitustehtävä testaa opiskelijan taitoa käyttää jaollisuuden määritelmää jaollisuuden perustelussa. Toinen tehtävä on artikkelista valitsemamme tehtävätyypin kaltainen, jossa analysoidaan virheellistä päättelyä [13]. Tehtävässä analysoidaan vielä opiskelijoiden yleistä virhettä, jossa esimerkillä päätellään jokin asia yleisesti päteväksi [12]. Kolmannessa tehtävässä opiskelijan tulee osata tulkita ja todistaa yleisessä muodossa esitetty jaollisuuden perusominaisuus. Tehtävä harjaannuttaa oppimistavoitteen mukaisesti opiskelijan perustaitoja perustella asioita matemaattisesti [2]. Tehtävän tarkoituksena on myös tuoda esille kyseinen perusominaisuus liittyen jaollisuuteen.

3.2 Jakoyhtälö

Seuraavaksi opiskelijoille esitellään tilanne, jossa luku ei ole jaollinen jollain luvulla ja jää jakojäännös. Kappaleen tarkoituksena on tutustua jakoyhtälöön ja sen käyttöön kokonaislukujen jaollisuuden tarkastelussa. Jakoyhtälön yhteydessä tulee monia käsitteitä, joiden hallitseminen on tärkeää. Jakoyhtälöä lähdetään pohtimaan käytännön esimerkin kautta pohdintatehtävässä A.8. Laineen kirjoittamassa materiaalissa tuodaan esille, kuinka sanallisilla tehtävillä on hyvä rakentaa siltaa matemaattisen tiedon ja käytännön välille [8]. Tehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelija jakoyhtälön määritelmän avulla hoksaamaan itse jakoyhtälön rakenne ja näin ollen ymmärtämään sen merkitys. Suomalaisessa tutkimuksessa huomattiin, että opiskelijoilla on hankaluuksia käsitellä jaollisuuksia, jotka eivät mene tasan. Opiskelijat eivät tiedä mitä tehdä jakojäännökselle. [6] Tehtävässä opiskelija, joutuu soveltamaan jaollisuuden määritelmää ja pohtimaan, millaisella merkinnällä yhdistäisi siihen jakojäännöksen.

Pohdintatehtävän jälkeen opiskelijoille esitellään jakoyhtälö ja siihen liittyvät käsitteet. Jakoyhtälön määritelmän jälkeen opiskelijoille esitellään selkeä esimerkki jakoyhtälöstä. Jaollisuutta käsitellessä on tärkeä osata perustella ajatuksiaan matemaattisesti ja hallita eri merkinnät [2]. Materiaalissa on vielä mallitehtävä, jossa näytetään tarkasti jakoyhtälön tekeminen. Näin varmistetaan, että jokainen osaa tehdä jakoyhtälön ja tietää sen jokaisen luvun merkityksen. Jakoyhtälön ymmärtämisen kannalta on hyvä, että opiskelijat pääsevät tarkastelemaan jakoyhtälön todistusta. Pohdintatehtävässä A.12 opiskelijan on tarkasteltava valmista todistusta kysymyksien avulla. Kysymyksien avulla opiskelija joutuu pohtimaan, mitä eri kohdissa on tehty, mitä määritelmiä on käytetty ja mistä on lähdetty liikkeelle. Tehtävän tarkoituksena on tuoda esille, mitä kaikkea jakoyhtälö pitää sisällään. Todistuksien analysoiminen auttaa opiskelijoita kehittämään myös omia matemaattisia perustelutaitoja, mikä oli yksi valitsemistamme oppimistavoitteista.

Jakoyhtälö on mahdollista muodostaa myös negatiivisille luvuille. Negatiivisten lukujen jakoyhtälössä opiskelijoilla esiintyy usein virheitä. Yleinen virhe on negatiivinen jakojäännös, joka on vastoin jakoyhtälön määritelmää. [7] Pohdintatehtävän A.13 tarkoituksena on tarttua tähän virheeseen. Tehtävässä vertaillaan kahta eri jakoyhtälöä negatiiviselle luvulle. Toinen jakoyhtälöistä on oikein ja toinen virheellinen. Virheellisessä jakoyhtälössä esiintyy negatiivinen jakojäännös, joka on myös kyseinen opiskelijoiden tekemä yleinen virhe. Tehtävän kriittisen analysoimisen avulla saadaan kitkettyä opiskelijoista tämä yleinen virhekäsitys [2].

Jaollisuuteen liittyvissä todistuksissa tarvitaan erilaisia esitystapoja luvuille, joissa on käytetty apuna jakoyhtälöä. Opiskelijoille on tuttuja aiemmista kirjan osista parillisten ja parittomien lukujen esitysmuodot. Niitä ei ole kuitenkaan perusteltu sen tarkemmin, joten ne käsitellään jakoyhtälön näkökulmasta huomautuksessa A.14. Pohdintatehtävän A.15 tarkoituksena on laittaa opiskelija pohtimaan kyseistä esitystapaa viidellä jaollisille luvuille. Opiskelijan tulee hoksata, mitä eri jakojäännöksen arvoja hän tarvitsee kaikkien kokonaislukujen esittämiseen. Kyseinen taito on tärkeä yleisten tapauksien todistamisen kannalta.

Jakoyhtälöön liittyen materiaalissa on kolme harjoitustehtävää. Ensimmäinen tehtävä laittaa opiskelijan pyörittelemään jakoyhtälöä ja miettimään vielä siihen liittyvää käsitteistöä. Toisessa tehtävässä jakoyhtälö otetaan käyttöön arkielämän esimerkissä, jolloin saadaan rinnastettua matemaattinen tieto käytännön välille [8]. Kolmas tehtävä on hieman haastavampi. Se on artikkelissa esitettyjen tehtävien kaltainen, sillä siinä esiintyy virhettä [13]. Tehtävän tarkoituksena on nähdä ymmärtääkö opiskelija todistamisessa tarvittavien yleisien esitysmuotojen merkityksen ja käytön. Lisäksi tehtävässä on yhtenä virheenä opiskelijoille tyypillinen virhe binomin neliöön korotuksessa.

3.3 Suurin yhteinen tekijä

Lukuteorian keskeisimpiin käsitteisiin kuuluu suurin yhteinen tekijä. Kappaleen tavoitteena on ymmärtää suurimman yhteisen tekijän merkitys ja oppia määrittämään se annetuille luvuille. Usein suurimman yhteisen tekijän tapauksessa keskitytään ratkaisemaan suurinta yhteistä tekijää, mutta käsitteen varsinainen ymmärrys saattaa jäädä huomiotta [4]. Suurimman yhteisen tekijän käsitettä lähdetään pohtimaan supistamisen kautta. Supistamisesta on hyvä lähteä liikkeelle, sillä se on opiskelijoille tuttu asia. Lisäksi supistaminen tuo esille konkreettisen tarpeen suurimman yhteisen tekijän määrittämiselle. Pohdintatehtävässä A.16 pohditaan murtoluvun supistamista ja mitä se käytännössä tarkoittaa. Tehtävässä pääpaino on oman ratkaisun analysoimisella ja perustelemisella. Tehtävän avulla opiskelijalle pyritään luomaan nimenomaan ymmärrystä käsitteestä ennen sen varsinaista määrittelemistä.

Tässä kirjan osassa ei käsitellä vielä alkulukuja vaan ne tulevat vasta myöhemmin. Alkulukujen sijaan suurimman yhteisen tekijän käsitettä lähdetään rakentamaan paloittain tutkimalla lukujen tekijöitä. Toisessa pohdinnassa A.18 opiskelijan tulee määrittää kahden luvun tekijät käyttäen jaollisuutta apuna. Määritettyjen tekijöiden avulla opiskelijan täytyy tarkastella, ovatko esitetyt väitteet tosia. Väitteiden tarkastelu kehittää opiskelijan matemaattista perustelutaitoa [13]. Kyseisten väitteiden tarkastelu johdattelee opiskelijan suurimman yhteisen tekijän käsitteeseen.

Tosielämään liittyvät sovellukset parantavat käsitteiden ymmärrystä ja lisäävät kiinnostavuutta aiheeseen. Niiden avulla voidaan tuoda esille myös matemaattisten käsitteiden merkitys. Sanallisten tehtävien avulla opiskelijat saavat kehittää omaa loogista ajattelua opeteltujen prosessien sijaan. [4] Kolmantena pohdintatehtävänä A.19 on näin ollen tosielämään pohjautuva sanallinen tehtävä. Tehtävän pystyy ratkaisemaan ilman teoreettista tietämystä pelkillä ongelmanratkaisumenetelmillä, kunhan ymmärtää tehtävän ongelman. Tehtävän voi esimerkiksi mallintaa kuvan avulla, joka auttaa ratkaisun löytymisessä [8]. Tällöin suurimman yhteisen tekijän ideaa voidaan pohtia ilman käsitteellistä osaamista. Ryhmätyöskentely toimii hyvin sanallisissa tehtävissä. Opiskelijat voivat keskustella omista ideoistaan ja ratkaisutavoistaan.[4] Kyseisessä pohdintatehtävässä voi esimerkiksi laittaa opiskelijat pohtimaan tehtävää yhdessä tai lopuksi vertailemaan ratkaisutapojaan.

Opiskelijoiden saatua itse pohtia suurimman yhteisen tekijän käsitettä muutamalla pohdintatehtävällä heille esitetään suurimman yhteisen tekijän määritelmä sekä esimerkki sen etsimisestä tekijöiden avulla. Lisäksi opiskelijoille esitetään lause A.24, joka esittelee suurinta yhteistä tekijää jakoyhtälössä. Viimeisessä aiheeseen liittyvässä pohdintatehtävässä A.25 opiskelijat pääsevät tutkimaan aiemmin mainitun lauseen todistusta. Opiskelijan tulee tulkita, mitä todistuksen eri kohdissa on todistettu. Tällöin opiskelija pääsee kehittämään taitoaan ymmärtää matemaattisia perusteluja [2].

Suurimpaan yhteiseen tekijään liittyen on kolme harjoitustehtävää. Ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on varmistaa, että opiskelija osaa määrittää suurimman yhteisen tekijän kahdelle luvulle. Toinen tehtävä on sanallinen. Sen avulla opiskelija saa vielä arkielämän esimerkin, jossa suurimman yhteisen tekijän määrittämisestä on hyötyä. Tosielämän sovellukset ovat tärkeitä suurimman yhteisen tekijän käsitteen ymmärtämisessä [4]. Kolmannessa harjoitustehtävässä opiskelijan tulee itse keksiä lukuja, joilla on haluttu suurin yhteinen tekijä. Tehtävä laittaa opiskelijan miettimään suurinta yhteistä tekijää toisesta näkökulmasta. Lisäksi tehtävällä halutaan tuoda esille, että suurimman yhteisen tekijän voi määrittää myös kolmelle luvulle.

3.4 Eukleideen algoritmi

Suurien lukujen tapauksessa suurimman yhteisen tekijän löytämiseksi on olemassa hyvä apukeino Eukleideen algoritmi. Kappaleessa tutustutaan kyseiseen algoritmiin sekä sen avulla yleisesti algoritmiseen ajatteluun. Keskeisenä tavoitteena on ymmärtää Eukleideen algoritmin vaiheet sekä oppia käyttämään sitä. Curcio käsittelee artikkelissaan algoritmien opettamista. Algoritmeja käsitellessä on vaarana, että opiskelija opettelee muistamaan sen eri vaiheet ymmärtämättä, mitä niissä tehdään ja miksi. Oppilaille tulisi luoda ymmärrys algoritmista ennen sen esittelyä. Ymmärrys voidaan luoda esimerkiksi rinnastamalla algoritmi opiskelijalle aikaisemmin opetettuun asiaan. [3]

Olson esittelee artikkelissaan idean Eukleideen algoritmin visualisoimisesta geometrian kautta. Artikkelissa esitellyssä ideassa Eukleideen algoritmin vaiheita kuvataan kahdesta tutkittavasta luvusta muodostuvan suorakulmion muotoisen pinta-alan jakamisella erikokoisiin pienempiin neliöihin. [9] Tämä idea on otettu käyttöön pohdintatehtävässä A.26. Pohdintatehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelija Eukleideen algoritmiin. Olsonin malli Eukleideen algoritmin visualisoimisesta geometrian kautta johdattelee opiskelijan algoritmiin rakentamalla ymmärrystä tutun tasogeometrian kautta. Kuten Curcio artikkelissaan mainitse, että hyvä lähestymistapa on rakentaa algoritmia aiemmin opitun kautta [3]. Artikkelissa *Habits of Mind* tuodaan esille oppimistavoitteina visualisointi ja säännönmukaisuuden etsiminen. Opiskelijan olisi siis hyvä osata havainnollistaa käsitteitä visuaalisin keinoin. Opiskelijan tulisi myös harjoitella hahmottelemaan sellaisia asioita, jotka eivät suoranaisesti ole visuaalisia. Kyseisessä pohdintatehtävässä havainnollistetaan Eukleideen algoritmia, joka ei lähtökohtaisesti ole visuaalinen. Algoritmeja käsitellessä säännönmukaisuuden hoksaaminen ja merkityksen ymmärtäminen on erityisen tärkeää. [2] Pohdintatehtävä luo opiskelijalle myös ymmärrystä siitä, että eri matematiikan aihealueen menetelmiä voi käyttää apuna muissakin aihealueissa. Olson tuo esille artikkelissaan, kuinka opiskelijalle tulisi antaa mahdollisuuksia luoda yhteys eri matematiikan aihealueiden välillä. Yhteyksien luominen auttaa kehittämään myös opiskelijoiden kokonaisvaltaista matemaattista ajattelua. [9] Kyseisen johdattelutehtävän kautta opiskelijalle esitellään Eukleideen algoritmin periaate.

Eukleideen algoritmi perustuu vahvasti opetusmateriaalissa aiemmin käsiteltyyn lauseeseen A.24, jossa tutkitaan jakoyhtälössä esiintyvien lukujen suurimpia yhteisiä tekijöitä. Pohdintatehtävän A.28 tavoitteena on hoksauttaa opiskelijalle Eukleideen algoritmin toimiminen kyseisen lauseen avulla. Pohdintatehtävässä opiskelijoille on annettu valmis pohja, jonka he täyttävät. Opiskelijat pääsevät käyttämään aiempaa tietämystään suurimmasta yhteisestä tekijästä, jonka avulla he analysoivat Eukleideen algoritmia. Curcion mukaan, kun opiskelija saa itse analysoida ja havainnoida aiemmin opitun avulla matemaattisia suhteita opiskelijalle syntyy parempi ymmärrys algoritmista [3].

Stavrou tuo artikkelissaan esille, kuinka opiskelijat eivät välttämättä ymmärrä sanallisen selityksen merkityksellisyyttä matematiikassa [12]. Pohdintatehtävän A.29 tarkoituksena on havainnollistaa opiskelijoille, että sanallinen selitys todistuksessa vaaditaan matemaattisen osuuden rinnalle, jotta todistus olisi helpommin ymmärrettävissä. Pohdintatehtävässä opiskelijan tehtävänä on selittää todistuksen vaiheet ja pohtia, miten se todistaa halutun asian. Yksi artikkelin Habits of mind osaamistavoitteena on kuvailu. Sen mukaan opiskelijan tulisi osata kuvata myös sanallisesti matemaattisen prosessin vaiheita. [2]

Eukleideen algoritmiin liittyviä harjoitustehtäviä on kolme. Ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on varmistaa, että jokainen opiskelija osaa käyttää Eukleideen algoritmia suurimman yhteisen tekijän määrittämisessä. Toinen tehtävä on sanallinen tehtävä, joka liittää Eukleideen algoritmin käytön arkielämän tilanteeseen. Sanallinen tehtävä tukee opiskelijoiden taitoa soveltaa asiaa erilaisiin tilanteisiin sekä kehittää opiskelijan ongelmanratkaisutaitoja [8]. Kolmannen tehtävän tarkoituksena on antaa opiskelijalle työkalu laskea Eukleideen algoritmin avulla myös kolmelle suurelle luvulle suurin yhteinen tekijä. Tehtävässä on annettu tieto, jota opiskelijan on osattava tulkita ja käyttää. Tehtävä on valitsemamme tehtävätyypin kaltainen, jossa opiskelijan tulee itse kehittää ongelma [13]. Luotu ongelma ratkaistaan kuitenkin itse. Omaksi ongelmaksi tulee keksiä kolme lukua, joiden suurin yhteinen tekijä täytyy määrittää annetun tiedon avulla. Opiskelija voi valitsemillaan luvuilla itse vaikuttaa, kuinka haastavan hän tehtävästä haluaa.

3.5 Pienin yhteinen monikerta

Yksi lukuteorian käsitteistä suurimman yhteisen tekijän rinnalla on pienin yhteinen monikerta. Kappaleen tavoitteena on oppia ymmärtämään käsitteen merkitys ja laskemaan annettujen lukujen pienin yhteinen monikerta. Samaan tyyliin kuin suurimman yhteisen tekijän tapauksessa käsitettä pienin yhteinen monikerta lähdetään johdattelemaan tutun laventamisen kautta pohdintatehtävässä A.30. Uutta käsitettä on helppo lähteä viemään eteenpäin jonkin ennestään tutun asian kautta. Tehtävässä on lavennettava murtoluvut samannimisiksi, jotta ne voidaan summata yhteen.

Artikkelissa *Supporting Student's Ability in Understanding Least Common Multiple (LCM) Concept Using Storytelling* käsitellään pienimmän yhteisen monikerran opettamista. Artikkelissa tuodaan esille, kuinka tarinamuotoiset arkielämään liittyvät tehtävät parantavat opiskelijoiden käsitteen ymmärrystä. Niiden avulla opiskelijat kokeilevat omia ideoitaan ja strategioitaan. Lisäksi tarinamuotoiset tehtävät ohjaavat opiskelijaa löytämään matematiikan käsitteet ja ymmärtämään ne paremmin. Tarinamuotoiset tehtävät herättävät herkemmin myös keskustelua. Artikkelissa esitettiin hyvinä opetustehtävinä juuri pohdintatehtävän A.31 kaltaisia sanallisia tehtäviä. Tämän tyyppisen tehtävän avulla opiskelijat voivat kehittää ajatteluaan päättelystä käsitteiden ymmärtämiseen.[14]

Pohdintatehtävissä opiskelijoita johdateltiin pienimmän yhteisen monikerran käsitteeseen ja luotiin käytännön tarve käsitteelle. Näiden parin pohdintatehtävän jälkeen opiskelijoille esitetään pienimmän yhteisen tekijän määritelmä. Lisäksi esimerkki A.33 tuo vielä esille, kuinka monikertoja luettelemalla voi löytää pienimmän yhteisen monikerran. Tämän jälkeen opiskelijoita lähdetään johdattelemaan lauseeseen A.35 pohdintatehtävällä A.34. Lause antaa toisen tavan ratkaista pienimmän yhteisen monikerran. Tehtävässä opiskelijan on itse kokeilemalla selvitettävä, mitä pienimmän yhteisen monikerran ja suurimman yhteisen tekijän tulo on. Opiskelija pääsee oppimistavoitteen mukaisesti etsimään säännönmukaisuuden kokeilemiensa lukujen suurimman yhteisen tekijän ja pienimmän yhteisen monikerran tulolle. Lisäksi opiskelijan on pohdittava, miten hän voisi käyttää selvittämäänsä tietoa suurimman yhteisen tekijän määrittämiseksi. Lauseeseen liittyen löytyy myös esimerkki A.36, joka auttaa opiskelijaa ymmärtämään kaavan käytön.

Aihealueen lopussa on vielä yksi pohdintatehtävä A.38, joka kokoaa suurimman yhteisen tekijän, Eukleideen algoritmin sekä pienimmän yhteisen monikerran. Kyseinen pohdintatehtävä on sanallinen tehtävä, jonka ratkaisun vaiheet täytyy järjestää oikeaan järjestykseen. Tehtävätyyppi auttaa opiskelijoita hahmottamaan tehtävän rakenteen ja mitä työkaluja siinä on käytettävä [13]. Opiskelijan on osattava yhdistää matemaattinen tieto ja käytäntö. Tehtävä sisältää monta välivaihetta, joten pelkkä lukujen poimiminen kaavaan ei riitä vaan on pohdittava, mitä menetelmää eri välivaiheissa on käytetty ja miksi. Tämä vaatii syvällisemmän ymmärryksen käytettäviin käsitteisiin. [8]

Pienimpään yhteiseen monikertaan liittyviä harjoitustehtäviä on kolme kappaletta. Ensimmäinen tehtävä on sanallinen tehtävä. Sanallisella tehtävällä varmistetaan, että opiskelija on ymmärtänyt pienimmän yhteisen monikerran käsitteen ja osaa käyttää sitä eri tilanteiden ratkaisemiseksi [14]. Toisessa tehtävässä varmistetaan opiskelijan taito käyttää lausetta A.35 pienimmän yhteisen monikerran määrittämiseksi. Kolmas ja viimeinen tehtävä soveltaa lausetta A.35. Tehtävässä täytyy osata muodostaa lauseen ja annettujen tietojen avulla yhtälö ja ratkaista siitä kysytty luku. Tehtävä auttaa opiskelijoita huomaamaan lauseessa esiintyvien käsitteiden yhteyden.

Viitteet

[1] Adler, A., & Coury, J. E. (1995). *The theory of numbers: A text and source book of problems*. Jones & Bartlett Pub.

[2] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

[3] Curcio, F. R., & Schwartz, S. L. (1998). There are no algorithms for teaching algorithms. *Teaching Children Mathematics*, 5(1), 26-31.

[4] Halim, N. L. A., Li, H. C., Shahrill, M., & Prahmana, R. C. I. (2017, December). *Teaching strategies in the learning of highest common factor and lowest common multiple.* In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 943, No. 1, p. 012041). IOP Publishing.

[5] Heiskanen, P., Kaakinen, P., Lehtonen, J., Leikas, M., & Tahvainen, J. (2017). Tekijä pitkä matematiikka 11–Lukuteoria ja todistaminen. *SanomaPro Oy*.

[6] Kaasila, R., Pehkonen, E., & Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 247-261.

[7] Kubar, A. (2012). Pre-service elementary mathematics teachers' knowledge about definitions of integers and their knowledge about elementary students' possible misconceptions and errors in describing integers. *Doctoral dissertation, Middle East Technical University.*

[8] Laine, T. (2013). Matematiikan sanalliset tehtävät: Tehtävän ymmärrys. *Turun Matikkamaa*.

[9] Olson, M. (1991). Activities. A Geometric Look at Greatest Common Divisor. *Mathematics Teacher*, 84(3), 202-8.

[10] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.*

[11] Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet luonnos 2019*.

[12] Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.

[13] Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs*.

[14] Triyani, S., Putri, R. I. I., & Darmawijoyo, D. (2012). Supporting Student's Ability in Understanding Least Common Multiple (LCM) Concept Using Storytelling. *Journal on Mathematics Education*, 3(2), 151-164.

[15] Weiner, L. M. (1970). *Introduction to modern algebra*. New York etc: Harcourt, Brace & World.

A Lukuteorian alkeita

A.1 Jaollisuus

Lukuteoriassa keskitytään kokonaislukujen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tutkimiseen. Tämän takia kaikki materiaalissa käsiteltävät luvut ovat kokonaislukuja. Kokonaislukujen jaollisuus on lukuteorian yksi keskeisimmistä käsitteistä. Sen ymmärtäminen on tärkeää, sillä se toimii perustana tulevissa määritelmissä.

Pohdinta A.1 Mitä yhteistä samassa laatikoissa olevilla kokonaisluvuilla on? Keksi kumpaankin tyhjään laatikkoon viisi kokonaislukua, joilla on samankaltainen yhteinen ominaisuus kuin valmiiksi täytettyjen laatikoiden luvuilla. Anna täydentämäsi laatikot parillesi pohdittavaksi.

21 33 27 12 -3	28 0 35 63 42		

Pohdinta A.2 Esitä luku 24 kahden positiivisen kokonaisluvun tulona, niin monella eri tavalla kuin keksit. Mitä huomaat, jos kokeilet jakaa luvun 24 millä tahansa keksimälläsi kokonaisluvulla?

Määritelmä A.3 Kokonaisluku a on *jaollinen* positiivisella kokonaisluvulla b, jos on olemassa sellainen kokonaisluku q, että

$$a = qb.$$

Tällöin sanotaan, että luku b jakaa luvun a. Tästä käytetään merkintää $b \mid a$. Lisäksi, jos luku a ei ole jaollinen luvulla b merkitään $b \nmid a$.

Huomautus A.4 Määritelmä A.3 pätee myös kokonaisluvun b ollessa negatiivinen tai nolla. Kokonaislukujen jaollisuutta tutkittaessa selkeyden vuoksi kuitenkin rajoitetaan, että luku b on aina positiivinen kokonaisluku.

Esimerkki A.5 Koska $15 = 3 \cdot 5$, niin luku 15 jaollinen luvulla 5.

Esimerkki A.6 Luku 19 ei ole jaollinen luvulla 6, sillä

$$3 \cdot 6 = 18 < 19 \qquad \text{ja} \qquad 4 \cdot 6 = 24 > 19.$$

Ei siis ole olemassa sellaista kokonaislukua q, että $19 = q \cdot 6$.

Pohdinta A.7 Pitävätkö seuraavat väitteet paikkaansa? Muista perustelut.

a) $3 \mid 197$

b) $9 \mid -180$

c) $7 \nmid 168$

d) Jos $c \mid a$ ja $c \mid b$, niin $c \mid a + b$.

e) Jos $b \mid a$ ja $d \mid c$, niin $b + d \mid a + c$.

A.1.1 Harjoitustehtäviä

1. Ovatko seuraavat luvut jaollinen luvulla 16? Muista perustelut.

   (a) 96

   (b) -48

   (c) 33

   (d) 0

2. Sara tutkii luvun 18 ja 54 jaollisuutta. Hän huomaa, että molemmat luvut ovat jaollisia luvuilla 3 ja 6. Tästä hän päättelee että, jos kokonaisluku on jaollinen luvulla 3 se on jaollinen myös luvulla 6. Pohdi, onko Saran tekemä päättely oikein?

3. Olkoon a ja n kokonaislukuja sekä c positiivinen kokonaisluku. Jaollisuuden yksi perusominaisuus voidaan esittää seuraavalla tavalla:

   $$\text{Jos } c \mid a, \text{ niin } c \mid na.$$

   (a) Selitä kyseinen jaollisuuden perusominaisuus sanallisesti.

   (b) Todista, että kyseinen perusominaisuus pätee. Muista matemaattisen todistuksen rakenne.

A.2 Jakoyhtälö

Kokonaislukua jaettaessa kokonaisluvulla ei jakolaskun tulos ole välttämättä kokonaisluku. Tällöin jakolaskusta jää jakojäännös. Jaollisuuden määritelmästä saadaan muodostettua jakoyhtälö lisäämällä siihen jakojäännös. Jakoyhtälö on lukuteorian yksi tärkeimmistä työkaluista.

Pohdinta A.8 Kirjoja on 164 ja ne halutaan pakata kahdeksan kirjan pakkauksiin. Kuinka monta pakkausta saadaan ja kuinka monta kirjaa jää yli? Kirjoita yhtälö, jossa kirjojen lukumäärä esitetään pakkauksiin tulevien kirjojen lukumäärän, pakkausten lukumäärän ja ylijääneiden kirjojen lukumäärän avulla.

Määritelmä A.9 Olkoon a kokonaisluku ja b positiivinen kokonaisluku. Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut q ja r, että

$$a = qb + r, \qquad \text{missä } 0 \leq r < b.$$

Yhtälöä kutsutaan *jakoyhtälöksi*.

Sanotaan, että jakoyhtälössä luku a on jaettava ja luku b jakaja. Lukua q kutsutaan osamääräksi, kun luku a jaetaan luvulla b. Lisäksi lukua r sanotaan jakojäännökseksi.

Esimerkki A.10 Luku 37 jaetaan luvulla 7, jolloin jakoyhtälöksi saadaan

$$37 = 5 \cdot 7 + 2.$$

Jakoyhtälöstä nähdään, että osamäärä on 5 ja jakojäännös 2.

Mallitehtävä A.11 Kirjoita jakoyhtälö lukujen 200 ja 21 jakolaskun tulokselle.

Ratkaisu: Huomataan, että luku 21 menee 9 kertaa lukuun 200. Tällöin osamäärä on siis 9. Lasketaan osamäärän ja jakajan tulo: $9 \cdot 21 = 189$. Jakojäännös saadaan vähentämällä jaettavasta saatu tulo: $200 - 189 = 11$.

Jakoyhtälöksi saadaan

$$200 = 9 \cdot 21 + 11.$$

Pohdinta A.12 Alla on esitetty jakoyhtälön todistus. Tarkastele todistusta ja vastaa siihen liittyviin kysymyksiin.

Oletus: Luku a on kokonaisluku ja luku b positiivinen kokonaisluku.

Väite: On olemassa sellaiset kokonaisluvut q ja r, että $a = qb + r$ ja $0 \leq r < b$.

Todistus.

1. On olemassa sellainen kokonaisluku q, että $a = qb$. Tällöin $a = qb + 0$.
2. On olemassa sellainen kokonaisluku q, että $qb < a < (q + 1)b$.

   Tällöin $qb < a < qb + b$, joten on olemassa sellainen kokonaisluku r, että $0 < r < b$ ja $a = qb + r$.

□

- Pohdi, miksi todistuksessa on kaksi eri kohtaa? Mitä niissä todistetaan?
- Mitä määritelmää kohdassa 1 on käytetty?
- Selitä sanallisesti, mistä ajatuksesta kohdassa 2 on lähdetty liikkeelle.
- Mitä kohdan 2 eri vaiheissa on tehty, jotta on päästy lopputulokseen?

Pohdinta A.13 Tarkastellaan jakoyhtälöä negatiivisille luvuille. Keijo ja Lari ovat tehneet luvulle −13 seuraavanlaiset jakoyhtälöt:

Keijon jakoyhtälö:

$$-13 = -2 \cdot 5 - 3$$

Larin jakoyhtälö:

$$-13 = -3 \cdot 5 + 2$$

Vertaa, miten Keijon ja Larin tekemät jakoyhtälöt eroavat toisistaan. Pohdi määritelmän avulla kumpi on tehnyt jakoyhtälönsä oikein.

Huomautus A.14 Edellisissä kirjan osissa todistamisen yhteydessä parillisista kokonaisluvuista käytettiin muotoa $2n$ ja parittomista kokonaisluvuista muotoa $2n+1$, missä n on kokonaisluku. Lukujen esitysmuodoissa on käytetty hyväksi jakoyhtälöä. Näiden kahden muodon avulla voidaan ilmaista kaikki kokonaisluvut:

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \cdot 0 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jokainen kokonaisluku voidaan ilmaista jakoyhtälön avulla samaan tapaan myös muissa muodoissa riippuen siitä mitä jaollisuutta tutkitaan.

Pohdinta A.15 Sinulle annetaan tehtäväksi tutkia kokonaislukujen jaollisuutta luvulla 5. Jotta voisit tutkia jaollisuutta yleisessä tapauksessa, kannattaa kokonaisluvut ilmaista yleisissä muodoissa jakoyhtälön avulla, kuten huomautuksessa A.14. Nyt kokonaisluvut kannattaa esittää eri jakojäännösten r avulla muodoissa $5n + r$, missä n on kokonaisluku. Mitä jakojäännöksen r eri arvoja tarvitaan, jotta saadaan esitettyä kaikki kokonaisluvut nollasta eteenpäin? Esitä kyseiset muodot tarvittavien jakojäännösten avulla.

A.2.1 Harjoitustehtäviä

4. Eräällä positiivisella kokonaisluvulla jaettiin luku 49, jolloin jakojäännökseksi jäi 13. Millä luvulla luku 49 on voitu jakaa?

5. Kello on yhdeksän illalla eli 21:00. Kuinka paljon kello oli 773 minuuttia sitten? Käytä apunasi jakoyhtälöä, kun tiedetään, että yksi tunti on 60 minuuttia.

6. Milla on tehnyt seuraavanlaisen todistuksen liittyen jaollisuuteen. Etsi ja korjaa virheet sekä täydennä tarvittaessa puuttuvat kohdat.

   Oletus: n on pariton kokonaisluku.

   Väite: Luku $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4.

   Todistus. n on pariton kokonaisluku. Nyt kokonaisluvut voidaan kirjoittaa muodossa $n = 4q + r$, missä $0 \leq r < 4$. Tällöin parittomia kokonaislukuja ovat $4q + 1$.

   Nyt
   $$(4q + 1)^2 - 1 = 8q^2 + 1 - 1 = 4 \cdot (2q^2)$$

eli on jaollinen luvulla 4. Näin ollen kun n on pariton kokonaisluku, niin $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4. □

A.3 Suurin yhteinen tekijä

Pohdinta A.16 Millä luvuilla luku

$$\frac{24}{40}$$

voidaan supistaa? Pohdi, millä luvulla supistus kannattaa tehdä ja miksi?

Määritelmä A.17 Positiivisen kokonaisluvun a *tekijöiksi* kutsutaan niitä positiivisia kokonaislukuja, joilla luku a on jaollinen. Toisin sanoen luku b on luvun a tekijä, jos ja vain jos $a = qb$, missä q on kokonaisluku.

Pohdinta A.18

a) Määritä lukujen 12 ja 18 kaikki tekijät. Perustele jaollisuuden määritelmän avulla.

b) Pohdi a-kohdan nojalla ovatko seuraavat väitteet tosia.

- Luvuilla 12 ja 18 on neljä yhteistä tekijää.
- Lukujen 12 ja 18 yhteisistä tekijöistä suurin on luku 3.
- Kahdella luvulla on aina vähintään yksi yhteinen tekijä.

Pohdinta A.19 Tehtävänäsi on tehdä hedelmäkoreja. Sinun täytyy käyttää kaikki käytettävissä olevat 12 banaania ja 30 omenaa. Jokaisen hedelmäkorin on oltava samanlainen. Lisäksi hedelmäkoreja on tehtävä mahdollisimman monta. Kuinka monta banaania yhteen hedelmäkoriin voi laittaa?

Määritelmä A.20 Suurin yhteinen tekijä

Suurinta positiivista kokonaislukutekijää, joka jakaa luvut a ja b kutsutaan lukujen a ja b *suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi*. Lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää merkitään $\mathrm{syt}(a, b)$.

Esimerkki A.21 Lukujen 57 ja 76 suurin yhteinen tekijä

Luvun 57 tekijät: $1, 3, 19$ ja 57

Luvun 76 tekijät: $1, 2, 4, 19, 38$ ja 76

Tällöin lukujen yhteiset tekijät ovat 1 ja 19, joista suurin yhteinen tekijä on 19 eli $\mathrm{syt}(57, 76) = 19$.

Huomautus A.22 Suurin yhteinen tekijä voidaan etsiä jakamalla tutkittavat luvut alkulukutekijöihin, mutta alkulukuja käsitellään vasta myöhemmin.

Huomautus A.23 Laskimella suurin yhteinen tekijä saadaan laskettua komennolla gcd. Esimerkiksi $\mathrm{gcd}(63, 27) = 9$. Laskimen komento tulee englanninkielisestä termistä *greatest common divisor*.

Lause A.24 Suurin yhteinen tekijä jakoyhtälössä

Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että luku a ei ole jaollinen luvulla b eli jakoyhtälö on muotoa:

$$a = qb + r, \qquad \text{missä } 0 < r < b.$$

Tällöin pätee $\mathrm{syt}(a, b) = \mathrm{syt}(b, r)$.

Pohdinta A.25 Alla on esitetty lauseeseen A.24 todistus ilman sanallisia perusteluja. Tarkastele todistusta ja vastaa siihen liittyviin kysymyksiin.

Oletus: $a = qb + r$, missä a, q, b ja r ovat positiivisia kokonaislukuja sekä $0 < r < b$.

Väite: $\mathrm{syt}(a, b) = syt(b, r)$

Todistus.

1. Olkoon $c = \mathrm{syt}(a, b)$. Tällöin $a = cs$ ja $b = ct$, missä s ja t ovat positiivisia kokonaislukuja. Nyt

$$r = a - qb = cs - qct = c(s - qt).$$

2. Vastaväite: Olkoon d lukujen b ja r yhteinen tekijä sekä $c < d$. Tällöin $b = du$ ja $r = dv$, missä u ja d ovat positiivisia kokonaislukuja. Nyt

$$a = qb + r = qdu + dv = d(qu + v).$$

Tästä syntyy ristiriita.

$\square$

- Mitä kohdan 1 avulla on saatu todistettua?
- Miksi kohdassa 2 muodostuu ristiriita ja mitä sen avulla on todistettu?

A.3.1 Harjoitustehtäviä

7. Onko seuraavien lukujen suurin yhteinen tekijä 4?
   (a) 16 ja 36
   (b) 8 ja 62
   (c) 12 ja 24
   (d) 20 ja 28

8. Sinulla on käytössäsi kaksi kangasrullaa, jossa toisessa on 45 m ja toisessa 60 m. Kankaista halutaan leikata mahdollisimman suuria samanmittaisia paloja. Kuinka suureksi yksi pala on leikattava, kun ylimääräistä kangasta ei saa jää?

9. (a) Määritä kaksi lukua, joiden suurin yhteinen tekijä on 32.
   (b) Määritä kolme lukua, joiden suurin yhteinen tekijä on 40.

A.4 Eukleideen algoritmi

Algoritmi on jonkin tietyn ongelman ratkaisemiseksi tarkoitettu hyvin yksityiskohtaisesti esitetty ohje tai menetelmä. Esimerkiksi jakolaskun laskeminen allekkain on algoritmi, joka helpottaa jakolaskujen laskemista.

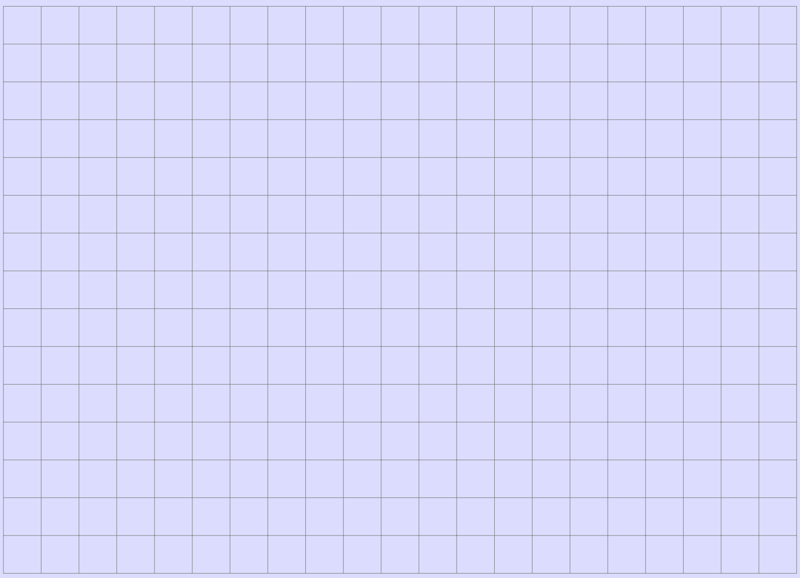
Pohdinta A.26 Tehtävänä on täyttää suorakulmion muotoinen 21×15 pinta-ala ohjeiden mukaan käyttämällä ainoastaan neliöitä. Tee neliöt ruudukkoa apuna käyttäen.

a) Piirrä suorakulmion sisälle mahdollisimman suuri neliö niin, että jäljelle jäävä pinta-ala on yhtenäinen. Jos samankokoisia neliöitä mahtuu alueeseen useampia, piirrä niin monta kuin on mahdollista.

   Piirrä jäljelle jääneeseen pinta-alaan, samaan tapaan kuin edellä, mahdollisimman suuri neliö niin monta kertaa kuin on mahdollista. Toista tämä menettely aina jäljelle jääneelle alueelle niin monta kertaa, kunnes suorakulmio on kokonaan täytetty.

b) Muodosta jakoyhtälö suorakulmion leveydelle jokaisessa a)-kohdan vaiheesta. Huomaatko jonkin säännönmukaisuuden? Kuinka suuri on viimeinen jakojäännös ennen kuin jako menee tasan?

c) Pohdi tilannetta, jossa suorakulmio halutaan täyttää vain samankokoisilla mahdollisimman suurilla neliöillä. Mikä on kyseisen neliön sivunpituus? Mikä tämän neliön sivun pituus itseasiassa on, jos tarkastellaan alkuperäisen suorakulmion mittojen tekijöitä?



Pohdintatehtävän A.26 jakoyhtälöt muodostavat algoritmin, jonka avulla saadaan määritettyä kahden kokonaisluvun suurin yhteinen tekijä. Jokainen jakoyhtälö tehdään edellistä jakoyhtälöä apuna käyttäen. Algoritmin edetessä jakojäännökset pienenevät ja lopulta algoritmi päättyy. Kyseinen algoritmi on hyvä väline erityisesti suurten lukujen suurimman yhteisen tekijän määrittämisessä. Seuraavassa lauseessa kyseinen algoritmi on esitetty muuttujien avulla yleisessä muodossa.

Lause A.27 Eukleideen algoritmi

Luvut a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja ja $a > b$. Lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä saadaan käyttämällä seuraavaa algoritmia. Luku a jaetaan luvulla b. Jos jakolasku ei mene tasan jää jakojäännös. Tämä merkitään jakoyhtälön mukaisessa muodossa:

$$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 \le r_1 < b.$$

Jos jakolasku ei mene tasan, niin luku b jaetaan edellisen jakolaskun jakojäännöksellä:

$$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < r_1.$$

Jos tämäkään jakolasku ei mene tasan, niin edellisen jakolaskun jakaja jaetaan jakojäännöksellä:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \le r_3 < r_2.$$

Samaan tapaan jatketaan aina niin pitkälle, että syntyvä jakojäännös on nolla:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \qquad 0 \le r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n. \end{aligned}$$

Viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös r_n on lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä.

Pohdinta A.28 Alla on esitetty Eukleideen algoritmi luvuille 1359 ja 633. Täydennä puuttuvat kohdat. Lisäksi tehtävänäsi on täydentää lauseen A.24 avulla suurimpien yhteisten tekijöiden tarkastelut jokaista jakoyhtälöä kohden.

$$\begin{aligned} 1359 &= 2 \cdot 633 + 93 \qquad && \mathrm{syt}(1359, 633) = \mathrm{syt}(633, 93) \\ 633 &= \_ \cdot 93 + \_ && \mathrm{syt}(633, 93) = \mathrm{syt}(93, \_) \\ \_ &= \_ \cdot \_ + \_ && \mathrm{syt}(\_, \_) = \mathrm{syt}(\_, \_) \\ \_ &= \_ \cdot \_ + \_ && \mathrm{syt}(\_, \_) = \mathrm{syt}(\_, \_) \\ \_ &= \_ \cdot \_ && \mathrm{syt}(\_, \_) = \_ \end{aligned}$$

Vastaus: syt(1359, 633) = _

Pohdi, miksi algoritmi antaa tutkittujen lukujen suurimman yhteisen tekijän.

Pohdinta A.29 Tehtävänä on ollut osoittaa, että murtoluku muotoa

$$\frac{27n+4}{18n+3}$$

ei supistu. Alla on esitetty vaillinainen todistus ilman sanallisia perusteluja. Tehtävänäsi on selittää todistuksen vaiheet. Kiinnitä erityistä huomiota mihin todistuksella halutaan päätyä, jotta todistus osoittaisi sen mitä haluttiin.

Todistus. Todistuksen ensimmäinen kohta

$$\begin{aligned} 27n+4 &= 1\cdot(18n+3)+r \\ r &= 27n+4-(18n+3) \\ r &= 9n+1 \end{aligned}$$

Todistuksen toinen kohta

$$\begin{aligned} 27n+4 &= 1\cdot(18n+3)+(9n+1) \\ 18n+3 &= 2\cdot(9n+1)+1 \\ 9n+1 &= 1\cdot(9n+1) \end{aligned}$$

□

A.4.1 Harjoitustehtäviä

10. Määritä Eukleideen algoritmilla lukujen 717 ja 1623 suurin yhteinen tekijä.

11. Miro ja Petteri saavat vanhemmiltaan 375 karkkia. He ovat sopineet, että Miro saa 45 karkkia enemmän kuin Petteri. He aikovat jakaa karkit keskenään mahdollisimman suuriin samankokoisiin pusseihin. Kuinka monta karkkia yhteen pussiin voi laittaa, jotta pojat saavat sovitun määrän karkkeja.

12. Määrittäessä kolmelle suurelle luvulle suurinta yhteistä tekijää voi apuna käyttää tietoa:
$$\mathrm{syt}(a,b,c)=\mathrm{syt}(\mathrm{syt}(a,b),c).$$
Keksi kolme suurta lukua ja määritä niiden suurin yhteinen tekijä käyttäen yllä mainittua tietoa ja Eukleideen algoritmia.

A.5 Pienin yhteinen monikerta

Luvulla on *monikertoja*, jotka saadaan kertomalla luku luonnollisilla luvuilla. Esimerkiksi luvun 3 monikerrat ovat $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$. Monikerrat muodostavat luvun kertotaulun.

Pohdinta A.30 Tehtävänä on laskea summa $\frac{5}{6} + \frac{2}{15}$. Aloita laventamalla murtoluvut samannimisiksi niin, että nimittäjä on pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku. Perustele, miksi valitsit kyseisen nimittäjän. Mikä on summan arvo?

Pohdinta A.31 Salla ja Pinja käyvät välillä iltaisin hoitamassa kumpikin omien tuttujensa lapsia. Salla saa yhdestä hoitokerrasta 35 euroa ja Pinja taas 20 euroa. Molemmat saavat kuitenkin kuukaudessa aina saman verran rahaa. Mikä on pienin summa, jonka he voivat saada kuukaudessa. Muista perustelut.

Määritelmä A.32 Pienintä positiivista kokonaislukua, joka on jaollinen luvuilla a ja b kutsutaan lukujen a ja b *pienimmäksi yhteiseksi monikerraksi* tai *pienimmäksi yhteiseksi jaettavaksi*. Lukujen a ja b pienintä yhteistä monikertaa merkitään $\text{pym}(a, b)$ tai $\text{pyj}(a, b)$.

Esimerkki A.33 Lukujen 20 ja 32 pienin yhteinen monikerta saadaan määritettyä tarkastelemalla lukujen monikertoja:

luvun 20 monikerrat: $20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, \underline{160}, 180, 200, \ldots$ ja

luvun 32 monikerrat: $32, 64, 96, 128, \underline{160}, 192, 224, \ldots$.

Monikerroista pienin yhteinen on siis $\text{pym}(20, 32) = 160$.

Pohdinta A.34

a) Tehtävänäsi on täydentää seuraava yhtälö:

$$\mathrm{syt}(a,b)\cdot\mathrm{pym}(a,b) = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Lähde kokeilemaan yhtälön vasemmalle puolelle pieniä kokonaislukuja ja pohdi, mitä yhtälön oikealle puolelle tulee yleisessä muodossa.

Huomautus: Saatu tulos voidaan todistaa käyttämällä myöhemmin opeteltavaa alkulukuhajotelmaa.

b) Miten voisit hyödyntää saamaasi tulosta ja Eukleideen algoritmia määrittäessä lukujen pienintä yhteistä monikertaa?

Pohdintatehtävässä A.34 todettiin, että pienin yhteinen monikerta voidaan määrittää myös suurimman yhteisen tekijän avulla. Tämä on esitetty lauseessa A.35.

Lause A.35 Lukujen a ja b pienin yhteinen monikerta saadaan jakamalla lukujen a ja b tulo niiden suurimmalla yhteisellä tekijällä:

$$\mathrm{pym}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{syt}(a,b)}.$$

Esimerkki A.36 Lukujen 20 ja 32 pienin yhteinen monikerta voidaan määrittää seuraavalla tavalla, kun tiedetään $\mathrm{syt}(20,32) = 4$:

$$\mathrm{pym}(20,30) = \frac{20\cdot 32}{\mathrm{syt}(20,32)} = \frac{\cancel{20}\cdot 32}{\cancel{4}} = \frac{5\cdot 32}{1} = 160.$$

Huomautus A.37 Laskimella pienin yhteinen monikerta saadaan laskettua komennolla lcm. Esimerkiksi $\mathrm{lcm}(21,45) = 315$. Laskimen komento tulee englanninkielisestä termistä *least common multiple*.

Pohdinta A.38 Kimmo haluaa rakentaa pihalleen tiiliskivistä neliönmuotoisen terassin. Hänellä on käytössään tiiliä, joiden näkyviin jäävät mitat ovat 150 mm ja 285 mm. Hän haluaa asettaa tiilet niin, että kaikki ovat samaan suuntaan ja tiilien välissä ei ole rakoa. Kimmo on laskenut, kuinka suuri terassin pinta-alasta tulee. Tehtävänäsi on järjestää laskun välivaiheet oikeaan järjestykseen ja selittää toiselle opiskelijalle, mitä eri välivaiheissa on tehty.

1. $135 = 15 \cdot 9 + 0$
2. $\text{pym}(150, 285) = 2850$
3. $2850\text{ mm} \cdot 2850\text{ mm} = 8122500\text{ mm}^2$
4. $285 = 1 \cdot 150 + 135$
5. Pinta-ala on noin 8,1 m^2
6. $\text{syt}(150, 285) = 15$
7. $\frac{285 \cdot 150}{15} = 2850$
8. $150 = 1 \cdot 135 + 15$

A.5.1 Harjoitustehtäviä

13. Jenni ja Peppi juoksevat usein yhdessä. Jennin juoksunopeus on 8 kierrosta viidessä minuutissa ja Pepin 9 kierrosta kuudessa minuutissa. He juoksevat yhdessä aloittaen ja lopettaen juoksemisen samaan aikaan. Molemmat juoksevat kokonaisia kierroksia. Kuinka kauan he ovat vähintään juosseet? Kuinka monta kierrosta he vähintään juoksevat?
14. Määritä lukujen 45 ja 72 pienin yhteinen monikerta lauseen A.35 avulla.
15. Erään luvun ja luvun 48 suurin yhteinen tekijä on 12 ja pienin yhteinen monikerta on 144. Mikä luku on kyseessä?

B Opettajan opas

Opettajan opas on tiivis paketti opettajalle, jossa on materiaalia aiheiden käsittelyä varten. Opettajan oppaasta löytyy esimerkki aiheiden tuntijaosta ja jokaiseen oppituntiin liittyvät keskeisimmät oppimistavoitteet. Lisäksi jokaisen aiheen pohdintatehtävien käsittelyyn on esitetty mahdollisia vinkkejä ja johdattelukysymyksiä.

B.1 Tuntijako

Opetusmateriaalin aiheet on jaettu kahteen eri aihekokonaisuuteen. Tuntijako on esitetty 75 ja 45 minuutin oppitunneille. Tuntijako on suuntaa-antava, joten tarvittaessa sitä voi muuttaa.

Tunnin aihe	45min	75min
Jaollisuus ja jakoyhtälö	2	1
Suurin yhteinen tekijä, Eukleideen algoritmi ja pienin yhteinen monikerta	2	2

Opetusmateriaalin pohdintatehtävät on tarkoitus käydä oppituntien aikana, jotta niistä voidaan keskustella ja opiskelijaa voidaan ohjata oikeaan suuntaan. Opiskelijat voivat miettiä pohdintatehtäviä yksin, pareittain tai pienissä ryhmissä. Harjoitustehtäviä voi tehdä tunnilla, antaa kotitehtäviksi sekä käyttää tarvittaessa kertaamiseen.

B.2 Jaollisuus ja jakoyhtälö

Oppitunnin tavoitteena on, että opiskelija:

- hallitsee jaollisuuden käsitteen,
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön avulla.

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on herätellä opiskelija pohtimaan kokonaislukujen jaollisuutta aiempien tietojensa pohjalta. Opiskelijoita voi huomauttaa pohtimaan jaollisuutta tarkasti jokaisen luvun kohdalla. Erityisesti opiskelijoiden huomion voi kiinnittää negatiiviseen lukuun sekä nollaan.

Ratkaisu: Kun ensimmäisessä laatikossa olevat luvut jakaa kolmella jako menee tasan. Toisessa laatikossa, kun luvut jaetaan seitsemällä, jako menee tasan.

Pohdinta A.2

Tehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelijat miettimään kerto- ja jakolaskun yhteyttä. Pohdintatehtävän avulla opiskelijan tulisi itse huomata niiden yhteys. Näin saadaan ohjattua opiskelijan ajatusta kohti jaollisuuden määritelmää. Jo tässä vaiheessa on hyvä muistuttaa opiskelijoita perustelujen tärkeydestä.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
24 &= 1 \cdot 24 \\
24 &= 2 \cdot 12 \\
24 &= 3 \cdot 8 \\
24 &= 4 \cdot 6
\end{aligned}
$$

Jaettaessa lukua 24 millä tahansa keksityistä luvuista jako menee tasan.

Pohdinta A.7

Tehtävän tarkoituksena on laittaa opiskelija miettimään jaollisuuden merkintöjä sekä käyttämään määritelmää apuna perusteluissa. Kaksi viimeistä väittämää on huomattavasti hankalampia tehtäviä, joihin voi tarvittaessa antaa vinkkejä opiskelijoille. Opiskelijoita voi kehottaa miettimään jaollisuuden määritelmän avulla lukujen merkitsemistä yleisessä muodossa. Opiskelijoille voi myös tarvittaessa kertoa viimeisen väitteen olevan epätosi ja todistamaan asia vastaesimerkin kautta. Opiskelijoille kannattaa painottaa, että vain epätodet väitteet voi todistaa esimerkillä.

Ratkaisut:

a) Tosi, sillä $168 = 3 \cdot 56$.

b) Tosi, sillä $-180 = -20 \cdot 9$.

c) Epätosi, sillä $168 = 7 \cdot 24$.

d) Tosi, sillä luvut voidaan kirjoittaa muodoissa $a = cq$ ja $b = cr$, missä q ja r ovat kokonaislukuja. Nyt

$$
\begin{aligned}
a + b &= cq + cr \\
&= c(q + r).
\end{aligned}
$$

Kokonaislukujen q ja r summa on kokonaisluku, joten jos $c \mid a$ ja $c \mid b$, niin $c \mid a + b$.

e) Epätosi, sillä esimerkiksi, kun $a = 4$, $b = 2$, $c = 6$ ja $d = 2$, niin $b + d = 4$ ja $a + c = 10$. Näin ollen $2 \mid 4$ ja $2 \mid 6$, mutta $4 \nmid 10$.

Pohdinta A.8

Tehtävä on arkielämään liittyvä sanallinen tehtävä. Se tuo konkreettisen esimerkin tilanteesta, jossa jako ei mene tasan. Sen avulla pyritään saamaan opiskelija itse hoksaamaan jakoyhtälön rakenne ja merkitseminen aiemmin opetellun jaollisuuden määritelmän avulla. Lopuksi opiskelijoita kannattaa kehottaa tarkistamaan päteekö hänen muodostama yhtäsuuruus.

Ratkaisu: Pakkauksia saadaan 20 ja kirjoja jää yli 4. Yhtälö: $164 = 20 \cdot 8 + 4$

Pohdinta A.12

Tehtävässä on esitetty jakoyhtälön todistus. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija tutustuu jakoyhtälön todistukseen ja ymmärtää, mitä tietoa se sisältää. Opiskelijoita voi kehottaa käymään todistuksen läpi kokonaisuudessaan vaihe vaiheelta muiltakin kuin kysymyksien osalta.

Ratkaisut:

a) Täytyy olla omat kohdat tilanteelle, että a on jaollinen luvulla b sekä tilanteelle, että a ei ole jaollinen luvulla b. Kohdissa todistetaan, että molemmissa tilanteissa on olemassa jakoyhtälön mukaiset luvut q ja r.

b) Ensimmäisessä kohdassa on käytetty jaollisuuden määritelmää.

c) Toisessa kohdassa lähdetään liikkeelle ajatuksesta, että kun jako ei mene tasan on olemassa a, joka on kahden monikerran välissä.

d) Ensin avataan sulut, joka jälkeen a:n paikalle sijoitetaan sen yhtälö. Näin ollen voidaan vähentää puolittain qb, jolloin saadaan haluttu lopputulos.

Pohdinta A.13

Negatiivisten lukujen jakoyhtälö tuottaa usein hankaluuksia opiskelijoille. Tehtävän tarkoituksena on esitellä tähän liittyvä yleinen virhe, joka usein tehdään. Tavoitteena on ennaltaehkäistä kyseinen virhe opiskelijoilta. Tehtävässä opiskelijan on pohdittava tarkemmin myös jakoyhtälöön liittyviä rajoituksia. Opiskelijoita voi vinkata katsomaan jakoyhtälön määritelmää ja erityisesti siinä esiintyviä rajoituksia. Lisäksi opiskelijoiden kanssa voi miettiä, miten Keijon jakoyhtälöstä saadaan Larin jakoyhtälö. Tämä voi auttaa opiskelijoita ymmärtämään jakoyhtälöiden eron.

Ratkaisu: Keijon jakoyhtälössä jakojäännös on negatiivinen ja Larin jakoyhtälössä positiivinen. Lisäksi molemmissa on eri osamäärä. Keijon jakoyhtälö $-13 = -2 \cdot 5 - 3$ on virheellinen, sillä jakojäännöksen on oltava positiivinen.

Pohdinta A.15

Tehtävässä on tarkoituksena tarkastella kokonaislukujen yleistä muotoa, jota voi käyttää todistuksissa apuna. Opiskelijoita voi vinkata käyttämään apuna jakoyhtälön määritelmää. Lisäksi opiskelijoiden kanssa voi pohtia jo lukujen parillisuutta ja parittomuutta eri muodoissa.

Ratkaisu: $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ ja $5n + 4$.

B.3 Suurin yhteinen tekijä, Eukleideen algoritmi ja pienin yhteinen monikerta

Oppitunnin tavoitteena on, että opiskelija:

- hallitsee suurimman yhteisen tekijän käsitteen,
- osaa määrittää suurimman yhteisen tekijän Eukleideen algoritmin avulla,
- hallitsee pienimmän yhteisen monikerran käsitteen ja osaa määrittää sen.

Pohdinta A.16

Tehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelija tutun supistamisen kautta kohti suurimman yhteisen tekijän käsitettä. Tehtävä antaa konkreettisen tarpeen suurimmalle yhteiselle tekijälle. Opiskelijoille kannattaa painottaa erityisesti tehtävän kysymystä miksi.

Ratkaisu: Luku voidaan supistaa luvuilla 1, 2, 4, ja 8. Supistus kannattaa tehdä luvulla 8, sillä se on suurin kyseisistä luvuista ja näin ollen murtolukuun tulee mahdollisimman pieniä lukuja. Supistettaessa luvulla 8 saadaan luku $\frac{3}{5}$.

Pohdinta A.18

Pohdintatehtävässä opiskelijan on pohdittava tekijän käsitettä määrittämällä kahden luvun tekijät. Tehtävässä on lisäksi väittämiä, joiden tarkoituksena on johdatella opiskelija pohtimaan suurimman yhteisen tekijän käsitettä. Tehtävän viimeisen kohdan on tarkoitus tuoda vielä esille, että jokaisella luvulla on yhteisenä tekijänä 1.

Ratkaisut:

a) Luvun 12 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6 ja 12. Luvun 18 tekijät ovat 1, 2, 3, 6, 9 ja 18.

b)
- Tosi, sillä yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3 ja 6.
- Epätosi, sillä suurin yhteinen tekijä on 6.
- Tosi, sillä kokonaisluvuilla on aina tekijänä luku 1.

Pohdinta A.19

Tehtävän tarkoituksena on saada opiskelija pohtimaan käytännön esimerkin kautta suurimman yhteisen tekijän käsitettä. Tehtävässä opiskelija pääsee konkreettisen esimerkin kautta miettimään omalla strategiallaan tehtävään vastausta. Opiskelijoita voi tarvittaessa vinkata esimerkiksi hahmottelemaan tilannetta piirtämällä. Oppilaiden kanssa voi olla hyvä koota eri ratkaisuvaihtoehtoja, mitä opiskelijoilla on tullut esille.

Ratkaisu: Koreja täytyy olla kuusi, joten jokaiseen hedelmäkoriin voi laittaa kaksi banaania.

Pohdinta A.25

Tehtävässä on esitetty lauseen A.24 todistus. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija ymmärtäisi lauseen sisältämän matemaattisen merkityksen. Opiskelijoita voi kehottaa käymään todistuksen läpi myös vaihe vaiheelta.

Ratkaisut:

- Todistuksen 1 kohdassa osoitetaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä c on luvun r tekijä, jolloin luku c on myös lukujen b ja r yhteinen tekijä.

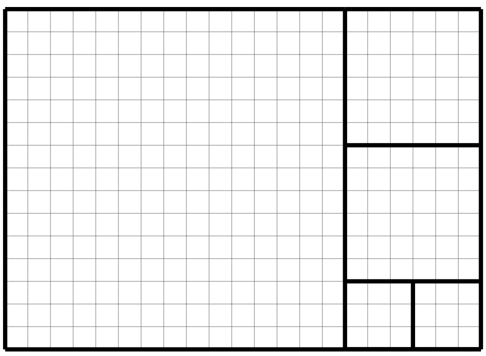
- Kohdassa 2 osoitettiin luvun d olevan luvun a tekijä. Näin ollen luku d on lukujen a ja b yhteinen tekijä. Ristiriita syntyy koska vastaväitteen mukaan $c < d$, jossa c on lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä. Näin ollen vastaväite on väärä, jolloin luku c on lukujen b ja r yhteisistä tekijöistä suurin.

Pohdinta A.26

Tehtävässä esitellään Eukleideen algoritmin ideaa tasogeometrian kautta. Opiskelijan tavoitteena on hahmottaa Eukleideen algoritmin idea, ennen sen varsinaista määrittelemistä. Tehtävää voi tarvittaessa aloitella opettajajohtoisesti, jotta kaikki opiskelijat lähtevät jakamaan pinta-alaa osiin oikealla tavalla.

Ratkaisut:

a)



b)

$$\begin{aligned} 21 &= 1 \cdot 15 + 6 \\ 15 &= 2 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Jakoyhtälössä on aina edellisen jakoyhtälön jakaja jaettavana ja jakojäännös jakajana. Viimeinen jakojäännös on 3.

c) Neliön sivunpituus olisi 3. Kyseinen sivunpituus on alkuperäisten mittojen suurin yhteinen tekijä.

Pohdinta A.28

Tehtävässä on annettu valmis pohja, joka opiskelijan tulee täyttää ja samalla pohtia Eukleideen algoritmin toimimista suurimman yhteisen tekijän löytämiseen. Tehtävän tarkoituksena on laittaa opiskelija pohtimaan tarkemmin jokaista Eukleideen algoritmin vaihetta. Tehtävä varmistaa, että jokainen osaa käyttää Eukleideen algoritmia.

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} 1359 &= 2 \cdot 633 + 93 & \mathrm{syt}(1359, 633) &= \mathrm{syt}(633, 93) \\ 633 &= 6 \cdot 93 + 75 & \mathrm{syt}(633, 93) &= \mathrm{syt}(93, 75) \\ 93 &= 1 \cdot 75 + 18 & \mathrm{syt}(93, 75) &= \mathrm{syt}(75, 18) \\ 75 &= 4 \cdot 18 + 3 & \mathrm{syt}(75, 18) &= \mathrm{syt}(18, 3) \\ 18 &= 6 \cdot 3 & \mathrm{syt}(18, 3) &= 3 \end{aligned}$$

Algoritmi perustuu peräkkäisiin jakoyhtälöihin. Lauseen A.24 avulla saadaan yhteys eri jakoyhtälöiden lukujen suurimmille yhteisille tekijöille. Huomataan, että ensimmäisen jakoyhtälön jaettavan ja jakajan suurin yhteinen tekijä on yhtä suuri kuin viimeisessä jakoyhtälössä.

Pohdinta A.29

Tehtävän tarkoituksena on korostaa opiskelijalle sanallisen selityksen merkitystä jaollisuuteen liittyvissä todistuksissa. Tehtävässä murtoluvussa esiintyy yleisessä muodossa olevia lukuja, joiden käsittely saattaa tuottaa opiskelijoille hankaluuksia. Tehtävä soveltuu parhaiten haastetta kaipaaville opiskelijoille.

Ratkaisu:

- Todistuksen ensimmäisessä kohdassa tehdään jakoyhtälö osoittajan ja nimittäjän avulla. Jakoyhtälöstä ratkaistaan jakojäännös yhtälönratkaisulla.
- Todistuksen toisessa kohdassa jakoyhtälöön sijoitetaan ratkaistu jakojäännös. Eukleideen algoritmin avulla saadaan määritettyä suurin yhteinen tekijä, joka on 1. Suurimman yhteisen tekijän ollessa 1 murtoluku on jo sievimmässä muodossa eikä enää supistu.

Pohdinta A.30

Tehtävässä johdatellaan opiskelijaa laventamisen kautta kohti pienimmän monikerran käsitettä. Tehtävä antaa konkreettisen tarpeen pienimmälle yhteiselle monikerralle.

Ratkaisu: Luku 30 on yhteisistä monikerroista pienin. Näin ollen $\frac{5}{6} + \frac{2}{15} = \frac{25}{30} + \frac{4}{30} = \frac{29}{30}$.

Pohdinta A.31

Tehtävä on sanallinen tehtävä liittyen pienimpään yhteiseen monikertaan. Tehtävän tarkoituksena on tuoda esille oikea tilanne, jossa täytyy miettiä pienintä yhteistä tekijää. Tehtävällä pyritään havainnollistamaan pienimmän yhteisen tekijän käsitettä, jotta opiskelija sisäistäisi käsitteen. Opiskelijoita voi tarvittaessa ohjata visualisoimaan monikertoja lukusuoralle.

Ratkaisu: Lukujen pienin yhteinen monikerta on 140 ja näin ollen 140 euroa on pienin summa, jonka he voivat saada kuukaudessa.

Pohdinta A.34

Tehtävässä johdatellaan opiskelijaa kohti lausetta A.35. Tarkoituksena on, että opiskelija itse huomaisi suurimman yhteisen tekijän ja pienimmän yhteisen monikerran yhteyden. Lisäksi tehtävän tavoitteena on saada opiskelija pohtimaan saadun kaavan hyödyntämistä laskuihin. Opiskelijoille voi tarvittaessa antaa valmiiksi tutkittavia lukuja, joista on selkeä nähdä säännönmukaisuus. Esimerkiksi opiskelijalle voi antaa tutkittavaksi luvut 4 ja 6 sekä 2 ja 3.

Ratkaisut:

a) $\text{syt}(a, b) \cdot \text{pym}(a, b) = a \cdot b$

b) Eukleideen algoritmin avulla voidaan laskea luvun a ja b suurin yhteinen tekijä ja jakaa sillä lukujen a ja b tulo.

Pohdinta A.38

Tehtävässä tuodaan esille lauseen A.35 käyttöä. Tehtävän tarkoituksena on myös koota suurimman yhteisen tekijän ja pienimmän yhteisen monikerran käsitteiden merkitys. Tehtävässä täytyy laittaa laskun välivaiheet oikeaan järjestykseen. Opiskelijoita voi ohjata etsimään vaihtoehdoista kokonaisuuksia kuten Eukleideen algoritmin.

Ratkaisu: Oikea järjestys 4., 8., 1., 6., 7., 2., 3., ja 5.

C Harjoitustehtävien vastaukset

1. a) On, b) On, c) Ei ole ja d) On.

2. Päättely on väärin, sillä esimerkiksi luku 9 on jaollinen luvulla 3, mutta ei luvulla 6.

3. (a) Jos luku a on jaollinen luvulla c, niin kerrottaessa lukua a kokonaisluvulla n on se edelleen jaollinen luvulla c.

   (b) oletus: $c \mid a$, kun c on positiivinen kokonaisluku ja a kokonaisluku.
   väite: $c \mid na$, kun n on kokonaisluku.

   Todistus. Oletuksen mukaan $c \mid a$, joten voidaan kirjoittaa $a = qc$, kun q on kokonaisluku. Nyt
   $$na = n \cdot (qc) = (nq) \cdot c.$$
   Kokonaislukujen n ja q tulo on kokonaisluku, joten luku na on jaollinen luvulla c eli väite $c \mid na$ pitää paikkaansa.

   □

4. Luvuilla 18 tai luvulla 36.

5. Kello on 8:07.

6. Oletus: n on pariton kokonaisluku.
   Väite: Luku $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4.

   Todistus. n on pariton kokonaisluku. Nyt kokonaisluvut voidaan kirjoittaa muodossa $n = 4q + r$, missä $0 \leq r < 4$. Kyseiset muodot ovat $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ ja $4n + 3$. Tällöin parittomia kokonaislukuja ovat $4q + 1$ ja $4q + 3$ muotoa olevat luvut.

   Nyt
   $$(4q + 1)^2 - 1 = 16q^2 + 2 \cdot 4q \cdot 1 + 1^2 - 1 = 16q^2 + 8q = 4 \cdot (4q^2 + 2q)$$
   ja
   $$(4q + 3)^2 - 1 = 16q^2 + 2 \cdot 4q \cdot 3 + 3^2 - 1 = 16q^2 + 24q + 8 = 4 \cdot (4q^2 + 6q + 2)$$
   eli on jaollinen luvulla 4. Näin ollen kun n on pariton kokonaisluku, niin $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4. □

   (Tehtävän pystyisi ratkaisemaan myös muodolla $2n + 1$.)

7. a) On, b) On, c) Ei ole ja d) On.

8. 15 m pituiseksi

9. a) Esim. 64 ja 96 b) Esim. 80, 120 ja 160

10. $\mathrm{syt}(717, 1623) = 3$
11. 15 karkkia
12. Esim. 354, 1372 ja 3725, jolloin $\mathrm{syt}(354, 1372) = 2$ ja $\mathrm{syt}(2, 3725) = 1$.
13. He ovat juosseet 30 min. Jenni juoksi vähintään 48 kierrosta ja Peppi 45 kierrosta.
14. $\mathrm{pym}(45, 72) = 360$
15. luku 36