



TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

**RAKENTEEN MALLINTAMINEN
PALKKIELEMENTILLÄ, SOLIDIELEMENTILLÄ
JA KUORIELEMENTILLÄ**

Antti Säilynoja

Ohjaaja: Hannu Lahtinen

KONETEKNIIKAN TUTKINTO-OHJELMA

Kandidaatintyö 2019

TIIVISTELMÄ

Rakenteen mallintaminen palkkielementillä, solidielementillä ja kuorielementillä

Antti Säilynoja

Oulun yliopisto, Konetekniikan tutkinto-ohjelma

Kandidaatintyö + 2019, 31 s.

Työn ohjaaja yliopistolla: Hannu Lahtinen

Tämän kandidaatin tavoite on tutustua rakenteen mallintamiseen elementtimenetelmällä ja on toteutettu kirjallisuuskatsauksena. Työssä käydään läpi kolme eri elementtityyppiä ja annetaan lukijalle vastaus näiden keskeisille eroille. Työssä paneudutaan vahvasti fysikaalisiin ilmiöihin, näin lukijalla on myös mahdollisuus huomata mistä nämä elementtien erot muodostuvat. Työn luettuaan lukijalla on käsitys siitä, kuinka nämä elementit eroavat toisistaan ja millaisissa käyttötarkoituksissa niitä tulisi hyödyntää. Lukija osaa myös välttää tulosten vääristymistä tuntemalla elementtien vahvuudet ja heikkoudet.

Asiasanat: Elementtimenetelmä, konetekniikka, kuorielementti, palkkielementti, solidielementti

ABSTRACT

Structure modeling with beam element, solid element and shell element

Antti Säilynoja

University of Oulu, Degree Programme of Mechanical Engineering

Bachelor's thesis 2019, 31 pp.

Supervisor at the university: Hannu Lahtinen

The purpose of this bachelor's thesis is to familiarize with modeling structures with finite element method and it is done with written sources. In this work reader is given an answer how beam, solid and shell element differ from each other. The Thesis is heavily focused in the physical aspect of the topic so the reader can find out from where these differences come from. The Thesis helps to make right decisions to how you should use these elements and how to lessen the distortion of results.

Keywords: Finite element method, mechanical engineering, shell element, beam element, solid element

ALKUSANAT

Työn tarkoituksena on perehtyä elementtimenetelmän perusteisiin lujuusoppi I taustatiedoilla. Kandityön tekeminen alkoi toisen vuoden kevään lopussa ja on jatkunut kesän yli. Motivaationa on toiminut pitempi aika tehdä tätä työtä ja valmistua silti ajallaan tekniikan kandidaatiksi. Haluan kiittää kandityön valvojaa Hannu Lahtista sisällysluettelon tarkistamisesta kesällä.

Oulu, 10.09.2019

Antti Säilynoja
Antti Säilynoja

SISÄLLYSLUETTELO

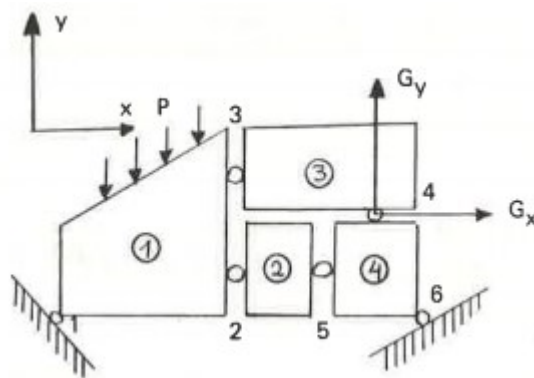
1 JOHDANTO ELEMENTTIMENETELMÄÄN	7
2 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSYHTÄLÖ	8
3 PALKKIELEMENTTI.....	10
3.1 Yleinen palkkielementti	10
3.2 2-Ulotteinen palkkielementti.....	12
3.3 3-Ulotteinen palkkielementti.....	14
4 KUORIELEMENTTI.....	16
4.1 Johdanto kuorielementille	16
4.2 Pyörähdysymmetriset kuorielementit	16
4.3 Tasomaiset kuorielementit	19
5 SOLIDIELEMENTTI	21
5.1 Yleinen kolmidimensioinen siirtymätila	21
5.2 Vakiovenymätetraedri	22
5.3 Tilakoordinaatit	24
5.4 Muita tetraedrielementtejä	26
5.4.1 Parabolinen elementti	26
5.4.2 Kuutiollinen elementti	26
5.5 Suorakulmaiset särmiöelementit	27
5.5.1 Lineaarinen elementti	27
5.5.2 Parabolinen elementti	28
5.5.3 Kuutiollinen elementti	28
5.6 Isoparametriset solidielementit	28
6 YHTEENVETO	30

MERKINNÄT JA LYHENTEET

F	voima
G	liukumoduuli
I	jäyhyysmomentti
L	pituus
M	momentti
N	muotofunktio
k	jousivakio
u	x-koordinaatin suuntainen siirtymä
v	y-koordinaatin suuntainen siirtymä
w	z-koordinaatin suuntainen siirtymä
γ	liukuma
ε	venymä
θ	kiertymä
ν	Poissonin vakio
π	pii
σ	normaalijännitys
τ	leikkausjännitys
[A]	joustomatriisi
{F}	voimavektori
[K]	jäykkyyismatriisi
[N]	muotofunktio­matriisi
{U}	siirtymävektori

1 JOHDANTO ELEMENTTIMENETELMÄÄN

Ensimmäiset elementtimenetelmää soveltavat kokeilut sijoittuvat 1950-luvun alkuun lentokoneteollisuuteen. Menetelmää yritettiin soveltaa rakenteiden lujuusanalyysiä varten. Kuitenkin menetelmä sai nimensä vasta vuoden 1960 paikkeilla, kun insinöörit jakoivat sauvarakenteita pienemmiksi kappaleiksi helpottaakseen laskemista. Elementtimenetelmässä rakenteen tarkasteltava alue jaotellaan osiin eli elementteihin ja niitä yhdistäviin solmupisteisiin. Menetelmässä approksimaatio tulee valita siten, että tuntemattomat arvot ovat näissä solmupisteissä (Hakala 1980, s. 13).



Kuva 1. Elementit ja solmupisteet (Ahola 1977, s. 7).

Nykypäivänä tietokoneiden laskentakapasiteetit mahdollistavat lähes minkä tahansa kappaleen tai kokonaisuuden mallintamisen halutuissa tilanteissa. Menetelmä tuottaa likimääräisiä ratkaisuja, mikä menetelmän oikeaoppisella käytöllä, aikaansaa tarpeeksi tarkkoja tuloksia halutussa analyysissä. Elementtimenetelmä soveltuu myös lineaaristen jännitysten ulkopuolisiin sovellutuksiin. Sillä voidaan laskea erinomaisesti myös värähtelmekaniikkaa, akustiikkaa, nesteiden dynamiikkaa ja lämmönjohtumista (Hietikko 2015, s. 170).

2 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSYHTÄLÖ

Tarkastellaan yhden pistevoiman kuormittavaa kummastakin päästä tuettua palkkia, joka käyttäytyy lineaarisesti. Palkin jousivakio on k , siirtymä u ja siihen vaikuttava voima F . Näistä voidaan kirjoittaa jousiyhtälö (Hakala 1980, s. 15-17)

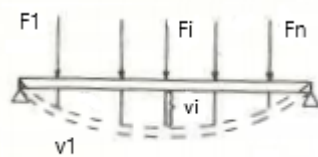
$$F = k * u. \quad (1)$$

Kirjoitetaan yhtälö käänteisenä, missä a tarkoittaa palkin joustavuutta

$$u = \frac{1}{k} F = a * F. \quad (2)$$

Valitussa tapauksessa palkkisysteemillä on vain yksi vapausaste, koska sen kuvaamiseen riittää vain yksi siirtymä. Mikäli systeemi tarvitsisi enemmän vapausasteita, tarvitaan silloin myös enemmän yhtälöitä.

Tarkastellaan seuraavaksi kummastakin päistä tuettua palkkisysteemiä, jota kuormittaa useampi pistevoima F_j .



Kuva 2. Kuormitettu päistä tuettu palkki (Hakala 1980, s. 16).

Palkin pisteessä i siirtymän v_i suuruus voidaan ilmoittaa seuraavassa muodossa

$$\begin{cases} v_i = a_{i1}F_1 + \dots + a_{ij}F_j + \dots + a_{in}F_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

Kaava 3 voidaan esittää lyhyempänä matriisimuodossa

$$\{U\} = [A] \{F\}. \quad (4)$$

jossa $\{U\}$ on siirtymävektori, $[A]$ on joustomatriisi ja $\{F\}$ on voimavektori.

Haluttaessa voidaan siirtymien ja voimien välinen yhteys ilmoittaa myös käänteisessä järjestyksessä

$$\begin{cases} F_i = k_{i1}v_1 + \dots + k_{in}v_n = \sum_{j=1}^n k_{ij}v_j \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

Kaava 5 on matriisimuodossa

$$\{F\} = [K] \{U\}. \quad (6)$$

jossa $[K]$ on systeemin jäykkymatriisi. Kaava 6 kuvaa elementtimenetelmän perusyhtälöä.

Kun yhdistetään kaavat 4 ja 6 saadaan

$$\{U\} = [A] \{F\} = [A] [K] \{U\} \quad (7)$$

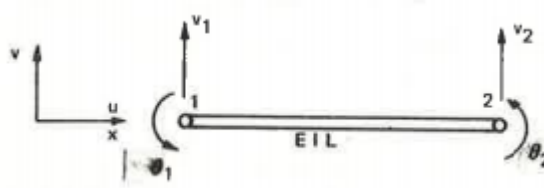
Yhtälöstä 7 huomataan, että joustomatriisin ja jäykkymatriisin matriisitulon on oltava yksikkömatriisi, jotta yhtälö pitää paikkaansa. Tästä syystä pätee

$$[K] = [A]^{-1} \text{ tai } [A] = [K]^{-1} \quad (8)$$

eli jousto- ja jäykkymatriisi ovat toistensa kääntematriiseja, joista jälkimmäinen on tosi silloin, kun rakenteen jäykän kappaleen liike on estetty. Joustomatriisi voidaan muodostaa aina, kun jäykän kappaleen liikettä ei tapahdu. Rakenteella on aina olemassa jäykkymatriisi riippumatta jäykän kappaleen liikkeestä. Jousto- ja jäykkymatriisin symmetrisyys on todistettavissa lineaarisissa tilanteissa Bettin säännön avulla (Hakala 1980, s. 17).

3 PALKKIELEMENTTI

3.1 Yleinen palkkielementti



Kuva 3. Yleinen palkkielementti (Hakala 1980, s. 69).

Yleinen palkkielementti kuvaa yksittäistä palkkia. Elementti kulkee palkin poikkileikkauksen pintakeskiössä. Kyseisellä palkilla on kaksi solmupistettä ja neljä vapausastetta. Vapausasteisiin kuuluu taipumat v_1 ja v_2 kummassakin päässä, sekä kiertymät θ_1 ja θ_2 päässä. Oletetaan taipumat erittäin pieniksi suureiksi, jolloin kiertymä vastaa taipuman derivaattaa (Hakala 1980, s. 69).

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (9)$$

Seuraavaksi muodostetaan elementille siirtymävektori $\{U\}$

$$\{U\} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (10)$$

Jolloin elementin voimavektori $\{F\}$ on muotoa

$$\{F\} = \{F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2\}^T \quad (11)$$

Seuraavaksi johdetaan palkkielementin jäykkyyismatriisi yksikkösiirtymien periaatteella. Sijoitetaan siis yhdelle siirtymän arvoksi 1 ja lasketaan elementtiin vaikuttavat voimat kyseisessä tilassa. Käytetään apuna taulukkokirjan valmiita kaavoja (Mäkelä 2016, s. 147). Asetetaan neljä tilaa a, b, c ja d, joihin vaikuttavat voimavektorit $\{F\}_a$, $\{F\}_b$, $\{F\}_c$ ja $\{F\}_d$. Tilassa a $v_1 = 1$, tilassa b $\theta_1 = 1$, tilassa c $v_2 = 1$ ja tilassa d $\theta_2 = 1$. Voimavektori $\{F\}_a$ on tällöin

$$\{F\}_a = \frac{EI}{L^3} * \begin{pmatrix} 12 \\ 6L \\ -12 \\ 6L \end{pmatrix} \quad (12)$$

$\{F\}_a$ kuvaa jäykkyysmatriisin $[K]$ ensimmäistä saraketta yleisessä palkkielementissä. Samalla idealla $\{F\}_b$ kuvaa matriisin toista saraketta jne. Loput voimavektorit ovat

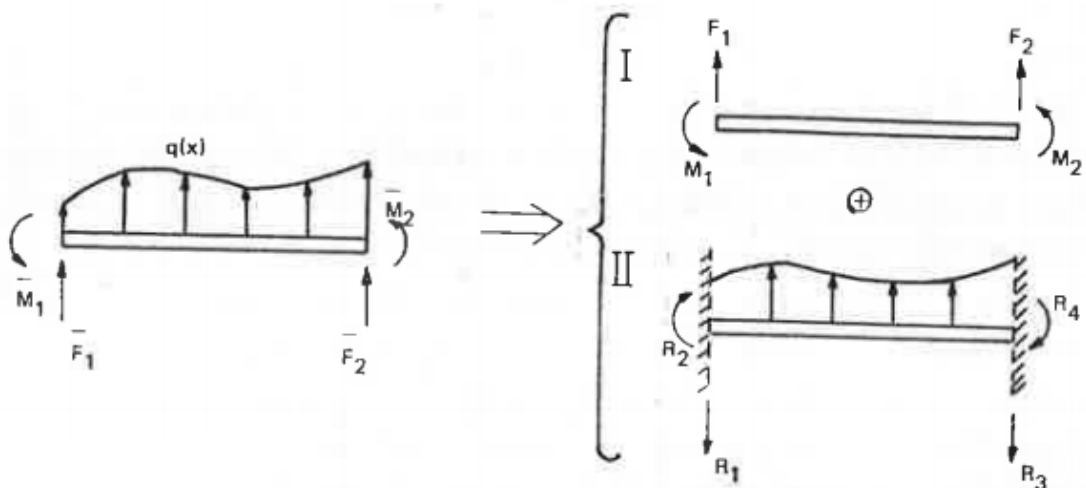
$$\{F\}_b = \frac{EI}{L^3} * \begin{pmatrix} 6L \\ 4L^2 \\ -6L \\ 2L^2 \end{pmatrix}, \{F\}_c = \frac{EI}{L^3} * \begin{pmatrix} -12 \\ -6L \\ 12 \\ -6L \end{pmatrix} \text{ ja } \{F\}_d = \frac{EI}{L^3} * \begin{pmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Kootaan kaikki voimavektorit yhteen, mistä saadaan elementin jäykkyysmatriisi

$$[K] = \frac{EI}{L^3} * \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Jäykkyysmatriisista huomataan, että se on symmetrinen diagonalin suhteen (Hakala 1980, s. 70-71).

Tilanteissa, joissa elementin alueelle vaikuttaa erilaisia kuormia, tulee nämä esittää ekvivalenteilla solmuvoimilla. Seuraavaksi tutkitaan tapausta, jossa palkkielementtiä kuormitetaan viivakuormalla $q(x)$. Tilanne voidaan jakaa superpositioperiaatteella kahteen osatapaukseen (Hakala 1980, s. 71).



Kuva 4. Osatapaukset 1 ja 2 (Hakala 1980, s. 71).

Merkitään tapaukset seuraavasti. Alkuperäisen tapauksen solmuvoimia kuvaa vektori $\{P\}$, ensimmäistä osatapausta vektori $\{F\}$ ja toista osatapausta vektori $\{R\}$. Vektori $\{R\}$ on asetettu kuvan 3 mukaan eri suuntaan kuin muut vektorit, jotta saadaan voimien välille yhteys (Hakala 1980, s. 72).

$$\{P\} = \{F\} - \{R\} \quad (15)$$

Koska ensimmäisen osatapauksen voimat riippuvat täysin elementin siirtymistä saadaan

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (16)$$

Toisen tapauksen solmuvoimat saadaan yleensä taulukoista, koska ne aiheutuvat pelkästään kuormasta $q(x)$. Sijoitetaan kaava 16 kaavaan 15.

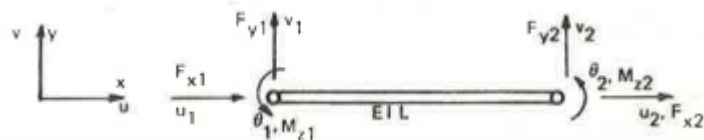
$$\{P\} = [K] \{U\} - \{R\} \quad (17)$$

Josta saadaan

$$[K] \{U\} = \{P\} + \{R\} = \{F\} \quad (18)$$

Voimavektori $\{F\}$ koostuu siis ulkoisista solmuvoimista ja ekvivalenteista solmuvoimista. Ekvivalentit solmuvoimat ovat itseisarvoltaan yhtä suuret kuin täysin kiinnitetyn elementin tukireaktiot solmupisteissä (Hakala 1980, s. 72).

3.2 2-Ulotteinen palkkielementti



Kuva 5. 2-Ulotteinen palkkielementti (Hakala 1980, s. 88).

Johdetaan seuraavaksi jäykkyyismatriisi 2-ulotteiselle palkkielementille. Toisena ulottuvuutena on nyt mukana palkin venymä sen pituussuunnassa. Palkille tulee siis kuusi vapausastetta: kiertymät ja kohtisuorat siirtymät kummassakin päässä. Muodostetaan elementille solmujen siirtymävektori $\{U\}$ ja voimavektori $\{F\}$ (Hakala 1980, s. 88).

$$\{U\} = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (19)$$

$$\{F\} = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad M_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad M_{z2}\}^T \quad (20)$$

Koska palkin suuntainen siirtymä ei ole riippuvainen taivutuksesta, voidaan jäykkyysmatriisi muodostaa helposti yhdistämällä sauvaelementin ja yleisen palkkielementin jäykkyysmatriisit. Matriisien yhdistämisessä on kumminkin huomioitava vapausasteiden esitetty järjestys siirtymä- ja voimavektorissa (Hakala 1980, s. 89).

Sauvaelementin jäykkyysmatriisi (Hakala 1980, s. 30).

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

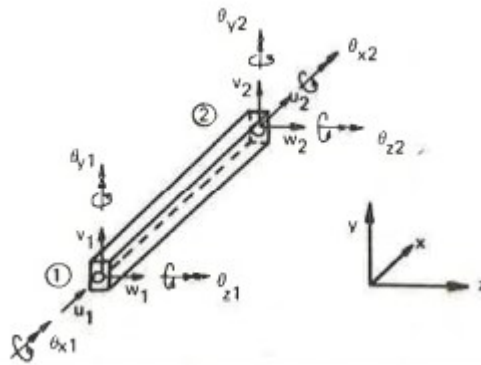
2-Ulotteisen palkkielementin jäykkyysmatriisi (Hakala 1980, s. 89).

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sijoittamalla nämä kaavaan 6 saadaan 2-ulotteisen palkkielementin perusyhtälö.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

3.3 3-Ulotteinen palkkielementti



Kuva 6. 3-Ulotteinen palkkielementti (Hakala 1980, s. 104).

Kolmiulotteisella palkkielementillä on solmupisteissään kuusi vapausastetta. Vapausasteista kolme ovat siirtymiä (u , v , w) ja loput kolme kiertymiä (θ_x , θ_y , θ_z). Tästä saadaan yleinen palkkielementti, jolla on kaksi solmupistettä ja 12 vapausastetta. Koordinaatisto valitaan niin, että x -akseli on palkin pituusakselin suuntainen ja se on kohtisuorassa y - z -tasoa vasten. Elementin solmuisiirtymävektori on

$$\{U\} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\}^T \quad (24)$$

ja elementtiin vaikuttava solmuvoimavektori (Hakala 1980, s. 103).

$$\{F\} = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2}\}^T \quad (25)$$

Johdetaan seuraavaksi kolmiulotteisen palkkielementin jäykkyyismatriisi. Elementin aksiaaliset vapausasteiden u_1 ja u_2 vaikutus saadaan kaavasta 21. Taivutusvapausasteet v ja θ_z saadaan kaavasta 14. Vapausasteet w ja θ_y muodostavat melkein samanlaisen

taivutusjäykkyysmatriisiin kuin v ja θ_z , mutta kiertymän positiivinen suunta on eri, jolloin matriisissa tapahtuu merkin vaihdoksia. Edellä mainittujen lisäksi θ_{x1} ja θ_{x2} vastaava jäykkyysmatriisi on otettava huomioon (Hakala 1980, s. 104). Homogeeniselle palkille se on

$$[K]_{\text{vääntö}} = \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Kaavassa G on liukumoduuli, I_x vääntöjäyhyysmomentti ja L on elementin pituus (Hakala 1980, s. 105).

Mainitut osajäykkyysmatriisit voidaan yhdistää kolmiulotteisen palkkielementin jäykkyysmatriisiksi, koska suoralla palkilla ei ole kytkentää eri osajäykkyysien suhteen.

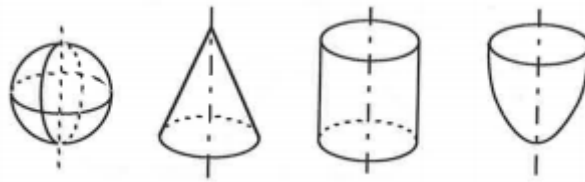
u_1	v_1	w_1	θ_{x1}	θ_{y1}	θ_{z1}	u_2	v_2	w_2	θ_{x2}	θ_{y2}	θ_{z2}
$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
$\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$
$\frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)}$	0
$\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
0	0	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$	0
0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$
alapuoli symmetrinen						0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$
$\phi_y = \frac{12EI_z}{k_y AGL^2}$						$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
$\phi_z = \frac{12EI_y}{k_z AGL^2}$						0	$\frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)}$
						0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
						0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$	0
						0	0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$

Kuva 7. 3-Ulotteisen palkkielementin jäykkyysmatriisi (Hakala 1980, s. 106).

4 KUORIELEMENTTI

4.1 Johdanto kuorielementille

Kuorella tarkoitetaan kappaletta, jota rajaavat kaksi toisiaan lähellä olevaa avaruuspintaa. Näiden kahden pinnan puolella välissä on keskipinta ja kuoren paksuus on pintojen lyhin mahdollinen etäisyys. Yleisimmissä tapauksissa kuoren paksuus on vakio, ja sen muoto on geometrisesti yksinkertainen esim. sylinteri- tai kartiopinta (Ikoninen. 1990, s. 169).

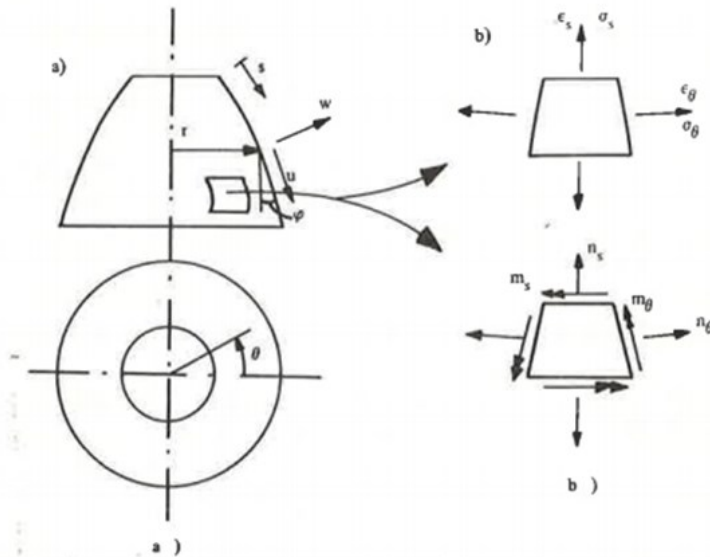


Kuva 8. Erilaisia kuoripintoja (Ikoninen 1990, s. 169).

Kuoreen vaikuttavat yleensä voimat, jotka taivuttavat ja venyttävät. Nämä voimat ovat myös yleensä kytkeytyneet toisiinsa. Kuormitusten likimääräinen tarkastelu on erikseen mahdollista, jos rakenteen kuori on laakea ja sen muodonmuutokset oletetaan pieniksi (Ahola 1977, s. 100).

4.2 Pyörähdyssymmetriset kuorielementit

Pyörähdyssymmetrisessä kuoressa tarkastelu on huomattavasti helpompaa. Kuori voidaan muodostaa silloin täysin rengasmaisista elementeistä. Tapauksessa tarvitaan keskipinnan siirtymäkomponentit u ja w . Koska kuori on symmetrinen, ovat kaikki suureet riippumattomia kulmakoordinaatistosta θ (Hakala 1980, s. 411).



Kuva 9. Pyörähdyssymmetrinen kuori (Hakala 1980, s. 412).

Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa kuoren keskipinnan siirtymien ja venymien välille muodostuvat yhteydet ovat

$$\begin{cases} \varepsilon_s^o = \frac{du}{ds} - w \frac{d\varphi}{ds} \\ \varepsilon_\theta^o = \frac{1}{r} (w \cos(\varphi) + u \sin(\varphi)) \end{cases} \quad (27)$$

ja samalla lailla keskipinnan käyritymien lausekkeet esitettynä kaavassa 28 (Hakala 1980, s. 412).

$$\begin{cases} \kappa_s = -\frac{d^2w}{ds^2} - u \frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{d\varphi}{ds} \\ \kappa_\theta = -\frac{\sin(\varphi)}{r} \left(\frac{dw}{ds} + u \frac{d\varphi}{ds} \right) \end{cases} \quad (28)$$

Koska perusoletuksena kuoren keskipinnan normaalit ovat aina kohtisuorassa keskipintaa kohti voidaan kuoren venymät saada seuraavalla tavalla

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \varepsilon_s^o + \zeta \kappa_s \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^o + \zeta \kappa_\theta \end{cases} \quad (29)$$

missä keskipinnan normaalin suuntaista paikallista koordinaattia kuvataan ζ :llä (Hakala 1980, s. 412).

Tasojännitystilän venymien ja jännitysten yhteys lineaarisesti kimmoisassa tapauksessa (Hakala 1980, s. 244).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Koska kaikki kuoren äärettömän pienet kerrokset ovat perusoletusten nojalla tasojännitystilassa, voidaan Hookein lain nojalla ratkaista jännitykset kaavoista 29 ja 30. Ja koska rakenne on pyörähdyssymmetrinen, siitä häviää leikkausjännitys (Hakala 1980, s. 413).

$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_s^o + \nu\varepsilon_\theta^o) + \zeta(\kappa_s + \nu\kappa_\theta)] \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_s + \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} [(\nu\varepsilon_s^o + \varepsilon_\theta^o) + \zeta(\nu\kappa_s + \kappa_\theta)] \end{cases} \quad (31)$$

Kuoriteoriassa ei tavanomaisesti käytetä jännityksiä vaan niiden resultanttisuureita, joihin kuuluvat normaalivoimat ja taivutusmomentit. Näille saadaan johdettua lausekkeet kaavan 31 avulla, jossa integrointi on laskettu kuoren paksuuden t yli (Hakala 1980, s. 413).

$$\begin{cases} n_s = \int \sigma_s d\zeta = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_s^o + \nu\varepsilon_\theta^o) \\ n_\theta = \int \sigma_\theta d\zeta = \frac{Et}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_s^o + \varepsilon_\theta^o) \\ m_s = \int \sigma_s \zeta d\zeta = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_s + \nu\kappa_\theta) \\ m_\theta = \int \sigma_\theta \zeta d\zeta = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\nu\kappa_s + \kappa_\theta) \end{cases} \quad (32)$$

Kuvassa 9 on esitetty jännitysresultanttien positiiviset suunnat.

Seuraavaksi kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon $\{m\} = [D] \{\kappa\}$ (Hakala 1980, s.414).

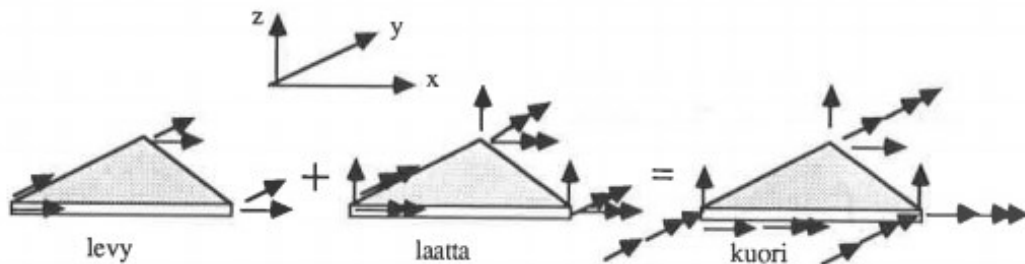
$$\begin{Bmatrix} n_s \\ n_\theta \\ m_s \\ m_\theta \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & \nu t^2 \\ 0 & 0 & \frac{12}{t^2} & \frac{12}{t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^o \\ \varepsilon_\theta^o \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Jännitysresultantit $\{m\}$ tuntemalla saadaan kaavan 32 avulla jännitykset kuoren pinnoilla. Plusmerkki tarkoittaa positiivista pintaa ja miinusmerkki vastakkaista (Hakala 1980, s. 414).

$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{n_s}{t} \pm \frac{6m_s}{t^2} \\ \sigma_\theta = \frac{n_\theta}{t} \pm \frac{6m_\theta}{t^2} \end{cases} \quad (34)$$

4.3 Tasomaiset kuorielementit

Tasomaisia kuoripintoja voidaan mallintaa yhdistämällä levy- ja laattaelementtejä toisiinsa. Tiettyjä kuoria ei ole mahdollista mallintaa nelikulmioelementeillä, mutta kolmioelementtejä käyttämällä voidaan mallintaa mikä tahansa rakenne. Koska kuori on tasomainen, häviää siltä kalvo- ja taivutustilan kytkentä (Ikoninen 1990, s. 318).



Kuva 10. Kolmiolevyelementin ja kolmiolaattaelementin yhdistäminen tasomaiseksi kolmiokuorielementiksi (Ikoninen 1990, s. 319).

Huomataan, että elementiltä puuttuu tasoa kohtisuoraan sijaitsevan suoran ympäri oleva kiertymisvapausaste, jonka aiheuttama jäykkyyden alenema on otettava jollain tavalla huomioon laskemisessa. Kaarevilla pinnoilla elementtien välille syntyy paikallisia taivutusjäykkyyksiä ja häiriömomenteja epäjatkuvuuden takia. Elementtiverkkoa tihentämällä, eli elementtikokoa pienentämällä, voidaan häiriötä pienentää (Ikoninen

1990, s. 318). Tasomaiset elementit ovat yleisesti heikkoja ratkomaan kuoritehtäviä, mutta jollain geometrioilla niiden käytöltä ei voida välttyä (Hakala 1980, s. 425).

5 SOLIDIELEMENTTI

5.1 Yleinen kolmidimensioinen siirtymätila

Solidielementin kuvaamiseen tarvitaan kolme eri siirtymätilaa u , v ja w . Venymien ja jännityksien kuvaamiseen taas kuusi eri komponenttia. Näillä siirtymätiloilla ja komponenteilla voidaan mallintaa yleisesti kolmidimensioinen siirtymätila (Hakala 1980, s. 367).

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \quad (35)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (36)$$

Ottamalla huomioon siirtymien ja venymien välisen kinemaattisen yhteyden venymävektoriksi saadaan

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [L]\{u\}. \quad (37)$$

Kaavassa 37 $[L]$ on lineaarinen differentiaalioperaattori (Hakala 1980, s. 367).

Jännitysten ja venymien välinen yhteys on

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (38)$$

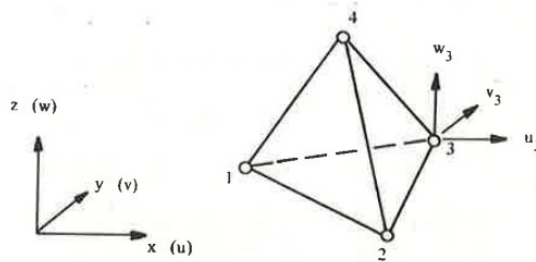
jossa $[D]$ on kolmidimensionaalissa isotrooppisessa tapauksessa (Ahola 1977, s. 95).

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 1 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & \kappa_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Kaavassa 38 $\kappa_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ ja $\kappa_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$

Kolmidimensionaalisten elementtien käyttö elementtimenetyksessä on yleisesti raskaampaa, minkä takia on elementtityyppi valittava tarkkaan. Korkeampia elementtityyppejä tulee käyttää vain, jos siihen on tarvetta. Suorakulmaiset särmiöelementit ovat tarkempia kuin tetraedrin muotoiset ja helppokäyttöisempiä, mutta käyttökohteet rajallisempia. Jossain tilanteissa taas käyrästetyt isoparametriset elementit tuottavat tarkempia tuloksia (Ahola 1977, s. 99).

5.2 Vakiovenymätetraedri



Kuva 11. Vakiovenymätetraedri (Hakala 1980, s. 368).

Elementtimenetyksen yksinkertaisin solidielementti on vakiovenymätetraedri. Elementillä on neljä solmupistettä ja jokaisessa solmussa kolme vapausastetta (Hakala 1980, s. 368).

$$\tilde{u}(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (40)$$

Lausutaan vakiot a_i vapausasteiden u_i avulla sijoittamalla kaavaan 40 elementin solmupistearvot. Toimituksen jälkeen esitetään muotofunktio muodossa

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y, z) u_i \quad (41)$$

jossa muotofunktiot N_i ovat seuraavanlaisia (Hakala 1980, s. 369).

$$N_i = \frac{1}{6V} (b_i + c_i x + d_i y + e_i z) \quad (42)$$

Kaavasta 42 tetraedrielementin tilavuus V ja muut vakiot voidaan ilmoittaa seuraavien determinanttien avulla (Hakala 1980, s.369).

$$6V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$b_i = \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}; c_i = - \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$d_i = \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{bmatrix}; e_i = - \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{bmatrix}$$

i :n saadessa arvot 1, 2, 3, 4 muut indeksit saavat arvonsa kiertovaihtelun $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow l$ mukaan. Kirjoitetaan siirtymäkomponenteille u -siirtymän tapainen muotofunktioaprosimaatio (Hakala 1980, s. 369).

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} = \{\tilde{u}\} = [N(x, y, z)]\{U\} = \sum [N_i]\{U_i\} \quad (45)$$

Kaavassa 45 tietyn solmupisteen i vapausasteet kuuluvat vektoriin $\{U_i\}$ ja saman solmun muotofunktioaprosimaatio matriisiin $[N_i]$.

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (46)$$

Ratkaistaan kinemaattinen matriisi $[B]$ soveltamalla kaavaa 37 (Hakala 1980, s. 370).

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{U\} = [B]\{U\} = \sum [L][N_i]\{U_i\} \quad (47)$$

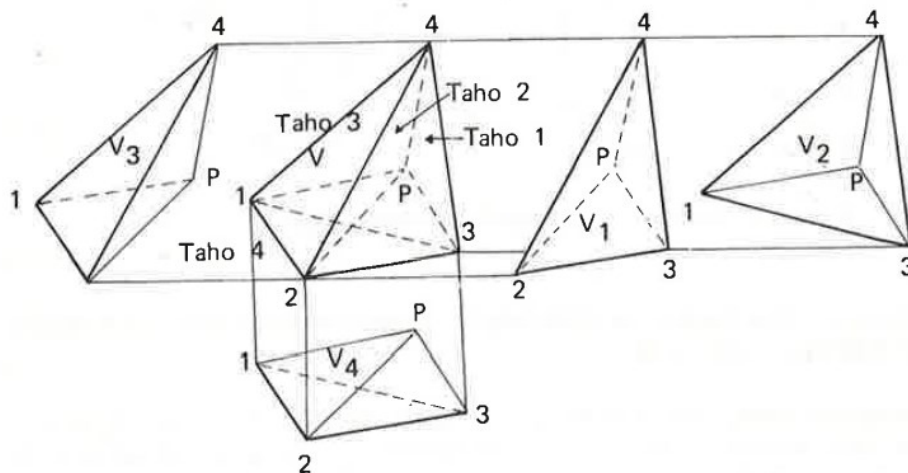
Jolloin alimatriisi $[B_i]$ on seuraava

$$[B_i] = [L][N_i] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} c_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & e_i \\ d_i & c_i & 0 \\ 0 & e_i & d_i \\ e_i & 0 & c_i \end{bmatrix} \quad (48)$$

Matriisista $[B_i]$ huomataan, että venymät ovat vakioita, josta elementin nimi ”vakiovenymätetraedri” tulee. Tässä tilanteessa jäykkyyismatriisin integrointi on helppoa ja tulos on (Hakala 1980, s. 370)

$$[K] = [B]^T [E] [B] V \quad (49)$$

5.3 Tilakoordinaatit



Kuva 12. Tilakoordinaattien määrittely pisteen P avulla (Ahola 1977, s. 98).

Tetraedrielementin kanssa on mahdollista käyttää tilakoordinaatteja normaalin xyz-koordinaatiston sijaan. Koordinaatiston vaihdos helpottaa laskemista samalla tavalla kuin kolmioelementillä alakoordinaatisto. Tilakoordinaatistossa tetraedrin sisällä on piste P, joka yhdistetään elementin kärkipisteisiin. Tetraedri jakautuu siis neljään eri osatilavuuteen V_i . Osatilavuus V_i tarkoittaa i kärjen vastaisen osatetraedrin tilavuutta. Jakamalla osatilavuudet elementin tilavuudella V saadaan tilakoordinaatit L_i . Tarvittaessa tilavuudet on mahdollista laskea kaavan 43 avulla (Hakala 1980, s. 371).

$$L_1 = \frac{V_1}{V}; L_2 = \frac{V_2}{V}; L_3 = \frac{V_3}{V}; L_4 = \frac{V_4}{V} \quad (50)$$

Koska tiedetään, että osatilavuuksien summan on pakko olla elementin tilavuus, voidaan tilakoordinaattien välille muodostaa seuraava lineaarinen riippuvuus (Hakala 1980, s. 371).

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (51)$$

Kun halutaan laskea globaaleja derivaattoja xyz-koordinaatistossa, tarvitaan suorakulmaiselle koordinaatistolle ja tilakoordinaateille yhteys, joka saadaan vakiovenymätetraedrin muotofunktiosta (Hakala 1980, s. 372).

$$L_i = N_i = \frac{1}{6V} (b_i + c_i x + d_i y + e_i z) \quad (52)$$

Ketjuderivointi tapahtuu siis

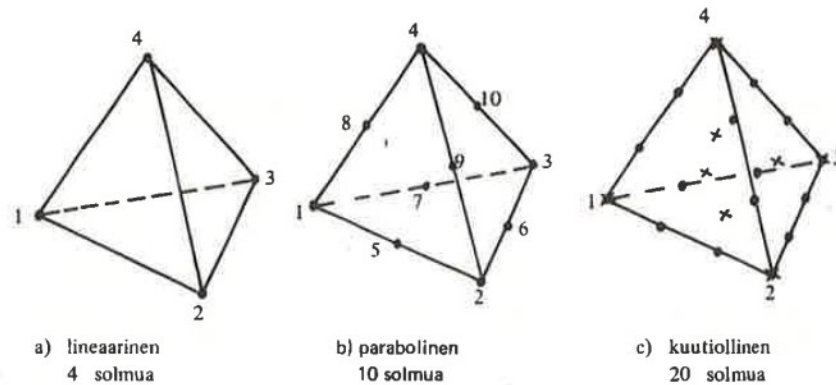
$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 c_i \frac{\partial}{\partial L_i} \quad (53)$$

Ja loput derivaatat ovat samanlaisia (Hakala 1980, s. 371).

Tilavuuskoordinaattien hyöty tulee esiin elementin tilavuusintegraalissa, jolle on olemassa yksinkertainen kaava (Hakala 1980, s. 371).

$$\int_V L_1^i L_2^j L_3^k L_4^l dV = 6V \frac{i! j! k! l!}{(i + j + k + l + 3)!} \quad (54)$$

5.4 Muita tetraedrielementtejä



Kuva 13. Erilaisia tetraedrielementtejä (Hakala 1980, s. 374).

Kolmiulotteisissa tapauksissa on mahdollista johtaa korkeamman asteen elementtejä, kuten kaksiulotteisissakin tapauksissa. Yleensä korkeamman asteen elementtien muotofunktiot on ilmoitettu tilakoordinaateilla. Esitetään seuraavaksi parabolisen ja kuutiollisen elementin muotofunktiot (Hakala 1980, s. 374).

5.4.1 Parabolinen elementti

Kärkisolmun muotofunktio

$$N_i = (2L_i - 1)L_i \quad (55)$$

Särmien keskipisteissä olevien solmujen muotofunktio

$$N_i = 4L_j L_k, \quad j \neq k \quad (56)$$

missä j ja k ovat tarkoittavat särmän kärkipisteitä (1, 2, 3 tai 4), jossa solmu sijaitsee.

5.4.2 Kuutiollinen elementti

Kärkisolmun muotofunktio

$$N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i \quad (57)$$

Särmän keskipisteessä olevien solmujen muotofunktio

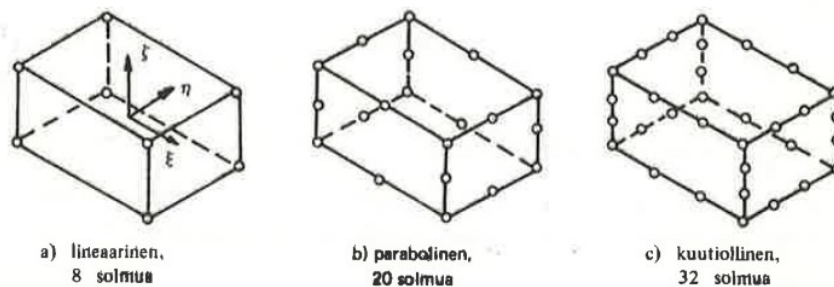
$$N_i = \frac{9}{2}L_jL_k(3L_j - 1), \quad j \neq k \quad (58)$$

Sivutahkosolmujen muotofunktio

$$N_i = 27L_jL_kL_l, \quad j \neq k \neq l \quad (59)$$

missä j, k ja l tarkoittavat tahkon kärkipisteitä (1, 2, 3 tai 4), jossa solmu sijaitsee

5.5 Suorakulmaiset särmiöelementit



Kuva 14. Erilaisia suorakulmaisia särmiöelementtejä (Hakala 1980, s. 375).

Särmiöelementtejä kuvattaessa käytetään $\xi\eta\zeta$ -koordinaatisto, jossa kaikki koordinaatit voivat saada arvoja välillä $[-1,1]$. Ilmoitetaan tämän koordinaatiston avulla elementtien muotofunktiot (Hakala 1980, s. 375-376).

5.5.1 Lineaarinen elementti

Kärkisolmujen muotofunktio

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (60)$$

missä $\xi_0 = \xi_i\xi$, $\eta_0 = \eta_i\eta$, $\zeta_0 = \zeta_i\zeta$.

5.5.2 Parabolinen elementti

Kärkisolmujen muotofunktio

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (61)$$

Särmäsolmujen muotofunktio, kun $\xi_1 = 0$. Samalla logiikalla saadaan muita särmäsolmuja vastaavat muotofunktiot.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (62)$$

5.5.3 Kuutiollinen elementti

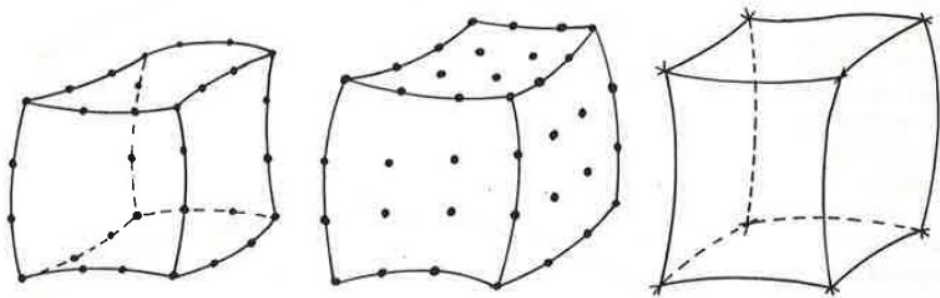
Kärkisolmujen muotofunktio

$$N_i = \frac{1}{64}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)[9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19] \quad (63)$$

Särmäsolmujen muotofunktio, kun $\xi_1 = \pm \frac{1}{3}$. Samalla logiikalla saadaan muita särmäsolmuja vastaavat muotofunktiot.

$$N_i = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (64)$$

5.6 Isoparametriset solidielementit



Kuva 15. Isoparametrisiä solidielementtejä (Ahola 1977, s. 99).

Isoparametrinen elementti on käyrästetty suorakulmainen särmiöelementti. Muutetaan kolmidimensioinen koordinaatisto isoparametriseen koordinaattiin (Hakala 1980, s. 377).

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta)x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta)y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta)z_i \end{cases} \quad (65)$$

jossa solmukoordinaatteja kuvastaa x_i , y_i ja z_i .

Tällöin paikallisten ja globaalien derivaattojen yhteys on (Hakala 1980, s. 377)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Kaavassa 59 esiintyvä kerroinmatriisi on Jacobin matriisi $[J]$. Matriisin alkiot ovat helposti laskettavissa seuraavasti (Hakala 1980, s. 378)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \dots \quad (67)$$

$[J]$ -matriisia kääntämällä saadaan globaalit derivaatat, joita tarvitaan elementin $[B]$ -matriisiin ja jäykkyysmatriisiin. Jäykkyysmatriisi on tällöin (Hakala 1980, s. 378)

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (68)$$

Kaavassa 68 $|J|$ tarkoittaa Jacobin matriisin determinanttia.

6 YHTEENVETO

Kandityön tavoitteena oli perehdyttää lukija elementtimenetelmässä käytettävien palkki-, kuori- ja solidielementtiin. Lukijalle annettiin hyvä teoriapohja elementtien fysikaalisista eroista, jota hän voi soveltaa jatkossa. Lukijan tulee kumminkin muistaa, että tämä työ toimii ainoastaan teoriapohjana, jota hänen täytyy tarvittaessa lähteä täydentämään.

Elementtimenetelmän teoriasta kirjoittaessa huomaa ikävänä puolena suomalaisten kirjojen pienen määrän kysyisestä aiheesta, mutta onneksi kirjat käsittelivät aihetta kumminkin kattavasti. Toinen ongelma on kirjojen sijoittuminen 1900-luvun lopulle, jolloin elementtimenetelmä oli huomattavasti rajoittuneempi tietokoneiden osalta. Kirjoittaessa piti siis ottaa huomioon sen hetkinen tietotekniikan taso ja muotoilla joitain ongelmia ja huomioita vastaamaan paremmin tätä hetkeä.

LÄHDELUETTELO

Erkki, A., 1977. Lujuusoppi: Elementtimenetelmä. 2 painos. Espoo: Oy Dipoli Ab Otapaino, 208 s. ISBN 951-671-108-1

Hakala, M. K., 1980. Lujuusopin elementtimenetelmä. 3 painos. Espoo: Tekijä ja Otakustantamo, 490 s. ISBN 951-671-395-5

Hietikko, E., 2015. Palkki: Lujuuslaskennan perusteet. 3 painos. Helsinki: BoD – Books on Demand, 218 s. ISBN 978-952-286-593-9

Ikonen, K., 1990. Levy-, Laatta- ja Kuoriteoria. Helsinki: Tekijä ja Otatiето, 333 s. ISBN 951-672-111

Mäkelä, M., Soininen, L., Tuomola, S., Öistämö, J., 2016. Tekniikan kaavasto. 16 painos. Porvoo: Bookwell Oy, 205 s. ISBN 978-952-5491-48-7