Yleinen polynomifunktio ja polynomiyhtälö lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Oona Laakso
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2018

Sisältö

Johdanto

Tämän päivän tutkimuksissa kritisoidaan perinteisten oppikirjojen lähestymistapoja etenkin matematiikan kohdalla [9, 12, 28]. Perinteistä oppikirjapohjaista lähestymistapaa pidetään vanhanaikaisena, sillä se painottuu rutiininomaiseen laskemiseen sekä sääntöjen ja menettelytapojen ulkoa opetteluun syvällisen ymmärtämisen sijaan [5]. Tämän tyylinen oppiminen ei ole kovin joustavaa ja sillä on vain rajalliset käyttömahdollisuudet, mikä on epäedullista opiskelijoiden kannalta [5]. Pelkkä kontekstien muuttaminen nykyaikaisiksi matematiikan tehtävien tehtävänannoissa ei tee tehtävistä moderneja. Sen sijaan, että matematiikan oppitunneilla keskityttäisiin tehtävätyyppeihin ja sääntöihin, tulisi opetuksessa painottaa matemaattisen ajattelun ja ajattelutapojen kehittymistä [9]. Näin tehtäessä opiskelijat tulevat olemaan valmiimpia selviytymään myös sellaisista ongelmista, joita he eivät ole aikaisemmin tavanneet [9]. Tämä myös tukee ajatusta koulutuksen tehtävästä ohjata opiskelijoita käyttämään omaa ajatteluaan sekä koulutuksen aikana että sen jälkeen [33]. Eisnerin mukaan paras valmistautuminen huomiseen on merkityksellinen opetus tänään [12].

Keväällä 2016 voimaan astunut lukion opetussuunnitelma on ottanut isoja askelia kohti modernia, tulevaisuuteen tähtäävää opetusta. Opetussuunnitelmassa korostuvat esimerkiksi oppilaslähtöisyys, erilaiset opetusmenetelmät ja asioiden ymmärtäminen ulkoa opettelun sijaan. Tämä tutkielma on osa Oulun yliopiston didaktinen gradu -projektia, minkä tarkoituksena on ollut suunnitella ja toteuttaa uuden opetussuunnitelman mukaiset oppikirjat lukion lyhyen matematiikan kurssille MAB2 *Lausekkeet ja yhtälöt* ja pitkän matematiikan kurssille MAA2 *Polynomifunktiot ja -yhtälöt*. Tämä tutkielma sisältää pitkän matematiikan osion *Yleinen polynomifunktio ja polynomiyhtälö*. Tutkielma koostuu kahdesta osasta: kirjallisesta perusteluosasta sekä oppikirjaosasta, joka sisältää oppimateriaalin ja opettajan oppaan. Oppikirja julkaistaan avoimena oppimateriaalina kaikkien käytettäväksi.

Oppikirja on suunniteltu siten, että oppitunnit olisivat mahdollisimman oppilaslähtöisiä. Pääosassa oppitunneilla on oppilaiden pohdinta ja havaintojen teko yksin ja yhdessä parin kanssa. Tämän toiminnan kautta myös muodostuu kappaleiden teoria askel askeleelta. Kirjassa painotetaan rutiinitehtävien harjoittelun sijaan matemaattisen ajattelun kehittämistä. Tutkielman lähtökohtana on uuden opetussuunnitelman lisäksi ollut myös monia alan tutkimuksia. Isossa roolissa oppikirjan toteutuksessa on ollut artikkeli *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*, joka esittelee erilaisia matemaattisia ajattelutapoja, joita matematiikan oppitunneilla tulisi kehittää.

Alussa olevassa perusteluosassa esitellään ensin oppikirjaprojektin tavoitteet, minkä jälkeen käydään läpi oppikirjaosio kappale kerrallaan ja perustellaan kirjaan tehdyt valinnat kohta kohdalta. Opettajan opas sisältää ajankäyttösuunnitelman kirjan kappaleille sekä vastaukset kappaleiden pohdintatehtäviin. Oppilaiden materiaaliin kuuluu neljä kappaletta: Potenssifunktiot ja potenssiyhtälöt, Korkeamman asteen polynomifunktiot, Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen sekä Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla. Lisäksi opiskelijoille on aihealueesta viisi lisätehtävää sekä vastaukset kirjan harjoitustehtäviin.

1 Opetussuunnitelma

Oppikirjan tärkeimpänä lähtökohtana on keväällä 2016 voimaan astunut lukion opetussuunnitelma. Opetussuunnitelma tuo modernia näkemystä lukio-opiskeluun vanhaan opetussuunnitelmaan verrattuna, minkä vuoksi uudet opetusmateriaalitkin tulevat tarpeeseen. Yksi merkittävimmistä uutuuksista opetussuunnitelmassa on tutkimiseen, kokeilemiseen ja ongelmanratkaisuun perustuvat opetusmenetelmät, joita ei opetussuunnitelman perusteissa 2003 mainita ollenkaan. Tämän tyyppiset opetusmenetelmät nousevat paljon esille myös alan tutkimuksissa. Tutkivaa oppimista pidetään oppimisen tyyppinä, joka pystyy herättämään oppimisen ilon [6]. Perinteistä laskemiseen, sääntöihin ja menettelytapoihin painottuvaa lähestymistapaa on kritisoitu siitä, että se on epäedullista opiskelijoille esimerkiksi koulusidonnaisuuden, joustamattomuuden ja rajallisten käyttömahdollisuuksien vuoksi [5].

Uudessa opetussuunnitelmassa *oppimisympäristöt ja -menetelmät* -kohtaan on kirjattu uusina asioina esimerkiksi vastuun ottaminen omasta oppimisesta sekä luovaan ajatteluun ja tutkimiseen perustuva oppiminen. Lisäksi uudessa opetussuunnitelmassa painotetaan entistä enemmän yksilön itsenäistä opiskelua ja omatoimisuutta yhteisöllisen työskentelyn rinnalla. Oppikirja vastaa näihin opetusmenetelmävalinnallaan, jossa opettajan rooli on ainoastaan tarpeen vaatiessa avustaa opiskelijoita eteenpäin omien ajatustensa ja ongelmanratkaisuideoidensa kehittämisessä. Myös digitaalisia opiskeluympäristöjä, oppimateriaaleja ja työvälineitä tulisi hyödyntää opetuksessa. Tämä toteutuu oppikirjassa matematiikkaohjelman GeoGebran vahvalla läsnäololla ongelmanratkaisuprosesseissa. GeoGebra on oppilailla käytössä myös ylioppilaskirjoituksissa, minkä takia on hyvä, että sen käyttö tulee tutuksi jo kurssien aikana. [22, 21]

Tämän pro gradu -tutkielman oppikirjaosuus on tarkoitettu vastaamaan opetussuunnitelman MAA2-kurssille asettamista viidestä tavoitteesta kolmeen. Nämä tavoitteet ovat, että opiskelija:

1. harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
2. osaa ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
3. osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktioiden tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin ja polynomiepäyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.[22]

2 Tavoitteet oppikirjassa

Oppikirjassa on pyritty toteuttamaan opetussuunnitelman asettamat tavoitteet mahdollisimman kattavasti. Oppikirja on avoin verkossa oleva digitaalinen oppikirja, jonka sisältö tukee opetusmenetelmää, jossa oppilaat itse ratkovat avoimia, oppilaille uuden tyylisiä tehtäviä sekä yksin että yhdessä parin kanssa. Oppikirjan kappaleet rakentuvat pohdintatehtävien ympärille, joita oppilaat itse pohtivat ennen asian yhdessä läpikäymistä. Tässä kappaleessa esitellään muut oppikirjaan valituista yhteisistä tavoitteista, jotka ovat vaikuttaneet kirjan rakenteeseen ja tehtävien suunnitteluun.

2.1 *Habits of Mind*

Merkittävässä osassa oppikirjan perustaa on toiminut artikkeli nimeltä *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*, jonka lähtökohdat tukevat hyvin myös uutta opetussuunnitelmaa. Artikkeli pohjautuu ajatukseen siitä, kuinka matematiikan opetuksen tavoitteena peruskoulussa ja lukiossa tulisi olla oppilaiden matemaattisen ongelmanratkaisukyvyn kehittäminen. Artikkelissa kritisoidaan sitä, kuinka yläaste- ja lukio-opiskelu on jo vuosia ollut hyvin aihekeskeistä ja kaukana siitä, miten matematiikka tieteenalana on kehittynyt ja kehittyy koulun ulkopuolella. Koulussa opetettavan matematiikan pitäisi keskittyä matemaattisten ajattelutapojen harjoittamiseen ja sitä kautta kehittää oppilaiden yleistä ongelmanratkaisutaitoa. Tavoitteena olisi auttaa lukiolaisia oppimaan ja omaksumaan sellaisia matemaatikkojen ajattelutapoja, joita he voisivat hyödyntää tulevaisuuden ongelmia ratkoessaan.[9]

Oppilaille on tärkeä antaa työvälineitä, joita he tarvitsevat matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen, ymmärtämiseen sekä sellaisen matematiikan tekemiseen, jota ei vielä ole olemassa. Habits of Mind -artikkelissa on listattu kahdeksan erilaista matemaattista ajatteluprosessityyliä, joiden kehittymiseen matematiikan tunneilla tulisi keskittyä laskukaavojen ja tehtävätyyppien opettelemisen sijaan. Näistä on valittu kirjassa painotettavaksi seuraavat viisi:

- säännönmukaisuuksien etsiminen (*pattern sniffing*)
- kokeileminen (*experimenting*)
- kuvaileminen (*describing*)
- oletusten tekeminen (*conjecturing*)
- visualisointi (*visualizing*).[9]

Säännönmukaisuuksien etsimisellä tarkoitetaan sitä, että opiskelijan tulisi etsiä toistuvia rakenteita, joiden avulla ongelmaa voi jäsentää yksinkertaisemmin. Kokeileminen taas viittaa siihen, ettei oppilaalla tarvitse olla heti tiedossa oikeaa tapaa, millä ongelman saisi ratkaistua. Sen sijaan oppilaan tulisi alkaa kokeilla erilaisia tapoja lähestyä ongelmaa, oikean tavan löytämiseksi. Kuvailun osaamiseen liittyy merkintätapojen keksiminen sekä kyky vakuuttaa luokkakaverinsa siitä, että jokin tulos on pätevä. Opiskelijan tulisi osata selittää tarkasti askel askeleelta, miten ongelmia on ratkaistu. Kirjoitetut ja puhutut selitykset ovat tärkeitä etenkin silloin, kun työskennellään osana ryhmää, jonka kanssa jakaa ideoita. Oletusten tekemisellä tarkoitetaan uskottavien arvausten muodostamista, mikä on tärkeä osa matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisua. Viides *Habits of Mindista* oppikirjaan valittu ajatteluprosessitapa on visualisointi. Visualisointi toteutuu tässä kirjaosuudessa kuvaajien kautta, mitä käsitellään seuraavassa kappaleessa enemmän. [9]

2.2 Graafisuus

Habits of Mindin tavoitteiden lisäksi oppikirjaamme valikoitui kaksi muutakin tavoitetta: graafisuus ja tutkimuksellisuus. Matematiikassa voi olla monenlaista visualisointia, mutta tässä oppikirjaosiossa niistä merkittävimmäksi nousee visualisointi kuvaajien eli graafien avulla.

Vaikka visualisoinnin on todettu auttavan matemaattisista ongelmista selviämistä, useimmat opiskelijat käyttävät piirtämistä apunaan vain silloin, kun sitä on erikseen vaadittu [32]. Tässä oppikirjaosiossa graafeja on käytetty hyväksi jokaisessa aihealueen kappaleessa, jotta kuvaajien käyttö tulisi arkipäiväiseksi ja mahdollisimman tutuksi apuvälineeksi matematiikan opiskelussa. Kappaleissa tulkitaan kuvaajia sekä tehdään päätelmiä ja oletuksia teorioista niiden avulla. GeoGebran käyttö toimii pääsääntöisenä graafisten esitysten työkaluna. Sen avulla myös toteutetaan esimerkiksi Habits of Mindin tavoitteista säännönmukaisuuksien etsimistä ja kokeilun harjoittelua.

GeoGebran käytöllä opetuksessa pyritään siihen, että opiskelijat havaitsevat toistuvia ominaisuuksia ja niiden avulla tekevät johtopäätöksiä ja oletuksia aiheista. Teknisten välineiden avulla oppilaat pystyvät myös keskittymään aikaisempaa paremmin matemaattisiin ideoihin kirjoittamisen sijaan [31](s.50). Oppitunneilla on kuitenkin tärkeä muistaa, että GeoGebra on opetuksessa ainoastaan välineenä ja tukena oppia ja havainnoida matematiikkaa eikä se näin ollen korvaa vanhoja perinteisiä tapoja ratkaista ongelmia [31](s.50). Tuntien tavoite ei siis ole ohjelman käytön oppiminen. GeoGebran käytön paljoudessa pitää myös ottaa huomioon se, ettei opiskelijoiden käsitys matemaattisista aksioomajärjestelmistä lähtevien todistusten tärkeydestä matematiikan perustana unohdu [18]. Tämä huomioidaan oppikirjassa havaintojen matemaattisten perusteluiden oppilaslähtöisenä pohdintana sekä lauseiden todistusten läpikäymisenä.

2.3 Tutkimuksellisuus

Viimeisenä tavoitteena oppikirjassa oli tutkimuksellisuus. Työ, joka vaatii opiskelijalta omaa päätöksentekoa, suunnittelua, metodien valintaa ja matemaattisen tiedon yhdistämistä edesauttaa opiskelijan aiheenymmärrystä perinteistä oppikirjapohjaista opiskelua paremmin [5]. Oppikirjassa perinteisen opettajajohtoisen opetuksen sijaan opiskelijat havainnoivat ja tutkivat heille esitettyjä matemaattisia ongelmia. Opiskelijoille ei siis anneta menetelmää, miten uudenlaisia tehtäviä ratkaistaan, vaan heidän tulee yksin tai yhdessä parin kanssa kehitellä aikaisempien tietojen ja matemaattisen päättelyn avulla tapoja selvitä ongelmista. Tutkivaa oppimista pidetään opetusmenetelmänä, joka kehittää oppilaiden kekseliäisyyttä sekä luovuutta [6] ja sen avulla pyritäänkin kirjassa saavuttamaan Habits of Mindin asettamat tavoitteet.

Perinteisesti ajatellaan, että työtä voi tehdä vasta kun aihe on ensin opiskeltu ja opittu [25]. Tutkimusten mukaan kuitenkin oppiminen, joka painottuu ajattelutapojen kehittymiseen ja opiskelijalähtöiseen päätelmien tekemiseen perinteisen opettajajohtoisen opiskelun sijaan, on tulevaisuuden taito, joka edesauttaa nopeisiin muutoksiin sopeutumista esimerkiksi tulevaisuuden työtehtäviä silmällä pitäen [32, 5, 25, 3]. Tämän takia oppikirja on suunniteltu siten, että se perinteisistä oppikirjoista poiketen painottaa nimenomaan näiden edellämainittujen taitojen kehittymistä. Nämä tutkimukselliset tehtävät oppikirjassa esitetään pääsääntöisesti pohdintatehtävien muodossa, joista kerrotaan enemmän seuraavassa kappaleessa.

3 Oppikirja

3.1 Oppikirjan rakenne ja tehtävätyypit

Tämän tutkielman oppikirjaosio käsittelee lukion pitkän matematiikan polynomilaskentakurssin MAA2 aihealuetta korkeamman asteen polynomifunktioista ja -yhtälöistä. Aihealueelle on varattu viisi 45 minuutin oppituntia. Osiossa on neljä kappaletta, joista ensimmäinen käytetään potenssifunktioiden ja -yhtälöiden käsittelyyn siinä määrin kuin niitä korkeamman asteen polynomifunktioiden ja -yhtälöiden osalta tarvitaan. Kirjaosion toisessa kappaleessa tutustutaan korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajiin havaintojen avulla luoden mielikuvia korkeamman asteen polynomifunktioiden ominaisuuksista. Kolmannessa kappaleessa tutustutaan korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ratkaisumenetelmiin ja viimeisessä tutkitaan polynomifunktion nollakohtien ja tekijöiden yhteyttä. Kappaleet sisältävät tunnilla käytävän osion sekä kotona tehtäviä harjoitustehtäviä. Tunnilla käytävä osio sisältää pääasiassa pohdintatehtäviä, mutta niiden lisäki mukana on myös muutama määritelmä, lause, mallitehtävä ja esimerkki.

Oppikirjaan valittiin muutamia yhteisiä tehtävätyyppejä, joita haluttiin sisällyttää pohdinta- ja harjoitustehtäviin. Näitä tehtävätyyppejä olivat graafiset tehtävät, parille ratkaistavaksi annettavat tehtävät, esimerkin keksiminen sekä virheiden etsiminen ja korjaaminen valmiista ratkaisusta, joista merkittävimmässä roolissa tässä osiossa ovat graafiset tehtävät. Näiden lisäksi kirjassa on muutama sanallinen tehtävä sekä pari tehtävää, joissa pitää hyödyntää teknisiä apuvälineitä muullakin tavalla kuin kuvaajia piirtämällä.

3.1.1 Pohdintatehtävät

Oppikirja on rakennettu siten, että oppituntien perustana toimii pohdintatehtävät, jotka johdattelevat opiskelijoita aihealueesta toiseen oppilaslähtöisen pohdinnan avulla. Pohdintatehtävissä opiskelijan tulee miettiä, miten voisi jo osaamiensa asioiden avulla ratkaista uudenlaisia ongelmia. Opiskelijan aktiivinen toiminta on matematiikan syvällisen oppimisen kannalta välttämätöntä [33] ja sen määrää oppitunneilla onkin pyritty maksimoimaan kirjaan valitun opetusmenetelmän avulla. Oppitunnista suurin aika kuluu pohdintatehtävien ratkomiseen ja kirjan teoriat muodostuvatkin niiden tuloksina. Pohdintatehtävien tavoitteena on kehittää opiskelijan ongelmanratkaisutaitoa ja rohkeutta lähteä ratkaisemaan tehtävätyyppejä, jotka eivät entuudestaan ole tuttuja.

Kirjan pohdintatehtävillä edesautetaan opiskelijoiden itsenäisen ongelmanratkaisukyvyn kehittymistä. On tärkeää, että opiskelijat hoksaavat, että heidän olemassa olevalla matemaattisella tietoudella on merkitystä ja että he ovat kykeneviä suoriutumaan heille annetuista ongelmissa [31] (s. 50). Tämä on otettu huomioon pohdintatehtävien suunnittelussa siten, että oppilaiden aikaisemmin opitut asiat riittävät haluttujen päätelmien tekemiseen. Pohdintatehtäviä ratkoessa opiskelijat luovat uutta tietoa yhdistelemällä ja muokkaamalla aikaisempia kokemuksia eli muodostavat niin sanottuja reflektioita [33]. Opettajan rooli tämän tyylisessä oppimisessa on toimia työskentelyn ohjaajana tiedon jakajan sijaan [32, 3].

Monet osion pohdintatehtävistä ovat sellaisia, joita pyydetään pohtimaan kaverin kanssa. Näillä parin kanssa keskustelemalla tehtävissä pohdinnoissa on tarkoituksena kehittää yhteistyötaitoja, tehdä oppimisesta sosiaalisempaa ja oppia pukemaan ajatuksen kulkua sanoiksi sekä huomaamaan, kuinka eri tavoilla eri ihmiset saattavat lähestyä samoja ongelmia. Ihanteellista olisi, jos opiskelijat huomaisivat keskustellessaan kuinka erilaisilla ajatusprosesseilla ja ratkaisutavoilla voidaan päätyä samaan lopputulokseen. Yhdessä keskustellen ongelmat myös ratkeavat helpommin kuin yksin [25].

Yhdessä tehtävien pohdintatehtävien ryhmäkooksi valikoitui kaksi opiskelijaa, mitä pidetään helpoimpana ryhmäkokona opettajan kannalta. Kahden hengen ryhmässä yksittäisellä opiskelijalla on myös erisuuruisista ryhmistä eniten aikaa olla äänessä, sillä yhdellä opiskelijalla on käytännössä puolet annetusta ajasta käytössään. Pienessä ryhmässä ei myöskään jäädä yhtä helposti osallistumatta tehtäviin kuin isommissa ryhmissä.[26]

3.1.2 Harjoitustehtävät

Tunneilla tehtävien tehtävien lisäksi jokaisessa kappaleessa on lopussa harjoitustehtäviä, jotka on tarkoitettu pääsääntöisesti kotitehtäviksi. Harjoitustehtävien määrä oppikirjassa on hyvin pieni verrattuna perinteisiin oppikirjoihin: yhtä oppituntia kohti kirjassa on ainoastaan 3-5 harjoitustehtävää. Harjoitustehtävien vähäisen määrän korvaa laatu, sillä ne ovat suunniteltu siten, että pohdintatehtävien aikana opittuja uusia asioita tulee osata hyödyntää ja soveltaa uudenlaisissa tilanteissa. Tehtävien suuri määrä tukisi mekaanisten laskutoimitusten ulkoa harjoittelua, mutta syvällisempään ongelmanratkaisun harjoittelemiseen riittää muutama sellainen tehtävä, joihin oppilaat keskittyvät kunnolla [32].

Hegartyn ja Mayerin tutkimuksen mukaan heikommat ongelmanratkaisijat opettelevat matematiikan tehtävät nimenomaan kaavojen kautta ja näin ollen kiinnittävät matematiikan tehtävissä huomiota numeroihin ja suoriin ratkaisumenetelmiin pohtimisen ja kokonaisvaltaisen ymmärtämisen sijaan [14]. Mekaaniset rutiinitehtävät tukevat ja mahdollistavat tämän tyylisen matematiikan harjoittamisen, eikä niiden laskeminen suuressakaan määrin muuta heikon opiskelijan tapaa suhtautua matemaattisiin tehtäviin [14, 1]. Perinteisiä rutiinitehtäviä kirjassa onkin hyvin vähän, mutta myös niitä on otettu mukaan sellaisiin asioihin, missä on haluttu testata oppilaan peruslaskutapojen osaaminen. Rutiinitehtävien merkittävin tarkoitus kirjaosiossa on kuitenkin opiskelijoiden laskurutiinin ylläpitäminen.

3.2 Kirjan kappaleiden perusteluosio

Tässä osiossa perustellaan oppikirjaan tehdyt valinnat. Jokaisella oppikirjaan tulleella kohdalla, harjoitustehtävät mukaan lukien, on jokin tarkoitus asetettujen tavoitteiden saavuttamiseksi.

3.2.1 Potenssifunktio ja potenssiyhtälöt

Potenssifunktioita ja -yhtälöitä ei suoranaisesti mainita opetussuunnitelman perusteissa 2015 yhdenkään pitkän matematiikan kurssin kohdalla keskeisissä sisällöissä. Potenssifunktioiden ja -yhtälöiden ratkaiseminen on kuitenkin oleellisessa osassa polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa, joten niiden perusteet tulee olla hallussa polynomiyhtälöitä käsiteltäessä. Etenkin tilanteissa, joissa polynomiyhtälöä ratkaistaan tekijöihin jaon ja tulon nollasäännön kautta, voidaan päätyä tilanteeseen, missä pitää osata ratkaista potenssiyhtälö. Tämän takia kirjaan on otettu yksi kappale, joka käsittelee polynomilaskennalle hyödyllisiä asioita potenssifunktioista ja -yhtälöistä. Opetussuunnitelman perusteissa mainitaan potenssin laskusäännöt kurssin *Juuri- ja logaritmifunktiot* (MAA8) keskeisissä sisällöissä, missä potenssi- ja juurilausekkeisiin tullaan kiinnittämään enemmän huomiota.

Kappaleessa on neljä pohdintatehtävää, jotka voidaan myös ajatella käsiteltävien aiheiden perusteella kahtena pohdintatehtäväparina, joista kaksi ensimmäistä (B.1 ja B.2) muodostavat toisen parin, ja jälkimmäiset (B.5 ja B.6) toisen. Tutkimusten mukaan opiskelijoilla on hankaluuksia hahmottaa erilaisten matemaattisten esitysten yhteyksiä. Oppikirjan tehtävät onkin muodostettu siten, että käsiteltäviä tilanteita tarkasteltaisiin aina vähintään kahden erilaisen matemaattisen esityksen avulla. Samoissa tutkimuksissa nousee esille etenkin hankaluus graafisen esityksen ja algebrallisen esityksen vertaamisessa, minkä takia juuri näiden kahden matemaattisen mallin vertailu on pääosassa tämän kirjaosion jokaisessa aihealueessa.[1, 4]

Pohdintatehtävissä B.1 ja B.2 tutkitaan potenssifunktion ominaisuuksia ensin taulukkolaskennan ja sen jälkeen graafien avulla. Toisessa pohdintatehtävässä oppilaan tulee soveltaa ensimmäisessä pohdintatehtävässä havaittuja ominaisuuksia uudenlaisessa tilanteessa. Toisin sanoen oppilaiden tulee hoksata, miten ensimmäisen pohdintatehtävän havainnot vaikuttavat potenssifunktioiden kuvaajiin. Jotta opiskelijat kiinnittäisivät mahdollisimman kattavasti huomiota siihen, miten nämä kaksi ensimmäistä pohdintatehtävää tukevat toisiaan, on pohdintatehtävän B.2 c)-kohdassa opiskelijoita vielä erikseen pyydetty keskustelemaan parin kanssa tehtävien havaintojen yhtäläisyyksistä.

Jotta opiskelijat pystyvät ratkaisemaan potenssifunktioihin liittyviä tehtäviä, tulee opiskelijoiden osata käyttää juurilausekkeita. Kirjantekijöiden tulkinnasta riippuen juurilauseke on voitu käsitellä jo ensimmäisellä lukion matematiikan kurssilla (MAY1), mutta heille, jotka sitä eivät siellä ole käsitelleet, on otettu kappaleeseen mukaan määritelmä ja esimerkki juurilausekkeesta ja sen murtopotenssimerkinnästä edellisen opetussuunnitelmien oppikirjojen ([16, 15, 17]) tapaisesti. Esimerkki B.4 havainnollistaa vielä määritelmän sisältöä neljän numeerisen esimerkin avulla.

Pohdintatehtävissä B.5 ja B.6 syvennytään määritelmän B.3 sisältöön ja harjoitellaan potenssifunktion algebrallista ratkaisua. Tehtävät siis vievät alun pohdintatehtäviä loogisesti pienen askeleen eteenpäin, kun tilanteita tarkastellaankin nyt vastakkaiseen suuntaan. Pohdintatehtävässä B.5 opiskelijan tulee analysoida valmista ratkaisua, jonka virheenä on se, ettei ratkaisuntekijä ole huomioinut yhtälön $x^4 = 2$ negatiivista juurta.

Tämä on yleinen virhe opiskelijoilla toisen asteen potenssiyhtälöitä ratkaistaessa [11], minkä takia voidaan olettaa, että vastaavaa virhettä havaitaan myös korkeampiasteisilla potenssiyhtälöillä, joiden asteluku on parillinen. Ratkaisun vieressä on havainnollistettu tilannetta funktion $f(x) = x^4$ kuvaajalla, jonka päällimmäisenä tarkoituksena on helpottaa opiskelijaa hoksaamaan yhtälön toinen juuri. Kuvaajan avulla pyritään myös vahvistamaan opiskelijan ajatusta graafeista algebrallisen tehtävänratkaisun visuaalisena apuna. Pohdintatehtävässä B.6 testataan vielä edeltävän pohdintatehtävän B.5 asian ymmärtämistä perinteisen rutiinitehtävän tyyppisesti. Tehtävässä opiskelijan tulee ottaa alun pohdintojen perusteella huomioon ratkaisujen lukumäärä potenssin parillisuudesta/parittomuudesta riippuen. Tässä tehtävässä ei ole enää esitetty graafeja valmiina, mutta niiden käyttö ratkaisun tukena on sallittu.

Oppikirjaosion kahdesta mallitehtävästä ensimmäinen on tämän kappaleen lopussa. Mallitehtävä B.7 esittelee sanallisen tehtävän, jonka ratkaisussa päädytään potenssiyhtälön ratkaisemiseen. Tehtävän kontekstina on talousmatematiikkaan liittyvä säästötilitehtävä. Kappaleen harjoitustehtävät koostuvat neljästä tehtävästä, joista ensimmäinen on perinteinen rutiinitehtävä, jossa harjoitellaan murtopotensseja ja toisessa tehtävässä tulee yhdistää potenssifunktion lauseke oikeaan kuvaajaan. Kaksi viimeistä tehtävää ovat perinteisiä sanallisia tehtäviä, joita on haluttu ottaa kirjaan mukaan harjoiteltavaksi, sillä oppilailla on havaittu haasteita sanallisten ongelmien mallintamisessa matemaattisesti [11]. Kokonaisuudessaan tämän kappaleen tehtävissä nousevat oppikirjan tavoitteista esille oletusten tekeminen, säännönmukaisuuksien etsiminen, teknisten apuvälineiden käyttö, graafisuus, oppilaslähtöisyys ja tutkimuksellisuus.

3.2.2 Korkeamman asteen polynomifunktiot

Kappaleessa tutustutaan korkeamman asteen polynomifunktioihin. Kappaleen perimmäinen tarkoitus on tutustua teknisiä apuvälineitä apuna käyttäen korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajiin, herättää oppilaiden mielenkiinto korkeamman asteen polynomifunktioita kohtaan sekä pohtia ja tehdä huomioita polynomifunktioiden käyttäytymisestä. Reisin ja Gulecen mukaan GeoGebra on hyvä väline aihealueen alussa kiinnittämään opiskelijoiden huomio ja mielenkiinto tulevaa aihetta kohtaan [23]. Kappale tukee vahvasti Habits of Mindin mukaista kokeilua ja oletusten teon harjoittelua visuaalisuuden lisäksi.

Kappaleessa lähdetään liikkeelle korkeamman asteen polynomifunktion määrittelystä. Kappaleen pohdintatehtävissä tutustutaan korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajiin ja polynomin termien kertoimien vaikutukseen kuvaajiin GeoGebran avulla. Opiskelijoille on edellisessä kappaleessa tullut tutuksi potenssifunktion kuvaajat ja tämän kappaleen ensimmäisessä pohdintatehtävässä B.9 tarkastellaankin GeoGebran avulla, miten kuvaajat muuttuvat, kun funktio onkin monomin sijaan useamman termin sisältävä polynomifunktio. Tehtävässä hyödynnetään GeoGebran liukusäätötoimintoa ja tehdään havaintoja termien kertoimien vaikutuksista kuvaajaan. Tehtävän tarkoituksena on muodostaa opiskelijoille käsitys polynomifunktion kuvaajista ja siitä kuinka polynomin asteluku, korkeimman asteen termin kerroin sekä vakiotermi vaikuttavat polynomifunktion kuvaajaan. Koska korkeamman asteen polynomifunktion lauseke voi olla hyvinkin pitkä, on pohdintatehtävän jälkeen nostettu esille lisätietolaatikossa GeoGebraa koskeva huomio siitä, ettei Neperin lukua e eikä imaginääriyksikköä i tulisi käyttää parametreinä tehtävissä liukusäätöjä luodessa.

Kappaleen toisessa pohdintatehtävässä B.10 opiskelijoiden tulisi GeoGebralla kokeilemisen avulla päätellä, että on olemassa asteluvultaan parillisia polynomifunktioita, joilla ei ole yhtään nollakohtaa, mutta jokaisella asteluvultaan parittomalla polynomifunktiolla on aina vähintään yksi nollakohta. Tässä tehtävässä on hyvä huomioida se, että ainoastaan ensimmäinen väite on pätevästi osoitettu. Viimeisessä pohdintatehtävässä B.11 tehdään havaintoja polynomifunktion nollakohtien lukumääristä. Tehtävässä myös ohjeistetaan nollakohtien likiarvojen graafinen määrittäminen GeoGebran avulla. Tämän pohdintatehtävän päätelmät on esitetty myös pohdintatehtävää seuraavassa lauseessa B.12, joka todistetaan osion viimeisessä kappaleessa, kun lauseen matemaattiseen todistamiseen on käytössä tarpeeksi työkaluja.

Korkeamman asteen polynomifunktiot ja polynomiyhtälöt -osio aloitetaan tarkoituksella kuvaajien tutkimisella, jotta opiskelijoilla olisi pienempi kynnys seuraavissa kappaleissa lähestyä aiheita kuvaajien ja teknisten apuvälineiden avulla, vaikkei sitä olisi erikseen tehtävänannossa mainittu. Kappaleen jokainen pohdintatehtävä tukee oppikirjan tavoitteista toistuvuuksien etsimistä, oletusten tekemistä, kuvailua, graafisuutta ja teknisten apuvälineiden käyttöä. On hyvä huomioida, että kappaleen pohdintatehtävissä päädytään ainoastaan havaintojen pohjalta tehtyihin johtopäätöksiin, jotka luovat mielikuvia polynomifunktioiden käyttäytymisestä. Suurin osa kappaleessa tehdyistä päätelmistä ei siis ole vielä matemaattisesti validisti perusteltu. Kuvaajan kulun matemaattiseen tutkimiseen keskitytään enemmän kurssilla *Derivaatta* (MAA6), jossa polynomifunktion kuvaajan kulun tutkiminen matemaatteisesti on otollisinta [13].

Kappaleessa on kolme harjoitustehtävää, joista jokaisessa keskitytään korkeamman asteen polynomifunktioiden kulkuun ilman teknisiä apuvälineitä. Kuten kappaleen pohdintatehtävissä tehdyt väittämät, myös harjoitustehtävät pohjautuvat opiskelijoiden tekemiin kokeellisiin havaintoihin eikä näin ollen ole vielä matemaattisesti todistettuja. Tämä myös todetaan kirjassa tehtävien lopussa. Tavoitteena olisi, että opiskelijat hyödyntäisivät mielikuvia korkeamman asteen polynomien kuvaajista tulevissa kappaleissa, joissa polynomilausekkeiden käyttäytymistä tarkastellaan ja perustellaan tarkemmin. Etenkin pohdintatehtävän B.14 hahmottamista voi auttaa mielikuvat korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajista.

3.2.3 Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen

Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen -kappaleessa käydään läpi graafinen ratkaisumenetelmä sekä laskennallisia menetelmiä ratkaista polynomiyhtälöitä. Vaikka graafinen ratkaisu ei aina olekaan matemaattisesti tarkin, antaa graafisen ratkaisutavan ymmärtäminen helpon ja nopean tavan tarkistaa algebrallisesti saatujen ratkaisujen paikkansapitävyys silloin, kun käytössä on jokin tekninen apuväline, jolla kuvaajien graafinen tutkiminen onnistuu. Opettajan oppaassa kehoitetaan opettajaa myös esittelemään opiskelijoille tapa ratkaista polynomiyhtälöitä GeoGebran Ratkaise-toiminnolla. Tätä ei ole kuitenkaan otettu oppikirjaosassa erikseen esille, jotta opiskelijat keskittyisivät esitettyihin numeerisiin ratkaisumenetelmiin, jotka ovat myös opetussuunnitelmassa osana kurssin osaamistavoitteita [22].

Graafinen ratkaisu

Graafinen ratkaisutapa oli hyvin pienessä roolissa edellisen opetussuunnitelman oppikirjoissa polynomiyhtälöiden ratkaisutavoissa [16, 15, 17]. Oppikirjassa *Pyramidi* ei esimerkiksi ollut yhtään kuvaajan piirtämiseen tai tulkintaan liittyvää tehtävää korkeamman asteen polynomifunktioista ja oppikirjassa *Pitkä matematiikka* niitä oli vain yksi. Tarkastelluista kirjoista ainoastaan kirjassa *Calculus* oli vertailtu graafien kautta korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajia. Opiskelijat yleensä suosivatkin järjestystä, jossa ensin opiskellaan aiheeseen liittyvät laskutoimitukset ja sen jälkeen vasta mahdollisesti tutkitaan tilannetta graafisesti [19]. Usein käytännön tilanteissa on kuitenkin hyödyllisempää miettiä algebraa vasta kuvaajien analysoinnin tuloksena [19]. Se, miksi oppilailla on ollut hankaluuksia analysoida graafeja ja tehdä niiden pohjalta algebrallisia päätelmiä, on perusteltu Adu-Gyamfin, Bossén ja Chandlerin tutkimuksessa sillä, että kouluissa yleensä opetetaan vain graafisen esityksen muodostamista algebrallisesta esityksestä eikä toisin päin [1]. Oppikirjaan valittu lähestymistapa korkeamman asteen polynomiyhtälöihin pyrkiikin tuomaan muutosta tähän ajatteluun.

Kirjassa lähdetään liikkeelle graafisista ratkaisumenetelmistä ja niiden avulla muodostetaan perusta algebrallisille ratkaisumenetelmille. On havaittu, että opiskelijoilla on vaikeuksia hahmottaa eri polynomiluokkien (ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen polynomien) yhteyksiä algebrallisesti [7]. Vaikka opiskelijat olisivat esimerkiksi ensimmäisen ja toisen asteen polynomiyhtälöiden kohdalla ymmärtäneet, että polynomiyhtälön $P(x) = 0$ juuret ovat graafisesti $P(x)$:n kuvaajan x-akselin leikkauspisteitä, on heillä vaikeuksia hoksata, että se pätee kaikilla polynomeilla asteluvusta riippumatta [7]. Graafisen ratkaisun molemmissa pohdintatehtävissä B.13 ja B.14 ollaankin kiinnitetty huomiota siihen, että opiskelija muodostaisi omatoimisesti tämänkaltaisia yhteyksiä eriasteisten polynomikuvausten välille. Pohdintatehtävän B.13 tarkoituksena on, että oppilas hahmottaa polynomiyhtälöiden tarkastelun graafisesti ensin nollakohtia etsimällä ja sen jälkeen kahden kuvauksen leikkauspisteen avulla.

Pohdintatehtävää B.14 voidaan pitää kappaleen merkittävimpänä pohdintatehtävänä, sillä sen tarkoituksena on, että oppilaat itse pohtimalla hoksaavat, kuinka korkeamman asteen polynomifunktioita voidaan rakentaa lineaaristen kuvausten avulla. Tehtävä on rakennettu Buckin tutkimuksessa esitellyn tehtävätyypin pohjalta, jossa todetaan, että tämän tyyppinen tehtävä olisi hyvä lähtökohta korkeamman asteen polynomien tutkimiselle kouluissa [7]. Vaikka tehtävä on varmasti opiskelijoista haastava, on heillä tarpeeksi matemaattista tietotaitoa tehtävän ratkaisemiseksi. Opettajan tuleekin antaa opiskelijoille kunnolla aikaa tehtävän pohtimiseen ja esittää opiskelijoille pohdintaa eteenpäin vieviä kysymyksiä, jos näyttää etteivät opiskelijat pääse eteenpäin tehtävän ratkaisemisessa. Tehtävätyyppi ei pelkästään edesauta opiskelijaa muodostamaan yhteyksiä eri polynomiluokkien välille, vaan se myös edistää yhteyksien muodostumista graafisen ja algebrallisen esityksen välille [7]. Pohdintatehtävä johdatteleekin opiskelijan algebralliseen polynomiyhtälön ratkaisumenetelmään tekijöihin jaon avulla, jota käsitellään kappaleessa seuraavana.

Tekijöihin jako

Edellisen opetussuunnitelman oppikirjojen tehtävätyypit polynomiyhtälöistä painottuivat tekijöihin jakoon [16, 17, 15], mistä voidaankin päätellä, että tekijöihin jako on yksi yleisimmistä tavoista lähteä ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä lukiotehtävissä. Tekijöihin jako on myös tärkeä osa yhteyksien muodostamisessa eri asteisten polynomifunktioiden välillä algebrallisesti [7], kuten pohdintatehtävässä B.14 havaittiin.

Pohdintatehtävässä B.15 tutkitaan algebrallisesti, miten korkeamman asteen polynomiyhtälö voidaan ratkaista, kun yhtälö on muodossa $P(x) = 0$ ja $P(x)$:n tekijöihin jaettu muoto tunnetaan. Tehtävässä siis siirretään pohdintatehtävässä B.14 tehdyt päätelmät algebralliseen muotoon. Toisin kuin graafisessa pohdinnassa, nyt kolmannen asteen polynomi on muodostunut ensimmäisen ja toisen asteen polynomien avulla, minkä tarkoituksena on vahvistaa opiskelijan käsityksiä polynomiluokkien yhteyksistä. Samalla opiskelijoiden on tarkoitus hoksata, että tässä muodossa olevien korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ratkaiseminen onnistuu, vaikkei kaikki polynomin tekijöistä olisikaan ensimmäisen asteen polynomeja. Pohdintatehtävän B.14 jälkeen oppilaille on luultavasti melko helppoa hoksata, että tilanteessa hyödynnetään tulon nollasääntöä. Vastaavanlaista nollakohtien ratkaisua tekijöihin jaetusta muodosta on harjoiteltu jo toisen asteen polynomifunktioita käsittelevissä kappaleissa. Pohdintatehtävässä pyydetään myös opiskelijaa tarkistamaan saamansa vastaus GeoGebran avulla. Tehtävänannossa ei kuitenkaan kerrota, miten vastaus tulisi tarkistaa, joten opiskelijan tulee itse keksiä, miten sen voisi tehdä. Eri opiskelijoilla voikin olla eri tyylejä tarkastaa vastauksensa.

Pohdintatehtävässä B.15 tehdyt päätelmät tulon nollasäännön käytöstä polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa esitetään seuraavassa kohdassa lauseena B.16, joka myös todistetaan matemaattisesti heti lauseen yhteydessä. Vaikka opiskelijat tunnistavatkin tilanteita, missä tulon nollasääntöä voi käyttää, on monella silti matemaattisesti virheellinen ymmärrys tehtävän ratkaisun matemaattisesta kulusta [11]. Didiksen ja Erbasin tutkimuksessa toisen asteen polynomiyhtälöiden ratkaisemisesta havaittiin, että hyvin usein opiskelijat ajattelivat, että tulon nollasäännön seurauksena molemmat lausekkeen tekijät saavat samanaikaisesti arvokseen nolla [11]. Lauseen B.16 todistusta läpikäydessä voisikin olla hyvä muistutuksena kiinnittää huomiota ensimmäisessä osassa siihen, että tulos 0 saadaan, kunhan yksi tulon tekijöistä on nolla sekä toisessa osassa siihen, että tulon nollasääntöä käytettäessä vastausten välissä ei käytetä sanaa "ja" vaan sanaa "tai".

Tekijöihin jakoa harjoitellaan rutiinitehtävän omaisesti pohdintatehtävässä B.17, jotta opiskelijoille muodostuisi laskurutiini tämän tyylisten perustehtävien ratkaisemiseksi. Pohdintatehtävässä B.18 tarkastellaan tilannetta, jossa polynomiyhtälö on muodossa $P(x) = Q(x)$ ja on mahdollista ratkaista tekijöihin jakoa soveltamalla. Tämän tyylisessä yhtälönratkaisussa oikeaoppisen ratkaisumenetelmän sijaan opiskelijoilla on yleisenä virheenä jakaa yhtälö puolittain muuttujalla x [11]. Sen takia pohdintatehtävän tehtävätyypiksi valikoitui valmiin ratkaisun analysointi, jossa opiskelijoiden tulee itse hoksata tämä virheellinen ratkaisutapa ja pohtia, minkälaisia ongelmia muuttujalla jakaminen tuottaa. Lisäksi opiskelijaa ohjataan kiinnittämään huomiota siihen, että matemaattisia yhtälönratkaisumenetelmiä tulisi harjoitella käyttämään kokeilemisen sijaan. Tämä on otettu tehtävään mukaan sen takia, koska on havaittu, että oppilaat suosivat kokeilua yhtälönratkaisemisessa [8]. Tutkimuksessa esimerkiksi 58% tutkimukseen osallistuneista oppilaista olivat onnistuneet saamaan oikean vastauksen polynomiyhtälöön $x^2 + 1 = 2x$ (helppo ratkaista kokeilemalla), kun vastaava prosentti yhtälölle $2x^2 = 10x$ (vaikea ratkaista kokeilemalla) oli vain 23% [8]. Kokeilemisen sijaan on opiskelijan kannalta hyödyllisempää ymmärtää ja sisäistää yhtälönratkaisumenetelmät, jotta myös haastavammista tehtävistä pystyttäisiin suoriutumaan. Kun opiskelijat ovat analysoineet valmiin ratkaisun ongelmia, pitää heidän vielä keksiä, miten tehtävän ratkaiseminen onnistuu algebrallisesti. Opiskelijat ovat harjoitelleet vastaavanlaisia tehtäviä toisen asteen polynomiyhtälöiden tapauksessa, minkä vuoksi opiskelijoiden aikaisempi matemaattinen osaaminen riittää ratkaisumenetelmän keksimiseen.

Ryhmittely ja muuttujan vaihto

Kappaleessa esitellään algebrallisista polynomiyhtälön ratkaisumenetelmistä vielä ryhmittely ja muuttujan vaihto. Clementsin ja Vaiyavutjamain tutkimuksessa huomattiin, että opiskelijoilla oli vaikeuksia ratkaista suurinta osaa heille esitetyistä perinteisistä toisen asteen polynomiyhtälöistä [8]. Tästä voidaan päätellä, että myös korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ratkaiseminen tuottaa opiskelijoille vaikeuksia. Jotta opiskelijoille tulisi tutuksi usea polynomiyhtälön ratkaisumenetelmä, on myös nämä ratkaisutavat otettu kirjaan tutustuttavaksi.

Ryhmittely-osa koostuu kolmesta pohdintatehtävästä, joista ensimmäisessä esitellään ryhmittely terminä. Opiskelijan tulee esitetystä esimerkistä ymmärtää, miten ryhmittely on tehty ja keksiä miten sitä voisi hyödyntää tekijöihin jaossa. Toinen pohdintatehtävä on perinteisen oppikirjan tyylinen rutiinitehtävä, jossa harjoitellaan polynomiyhtälön ratkaisua ryhmittelemällä. Jotta matematiikan opiskeleminen olisi mahdollisimman monipuolista, tulisi opiskelijoille antaa myös käänteistä ajattelua harjoittavia tehtäviä [1]. Kolmannessa pohdintatehtävässä B.21 syvennetäänkin opiskelijoiden ymmärrystä ryhmittelystä, kun heidän tulee itse keksiä keino muodostaa polynomiyhtälö, joka voidaan ratkaista ryhmittelemällä.

Muuttujan vaihtoon tutustutaan mallitehtävän B.22 avulla. Mallitehtävässä käydään läpi bikvadraattisen yhtälön ratkaisu ja se on kirjassa ohjeistettu käymään läpi parin kanssa kohta kohdalta keskustellen läpi. Muuttujan vaihto esitellään kirjassa mallitehtävän avulla, koska sen idea olisi luultavasti liian haastava opiskelijoille itse keksiä.

Kappale on suunniteltu käsiteltävän kahden oppitunnin aikana, minkä takia harjoitustehtäviä on normaalista poiketen seitsemän. Kappaleen harjoitustehtävissä on kolme rutiinitehtäväksi luokiteltavaa tehtävää (8, 9 ja 12). Opetussuunnitelman tavoitteissa oleva korkeamman asteen polynomiyhtälöiden ratkaisemisen osaaminen tulee näin testattua yleisimpien ratkaisumenetelmätyyppien avulla myös rutiinitehtävien muodossa. Harjoitustehtävä 10 edustaa sanallista tehtävätyyppiä, jonka ratkaiseminen lähtee liikkeelle yleisen muodon muodostamisesta kolmelle peräkkäiselle kokonaisluvulle. Tämän tyylisillä tehtävillä pyritään kitkemään pois heikompien matematiikan opiskelijoiden suosima menetelmä lähteä ratkaisemaan sanallisia ongelmia pelkästään tehtävänannossa mainittujen numeroarvojen pohjalta kokeilemalla, sillä se ei tue matematiikan menestyksellistä opiskelua [14]. Tehtävässä tulee myös harjoiteltua matemaattista mallintamista ja lausekkeen muodostamista sanallisesta tehtävästä, mitkä on koettu opiskelijoiden keskuudessa haastaviksi [11].

Harjoitustehtävässä 11 ratkaistavana ei olekaan muuttuja x, vaan vakio a. Tehtävässä tulee myös muistaa aikaisemmin opittu toisen asteen polynomin diskriminantin vaikutus yhtälön juurien määrään. Harjoitustehtävällä 13 halutaan herätellä opiskelijoita pohtimaan polynomifunktioiden ja polynomiyhtälöiden yhtäsuuruuden yhtäläisyyksiä ja eroja. Tärkeimpänä havaintona opiskelijan tulisi ymmärtää, että funktiot leikkaavat tietyssä pisteessä, mutta yhtälön ratkaisussa etsitään niitä muuttujan arvoja, joilla yhtälö pätee. Tehtävässä myös vertaillaan GeoGebralla tehtäviä ratkaisumenetelmiä toisiinsa sekä algebralliseen ratkaisumenetelmään. Kohdassa, jossa opiskelijan pitää ratkaista tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä, halutaan vahvistaa opiskelijan luottamusta omiin kykyihinsä selvitä matematiikan tehtävistä myös ilman teknisiä apuvälineitä.

Harjoitustehtävässä 14 pohdintatehtävän B.14 tyylinen tehtävä on viety askeleen eteenpäin Llanosin, Oteron ja Rojasin tutkimuksen [20] mukaisella tavalla. Tehtävässä polynomien tuloa pitää ajatella graafisesti myös muissakin pisteissä, kuin nollakohdissa. Näin ollen tehtävä jo hieman johdattelee oppikirjan viimeisen osion asioihin, joissa käsitellään polynomiepäyhtälöitä. Pohdintatehtävän B.14 ansiosta, opiskelijoiden tulisi hoksata kysytyn polynomin nollakohdat melko helposti, mutta siitä eteenpäin jatkaminen vaatii syvempää ajattelua. Tehtävän haastavuuden vuoksi tehtävän lopussa on annettu vinkki, joka johdattelee tehtävässä alkuunpääsyyn. Tehtävän kannalta oleellisimmat huomiot matemaattisten yhteyksien graafisen ja algebrallisen esitysten välillä tehdään ratkaisun alkuvaiheessa. Vaikka tehtävässä ei tarvikaan muodostaa algebrallista esitystä polynomista $P(x)$, tuo myös tämä tehtävä vaihtelua perinteiseen tapaan muodostaa kuvaajia algebrallisista esityksistä.

3.2.4 Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla

Nollakohtien avulla tekijöihin jakoa on harjoiteltu jo kirjassa toisen asteen polynomifunktioita käsittelevässä osuudessa, minkä takia kappaleen alun pohdintatehtävien päätelmät ovat helposti oppilaiden hoksattavissa. Kappaleen ensimmäisen pohdintatehtävän B.23 ideana on oppilaslähtöisesti yleistää aikaisemmin opittu nollakohtien avulla tekijöihin jako koskemaan myös korkeamman asteen polynomifunktiota. Tehtävät, joissa oppilaan pitää muodostaa ratkaisuista yleinen muoto, parantavat ja syventävät oppilaan matemaattista ymmärtämistä [1], minkä takia pohdintatehtävän lopussa oppilaita pyydetään muodostamaan yleisessä muodossa oleva sääntö keksimälleen menetelmälle.

Ensimmäisen pohdintatehtävän johtopäätökset nollakohtien ja tekijöiden yhteyksistä on kirjattu lauseeseen B.24 ja sen yhteydessä matemaattinen todistus lauseelle. Vaikka opiskelijoilla ei ole vielä käytynä kurssia varsinaisista todistusmenetelmistä, on matemaattisia todistuksia hyvä nostaa esille jo aikaisemmissakin vaiheissa. Matemaattiseen todistamiseen opiskelijat tutustuvat syvemmin kurssilla *Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)* [22].

Pohdintatehtävä B.25 johdattelee opiskelijan graafisten esitysten kautta kappaleen toiseen tärkeään tulokseen, lauseeseen B.26. Oppilaiden tulee hyödyntää juuri läpi käytyä lausetta annetun polynomilausekkeen tekijöihin jaossa ja hahmottaa, miten graafeja voi hyödyntää tämän tyylisissä tehtävissä. Oppilaat harjoittelevat yleensä kouluissa graafien piirtämistä funktion lausekkeen avulla, mutta ei lausekkeen muodostamista graafien avulla [1]. Esimerkiksi Adu-Gyamfin, Bissén ja Chandlerin tutkimuksessa kenellekään tutkimukseen osallistuneista oppilaista ei ollut entuudestaan tuttua muodostaa polynomifunktion lauseketta kuvaajan avulla [1]. Pohdintatehtävän B.25 tarkoituksena onkin tutustuttaa opiskelijat myös tähän suuntaan eteneviin harjoitustehtäviin. Kuten tutkielman alussa jo mainittiinkin, todellisissa tilanteissa on usein hyödyllistä osata muodostaa algebrallisia kuvauksia graafien pohjalta [19]. Tämän kappaleen myötä opiskelijoilla on tarpeeksi matemaattista tietotaitoa muodostaa yksinkertaisia algebrallisia polynomikuvauksia graafien pohjalta.

Pohdintatehtävässä B.27 opiskelijat pääsevät itse muodostamaan polynomifunktioita, jonka pari jakaa tekijöihin nollakohtien avulla. Opiskelijan tulee keksiä keino, miten muodostaa polynomifunktio, jolla on halutut nollakohdat. Tehtävänannossa on rajattu nollakohdat rationaalilukuihin, jotta opiskelija joutuisi miettimään, mistä halutunlaisessa polynominmuodostuksessa kannattaisi lähteä liikkeelle. Jos nollakohtien arvoja ei olisi rajattu, voisi opiskelija keksiä sellaiset kertoimet termeille, ettei tekijöihin jako olisi mielekäs.

Kappaleen viimeinen pohdintatehtävä B.28 johdattelee opiskelijat moninkertaisen nollakohdan käsitteeseen, joka on viimeinen kirjaosiossa käsiteltävä asia. Tehtävässä opiskelijat analysoivat valmista ratkaisua, jossa ensivilkaisulta saattaa opiskelijasta vaikuttaa siltä, ettei juuri käsitelty lause B.26 pädekään. Tehtävää pohtiessa opiskelijoiden pitää huomata, ettei lauseen B.26 oletus nollakohtien lukumäärästä toteudukaan. Tehtävässä tulee siis uuden asian lisäksi myös mietittyä lauseiden oletusten toteutumisen tärkeyttä lauseita käytettäessä. Tehtävän ratkaisuun on monia eri menetelmiä, mikä tekee tehtävän ratkaisemisesta joustavaa. Tätä pidetään yhtenä tärkeänä hyvän matematiikan tehtävän piirteenä, sillä se antaa tilaa opiskelijoiden omalle ajattelulle [1]. Pohdintatehtävän jälkeen on esitetty vielä määritelmä B.29 moninkertaisesta nollakohdasta ja kaksi esimerkkiä.

Kappaleeseen kuuluu viisi harjoitustehtävää. Harjoitustehtävistä kaikki, tehtävää 16 a) lukuunottamatta ovat opiskelijoille uuden tyylisiä tehtäviä, joiden ratkaisemiseksi opiskelijoiden tulee soveltaa kappaleen pohdintatehtävien aikana tehtyjä havaintoja sekä aikaisempaa matemaattista osaamista. Esimerkiksi tehtävässä 17 opiskelijan pitää keksiä aikaisemmin opitun avulla, miten voi neljännen tunnetun pisteen avulla määrittää kysytyn kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajan, kun on ensin onnistunut muodostamaan yleisen muodon kolmannen asteen polynomifunktioille, joilla on halutut nollakohdat.

Harjoitustehtävässä 18 hyödynnetään jälleen Llanosin, Oteron ja Rojasin tutkimuksen [20] esittelemää tehtävätyyppiä, jota käsiteltiin harjoitustehtävänä 15, vieden tehtävää taas askeleen eteenpäin. Edellisessä kappaleessa opiskelijat hahmottelivat kuvaajassa esitettyjen kuvausten tulona muodostuvan kolmannen asteen polynomifunktion. Tässä tehtävässä opiskelijoiden tulee keksiä keino muodostaa hahmotellun funktion lauseke $P(x)$. Käytännössä tehtävä vastaa edellistä harjoitustehtävää 17, kunhan kuvaajista osataan lukea nollakohdat polynomille $P(x)$, sekä jokin neljäs piste, jonka avulla kiinnitetään muodostettu funktio haluttuun paikkaan. Tehtävän ratkaisu helpottuukin, jos opiskelija hoksaa graafisen tehtävätyypin yhteyden edelliseen algebralliseen tehtävätyyppiin.

Harjoitustehtävä 19 on muodostettu tutkimuksen [1] tutkimustehtävän mukaisesti. Tehtävässä korostuvat tutkimuksen esille nostamat piirteet hyvästä, syvällistä matemaattista ymmärtämistä edistävästä matematiikan tehtävästä: palautettavuus (*reversibility*), joustavuus (*flexibility*) ja yleistettävyys (*generalizability*)[1]. Tehtävää siis lähestytään käänteisesti (graafisesta algebralliseen), tehtävän voi ratkoa monella eri tavalla ja tehtävässä oppilaiden tulee muodostaa ratkaisu yleisessä muodossa.

3.2.5 Lisätehtävät

Oppikirjan jokaiseen osioon tehtiin viisi lisätehtävää. Tämän osion lisätehtävien neljä ensimmäistä tehtävää ovat kappaleissa vastaan tulleita tehtävätyyppejä, joiden avulla opiskelija voi kerrata asiat osion sisällöstä. Viimeinen tehtävä on soveltava sanallinen tehtävä, jonka avulla opiskelija voi testata matemaattista mallintamista ja saamiensa matemaattisten esitysten kuvailua. Tehtävässä on polynomilaskennan lisäksi mukana myös geometrista hahmottamista ja yksikkömuunnosten huomioon ottamista lausekkeen muodostamisessa. Monimutkaisuutensa vuoksi tehtävä on laitettu viimeiseksi antamaan haastetta matemaattisestia lahjakkaimmille opiskelijoille.

Lähdeluettelo

[1] Adu-Gyamfi, K., Bossé, M.J., Chandler, K. *Student Connections Between Algebra and Graphical Polynomial Representations In The Context of A Polynomial Relations*. Ministry of Science and Technology, Taiwan, 2006.

[2] Aho, L. *Koulu, opetus ja oppiminen*. Kirjassa: Aho, L., Pitkäniemi, H., Raijas, A., Nummenmaa, T., Haring, M., Julkunen, K., et al. *Opetus, oppiminen, vuorovaikutus*. Helsinki; Porvoo: WSOY, 2002.

[3] Barron, B., Darling-Hammond, L. *Teaching for Meaningful Learning: A Review of Research on Inquiry-Based and Cooperative Learning*. George Lucas Educational Foundation, Book Excerpt, 2008.

[4] Bautista, A., Cañadas, M.C., Brizuela, B.M., Schliemann, A.D. *Examining How Teachers Use Graphs to Teach Mathematics during a Professional Developement Program*. Journal of Eduvational and Training Studies, Vol. 3, No. 2, 2015.

[5] Boaler, J. *Open and Closed Mathematics: Student Experimences and Understandings*. King's College, London University, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 29, No. 1, 41-62, 1998.

[6] Bollström-Huttunen, M., Pyysalo, R., Lonka, K., Raami, A., Sinivuori, E., Hakkarainen, K. *Tutkiva oppiminen käytännössä, matkaopas opettajalle*. Helsinki: WSOY, 2005.

[7] Buck, J.C. *Fostering Connections Between Classes of Polynomial Functions*. University of New Hampshire Durham, NH 03824 and Plymouth State College Plymouth, NH 03266, 1995.

[8] Clements, M.A., Vaiyavutjamai, P. *Effects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations*. Mathematics Education Research Journal, Vol 18, No. 1, 47-77, 2006.

[9] Cuoco, A., Goldenberg, E.P., & Mark, J. *Habits of Mind: An Organizing Principle of Mathematics Curricula*. Journal of Mathematical Behavior, 15, 375-402, 1996.

[10] Despina A. Stylianou & Edward A. Silver (2004) The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences, Mathematical Thinking and Learning, 6:4, 353-387.

[11] Didis, M., Erbas, A.K. *Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown*. Educational Sciences: Theory & Practice, 2015.

[12] Eisner, E.W. *Preparing for Today and Tomorrow*. New Needs, New Curriculum (p. 6-10), Educational Leadersip, Vol. 61, No. 4, 2004.

[13] Flesher, T., Holder, E. *Shapes of the Graphs of Fourth-Degree Polynomials in Terms of Their Coefficients*. Medgar Evers College, City University of New York, 2007.

[14] Hegarty, M., Mayer, R.E., Monk, C.A. *Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers*. Journal of Educational Psychology, Vol. 87, No. 1, 18-32, 1995.

[15] Järppinen, P., Kupiainen, A., & Räsänen, M. *Calculus* 1. Keuruu, Otava, 2008.

[16] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., & Tahvanainen, J. *Pitkä matematiikka: Polynomifunktiot*. Porvoo, WSOY, 2004.

[17] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A., & Savolainen, S. *Pyramidi* 2*: Polynomifunktiot*. Vammala, Tammi, 2005.

[18] Laitamäki, A. *GeoGebra-ohjelma konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen matematiikan-opetuksen tukena*. Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2009.

[19] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Kaystein, M. *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching* Review of Educational Research, Vol. 60, No. 1, pp. 1-64, 1990.

[20] Llanos, V.C., Otero, M.R., & Rojas, E.C. *Polynomial Functions Resulting from the Multiplication of Curves in the Framework of the Research and Study Paths*. REDIMAT, Vol 4(1), 80-98. doi:10.4471/redimat.2015.60.

[21] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet* 2003. Vammala, Opetushallitus, 2003.

[22] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet* 2015. Helsinki: Opetushallitus, 2015.

[23] Reis, Z.A., Gulsecen, S. *The Effects of the GeoGebra in Mathematics Education: A Case Study Integers in Turkey*. Istanbul University Scientific Research Projects Unit, Project Number: 7461, 2010.

[24] Ryken, A.E. *Multiple Representations as Sites for Teacher Reflection about Mathematical Learning*. Springer Science + Business Media B.V., J Math Teacher Edue 12:347-364, 2009.

[25] Salakari, H. *Toiminta ja oppiminen koulutuksen kehittämisen tulevaisuuden suuntaviivoja ja menetelmiä*. Ylöjärvi, Eduskills Consultind, 2009.

[26] Saloviita, T. *Yhteistoiminnallinen oppiminen ja osallistava kasvatus*. Jyväskylä, PS-kustannus, 2006.

[27] Solares, A., Cieran, C. *Articulatin syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions*. Springer Science + Business Media Dordrecht, 2013.

[28] Stylianides, A.J., Stylianides, G. *Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics*. TMME, vol4, no.1, p.103-114, 2007.

[29] Stylianides, A.J., Stylianides, G.J. *Proof of Construcitons and Evaluations*. Springer Science + Business Media B.V., 2009.

[30] Stylianides, A.J. *The Notion of Proof In The Context of Elementary School Mathematics*. Springer, California, 2006.

[31] Sutherland, R. *Teaching for learning mathematics*. Maidenhead, England; New York: Open University Press, 2007.

[32] Turun Matikkamaa. *Matematiikan sanalliset tehtävät - Tehtävän ymmärrys*.2013.

[33] Yrjönsuuri, R. *Opi opiskelemaan, käsityksiä matematiikan opiskelusta*. Helsinki: Oppilo, 2005.

A Opettajan opas

Tämä opettajan opas on tarkoitettu opettajien avuksi *Yleinen polynomifunktio ja polynomiyhtälö* -osion kappaleiden läpikäyntiin. Opettajan oppaan alusta löytyy ajankäyttösuunnitelma osion neljälle kappaleelle. Tämän jälkeen oppaassa käydään järjestyksessä läpi kirjan kappaleet aloittaen ensin kunkin kappaleen tavoitteista. Tavoitteiden perään oppaassa on esitetty pohdintatehtävien ratkaisut ja mahdollisia muita vinkkejä oppitunneille.

A.1 Tuntijako

Tuntijako on suunniteltu 45 minuutin oppitunneille ja on opettajan muokattavissa parhaaksi näkemällään tavalla. Huomioi, että GeoGebran käyttö on erittäin suuressa osassa osion kappaleissa, minkä takia oppilailla tulisi olla käytössä esimerkiksi tietokoneet, joilla GeoGebran käyttö olisi mahdollisimman vaivatonta. Jos jokaiselle ei ole omaa tietokonetta, voivat parit käyttää myös yhteistä tietokonetta. Osion kappaleille on suunniteltu käytettävän viisi 45 minuutin oppituntia seuraavasti:

- 1×45min Potenssifunktiot ja potenssiyhtälöt
- 1×45min Korkeamman asteen polynomifunktiot
- 2×45min Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen
- 1×45min Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla

A.2 Potenssifunktiot ja potenssiyhtälöt

Kappaleen keskeiset tavoitteet:

- Oppilas tunnistaa muotoa x^n olevan lausekkeen potenssilausekkeeksi
- Oppilas ymmärtää potenssilausekkeen potenssin parillisuudesta/parittomuudesta seuraavia ominaisuuksia sekä graafisesti että algebrallisesti
- Oppilas osaa muodostaa ja ratkaista potenssiyhtälöitä, joissa lausekkeen x^n potenssi $n \in \mathbb{N}$

Pohdinta B.1

Tehtävässä havainnollistetaan taulukkolaskennan avulla potenssifunktioiden $f(x) = x^3$ ja $g(x) = x^4$ arvojoukkoja taulukoiduilla arvoilla. Taulukkolaskenta-työkalun saa GeoGebrassa auki valitsemalla vasemmelta ylävalikosta *Näytä + Taulukkolaskenta* (tai vaihtoehtoisesti *Ctrl+Shift+S*).

x	$f(x) = x^3$
3	27
2	8
1	1
0	0
−1	−1
−2	−8
−3	−27

x	$g(x) = x^4$
3	81
2	16
1	1
0	0
−1	1
−2	16
−3	81

x^3 saa sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja riippuen siitä, onko muuttuja positiivinen vai negatiivinen. x^4 ei saa negatiivisia arvoja millään taulukon arvolla. Tätä voi perustella sanallisesti esimerkiksi seuraavasti: Jos potenssilausekkeen potenssi on parillinen, negatiivisen kantaluvun tapauksessa yhteenkerrottavia negatiivisia lukuja on parillinen määrä, mistä seuraa lausekkeen positiivinen arvo. Vastaavasti, jos potenssilausekkeen potenssi on pariton, negatiivisen kantaluvun tapauksessa yhteenkerrottavia negatiivisia lukuja on pariton määrä, mistä seuraa lausekkeen negatiivinen arvo.

Taulukoista on myös mahdollista hoksata, että $g(a) = g(-a)$ kun $a = 1, 2$ tai 3. Tarkempaa taulukkoa tehtäessä (esimerkiksi valitsemalla taulukoitujen muuttujien arvojen väliksi 0.2 yksikköä) voidaan havaita, että tämä pätee myös muilla x:n arvoilla. Toisin sanoen funktio on symmetrinen y-akselin suhteen. Tämä pätee kaikilla potenssifunktioilla, joiden potenssi on parillinen:

Opiskelijoille voi halutessaan esittää seuraavan matemaattisen todistuksen tästä havainnosta:

Olkoon $f(x) = x^{2k}$, missä $k \in \mathbb{R}$. Kun $x = a$, niin $f(a) = a^{2k}$ ja kun $x = -a$, niin

$$\begin{aligned} f(-a) &= (-a)^{2k} \\ &= (-1)^{2k} a^{2k} \\ &= a^{2k} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

x^5 ja x^{2021} saavat sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. x^6 ja x^{30} eivät saa negatiivisia arvoja millään muuttujan arvolla.

Vinkki: Jos oppilaat eivät tunnu keksivän minkäänlaista selitystä ilmiölle, voi oppilaita kehottaa kirjoittamaan potenssilausekkeita auki. Eli esimerkiksi $(-3)^4$-kohdassa, oppilaita voi pyytää pohtimaan, miten lauseke kirjoitettaisiin ilman potenssimerkintää. Oppilaiden tulisi hoksata, että $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = \ldots = 81$.

Pohdinta B.2

Tehtävän tarkoituksena on yhdistää edellisen pohdintatehtävän algebralliset havainnot graafiseen esitykseen.

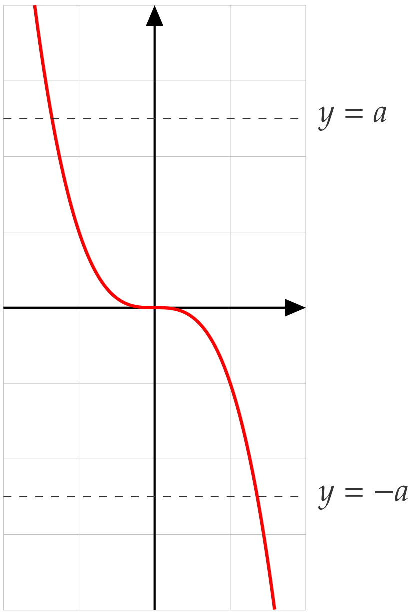
a) Vasemman puoleisessa kuvaajassa n on pariton ja oikean puoleisessa parillinen.

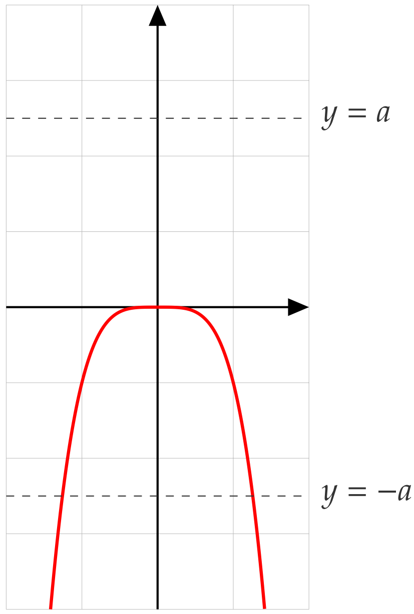
b) i. n pariton: yksi ratkaisu. n parillinen: kaksi ratkaisua.

   ii. n pariton: yksi ratkaisu. n parillinen: ei ratkaisuja.

c) Kuvaajista tehdyt havainnot tukevat pohdintatehtävän B.1 havaintoja siitä, että $f(-a) = -f(a)$ ja $g(a) = g(-a)$ sekä siitä, että $f(x)$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kun taas $g(x)$ ei saa negatiivisia arvoja millään muuttujan arvolla.

d) Funktion kuvaajat peilautuisivat x-akselin suhteen.





Vinkki: Joillekin oppilaista voi olla hankalaa hahmottaa a luvuksi. Asian hahmottamiseksi oppilasta voi johdatella esimerkiksi kysymällä, kuinka monta ratkaisua on seuraavilla potenssiyhtälöillä: $x^3 = 4$, $x^4 = 7$, $x^{11} = -1$, $x^{100} = -20$, jne.

Pohdinta B.5

Tehtävässä opiskelijan tulee ymmärtää määritelmän B.5 sisältö tehtävän ratkaisussa. Myös pohdintatehtävien B.1 ja B.2 päätelmiä kannattaa hyödyntää tehtävässä.

a) Opiskelijan tulee huomata, että yhtälöllä on myös toinen ratkaisu $-\sqrt[4]{2}$

b) Vastaavasti kuten a)-kohdassa, tulee yhtälönratkaisun toisella rivillä huomioida myös negatiivinen juuri, eli toisen rivin tulisi olla muotoa $x = \pm\sqrt[4]{-2}$,. Muilta osin b)-kohta pitää paikkaansa.

Pohdinta B.6

Tehtävässä harjoitellaan potenssiyhtälön ratkaisemista. a)- ja b)-kohdan yhtälöillä on yksi ratkaisu, c-kohdan yhtälöllä kaksi ratkaisua ja d-kohdan yhtälöllä ei yhtään ratkaisua.

a) $x = \sqrt[3]{5}$

b) $x = \sqrt[3]{-5}$

c) $y = \pm \sqrt[6]{10}$

d) Ei ratkaisuja.

A.3 Korkeamman asteen polynomifunktiot

Kappaleen keskeiset tavoitteet:

- Oppilas tunnistaa korkeamman asteen polynomilausekkeen
- Oppilaalle muodostuu mielikuvia
  - korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajista
  - vakiotermin vaikutuksesta polynomifunktion kuvaajaan
  - korkeimman asteen termin kertoimen vaikutuksesta polynomifunktion kuvaajaan
  - polynomifunktion nollakohtien minimi- ja maksimimääristä

Pohdinta B.9

Tehtävässä tutustutaan korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajien kulkuun ja kiinnitetään huomiota, miten korkeimman asteen termin kerroin sekä vakiotermi vaikuttavat kuvaajaan.

a)
1. Etumerkki kertoo, onko käyrä kokonaisuudessaan nouseva (+) vai laskeva (−).
2. Vakiotermin.
3. Funktio ei ole enää kolmannen asteen polynomi.

b)
1. Etumerkki kertoo, aukeaako käyrä kokonaisuudessaan ylös- vai alaspäin.
2. Vakiotermin.

c) Lisätehtävä nopeimmille

- a)-kohdassa päätellyt asiat korkeimman asteen termin etumerkistä ja vakiotermistä pätevät kaikille asteluvultaan parittomille polynomifunktioille

- b)-kohdassa päätellyt asiat pätevät kaikille asteluvultaan parillisille polynomifunktioille

Vaikotermin vaiktuksen voi todistaa oppilaille seuraavasti: Olkoon $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1}$, missä $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska $P(0) = a_{n+1}$, niin polynomifunktio $P(x)$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, a_{n+1})$.

Kohtien a)1. ja b)1. matemaattinen todistaminen sivuutetaan tällä kurssilla.

Pohdinta B.10

Tehtävässä havainnoidaan minkä asteisilla polynomifunktioilla on mahdollista, ettei nollakohtia ole ja minkä asteisilla polynomifunktioilla on aina vähintään yksi nollakohta.

a) Tehtävässä ääretön määrä ratkaisuja. Esimerkiksi $P(x) = x^4 + 1$ ja $Q(x) = -x^6 - 1$.

b) Ei ratkaisuja.

a) ja b) -kohtien perusteella voi päätellä, että on olemassa asteluvultaan parillisia polynomifunktioita, joilla ei ole yhtään nollakohtaa, mutta asteluvultaan parittomalla polynomifunktiolla on aina vähintään yksi nollakohta.

Päätelmien matemaattinen todistaminen sivuutetaan.

Pohdinta B.11

Tehtävässä tehdään havaintoja siitä, miten polynomifunktion asteluku vaikuttaa kuvaajan nollakohtien maksimimäärään.

a) Neljä ja viisi nollakohtaa omaavia viidennen asteen polynomifunktioita on ääretön määrä (esimerkiksi $f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$ ja $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$), mutta ei ole olemassa viidennen asteen polynomifunktiota, jolla olisi kuusi nollakohtaa.

Nopeimmat opiskelijat voivat myös kokeilla eri asteisia polynomifunktiota ja tutkia, kuinka monta nollakohtaa onnistuvat enimmillään polynomifunktioille saamaan. Päätelmien matemaattinen todistaminen sivuutetaan.

A.4 Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen

Kappaleen keskeiset tavoitteet:

- Oppilas osaa ratkaista polynomiyhtälön seuraavilla menetelmillä
  - graafinen ratkaisu
  - algebrallisesti: tekijöihin jako, ryhmittely, muuttujan vaihto
  - oppilas hahmottaa korkeamman asteen polynomifunktioiden yhteyksiä ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioihin

Kappaleelle on suunniteltu käytettävän kaksi 45 minuutin oppituntia. Kappaleen voi jakaa oppitunneille esimerkiksi siten, että ensimmäisellä tunnilla käsitellään graafinen ratkaisu sekä tekijöihin jako ja toisella tunnilla ryhmittely sekä muuttujan vaihto.

A.4.1 Graafinen ratkaisu

Pohdinta B.13

Tehtävän tarkoituksena on, että oppilas keksii graafisen tavan tarkastella polynomiyhtälöitä. Graafinen ratkaisutapa on kätevä etenkin algebrallisesti laskettujen polynomiyhtälöiden ratkaisujen tarkistamisessa.

a) $x = \pm 1$ tai $x = \pm 2$. Oppilaan tulee hoksata, että polynomiyhtälön ratkaisut ovat samat, kuin polynomifunktion $f(x)$ nollakohdat, eli kohdat missä $f(x) = 0$.

b) $x = 1$. Oppilaan tulee hoksata, että polynominyhtälö vastaa tapausta kun $P(x) = Q(x)$, eli kuvaajista funktioiden $P(x)$ ja $Q(x)$ leikkauskohtia. Oppilaille on hyvä huomauttaa että polynomiyhtälön ratkaisut ovat ne x:n arvot, joilla yhtälö toteutuu. Ratkaisuksi ei siis käy pisteen koordinaatit.

Pohdinta B.14

Tehtävän takoituksena on muodostaa graafisesti yhteyksiä eri polynomiluokkien (tässä tapauksessa ensimmäisen asteen polynomien ja kolmannen asteen polynomien) välille. Tehtävä on varmasti haastava ja opettajan kannattaakin antaa opiskelijoille kunnolla aikaa pohtia tehtävää.

Polynomifunktiolla $R(x)$ on nollakohdat $x = -4$, $x = 3$ ja $x = 4$. $R(x)$:llä ei voi olla muita nollakohtia, koska se on kolmannen asteen polynomifunktio.

A.4.2 Tekijöihin jako

Pohdinta B.15

Tehtävässä on tarkoituksena siirtää pohdintatehtävän B.14 päätelmät algebralliseen yhtälönratkaisuun.

- $(x^2 + x + 3) = 0$ tai $(x - 5) = 0$ (tulon nollasääntö)
- Nollakohta kun $x = 5$, ei muita ratkaisuja.

Pohdinta B.17

Tehtävässä harjoitellaan korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaisemista tekijöihin jaon ja tulon nollasäännön avulla.

a) $x = -4$, $x = -1$ tai $x = 0$

b) $x = 0$ tai $x = 2$

c) $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \approx -3,3$, $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \approx 0,3$ tai $x = 2$

Pohdinta B.18

Tehtävän tarkoituksena on on oppia ratkaisemaan tekijöihin jaon avulla polynomiyhtälöitä, jotka ovat muodossa $P(x) = Q(x)$. Opiskelijoiden pitää myös sisäistää, ettei muuttujalla x saa jakaa yhtälöä puolittain polynomiyhtälön ratkaisemisessa. Jos opiskelijoilla on hankaluuksia hoksata, mikä laskennallisessa osassa on virheenä, voi opiskelijoita neuvoa tutkimaan tilannetta kuvaajien avulla, jos he eivät ole sitä vielä tehneet. Tehtävässä myös halutaan, että opiskelija miettii parempia polynomiyhtälön ratkaisumenetelmiä, kuin kokeileminen ja pohtii, miksi kokeileminen ei ole suositeltavaa matemaattisessa ongelmanratkaisussa.

Oikeaoppisessa ratkaisussa opiskelijan tulee vähentää yhtälön molemmilta puolilta termi $82x$, jolloin yhtälö saadaan aikaisemmin harjoiteltuun muotoon.

A.4.3 Ryhmittely

Pohdinta B.19

Tehtävän ideana on keksiä, miten polynomi voidaan jakaa tekijöihin ryhmittelyn avulla.

Termeissä $3x^2(x + 1)$ ja $-(x + 1)$ on molemmissa tekijänä polynomi $x + 1$. Otetaan siis polynomi $x + 1$ yhteiseksi tekijäksi, jolloin ensimmäisestä termistä jää jäljelle $3x^2$ ja toisesta -1. Tekijöihin jaettu muoto on siis $(x + 1)(3x^2 - 1)$.

Pohdinta B.20

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella tekijöihin jakoa ryhmittelemällä.

a) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = (x + 2)(x^2 - 16) = 0$, kun $x = \pm 4$ tai $x = -2$

b) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^3 + 2) = 0$, kun $x = \sqrt[3]{-2}$

c) $x^4 - 3x^3 - 2x + 6 = (x - 3)(x^3 - 2) = 0$, kun $x = 3$ tai $x = \sqrt[3]{2}$

Pohdinta B.21

Tehtävässä oppilaan tulee keksiä keino, miten pystyisi muodostamaan polynomilausekkeen, joka on mahdollista jakaa tekijöihin ryhmittelemällä. Tehtävän tarkoituksena on kehittää oppilaan loogista päättelykykyä ja käänteistä ajattelua. Ryhmiteltävä polynomilauseke on helppo muodostaa lähtemällä liikkeelle tekijöihin jaetusta muodosta ja kertomalla siitä sulut auki.

A.5 Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- Oppilas osaa jakaa polynomilausekkeen tekijöihin polynomifunktion nollakohtien avulla
- Oppilas ymmärtää, mitä moninkertaisella nollakohdalla tarkoitetaan

Pohdinta B.23

Tehtävän tarkoituksena on hoksata, että menetelmä, miten toisen asteen polynomin voi jakaa tekijöihin polynomifunktion nollakohtien avulla, toimii myös korkeamman asteen polynomeilla.

a) Tulon nollasäännön perusteella polynomifunktion $P(x)$ nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 3$

b) Vaihdetaan sulkujen sisällä oleva −-merkki plussaksi ja +-merkki miinukseksi, eli $P(x) = x(x+3)(x-2)$. Nyt tulon nollasäännön perusteella $P(x) = 0$ kun $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 3$.

c) Esimerkiksi $Q(x) = (x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$. Tässä kohtaa kannattaa jo kysyä oppilailta, keksivätkö he muita mahdollisia polynomifunktioita, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Pohdinta B.25

Tehtävän tarkoituksena on hyödyntää lausetta B.24 polynomien tekijöihin jaossa kuvaajien avulla. Samalla tehtävä johdattelee opiskelijan lauseeseen B.26.

Tekijöihin jaetut muodot:

a) $f(x) = (x+1)(x+\frac{1}{2})(x-1)(x-2)$

b) $g(x) = 2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})$

Vinkki: Jos opiskelijoilla on hankaluuksia keksiä b)-kohdan tekijöihin jaettua muotoa, voi opiskelijoita pyytää muistelemaan, miten tämän tyyppinen tekijöihin jako toimi toisen asteen polynomien tapauksessa. Opiskelijoita kannattaa myös kannustaa pohtimaan lauseen B.26 pohjalta, miksi polynomin tekijöihin jaettuun muotoon voidaan lisätä vakiokerroin 2.

Pohdinta B.27

Tehtävän tarkoituksena on a)-kohdassa kehittää
käänteistä ajattelua ja b)-kohdassa harjoitella tekijöihin jakoa nollakohtien avulla. Myös tässä tehtävässä hyvä tapa on lähteä liikkeelle tekijöihin jaetusta muodosta ja avaamalla sitten sulut. Esimerkiksi kolmannen asteen polynomifunktion tapauksessa jos valitaan nollakohdiksi $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$ ja korkeimman asteen termin kertoimeksi $a = 1$, saataisiin polynomi

$$P(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x.$$

Pohdinta B.28

Tehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelijat moninkertaisen nollakohdan käsitteeseen.

- Se, että opiskelijan saama tulos on väärä, voidaan päätellä esimerkiksi kertomalla sulut auki

$$(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 \neq f(x)$$

tai GeoGebralla vertaamalla funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ kuvaajaa funktion $g(x) = (x + 3)(x - 1)$ kuvaajaan.

- Vakiokertoimen lisääminen lausekkeeseen ei muuttaisi nollakohtien määrää, mutta se ei myöskään nostaisi polynomin astelukua. Opiskelijoiden tulisi hoksata, että kertoimien $(x + 3)$ ja $(x - 1)$ lisääminen ei muuta kuvaajan nollakohtien määrää, mutta niillä voidaan vaikuttaa polynomin astelukuun.

- $f(x)$ on kolmannen asteen polynomifunktio, joten lausekkeeseen tulee lisätä vielä yksi ensimmäisen asteen polynomi tekijäksi. Kokeillaan kumman polynomin lisäämisellä saadaan haluttu polynomi.

$$(x + 3)(x - 1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3 \neq f(x)$$

$$(x + 3)^2(x - 1) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = f(x)$$

  Kysytty tekijöihin jaettu muoto on siis $(x + 3)^2(x - 1)$. Tehtävän voi viualisoida GeoGebralla vertaamalla funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ ja funktion $g(x) = (x + 3)^2(x - 1)$ kuvaajia keskenään.

B Yleinen polynomifunktio ja polynomiyhtälö

Tähän mennessä on opittu sekä ensimmäisen että toisen asteen polynomifunktioista ja -yhtälöistä. Tiedetään, että ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on lineaarinen eli suora ja toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli.

Tässä kappaleessa tutustutaan polynomifunktioihin, jotka ovat asteluvultaan suurempia kuin kaksi.

B.1 Potenssifunktiot ja potenssiyhtälöt

Funktiota, joka on muotoa $f(x) = x^p$ ($p \neq 0$), kutsutaan potenssifunktioksi. Potenssifunktiossa muuttuja on potenssilausekkeen kantalukuna. Polynomifunktioiden ja -yhtälöiden kannalta on oleellista osata ratkaista potenssifunktio, missä potenssi $p \in \mathbb{N}$, joten keskitymme tässä kappaleessa ainoastaan kyseisenlaisiin potenssifunktioihin. Potenssilausekkeisiin palataan kurssilla *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot*. Kappaleessa käytetty merkintä x^n tarkoittaa potenssilauseketta, missä x on muuttuja ja $n \in \mathbb{N}$.

Pohdinta B.1 GG Täydennä Taulukkolaskenta-työkalulla funktioiden $f(x) = x^3$ ja $g(x) = x^4$ arvot alla oleviin taulukoihin annetuilla muuttujan x arvoilla.

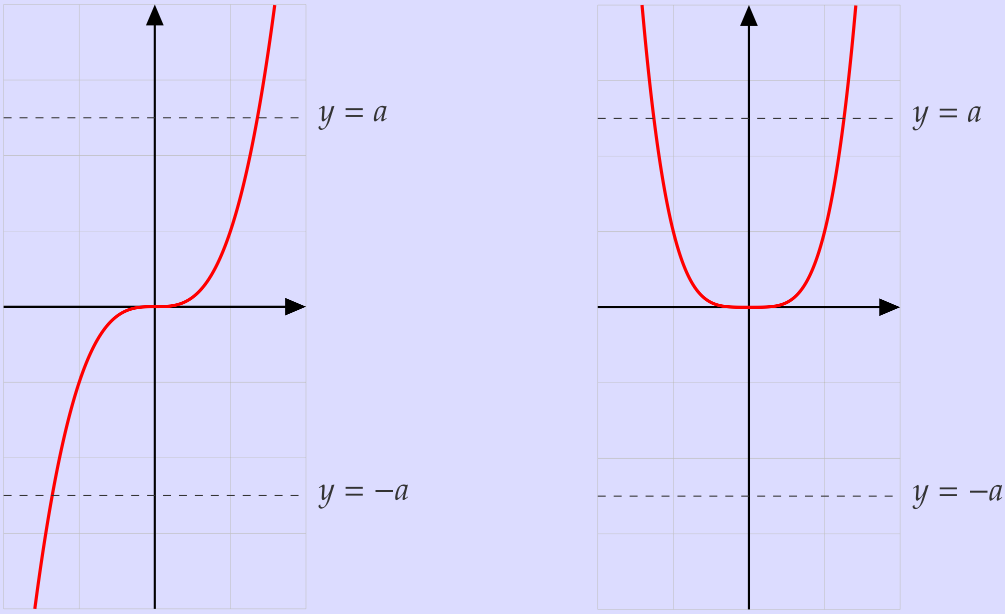
x	$f(x) = x^3$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

x	$g(x) = x^4$
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

Vertaa arvoja ja arvojen etumerkkejä keskenään. Mitä havaitset? Pohdi parin kanssa, miten havaintoja voisi perustella matemaattisesti.

Pohdi ilman teknisiä apuvälineitä minkälaisia etumerkkejä lauseke x^n voi saada seuraavilla n:än arvoilla: $n = 5$, $n = 6$, $n = 30$, $n = 2021$.

Pohdinta B.2 Alla oleviin kuvaajiin on hahmoteltu kahden potenssifunktion $f(x) = x^n$ kuvaajat.



a) Pohdi kummassa kuvaajassa n on parillinen ja kummassa pariton.

b) Olkoon a mielivaltainen positiivinen reaaliluku. Pohdi molempien kuvaajien avulla erikseen

   i. kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $x^n = a$

   ii. kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $x^n = -a$.

c) Keskustele parin kanssa a- ja b-kohdan vastauksien yhtäläisyyksistä pohdintatehtävän B.1 tulosten kanssa.

d) Miten negatiivinen etumerkki lausekkeen edessä vaikuttaisi funktion kuvaajaan. Hahmottele kuvaajat.

Lisätehtävä:GG Tutki GeoGebralla potenssifunktion $f(x) = x^n$ kuvaajan käyttäytymistä eri n:n arvoilla, kun $n \in \mathbb{N}$: Muodosta funktio $f(x) = x^n$, luo liukusäätö parametrille n ja säädä asetuksista liukusäädön väliksi (esimerkiksi) *Min:* 1, *Max:* 30 ja *Animaatioaskel:* 1.

Kuten edellisissä pohdintatehtävissä huomattiin, potenssifunktion arvojoukko riippuu siitä, onko muuttujan potenssi parillinen vai pariton. Samoin potenssiyhtälön $x^n = a$, missä $a \in \mathbb{R}$, ratkaisujen määrä riippuu siitä, onko n parillinen vai pariton.

Potenssiyhtälö $x^n = a$ voidaan ratkaista juurilausekkeiden avulla.

Määritelmä B.3. Juurilauseke $\sqrt[n]{a}$ (*"luvun a n:s juuri"*) on se luku, jonka n:s potenssi on a. Toisin sanoen

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \text{ja} \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Jos n on **parillinen**, niin

- $\sqrt[n]{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Jos n on **pariton**, niin

- $\sqrt[n]{a}$ on määritelty kaikilla $a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.

Juurilauseke voidaan merkitä myös *murtopotenssina*

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Esimerkki B.4 a) $(\sqrt[6]{20})^6 = 20$

b) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

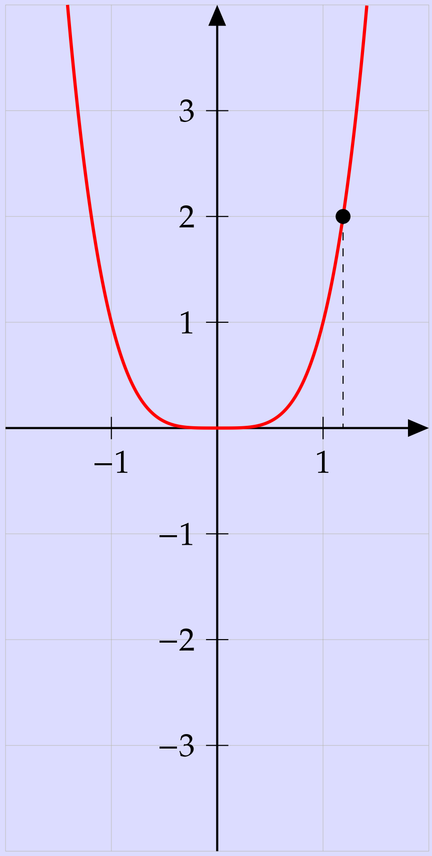
c) $\sqrt[7]{-3} = (-3)^{1/7} \approx -1{,}17$

d) $\sqrt[6]{-5}$ ei ole määritelty reaalilukujen joukossa.

Seuraavassa mallitehtävässä tarkastellaan, miten juurilausekkeiden avulla voidaan ratkaista potenssiyhtälöitä.

Pohdinta B.5 Opiskelijalla oli kokeessa tethävänä ratkaista muuttujan x arvo, kun a) $x^4 = 2$ ja b) $x^4 = -2$. Ohessa on esitetty opiskelijan tekemä ratkaisu. Pohdi ratkaisun oikeellisuutta ja korjaa mahdolliset virheet.

Ratkaisu: Funktion $f(x) = x^4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava käyrä, joka on symmetrinen y-akselin suhteen.



a) Algebrallisesti:

$$x^4 = 2 \qquad \Big| \sqrt[4]{}$$
$$x = \sqrt[4]{2}$$
$$(\approx 1{,}19)$$

Tarkistus graafisesti: Kuvaajasta nähdään, että $x^4 = 2$ kun $x \approx 1{,}19$.

b) Algebrallisesti:

$$x^4 = -2 \qquad \Big| \sqrt[4]{}$$
$$x = \sqrt[4]{-2}$$

Yhtälöllä $x^4 = -2$ ole ratkaisuja, koska lukua $\sqrt[4]{-2}$ ei ole määritelty.

Tarkistus graafisesti: Koska funktio $f(x) = x^4$ ei saa negatiivisia arvoja millään muuttujan x arvolla, ei yhtälöllä $x^4 = -2$ ole ratkaisuja.

Pohdinta B.6 Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

a) $x^3 = 5$

b) $x^3 = -5$

c) $y^6 = 10$

d) $y^6 = -10$?

Ratkaise yhtälöt.

Mallitehtävä B.7 Säästötilille talletetaan 2000 euron pääoma. Kuinka suuri on tilin nettokorkokanta, kun viiden vuoden jälkeen talletus on kasvanut yhteensä 50,50 euroa korkoa.

Ratkaisu: Nettokorkokannalla tarkoitetaan sitä korkoprosenttia, minkä verran tilillä oleva rahasumma kasvaa vuodessa korkoa vähennysten jälkeen (ts. nettona).

Olkoon x se prosenttikerroin, minkä avulla saadaan laskettua kasvanut pääoma yhdessä vuodessa.

1. vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on $x \cdot 2000€$.
2. vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on $x^2 \cdot 2000€$.
3. vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on $x^3 \cdot 2000€$.
4. vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on $x^4 \cdot 2000€$.
5. vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on $x^5 \cdot 2000€$.

Koska pääoma on kasvanut 50,50 euroa, viidennen vuoden jälkeen tilillä oleva euromäärä on 2000€ + 50,50€ = 2050,50€. Saadaan muodostettua yhtälö

$$\begin{aligned} x^5 \cdot 2000 &= 2050{,}50 \\ x^5 &= \frac{2050{,}50}{2000} \\ x &= \sqrt[5]{\frac{2050{,}50}{2000}} \\ x &= 1{,}00499975\ldots \\ x &\approx 1{,}005 \end{aligned}$$

Koska pääoma kasvaa joka vuosi 1,005-kertaiseksi, tilin nettokorkokanta on 0,5%

Vastaus: 0,5%

Tehtävät

1. Merkitse juurilausekkeet murtopotenssilausekkeina ja murtopotenssilausekkeet juurilausekkeina. Mikä on luvun likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[6]{100}$

c) $3^{1/7}$

d) $40^{1/4}$

2. Yhdistä funktion lauseke oikeaan kuvaajaan.

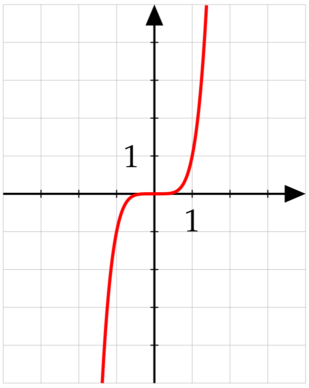
a. $f(x) = x^5$

b. $f(x) = -x^3$

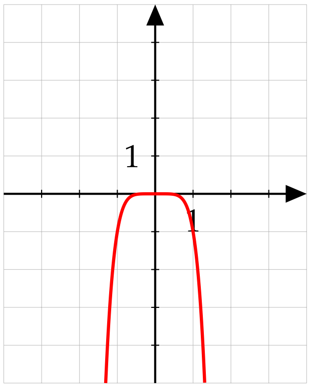
c. $f(x) = -x^6$

d. $f(x) = x^{20}$

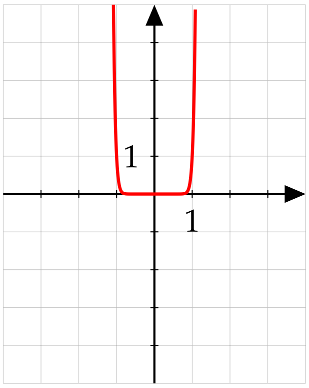
1.



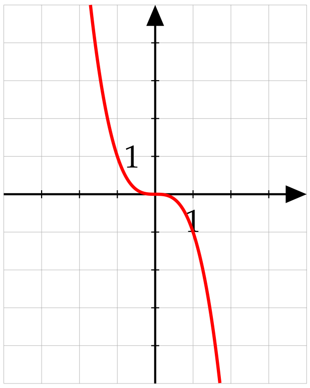
2.



3.



4.



3. Ossi alkaa harjoitella maratonia varten. Ossi aloittaa 10 km juoksulenkillä. Kuinka monta prosenttia Ossin tulee pidentää juoksulenkkiään viikoittain, jotta hänen juoksulenkkinsä pituus riittäisi maratooniin 30 viikon kuluttua? Maratoonin pituus on 42 km 195 m.

4. Ilmastotavoitteena on vähentää 15 vuoden aikana kasvihuonekaasuja vähintään 40 %. Montako prosenttia kasvihuonekaasuja tulisi keskimäärin vähentää vuodessa, jotta tavoite saavutettaisiin?

B.2 Korkeamman asteen polynomifunktiot

Määritelmä B.8. *Korkeamman asteen polynomifunktio* on sellainen polynomifunktio, jonka asteluku $n \geq 3$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Lisätietoa: Jokainen polynomifunktio on määritelty kaikkialla reaalilukujen joukossa. Lisäksi jokainen polynomifunktio on *jatkuva* kaikkialla määrittelyalueessaan. Geometrisesti ajateltuna tämä tarkoittaa sitä, ettei kuvaajan käyrä katkea missään koordinaatiston pisteessä. Jatkuvuuden määrittelyyn palataan kurssilla *Derivaatta* (MAA6).

Nyt, kun tiedetään, mitä korkeamman asteen polynomifunktiolla tarkoitetaan, voidaan alkaa tutustua niiden kuvaajiin ja ominaisuuksiin.

Pohdinta B.9 GG Luo GeoGebralla funktio $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + v$ ja luo liukusäädöt parametreille a, b, c, d ja v .

a) Säädä vakion a arvo nollaksi. Tutki, miten kunkin parametrin arvon muuttaminen vaikuttaa **kolmannen asteen polynomifunktion** kuvaajaan.

   1. Miten kolmannen asteen termin kertoimen b etumerkki vaikuttaa kuvaajaan?
   2. Minkä termin kerroin vaiukuttaa siihen, missä kohdassa kuvaaja leikkaa y-akselin?
   3. Mitä tapahtuu, jos x^3:n kerroin b säädetään nollaksi?

b) Tee vastaavanlainen tutkimus **neljännen asteen polynomifunktioille** ($a \neq 0$).

   1. Miten neljännen asteen termin kertoimen a etumerkki vaikuttaa kuvaajaan?
   2. Minkä termin kerroin vaikuttaa siihen, missä kohdassa kuvaaja leikkaa y-akselin?

c) Tutki myös korkeampiasteisten polynomifunktioiden kuvaajia ja mieti, mitä yhtäläisyyksiä eriasteisilla polynomifunktioilla on.

Vinkki: Muuta vain yhden parametrin arvoa kerrallaan, jotta näet juuri kyseisen arvon vaikutuksen kuvaajaan.

Lisätietoa: GG GeoGebrassa kirjain e viittaa *Neperin lukuun*, jonka likiarvo $e \approx 2{,}71828\ldots$. Tämän takia vältetään GeoGebrassa kirjaimen e käyttöä muissa yhteyksissä. Myös imaginääriyksikköä i ei tulisi käyttää parametrinä.

Pohdinta B.10 GG Anna esimerkki kahdesta eriasteisesta korkeamman asteen polynomifunktiosta, jolla ei ole nollakohtia, kun

a) polynomin asteluku on parillinen

b) polynomin asteluku on pariton.

Mitä voit päätellä a) ja b) -kohtien perusteella?

Pohdinta B.11 GG

a) Anna esimerkki viidennen asteen polynomifunktiosta, jolla on

- neljä nollakohtaa
- viisi nollakohtaa
- kuusi nollakohtaa

b) Määritä nollakohdat kahden desimaalin tarkkuudella GeoGebran käskyn *Nollakohdat[<funktio>,<x:n alkuarvo>,<x:n loppuarvo>]* (esim. Nollakohdat[$f(x)$,–10,10]) avulla.

Lause B.12 Polynomifunktiolla on korkeintaan astelukunsa verran nollakohtia.

Lauseen todistukseen palataan myöhemmin kappaleessa B.4 *Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla*.

Tehtävät

5. Hahmottele ilman teknisiä apuvälineitä esimerkki sellaisen kolmannen asteen polynomifunktion kulusta, että polynomifunktiolla on täsmälleen

a) 0 nollakohtaa

b) 1 nollakohta

c) 2 nollakohtaa

d) 3 nollakohtaa

e) 4 nollakohtaa.

f) Vastaavasti hahmottele esimerkit neljännen asteen polynomifunktion tapauksessa.

6. Yhdistä funktion lauseke oikeaan kuvaajaan. Tehtävä tehdään ilman teknisiä apuvälineitä.

a. $f(x) = 5x^3 + 5x + 2$

b. $f(x) = -2x^6 + x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

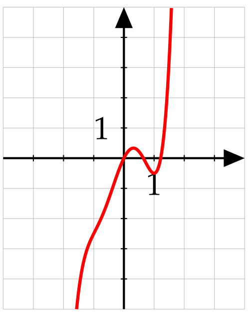
c. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

d. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 2$

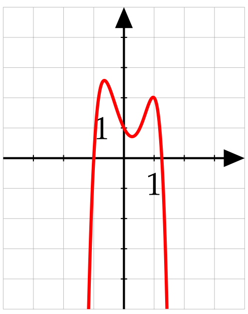
e. $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$

f. $f(x) = 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 1$

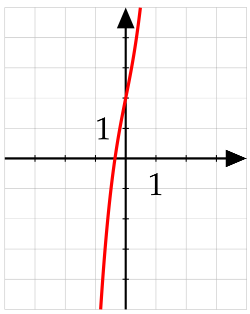
1.



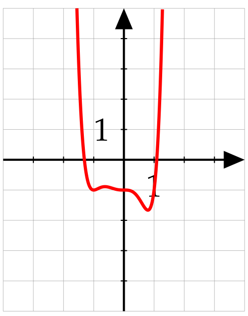
2.



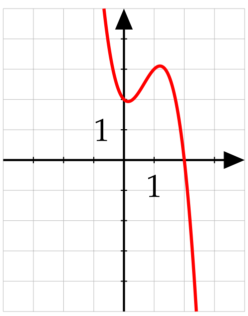
3.



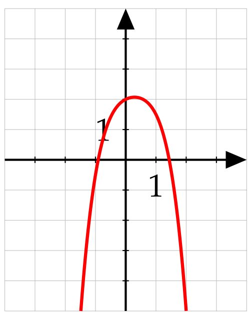
4.



5.

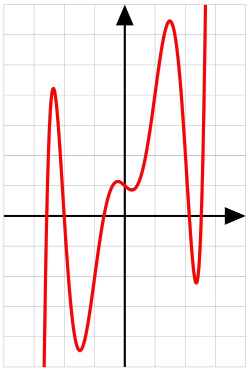


6.

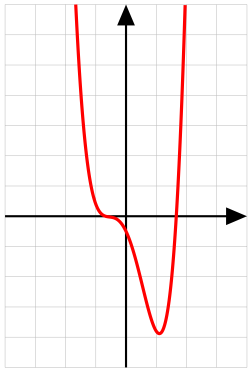


7. Päättele kuvissa olevien polynomifunktioiden pienin mahdollinen asteluku.

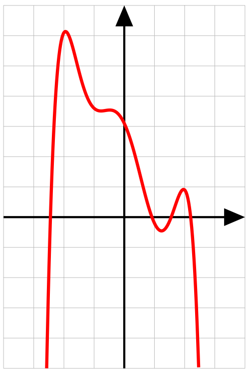
a)



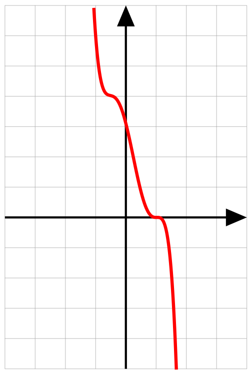
b)



c)



d)



Tehtävän voi perustella matemaattisesti kurssin Derivaatta asiasisältöjen avulla.

B.3 Korkeamman asteen polynomiyhtälön ratkaiseminen

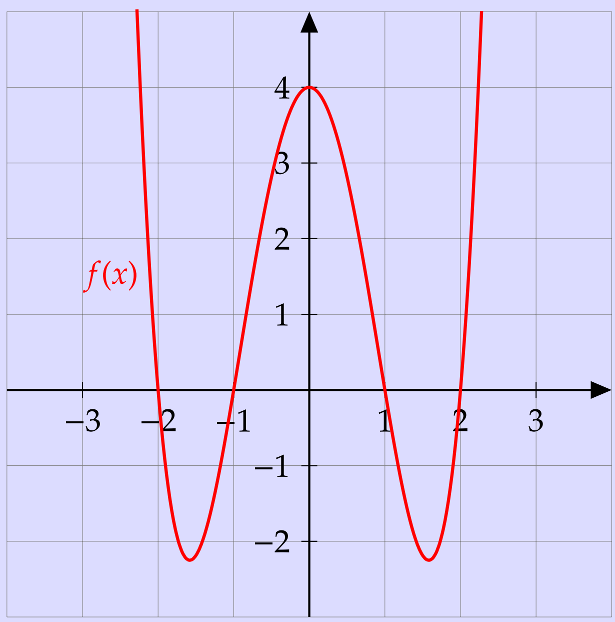
Korkeamman asteen polynomiyhtälö on muotoa $P(x) = Q(x)$, missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja, joista ainakin toisen asteluku on suurempi kuin 2. Polynomiyhtälön ratkaisu kertoo kaikki ne muuttujan arvot, joilla yhtälö pätee. Tässä kappaleessa käydään läpi neljä ratkaisutapaa korkeamman asteen polynomiyhtälöille. Nämä ratkaisutavat ovat *graafinen ratkaisu*, *tekijöihin jako*, *ryhmittely* ja *muuttujan vaihto*.

Lisätietoa: Toisen asteen polynomiyhtälön tapaan myös kolmannen ja neljännen asteen polynomiyhtälöille, jotka ovat muotoa $P(x) = 0$, on olemassa ratkaisukaavat. Nämä ratkaisukaavat ovat kuitenkin toisen asteen polynomiyhtälön ratkaisukaavaan verrattuna huomattavasti monimutkaisemmat, eikä niitä sen vuoksi käsitellä tällä kurssilla. Norjalainen Nils Henrik Abel ja ranskalainen Évariste Galois osoittivat 1800-luvulla, että tätä korkeampiasteisille polynomiyhtälöille ei ole olemassa yleisesti päteviä ratkaisukaavoja.

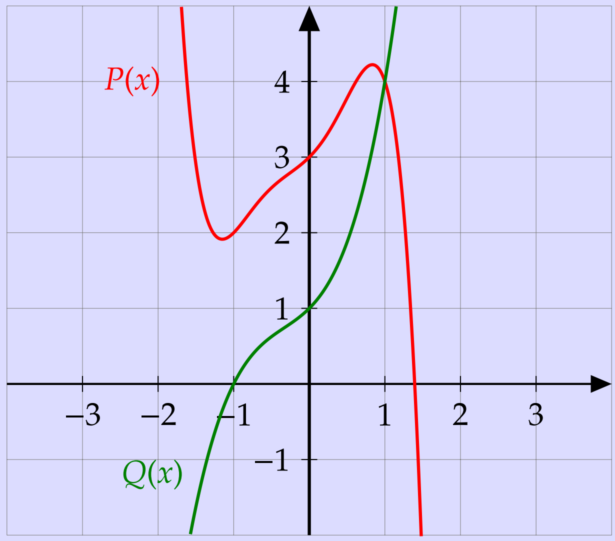
B.3.1 Graafinen ratkaisu

Pohdinta B.13 PT

a) Olkoon $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Pohdi parin kanssa alla olevan kuvaajan avulla, millä muuttujan arvolla/arvoilla yhtälö $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ toteutuu.

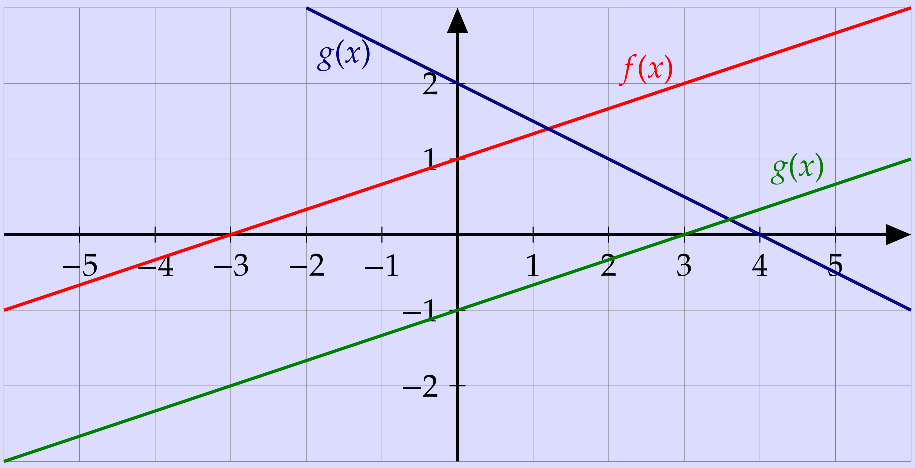


b) Olkoon $P(x) = -x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 3$ ja $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Pohdi parin kanssa alla olevien kuvaajien perusteella, millä muuttujan x arvolla/arvoilla $-x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 3 = x^3 + x^2 + x + 1$.



Pohdinta B.14 PT

Alla olevaan koordinaatistoon on piirretty kuvaajat kolmelle ensimmäisen asteen polynomifunktiolle: $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$. Päättelkää kuvaajien avulla, millä muuttujan arvoilla kolmannen asteen polynomifunktio $R(x) = f(x)g(x)h(x)$ saa arvokseen nolla.



Voiko funktiolla $R(x)$ olla muita nollakohtia, kuin äsken kuvaajista päättelemäsi nollakohdat? Perustele.

B.3.2 Tekijöihin jako

Pohdinta B.15 Pohdi, miten voisit ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälön $x^3 - 4x^2 - 2x - 15 = 0$ algebrallisesti, kun tiedetään, että $x^3 - 4x^2 - 2x - 15 = (x^2 + x + 3)(x - 5)$. Ratkaise yhtälö keksimälläsi tavalla. Tarkista saamasi vastaus esimerkiksi GeoGebralla.

Lause B.16 Polynomifunktion $P(x)$ tekijä saa arvokseen 0 kun $x = x_0$ jos ja vain jos polynomi $P(x)$ saa arvokseen 0 kun $x = x_0$.

Todistus: Lause seuraa suoraan tulon nollasäännöstä. Olkoon polynomin $P(x)$ tekijöihin jaettu muoto $P(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

Oletetaan ensin, että $Q_1(x_0) = 0$. Näin ollen

$$P(x_0) = Q_1(x_0)Q_2(x_0) = 0 \cdot Q_2(x_0) = 0.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $P(x_0) = 0$.
Väite: $Q_i(x_0) = 0$ kun $i = 1$ tai $i = 2$. Nyt

$$\begin{aligned} P(x_0) &= 0 \\ Q_1(x_0)Q_2(x_0) &= 0 && \Big| \text{ tulon nollasääntö} \\ Q_1(x_0) &= 0 \text{ tai } Q_2(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Pohdinta B.17 Toisen asteen polynomin $3x^2 - 2x$ tekijöihin jaettu muoto on $x(3x - 2)$. Ratkaise seuraavat korkeamman asteen polynomiyhtälöt jakamalla ensin vasemman puoleinen lauseke tekijöihin.

a) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 = 0$

b) $3t^2(2t^4 - 4t^3) = 0$

c) $(x^3 - 4x)(x^5 + 3x^4 - x^3) = 0$

Pohdinta B.18 PT Opiskelijalla oli tehtävänä ratkaista polynomiyhtälö $3x^4 + x = 82x$ algebrallisesti. Alla on esitetty opiskelijan ratkaisu. Pohdi parin kanssa, onko tehtävän alkuosa tehty oikein ja miksi loppuosa ei matemaattisesti ole kovin ihanteellinen ratkaisumenetelmiä. Esittäkää, miten tehtävä voitaisiin ratkaista matemaattisesti oikeaoppisesti.

$$\begin{aligned} 3x^4 + x &= 82x \quad \Big| : x \\ 3x^3 + 1 &= 82 \end{aligned}$$

Jos $x = 1$, niin $3x^3 + 1 = 3 \cdot (1)^3 + 1 = 4$.
Jos $x = 2$, niin $3x^3 + 1 = 3 \cdot (2)^3 + 1 = 25$.
Jos $x = 3$, niin $3x^3 + 1 = 3 \cdot (3)^3 + 1 = 82$.

Vastaus: $x = 3$.

B.3.3 Ryhmittely

Joissain tapauksissa korkeamman asteen polynomi voidaan jakaa tekijöihin ryhmittelyn avulla.

Pohdinta B.19 Pohdi kaverin kanssa, kuinka polynomin $3x^3 + 3x^2 - x - 1$ voisi jakaa kahden tekijän lausekkeeksi, kun ryhmitellään polynomi seuraavalla tavalla:

$$3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 3x^2(x + 1) - (x + 1)$$

Ryhmittelyssä polynomi jaetaan lausekkeisiin, joissa jokaisessa on tekijänä sama polynomi. Tämä lausekkeiden yhteinen tekijä voidaan ottaa koko polynomin tekijäksi.

Pohdinta B.20 Jaa polynomit tekijöihin ryhmittelemällä ja ratkaise yhtälöt.

a) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$

b) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 - 2x + 6 = 0$

Pohdinta B.21 PT Muodosta polynomilauseke, joka voidaan jakaa tekijöihin ryhmittelemällä. Anna muodostamasi polynomilauseke parillesi, jonka tehtävänä on jakaa polynomi tekijöihin. Tarkista parisi tekemä ratkaisu.

B.3.4 Muuttujan vaihto

Polynomeja, joista ei suoraan näe yhteistä tekijää, on usein hankala ratkaista laskennallisesti ilman teknisiä apuvälineitä. Joissain tapauksissa polynomilauseke voidaan kuitenkin muuttaa hetkellisesti helpommin ratkaistavaan muotoon korvaamalla sopiva muuttujan monikerta uudella muuttujalla. Käy seuraava mallitehtävä kohta kohdalta läpi parin kanssa keskustellen ja perustellen, mitä missäkin kohdassa on tehty ja miksi.

Mallitehtävä B.22 Bikvadraattinen yhtälö
Ratkaise algebrallisesti polynomifunktion $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ nollakohdat.

Ratkaisu: Muokataan polynomia $x^4 - 2x^2 - 3$ siten, että sijoitetaan yhtälöön uusi muuttuja $s = x^2$. Koska $x^4 = (x^2)^2$, niin $x^4 = (s)^2 = s^2$.

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 3 &= 0 \qquad \Big| \text{ sijoitetaan } s = x^2 \\ s^2 - 2s - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Näin saadaan muodostettua toisen asteen polynomiyhtälö $s^2 - 2s - 3 = 0$, joka osataan ratkaista esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla.

$$s^2 - 2s - 3 = 0$$

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)}}{2}$$

$$s = -1 \qquad \text{tai} \qquad s = 3$$

Polynomiyhtälölle $s^2 - 2s - 3 = 0$ löydetään siis ratkaisut $s = -1$ tai $s = 3$. Alkuperäisessä tehtävässä ei kuitenkaan kysytty muuttujan s arvoja, vaan muuttujan x. Ratkaistaan seuraavaksi, mitä x on muuttujan s avulla ilmaistuna:

$$\begin{aligned} x^2 &= s \qquad \Big| \sqrt{\ } \\ x &= \pm\sqrt{s} \end{aligned}$$

Ratkaistaan nyt x, kun $s = -1$ tai $s = 3$:

$$\begin{aligned} s = -1 &\quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \ \text{(ei reaalijuuria)} \\ s = 3 &\quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \pm\sqrt{3}$

Tehtävät

8. Ratkaise polynomiyhtälö graafisesti kahden desimaalin tarkkuudella. Käytä apunasi esimerkiksi GeoGebraa.

a) $5x^3 - x^7 = 3 - 2x^4$

b) $x^8 - x^7 + 2x^4 + 5x^3 - 3 = -x^6 + 2x^4 - x - 3$

9. Ratkaise polynomiyhtälöt algebrallisesti.

a) $6x^3 - 2x^2 = 0$

b) $4a^2 - 2a^4 - 2a^3 = 0$

c) $32t = -t^6$

10. Määritä ne kolme peräkkäistä kokonaislukua, joiden tulo on 504.

11. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^3 + 4ax^2 + ax = 0$ on tasan kaksi juurta? Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

12. Ratkaise polynomiyhtälöt algebrallisesti

a) $y^4 + 3y^3 - y^2 - 3y = 0$

b) $2x^5 + x^3 = -2x^2 - 1$

c) $2t^5 + 3t^3 - 5t = 0$

d) $v^6 + 2v^3 - 3 = 0$

13. Opiskelija ratkaisi yhtälön $x^3 - 2 = 2x - x^2$ seuraavalla tavalla:

GeoGebralla piirrettyjen funktioiden $f(x) = x^3 - 2$ ja $g(x) = -x^2 + 2x$ leikkauspisteiksi saadaan GeoGebran kuvaajien leikkauspisteiden määritys -ominaisuudella pisteet A= $(-1,41; -4,83)$, B= $(-1, -3)$ ja C= $(1,41; 0,83)$.

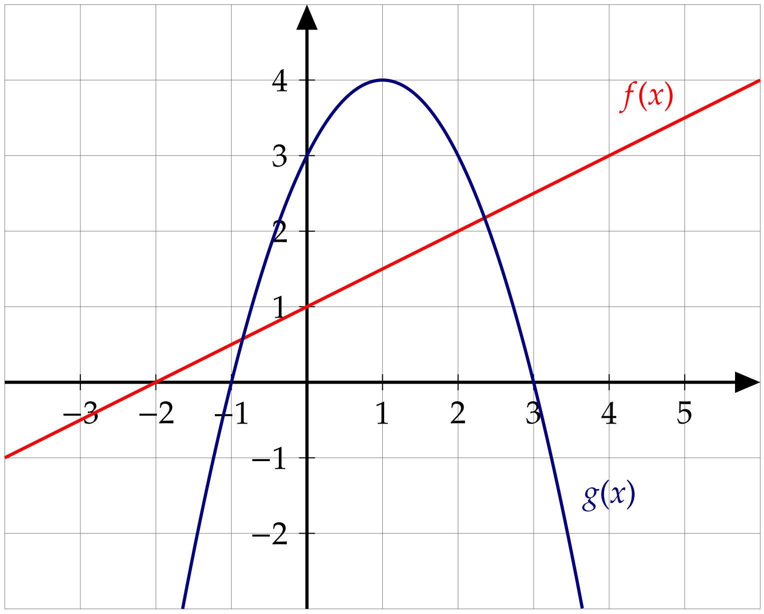
Vastaus:$x^3 - 2 = 2x - x^2$ pisteissä $(-1,41; -4,83)$, $(-1, -3)$ ja $(1,41; 0,83)$

a) Tarkista opiskelijan ratkaisu ja korjaa mahdolliset virheet.

b) Ratkaise tehtävän tarkat arvot GeoGebran CAS-laskimella. Kumpi a- ja b-kohdan ratkaisuista on parempi ja miksi?

c) Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

14. Tehtävä tehdään ilman teknisiä apuvälineitä. Oheisessa kuvassa on esitetty kuvaajat enimmäisen asteen polynomifunktiolle $f(x)$ ja toisen asteen polynomifunktiolle $g(x)$. Hahmottele polynomifunktion $P(x) = f(x)g(x)$ kuvaaja.



Vinkki: Käytä alkuun apuna tekijäfunktioiden nollakohtia sekä kohtia, joissa toinen tekijäfunktioista saa arvokseen 1 *tai* -1.

B.4 Tekijöihin jako polynomifunktion nollakohtien avulla

Aikaisemmin opittiin jakamaan toisen asteen polynomi tekijöihin, kun polynomifunktion nollakohdat tunnetaan. Samanlainen tekijöihin jako toimii myös korkeamman asteen polynomeille.

Pohdinta B.23 Tehtävänä on muodostaa polynomifunktio $P(x)$, jolla on tasan kolme nollakohtaa: $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 2$.

a) Miksi $P(x) = x(x-3)(x+2)$ ei kelpaa halutuksi polynomifunktioksi?

b) Miten a)-kohdassa esitetyn polynomifunktion $P(x)$ lauseketta voidaan muokata, jotta se toteuttaisi annetut ehdot?

c) Muodosta lauseke polynomifunktiolle $Q(x)$, jolla on tasan neljä nollakohtaa: $x = -4$, $x = -2$, $x = 1$ ja $x = 3$. Miten käyttämäsi menetelmän voisi esittää yleisessä muodossa siten, että se koskisi kaikkia polynomeja?

Lause B.24 Olkoon polynomifunktiolla $P(x)$ nollakohta kohdassa $x = x_0$. Tällöin polynomilla $P(x)$ on tekijä $x - x_0$ ja polynomifunktio $P(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$P(x) = (x - x_0)Q(x),$$

missä $Q(x)$ on polynomi.

Todistus:
Todistuksen monimutkaisuuden vuoksi, todistetaan lause ainoastaan kun $n = 3$. Korkeamman asteen polynomeille lauseen voi todistaa vastaavalla tavalla.

Hyödynnetään todistuksessa kaavaa

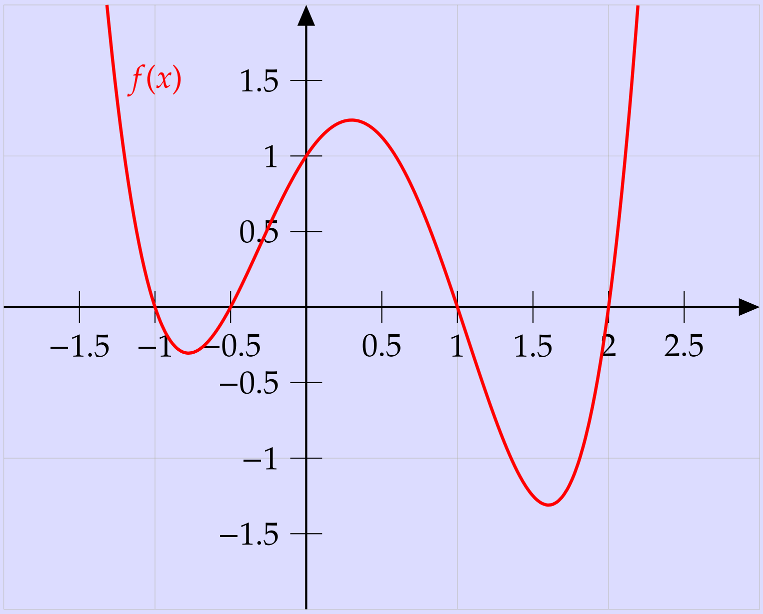
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}).$$

Olkoon $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, jolla on nollakohta kohdassa $x = x_0$ eli $P(x_0) = 0$. Tällöin

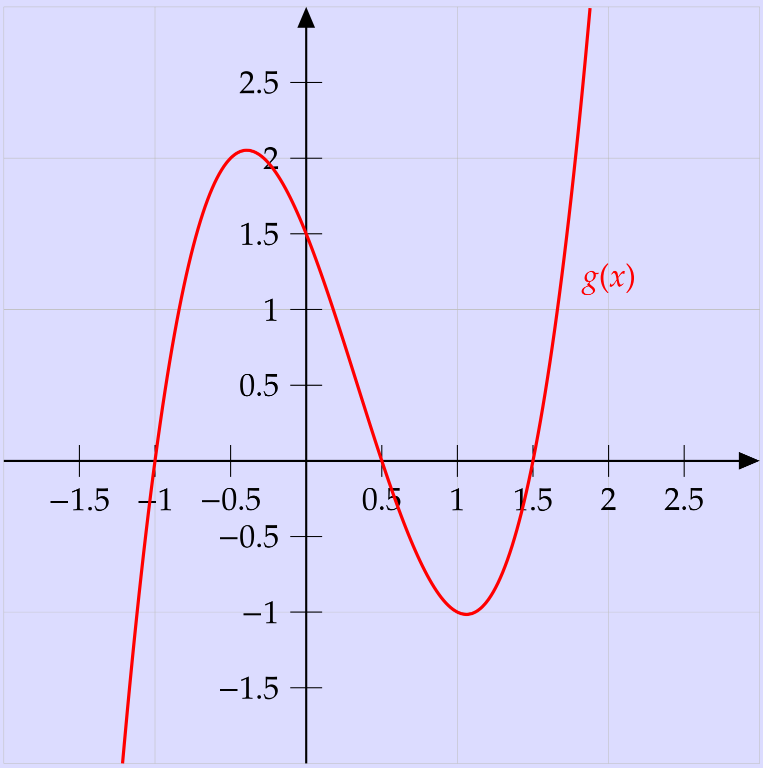
$$\begin{aligned}
P(x) &= P(x) - P(x_0) \\
&= (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) \\
&= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) \\
&= a(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) + b(x - x_0)(x + x_0) + c(x - x_0) \\
&= (x - x_0)[a(x^2 + xx_0 + x_0^2) + b(x + x_0) + c] \\
&= (x - x_0)Q(x)
\end{aligned}$$

Pohdinta B.25 Pohdi lauseen B.24 avulla, miten alla esitettyjen polynomifunktioiden lausekkeet voisivat jakautua tekijöihin. Tarkista vastauksesi.

a) $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1$



b) $g(x) = -2x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$



Lause B.26 Jos $P(x)$ on n:nnen asteen polynomifunktio, jolla on n nollakohtaa x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$, niin $P(x)$:n tekijöihin jaettu muoto on

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

missä a on polynomin $P(x)$ korkeimman asteen termin kerroin.

Todistus:
Todistetaan lause tapaukselle kun $n = 3$. Olkoon polynomifunktiolla $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 3 nollakohtaa $x = x_1$, $x = x_2$ ja $x = x_3$. Lauseen B.24 nojalla polynomilla $P(x)$ on tekijät $x - x_1$, $x - x_2$ ja $x - x_3$ ja polynomifunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)Q(x) && \Big| \text{ kerrotaan sulut auki} \\ &= (x^3 + (-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3)Q(x) \\ &= Q(x)x^3 + Q(x)(-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + Q(x)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - Q(x)x_1x_2x_3 \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d. \end{aligned}$$

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla voidaan osoittaa, että $-x_1 - x_2 - x_3 = \frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ ja $-x_1x_2x_3 = \frac{d}{a}$. On siis oltava $Q(x) = a$, eli alkuperäinen polynomi voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Lause B.12 voidaan todistaa tästä tuloksesta lähtemällä liikkeelle vastaoletuksesta, minkä mukaan polynomifunktiolla $P(x)$ olisi vielä yksi muista poikkeava nollakohta kohdassa $x = x_{n+1}$. Suorittamalla edellisen kaltainen todistus tilanteesta, päädyttäisiin ristiriitaan sen kanssa, että $P(x)$ on n:nnen asteen polynomi.

Pohdinta B.27 PT

a) Toinen parista tekee tehtävän 1 ja toinen tehtävän 2.

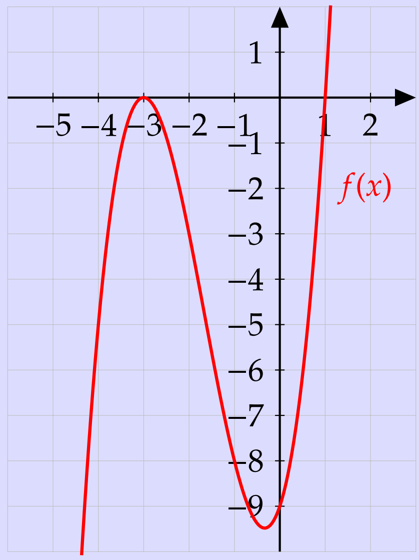
   1 Muodosta muotoa $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ oleva polynomifunktio, jolla on kolme erisuurta rationaalista nollakohtaa.

   2 Muodosta muotoa $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ oleva polynomifunktio, jolla on neljä erisuurta rationaalista nollakohtaa.

b) Anna muodostamasi polynomifunktio parillesi, jonka tehtävänä on jakaa polynomi tekijöihin. Tarkista lopuksi parin tekemä ratkaisu.

Pohdinta B.28 Opiskelijan tehtävänä oli jakaa polynomilauseke $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ tekijöihin. Alla on esitetty opiskelijan esittämä ratkaisu tehtävään. Miten voidaan päätellä, että opiskelijan saama tulos on väärä? Pohdi parin kanssa, millä keinoilla opiskelijan saamaa tulosta voidaan muokata niin, ettei kuvaajasta luettavien nollakohtien määrä muutu. Ratkaise polynomin x^3+5x^2+3x-9 tekijöihin jaettu muoto.

Opiskelijan ratkaisu:



Funktiolla $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ on kaksi nollakohtaa: $x = -3$ ja $x = 1$. Polynomilla on siis tekijät $(x+3)$ ja $(x-1)$. Polynomin $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ tekijöihin jaettu muoto on

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x+3)(x-1).$$

Määritelmä B.29. Polynomifunktiolla $P(x)$ on *moninkertainen nollakohta* x:n arvolla x_0, jos polynomin $P(x)$ tekijöihin jaettu muoto on $(x - x_0)^n Q(x)$, missä $n = 2, 3, 4, \ldots$ ja $Q(x)$ on polynomi.

Esimerkki B.30 a) Polynomifunktiolla $P(x) = 4(x-1)(x+2)^2$ on kaksinkertainen nollakohta pisteessä $(-2, 0)$.

b) Polynomifunktiolla $Q(x) = x^3(x-3)^4(x+5)$ on kolminkertainen nollakohta origossa ja nelinkertainen nollakohta pisteessä $(3, 0)$.

Esimerkki B.31 Olkoon $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Koska $P(1) = 0$, on $P(x)$:llä tekijä $x - 1$. Lauseen B.24 nojalla polynomi $P(x)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = (x - 1)Q(x),$$

missä $Q(x)$ on toisen asteen polynomi. Ratkaistaan polynomi $Q(x) = ax^2 + bx + c$ kertomalla tekijöihin jaetun polynomin sulut auki:

$$\begin{aligned}
x^3 + x^2 - 5x + 3 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\
x^3 + x^2 - 5x + 3 &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.
\end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälön molempia puolia toisiinsa nähdään, että $a = 1$, $b - a = 1$, $c - b = -5$ ja $-c = 3$ eli $a = 1$, $b = 2$ ja $c = -3$. Polynomi $P(x)$ voidaan siis jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 3).$$

Koska polynomi $Q(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$ kun $x = 1$ tai $x = -3$, on sen tekijöihin jaettu muoto

$$Q(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Polynomin $P(x)$ tekijöihin jaettu muoto on siis

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 3) = (x - 1)^2(x + 3).$$

Tekijöihin jaetusta muodosta nähdään, että $P(x)$:llä on kaksinkertainen nollakohta $x = 1$.

Yleisesti moninkertaisen nollakohdan muodostumista voidaan kuvata vastaavalla tavalla. Nollakohdan $x = a$ moninkertaisuus määräytyy sen perusteella, kuinka monella jäännöspolynomilla $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,. . . on sama nollakohta $x = a$. Neljännen ja sitä korkeampiasteisten polynomien jäännöspolynomit voidaan määrittää algebrallisesti polynomien jakolaskulla, johon palataan kurssilla MAA12 *Algoritmit matematiikassa*.

Tehtävät

15. Olkoon kolmannen asteen polynomifunktio muotoa $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Määritä sellaiset vakioiden a, b ja c arvot, että funktiolla $f(x)$ on

a) 3

b) 2

c) 1

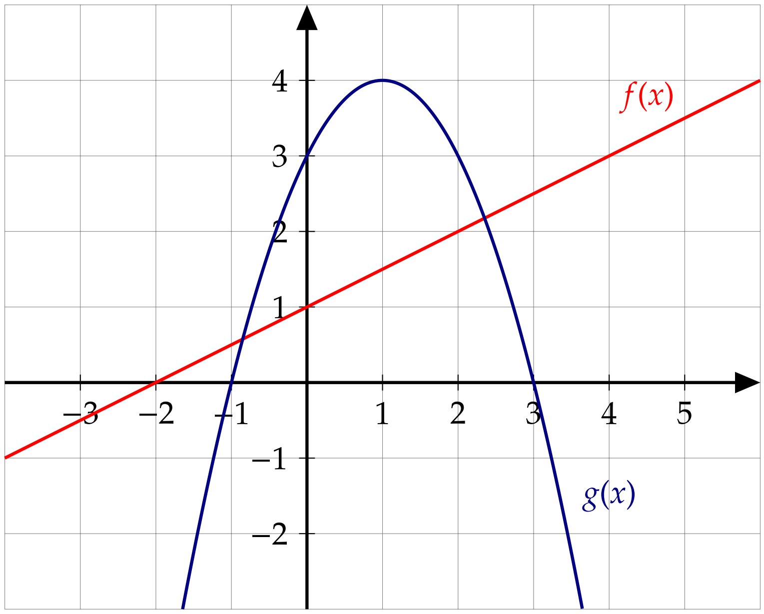
d) 0 nollakohtaa.

16. a) Muodosta kaksi erisuurta neljännen asteen polynomifunktiota $P(x)$ ja $Q(x)$, joilla on molemmilla nollakohdan kohdissa $x = -4$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ja $x = \sqrt{2}$.

b) Muodosta kaksi polynomifunktiota $f(x) \neq 0$ ja $g(x) \neq 0$, jotka leikkaavat toisensa pisteissä $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 2$.

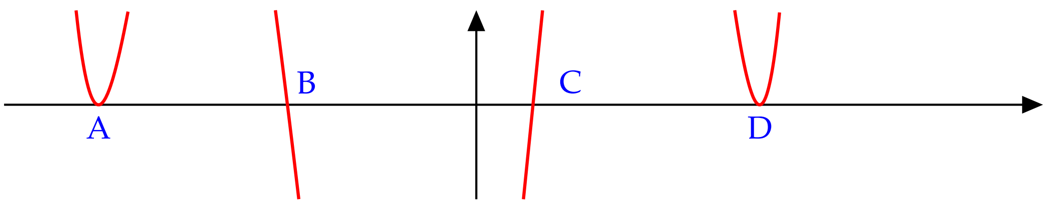
17. Määritä se kolmannen asteen polynomifunktio, jolla on nollakohdat $x = -3$, $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$ ja joka leikkaa suoran $f(x) = -2x + 4$ kohdassa $x = 1$.

18. Edellisessä kappaleessa hahmoteltiin funktion $P(x) = f(x)g(x)$ kuvaaja alla olevan kuvan avulla. Muodosta nyt polynomin $P(x) = f(x)g(x)$ lauseke muodossa $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ilman teknisiä apuvälineitä.



19. a) Tutki GeoGebran avulla polynomifunktioiden kuvaajia, joilla on moninkertaisia nollakohtia. Tee havaintoja kuvaajan kulusta moninkertaisen nollakohdan ympäristössä, kun nollakohdan monikerta on parillinen/pariton. Pohdi havainnoillesi perusteluja matemaattisesti.
Vinkki: Pohdi moninkertaisen nollakohdan muodostumista esimerkin B.31 avulla.

b) Oheisessa kuvassa näkyy erään polynomifunktion käyttäytyminen x-akselin läheisyydessä. Määritä niiden polynomifunktioiden yhtälöt, joiden kuvaajat vastaisivat x-akselin läheisyydessä alla esitettyä. Huomaa, että kuvaajan osat ovat saman polynomifunktion osia ja että y-akselin skaalaus ei vaikuta ratkaisuun.



C Lisätehtävät

20. Ratkaise funktioiden nollakohdat ilman teknisiä apuvälineitä

a) $f(x) = 3(x + 2)(x^2 - 1)(x - 3)$

b) $f(x) = x^5 - 16x$

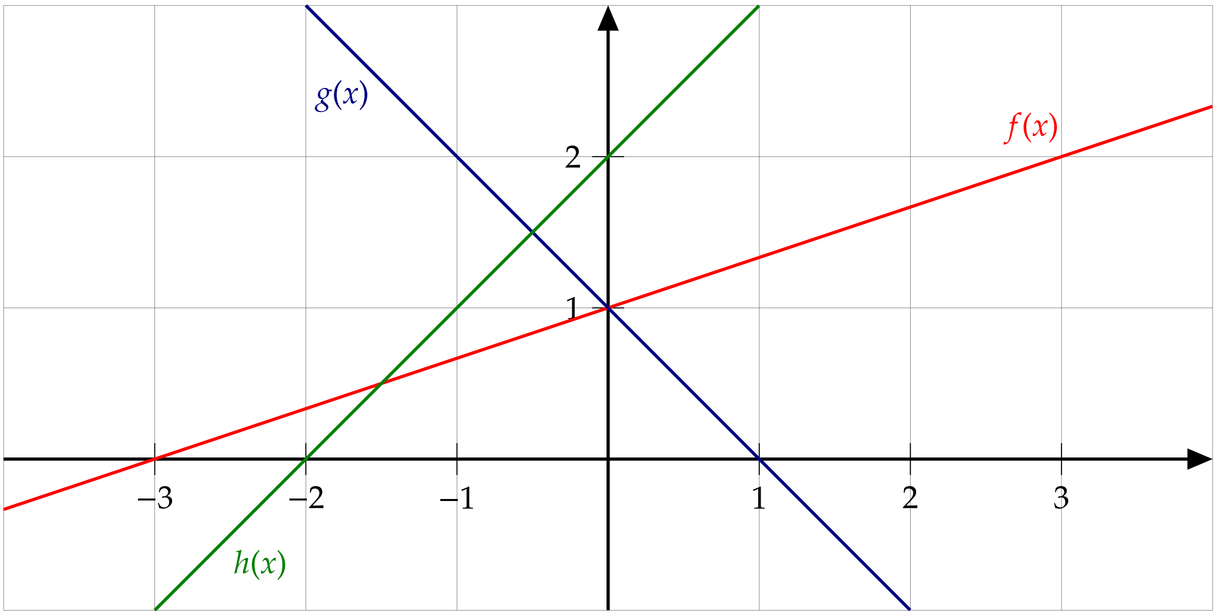
c) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 10x - 8$

d) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$

21. Osoita algebrallisesti, että polynomifunktiolla $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x - 45x$ on nollakohdat $x = -5$, $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 3$. Voiko funktiolla $f(x)$ olla muita nollakohtia?

22. Muodosta ne kolmannen asteen polynomifunktiot $P_n(x)$, joilla on nollakohdat $x = -2$ ja $x = 5$ (ei muita nollakohtia) ja joille $P_n(1) = 3$.

23. Alla on esitetty funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ kuvaajat. Muodosta polynomifunktion $P(x) = f(x)g(x)h(x)$ lauseke muodossa $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ilman teknisiä apuvälineitä.



24. Muodosta kuvaus $f(x)$ kuution muotoisen akvaarion vetoisuudelle sivun pituuden funktiona, kun akvaario täytetään aina siten, että akvaarion yläreunasta 2 senttimetriä jätetään tyhjäksi. Mieti käytännön kannalta mielekkäät yksiköt muuttujalle ja vetoisuudelle ja ota ne huomioon funktion muodostuksessa. Hahmottele tilanteesta kuvaaja ja selitä sanallisesti, miten kuvaajaa luetaan. Huomioi kuvauksen määrittelyjoukko.

Vinkki: Suorakulmaisen särmiön tilavuus lasketaan kaavalla kanta·korkeus·syvyys.

D Vastaukset

1. a) $5^{1/3} \approx 1,71$ b) $100^{1/6} \approx 2,15$ c) $\sqrt[7]{3} \approx 1,17$ d) $\sqrt[4]{40} \approx 2,51$

2. a1, b4, c2, d3

3. 5 %

4. 3, 3 %

5.

6. a3, b2, c6, d5, e1, f4

7. a) 7 b) 4 c) 6 d) 5

8. a) $x \approx -1,36$, $x \approx 0,79$ tai $x \approx 1,66$ b) $x \approx -1,17$ tai $x = 0$

9. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$ b) $a = -2$, $a = 0$ tai $a = 1$ c) $t = -2$ tai $t = 0$

10. 7, 8 ja 9

11. $a = 0$ ja $a = \frac{1}{4}$

12. a) $y =$ b) $x = -1$ c) $t =$ d) $v = -\sqrt[3]{3}$ tai $v = 1$

13. a) $x \approx 1,41$, $x = -1$ tai $x \approx 1,41$ b) $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = -1$. Opiskelijan tekemällä tavalla ei saada muuttujan tarkkoja arvoja, vaikka vastaukset olisivatkin esitetty oikeassa muodossa. b-kohdan tavalla saadaan ratkaistua muuttujalle tarkat arvot, minkä takia b-kohdan ratkaisutapa on parempi. c) $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = -1$

14. *Toinen vinkki:* Mieti $P(x)$:n lausekkeen ja kuvaajien avulla, miten $P(x)$:n arvo määräytyy yksittäisillä x:n arvoilla.

15. a) esim. $a = 0$, $b = 1$ ja $c = 2$ b) esim. $a = 1$, $b = 1$ ja $c = 2$ c) esim. $a = 1$, $b = 1$ ja $c = 1$ d) ei ratkaisuja.

16. a) $ax(x+4)(x-\frac{1}{2})(x-\sqrt{2})$ ja $bx(x+4)(x-\frac{1}{2})(x-\sqrt{2})$ b) $f(x) = x^3$ ja $g(x) = 4x$

17. $-\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

18. $P(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-3) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x + 3$

19. $P(x) = a(x-A)^{2n}(x-B)^{2m+1}(x-C)^{2k+1}(x-D)^{2l}$, missä $a \in \mathbb{R}$, $A, B < 0$, $C, D > 0$ ja $n, m, k, l \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

20. a) $X - 2$, $x = \pm 1$ tai $x = 3$ b) $x = 0$ tai $x = \pm 2$ c) $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = -\frac{4}{5}$ d) $x = \pm\sqrt{3}$

21. $f(-5) = 0$, $f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0$

22. $P_1(x) = -\frac{1}{12}(x+2)^2(x-5)$ ja $P_2(x) = \frac{1}{16}(x+2)(x-5)^2$

23. $P(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2$

24. $f(x) = 10^{-3}(x^3 - 2x^2)$ antaa vetoisuuden litroina, kun sivun pituus syötetään senttimetreinä.