Mittakaava, yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-ala ja tilavuus, yksikköympyrä sekä sini- ja kosinilause lukion matematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Johansson Linda Susanna Tehila
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto

Kevät 2018

Sisältö

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston matematiikan laitoksen vetämää oppikirjaprojektia, jonka päämääränä on tehdä kaikille avoimesti saatavia lukion matematiikan oppikirjoja. Kaiken kaikkiaan tämä projekti on jo kolmas, ja kattaa sekä lyhyen matematiikan että pitkän matematiikan kurssien MAA3 ja MAB3 sisällöt.

Kuten aikaisemmatkin oppikirjaprojektit, myös tämä on toteutettu ryhmämuotoisesti. Tätä oppikirjaa oli kirjoittamassa seitsemän pääaineenaan matematiikkaa opiskelevaa opiskelijaa. Kukin ryhmän seitsemästä jäsenestä laati oman osuutensa oppimateriaalista hänelle määrättyjen aiheiden pohjalta. Oppikirjan lähtökohtana oli paitsi lukion opetussuunnitelman asettamat geometrian kurssien MAA3 ja MAB3 sisällöt ja tavoitteet, myös muutamia artikkeleista *Habits of Mind* ja *Collaborative Learning in Mathematics* poimittuja tavoitteita. Lisäksi oppikirjalle asetettiin yleisiä tavoitteita.

Artikkelista *Habits of Mind* poimitut tavoitteet liittyvät matemaattiseen ajatteluun. Artikkelissa luetellaan matemaattisen ajattelun malleja, jotka edistävät oppilaiden matematiikan syvällisempää oppimista. Malleista valittiin tähän oppikirjaan korostettavaksi kolme: *Student should be pattern sniffers*, eli oppilaiden täytyisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä, *Students should be experimenters*, oppilaiden pitäisi olla tutkijoita ja *Student should be describers*, eli oppilaiden täytyisi olla kuvailijoita. Artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* poimittiin oppimista edistäviä tehtävätyyppejä, joita oli kolme kappaletta: *Classifying mathematical objects*, eli matemaattisten objektien luokittelu, *Evaluating mathematical statements*, eli matemaattisten väitteiden ja lauseiden arviointi sekä *Analysing reasoning and solutions* eli valmiiden ratkaisujen kriittinen arviointi. Yleisistä tavoitteista tärkeimpiä olivat kaikkien oppimateriaalissa esiintyvien matemaattisten väitteiden ja lauseiden perustelu, sekä oppimateriaalin perusteleminen tieteellisillä artikkeleilla.

Oppikirja koostuu luvuista *suorakulmaisen kolmion trigonometria*, *geometriset suureet*, *symmetria ja yhdenmuotoisuus*,*tasogeometriaa* sekä *avaruusgeometrian ongelmia*. Tämän tutkielman oppimateriaali sisältää oppikirjan luvusta *symmetria ja yhdenmuotoisuus* aiheet mittakaava, sekä yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-ala ja tilavuus. Luvusta *tasogeometriaa* tutkielmassa on aiheet yksikköympyrä sekä sini- ja kosinilause.

Tutkielma koostuu kolmesta osasta: perusteluosasta, opettajan oppaasta ja oppimateriaalista. Perusteluosassa esitellään tutkielman viitekehys, eli perusteellaan oppimateriaalin lähestymistavat opetettaviin aiheisiin sekä tehtävävalinnat tieteellisiin tutkimuksiin nojaten. Lisäksi esitellään, miten edellä kuvatut tavoitteet näkyvät juuri tässä oppimateriaalissa. Opettajan oppaasta löytyy vinkkejä oppimateriaalin käytännön toteutukseen ja kaikkien podintatehtävien ratkaisut. Itse oppilaille tarkoitettu oppimateriaali on tutkielmassa liitteenä. Oppimateriaalissa olevien tehtävien ratkaisut löytyvät oppimateriaalin lopusta.

2 Oppikirjan tavoitteet

Tämän tutkielman käsittelemä oppimateriaali on osa laajempaa kokonaisuutta, joka on tehty voimassa olevan lukion opetussuunnitelman pohjalta ja kattaa lukion matematiikan kurssien MAA3 ja MAB3 sisällöt. Osa oppimateriaalista on siis suunniteltu pitkän matematiikan opiskelijoille, osa lyhyen matematiikan opiskelijoille, ja osa yhteisiksi kokonaisuuksiksi.

Oppimateriaalille asetetut tavoitteet perustuvat pääasiassa lukion opetussuunnitelmaan, sekä *Habits of Mind* -artikkeliin. Näiden lisäksi sovittiin muutamia yleisiä tavoitteita, sekä päätettiin oppimateriaalissa esiintyvistä tehtävätyypeistä. Näin varmistettiin oppimateriaalin saumaton eteneminen aiheesta toiseen johdonmukaisesti.

2.1 Lukion opetussuunnitelma

Nykyinen syksyllä 2016 käyttöön otettu lukion opetussuunnitelma määrittelee lukio-opetuksen yleiseksi tehtäväksi yhteiskunnassa laaja-alaisen yleissivistyksen vahvistamisen. Lukiokoulutuksen päämäärä on siis paitsi lisätä opiskelijan tietämystä kulttuureista, luonnosta ja yhteiskunnasta, myös edistää yksilön kriittistä ja itsenäistä ajattelua [12].

Opetussuunnitelmassa oppilas nähdään aktiivisena toimijana. Oppiminen on seurausta opiskelijan omasta tavoitteellisesta ja itseohjautuvasta toiminnasta. Oppiminen nähdään yhteisöllisenä prosessina, jossa opiskelija syventää ja soveltaa aiemmin oppimaansa uuden tiedon tulkinnan ja analysoinnin avulla yhdessä muiden opiskelijoiden tai opettajien kanssa [12].

Opetussuunnitelman tavoitteiden mukaan käytettävät oppimismenetelmät pitäisivät perustua oppilaan omaan tiedon tutkimiseen, kokeilemiseen ja ongelmien ratkaisemiseen, joka edistäisi oppilaan kriittistä ja luovaa ajattelua sekä luo valmiudet elinikäiselle oppimaan oppimiselle ja oppiainerajat ylittävälle osaamiselle. Matematiikassa opetussuunnitelma korostaa matemaattisen ajattelun tärkeyttä sekä erilaisten matemaattisten ongelmien luovaa ratkaisukykyä. Matematiikka nähdään laskemisen lisäksi myös kielenä, jonka avulla pystytään esittämään ja hallitsemaan tietoa sekä kuvaamaan ilmiöitä ja käsitteitä. Opetuksen pitäisi kannustaa oppilasta kokeilemaan, tutkimaan, tekemään loogisia päätelmiä ja perustelemaan niitä teknologiaa avuksi käyttäen [12].

Opetussuunnitelma luettelee kurssin MAA3 keskeisiksi sisällöiksi seuraavat aiheet:

- Kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus.
- Sini- ja kosinilause.
- Ympyrän, ja sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria.
- Kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

Lyhyen matematiikan vastaavan kurssin keskeisiksi sisällöiksi listataan seuraavat aiheet:

- Kuvioiden yhdenmuotoisuus.
- Suorakulmaisen kolmion trigonometria.
- Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause.
- Kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen.
- Geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa [12].

Tämän tutkielman sisältämä oppimateriaali käsittelee MAA3 -kurssista osuuden sini- ja kosinilause kokonaisuudessaan. Oppimateriaali sisältää yhdenmuotoisuudesta osuudet mittakaava sekä yhdenmuotoisten kuvioiden/kappaleiden pinta-ala ja tilavuus, jotka kuuluvat kurssien MAA3 ja MAB3 yhteiseen sisältöön. Lisäksi oppimateriaali laajentaa kulman sinin ja kosinin määritelmän suuremmille kuin 90 asteen kulmille yksikköympyrän avulla, joka kuuluu kurssin MAA3 sisältöön.

Opetussuunnitelman laatimat tavoitteet opetukselle ja oppimiselle on otettu huomioon tämän tutkielman sisältämän oppimateriaalin laadinnassa. Oppimateriaali esimerkiksi pyrkii aktivoimaan oppilaan opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti itsenäiseen ajatteluun ja itseohjautuvaan toimintaan pohdintatehtävien avulla. Perinteisen luentomaisen opetuksen sijaan, oppimateriaali lähestyy geometriaa oppilaslähtöisesti, opiskelijoiden oman pohdinnan ja tutkimisen kautta. Pohdintatehtävien tarkoitus on paitsi herättää keskustelua ja kysymyksiä oppilaiden keskuudessa, myös ohjata oppilas löytämään itsenäisesti matemaattisia riippuvuuksia ja ominaisuuksia annettujen määritelmien sekä vanhan tiedon soveltamisen avulla. Tehtävien ideana on paitsi kannustaa keskustelemaan matematiikasta ja ongelmanratkaisusta, myös rohkaista oppilaita parityöskentelyyn ja yhteisölliseen oppimiseen.

Oppimismenetelmistä oppimateriaali korostaa oppilaiden omaa tutkimista, kokeilemista ja ongelmien ratkaisua. Pohdintatehtävissä oppilaiden täytyy tutkia kuvioiden ja kappaleiden sivujen pituuksien kasvun vaikutusta pinta-alaan ja tilavuuteen (pohdintatehtävät A.4 ja A.5) sekä löytämään itse oman tutkimisen kautta piilossa olevia matemaattisia säännönmukaisuuksia (pohdintatehtävä C.1). Oppilaita kannustetaan esittämään löytämäänsä tietoa matemaattisesti, sekä vaaditaan perustelemaan ratkaisunsa matemaattisesti (pohdintatehtävät A.4, A.5, B.1, C.5 ja D.3). Luovaa ongelmanratkaisua ja kriittistä ajattelua pyritään myös vaalimaan läpi oppimateriaalin (erityisesti pohdintatehtävät A.3, B.2, B.5 ja C.1).

2.2 Yleiset tavoitteet

Yhtenäisen rakenteen ja johdonmukaisen oppikirjan etenemisen varmistamiseksi oppimateriaalille asetettiin tavoitteita myös opetussuunitelman ulkopuolelta. Tärkeimmäksi tavoitteeksi valittiin matemaattisten väitteiden ja lauseiden perustelu. Kaikki oppimateriaalissa esitettävät matemaattiset väitteet ja lauseet pitää kyetä perustelemaan sellaisella matemaattisella tasolla, että oppilaat voivat ne tässä vaiheessa opintojaan ymmärtää. Perustelut itsessään saa esittää joko oppimateriaalissa (esimerkiksi kosinilauseen todistus teräväkulmaiselle kolmiolle) tai antaa oppilaille todistustehtäväksi (esimerkiksi sinilause).

Tämä tavoite ei kuitenkaan täysin tässä tutkielmassa toteutunut. Osoittautui, että osa kurssilla käytävästä matematiikasta ei olekaan perusteltavissa oppilaiden nykyisen ymmärryksen tasolla, vaan olisi vaatinut sellaisia matemaattisia perusteluja, joihin oppilailla ei vielä tässä vaiheessa opintojaan olisi ollut riittäviä matemaattisia taitoja. Tällainen tilanne syntyi esimerkiksi tutkittaessa mittakaavan ja pinta-alan välistä yhteyttä yhdenmuotoisilla kappaleilla, jolloin kunnollisen matemaattisen perustelun ymmärtäminen olisi vaatinut oppilailta integrointitaitoja.

Edellisen lisäksi sovittiin, että oppikirjan tehtävät ja lähestyminen opetettaviin aiheisiin pitää perustella tieteellisillä artikkeleilla. Valitettavasti tämäkään tavoite ei tässä oppimateriaalissa täysin toteutunut, sillä sopivia tutkimuksia sini- ja kosinilauseen soveltamisesta opetuksessa ei tätä tutkielmaa varten löytynyt. Muutamia artikkeleita opetuskokeiluista aiheisiin liittyen löytyi, mutta yhdenkään artikkelin pedagogiikan takana ei ollut tieteellisiä perusteluja, eikä kokeilun vaikuttavuutta oppilaisiin tutkittu.

2.3 Matemaattinen ajattelu

Artikkeli *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematic Curricula* käsittelee matematiikan opetuksen tulevaisuutta. Artikkelissa pohditaan millaista matematiikkaa oppilaille pitäisi opettaa, jotta he kykenisivät ratkomaan sellaisia matemaattisia ongelmia tulevassa työelämässään, joista ei nykyisin vielä edes tiedetä mitään. Ratkaisuksi artikkeli esittää opiskelun painopisteen siirtämistä enemmän aiheista ajatteluun. Oppilaiden pitäisi opetella pohtimaan ja ratkaisemaan ongelmia kuin matemaatikko; tutkimaan, kokeilemaan, tekemään virheellisiä päätelmiä ja laskuja, yleistyksiä ja loogisia päätelmiä. Matematiikan tulisi rohkaista oppilaita olemaan luovia ja kekseliäitä. Ennen kaikkea opetuksen pitäisi tarjota oppilaille konkreettisia ongelmanratkaisutaitoja ja erilaisia lähestymistapoja ongelmiin valmiiden ratkaisujen sijaan [6]. Artikkelissa esitettiin muutamia matemaatikkojen käyttämiä ajattelutapoja, joita oppilaille pitäisi kirjoittajien mielestä opettaa. Esitetyistä matemaattisista ajattelutavoista valittiin tässä opetusmateriaalissa korostettavaksi kolme. Seuraavaksi esitellään nämä kolme ajattelutapaa ja kuvaillaan lyhyesti, miten ne näkyvät tämän tutkielman sisältämässä oppimateriaalissa.

Student should be pattern sniffers.

Kohdatessaan jonkin matemaattisen ongelman, oppilaita tulisi rohkaista etsimään piilossa olevia matemaattisia säännönmukaisuuksia, kaavoja ja toistuvia kuvioita [6].

Pohdintatehtävissä A.4 ja A.5 oppilaiden täytyy oman tutkimisen avulla löytää yhdenmuotoisten kuvioiden ja kappaleiden mittakaavan yhteys pinta-alaan ja tilavuuteen. Heidän tulisi siis ymmärtää, miten vastinsivujen pituuden muutos vaikuttaa kuvioiden/kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden suhteisiin. Pohdintatehtävässä C.1 oppilaiden pitäisi löytää erilaisia kolmioita tutkimalla kaikille kolmioille pätevä säännönmukaisuus eli sinilause.

Students should be experimenters.

Oppilaiden tulisi tutkia ja kokeilla matemaattisiin ongelmiin erilaisia ratkaisuja, lähestymistapoja ja ongelmanratkaisustrategioita. Samanaikaisesti heidän tulisi kuitenkin aina suhtautua kokeiluun ratkaisutapana kriittisesti ja ymmärtää, että johtopäätöksiä voidaan tällöin tehdä vain rajoittuneesti matematiikan todistusluonteen vuoksi [6].

Oppimateriaalin tavoite kokonaisuudessaan on rohkaista oppilaita tutkimaan matematiikkaa ja kokeilemaan erilaisia lähestymistapoja ongelmiin. Osa oppimateriaalissa olevista pohdintatehtävistä kehottaa tähän suoraan, esimerkiksi pohdintatehtävät A.4 ja C.1. Kaikissa pohdintehtävissä ei kuitenkaan ole suoraan käsketty lähestymään ongelmaa tutkimalla sillä tarkoitus olisi, että oppilaat tekisivät näin automaattisesti ilman kehoitusta. Myös opettajan oppaassa on mainittuna tämä tavoite.

Student should be describers.

Oppilaiden pitäisi kyetä keskustelemaan matematiikasta. Heidän tulisi osata perustella toimintansa ja saadut ratkaisunsa niin sanallisesti kuin kirjallisesti. Heitä täytyy rohkaista väittelemään, esittämään kysymyksiä, mielipiteitä ja hypoteeseja matematiikasta ja tehtävien ratkaisuista [6].

Kaikki tässä oppimateriaalissa olevat pohdintatehtävät vaativat sanallista ja/tai matemaattisella kielellä annettua perustelua kirjallisesti. Oppiamateriaalissa on monta todistustehtävää, joissa oppilaiden pitäisi kyetä perustelemaan jokin väite matemaattisesti (esimerkiksi sinilause). Lisäksi kaikki pohdintatehtävät on suunniteltu siten, että ne ovat otollisia oppilaiden välisille keskusteluille.

2.4 Tehtävätyypit

Artikkeli *Collaborative Learning in Mathematics* käsittelee matematiikan opetuksen vaikuttavuutta. Artikkeli kokoaa yhteen tutkimuksiin perustuvia keinoja parempaan ja tehokkaampaan matematiikan opettamiseen ja opiskeluun. Artikkelin mukaan perinteinen, tiedon välittämiseen perustuva opetus jossa esitellään ensin opeteltava aihe sekä annetaan valmiita metodeja ja esimerkkejä tehtävien ratkaisuihin, ei takaa ymmärrykseen perustuvaa matematiikan oppimista. Tutkimukset osoittavat, että oppilaat mieltävät matematiikan usein sarjaksi menetelmiä ja laskutekniikoita, joilla ei ole minkäänlaista yhteyttä toisiinsa. Tällöin oppilaat usein tukeutuvat ulkoa opetteluun, jolloin myös osaaminen jää heikoksi [13].

Ulkoa opettelun estämiseksi oppilaiden pitäisi sitoutua aktiivisesti matematiikan opiskeluun. Opetuksen pitäisi olla sellaista, että oppilaat voivat keskustella, väitellä ja opettaa toinen toisiaan. Matemaattisen tiedon rakentuminen vanhan tiedon päälle, väärinkäsityksiin tarttuminen ja niistä keskusteleminen, ryhmätyöskentely sekä perusteluihin keskittyminen pelkän vastauksen antamisen sijaan tutkitusti parantavat matematiikan oppimista [13].

Artikkelissa esitettiin muutamia tehtävätyyppejä, jotka tukevat ymmärrykseen perustuvaa oppimista. Seuraavaksi esitellään tähän oppimateriaaliin valitut kolme tehtävätyyppiä, ja kuvaillaan lyhyesti miten ne näkyvät pohdintatehtävissä.

Classifying mathematical objects

Tämän tehtävätyypin tehtävissä oppilaat luokittelevat matemaattisia objekteja erilaisiin kategorioihin, jotka voivat olla joko annettuja tai oppilaiden itse keksimiä. Luokittelu auttaa oppilaita tunnistamaan objektien erilaisia ominaisuuksia ja erottamaan ne toisistaan. Luokittelu myös kehittää oppilaiden matemaattisen kielen ja määritelmien ymmärrystä [13].

Pohdintatehtävässä C.4 oppilaan täytyy luokitella kolmiot kahteen eri luokkaan annettujen tietojen perusteella siten, että oppilas tietää milloin sinilauseella saatu vastaus tuntemattoman sivun/kulman suuruudeksi on yksikäsitteinen.

Evaluating mathematical statements

Tehtävissä oppilaat arvioivat matemaattisten väitteiden todenperäisyyttä. Heitä rohkaistaan kehittämään perusteluja ja todistuksia väitteilleen, ja tekemään esimerkkejä tai vastaesimerkkejä päättelynsä tueksi. Tämän tyyppiset tehtävät kehittävät oppilaiden perustelu- ja todistustaitoja [13].

Oppikirjassa on monta päättely- ja todistustehtävää. Esimerkiksi pohdintatehtävässä B.5 oppilaiden pitää kyetä perustelemaan, miksei kulman sini tai kosini voi koskaan olla yli yksi. Lisäksi heidän pitäisi suhtautua aiemmin annettuun määritelmään kriittisesti ja kyetä parantelemaan sitä. Pohdintatehtävät C.5 ja D.3 ovat puhtaasti todistustehtäviä.

Analysing reasoning and solutions

Oppilaat analysoivat valmiita ratkaisuja. Erityisesti ratkaisuun johtaneeseen päättelyketjuun kiinnitetään huomiota ja etsitään niissä olevia mahdollisia virheitä. Tällaisilla tehtävillä on helppo tarttua yleisiin väärinkäsityksiin ja virheellisiin päätelmiin [13].

Pohdintatehtävässä A.3 oppilaiden pitää arvioida tehtävään annetun ratkaisun oikeellisuutta. Hänen täytyy paitsi tunnistaa matemaattisessa päättelyssä tehdyt virheet, myös korjata tehtävän ratkaisu. Oppilailta edellytetään, että hän perustelee tehtävässä tekemänsä ratkaisut huolellisesti.

3 Oppimateriaalin yleinen perustelu

Benjamin Bloomin kehittämän taksonomian mukaan oppiminen voidaan jakaa kolmeen eri osa-alueeseen: kognitiiviseen, tunteelliseen ja taidollisiin alueisiin. Kuuluisa 1950-luvulla ilmestynyt teos *Bloom's Taxonomy* käsitteli kognitiiviseen alueeseen kuuluvaa oppimisen osa-aluetta. Kirjassaan Bloom jakoi osaamisen kuuteen eri hierarkiseen tasoon. Kolme alimpaa tasoa koostuivat tietämyksestä, ymmärryksestä ja soveltamisesta. Ylimmän osaamisen tasot olivat puolestaan analysoiminen, syntetisoiminen sekä arvioiminen [8].

Aina 90-luvulle asti Bloomin taksonomia säilyi lähes muuttumattomana, ja toimi innostuksen lähteenä niin opetussuunnitelmille, tutkijoille kuin opettajillekin. Vuonna 2001 Bloomin entinen oppilas Lorin Anderson julkaisi päivitetyn version Bloomin taksonomiasta. Myös uusi versio koostui kuudesta eri tasosta, jotka alimmasta ylempään lueteltuna ovat seuraavat:

- Muistaminen. Kyky palauttaa tietoa pitkäkestoisesta muistista.
- Ymmärtäminen. Kyky kuvata tietoa suullisesti, kirjallisesti tai graafisesti. Osaa tehdä tietoon perustuvia johtopäätöksiä, verrantoja, luokitteluja ja perusteluja.

- Soveltaminen. Osaa käyttää opittua tietoa.
- Analysoiminen. Kyky pilkkoa tietoa osiin sekä ymmärtää, miten osat liittyvät toisiinsa ja kokonaiskuvaan.
- Arvioiminen. Osaa ajatella kriittisesti ja tehdä tietoon perustuvia johtopäätöksiä.
- Luominen. Osaa yhdistää uuden tiedon vanhaan ja saada aikaan toimiva kokonaisuus yleistyksien, tiedon järjestelyn ja päättelyn avulla [8].

Tutkimukset antavat viitteitä siitä, että osa oppilaista ei saavuta matematiikan opinnoissaan ylempiä osaamisen tasoja. Oppilaat kokevat matematiikan liian usein sarjaksi ulkoa opeteltavia laskutekniikoita, joilla ei ole minkäänlaista yhteyttä toisiinsa [13]. Erityisesti geometrian osa-alue matematiikassa koetaan haastavaksi; oppilailla on vaikeuksia ymmärtää jopa geometrian peruskäsitteitä [9]. Ongelma ei ole uusi, sillä jo 1950-luvulla Van Hiele kehitti teoriansa siitä, miksi joillakin oppilailla on vaikeuksia geometrian opinnoissa. Van Hielen mukaan geometriassa on olemassa viisi ymmärryksen tasoa:

- Taso 0. Oppilas kykenee tunnistamaan eri kuvoita ja nimeämään ne.
- Taso 1. Oppilas kykenee tunnistamaan eri kuvioiden ominaisuuksia.
- Taso 2. Oppilas kykenee hahmottamaan kuvioiden ominaisuuksien välisiä yhteyksiä ja järjestelemään niitä. Hän osaa myös tehdä yksinkertaisia päätelmiä.
- Taso 3. Oppilas osaa tuottaa päättelyyn perustuvia todistuksia. Hän ymmärtää todistuksien ja lauseiden merkityksen.
- Taso 4. Oppilas ymmärtää matemaattisia systeemejä ja osaa tehdä myös abstrakteja todistuksia [14],[16].

Van Hielen mukaan ymmärtääkseen geometriaa oppilaan täytyy käydä läpi eri ymmärtämisen tasot järjestyksessä. Ylempää ymmärtämisen tasoa ei voi saavuttaa, ennen kuin on läpäissyt edelliset tasot. Jokaisella tasolla ymmärtämisen kannalta oleellisimmat asiat vaihtelevat. Ylemmällä tasolla alempien tasojen oleellisimmat asiat ovat yleensä epäoleellisia. Jokaisella tasolla on lisäksi omat kielelliset symbolinsa ja niiden väliset yhteydet toisiin symboleihin [14],[16].

Van Hielen mukaan syy, miksi oppilaiden menestys geometriassa voi jäädä heikoksi, on opettajan ja oppilaan välinen kuilu ymmärtämisen tasoilla. Van Hielen mukaan kahdella eri tasolla olevat ihmiset puhuvat eri kielellä ja käyttävät eri symboleita omien tasojensa mukaan, eivätkä he siten voi ymmärtää toisiaan. Oppilas voidaan kuitenkin johdattaa ylemmälle tasolle oikeanlaisin menetelmin. Oppilaan oma tiedon tutkiminen, opettajan ohjauksessa tehtävät harjoitukset oikean tiedon/havainnon löytämiseksi, selitykset, soveltavammat tehtävät ja tiedon kokoaminen ovat keinoja auttaa oppilaan siirtymistä alemmalta tasolta ylemmälle [14],[16].

Van Hiele kehitti matemaattisen ajattelun mallinsa alunperin nimenomaan geometrian oppimisen avuksi. Myös yleisempiä matematiikan oppimisen ja ajattelun teorioita on olemassa useita. Esimerkiksi David Tall ja Eddie Gray ovat kehittäneet käsitteen *procept*, jossa on yhdistettynä matemaattinen prosessi ja käsite (*process* ja *concept*).

Kaikki matemaattiset merkinnät ovat symboleja sekä matemaattisille prosesseille (esimerkiksi yhteenlasku) että niiden lopputuloksille. Lisäksi merkinnät symboloivat itse matemaattista käsitettä (tässä tapauksessa summaa). Matematiikassa menestymisen kannalta on tärkeää, että oppilas kykenee ajattelemaan *proceptuaalisesti*, eli näkemään matemaattisten merkintöjen monimerkityksellisyyden sekä prosessina että käsitteenä [10].

APOS-teorian (*actions*, *processes*, *objects* ja *schemas*) mukaan matemaattisen käsitteen ymmärtämisen rakentuminen koostuu neljästä eri vaiheesta: toiminnasta, prosessista, objektista ja näiden koostamisesta mielen sisäiseksi malliksi (skeema). Toiminnalla tarkoitetaan matemaattisten operaatioiden suorittamista pelkästään joko ulkoa muistamalla tai noudattamalla annettua toimintaohjetta. Kun toimintaa on suoritettu tarpeeksi, oppilas voi rakentaa sisäisen mallin prosessista. Oppilas ei siis enää tarvitse ulkoista apuja matemaattisten operaatioiden suorittamiseen, vaan kykenee suorittamaan toiminnon itsenäisesti. Hän myös kykenee kuvittelemaan mielessään operaation ja sen lopputuloksen mielessään, kääntämään toimintajärjestyksen ja luomaan toisia prosesseja. Kun oppilas tulee tietoiseksi prosessista kokonaisuutena, muodostuu sitä objekti. Oppilas tällöin oivaltaa, että matemaattiset operaatiot muuttavat itse objektia. Lopuksi kun oppilas kykenee kuvittelemaan matemaattisen käsitteen yhdistelmänä toimintoja, prosesseja ja objekteja, muodostuu skeema joka on yhdistyneenä toisiin skeemoihin. APOS-teoria eroaa van Hielen mallista siinä, että käsitteiden ymmärtämisen rakentuminen ei etene lineaarisesti tasolta toiselle, vaan opiskelija voi palata oppimisprosessinsa aikana myös edelliselle tasolle [7].

Edellä kuvattujen teorioiden lisäksi on toki olemassa muitakin oppimisen teorioita ja matemaattisen ajattelun malleja, mutta tässä tutkielmassa ei ole tarkoituksenmukaista käydä kaikkia niitä läpi. Joka tapauksessa edellä kuvatut teoriat ovat osoittaneet hyödyllisyytensä historian saatossa [7],[10], [8], [14], [15], [16], ja toimivat näin ollen lähtökohtana tälle oppimateriaalille.

Oppimateriaali on pyritty kokoamaan siten, että sen rakenne tukisi APOS-teorian mukaista käsitteen muodostumisen teoriaa, ja edistäisi matemaattisten objektien ajattelemista *procepteina*. Kappaleiden aluksi lähestytään opittavaa aihetta tutkimalla objekteja vanhan osaamisen avulla, mutta uudesta näkökulmasta käsin. Tämän jälkeen pyritään APOS-teorian mukaiseen prosessin muodostukseen toistamalla opittua matemaattista operaatiota. Samalla edistetään oppilaan kykyä arvioida prosessin lopputulosta ennalta.

Tätä seuraavissa pohdintatehtävissä tavoitellaan ymmärryksen syventämistä tutkimalla opittua matemaattista operaatiota, ja sen takana seisovaa käsitettä. Jokaisen osion lopussa olevat tehtävät kertaavat aluksi matemaattisen operaation toistamista. Tämän jälkeen tulee soveltavampia tehtäviä, jotka testaavat osaamista. Erityisesti tällä lähestymistavalla tavoitellaan Bloomin oppimisen mallin kolmea ylintä tasoa.

3.1 Mittakaava

Tutkimuksien perusteella on löydetty neljä eri osa-aluetta yhdenmuotoisuudesta, joiden ymmärtämisessä oppilaat kohtaavat haasteita:

1) Yhdenmuotoisuus käsitteenä,

2) suurennoksen tekeminen,

3) vastinsivujen kasvun vaikutus pinta-alaan tai tilavuuteen

4) ja kyky tunnistaa yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita [3].

Tässä oppimateriaalissa käsitellään vain kohtia 2) ja 3). Kohdat 1) ja 4) koskevat suoraan itse yhdenmuotoisuuden käsitettä, joka käsitellään oppikirjassa aiemmin.

Tämän oppimateriaalin kannalta oleellisimmat oppilaiden kohtaamat vaikeudet yhdenmuotoisuudessa ovat seuraavat: harhakäsitys, että kasvattamalla kuvion jokaisen sivun pituutta saman verran, saadaan aina aikaiseksi alkuperäisen kuvion kanssa yhdenmuotoinen kuvio, ja että yhdenmuotoisten kuvioiden/kappaleiden pinta-alat/tilavuudet kasvavat samassa suhteessa, kuin kuvioiden vastinsivujen suhteet kasvavat [3],[1]. Harhakäsitys liittyy lineaarisen ajattelumallin käyttöön tilanteissa, joissa sitä ei todellisuudessa voi soveltaa. Tutkimusten mukaan virheellinen ajattelumalli johtuu lineaarisen ajattelumallin ylikorostamisesta matematiikan opetussuunnitelmassa, minkä vuoksi kerran opittua ajattelutapaa on vaikea muuttaa [1].

Tässä opetusmateriaalissa pyritään puuttumaan virheelliseen ajatteluun oppilaan oman tutkimisen ja visualisoinnin kautta (käsin tehdyt piirrokset tai esimerkiksi GeoGebra). Opetusmateriaali lähestyy aihetta kertaamalla jo aiemmin opittua asiaa, eli tunnistamalla yhdenmuotoisten kuvioiden vastinosat ja laskemalla niiden suhteet pohdinnassa A.1. Pohdintatehtävä A.2 on uuden määritelmän käytön harjoittelua APOS-teorian hengessä. Kuitenkin jo tehtävän b)-kohdassa oppilas voi ensimmäisen kerran törmätä oman ajattelutapansa virheellisyyteen, jos oppilas yrittää tehdä suurennoksen lisäämällä jokaisen sivun pituutta saman verran.

Pohdintatehtävä A.4 sen sijaan puuttuu suoraan edellä kuvattuihin harhakäsityksiin. Tehtävänannossa kerrotaan suoraan, että tehtävän ratkaisu on virheellinen, joka pakottaa oppilaan kohtaamaan omat väärinkäsityksensä. Pohdintatehtävissä A.4 ja A.5 perehdytään väärinkäsityksiin lisää oppilaiden oman tutkimisen kautta. Opettajan oppaassa on ohjeistettu, että tehtävät olisi hyvä tehdä esimerkiksi GeoGebran avulla tai vähintäänkin apupiirroksia käyttäen, koska geometrian oppimisen ja ymmärtämisen kannalta kuvat ovat tärkeitä [9]. Tehtävissä oppilas myös syventää omaa osaamistaan ja ymmärtämistään aiheesta koostamalla itse tekemänsä havainnot matemaattisiksi lauseiksi [8],[14].

Tehtävät

Ensimmäiset kolme tehtävää ovat perustehtäviä. Tehtävä 1 keskittyy mittakaavan ja pinta-alan/tilavuuden väliseen suhteeseen konkreettisen kuvan kanssa. Tehtävät 2 ja 3 keskittyvät samaan aiheeseen, mutta ilman valmiita kuvia tilanteesta. Tehtävä 3 on konkreettinen esimerkiksi aiheen käytännön sovelluksesta. Tehtävät 4 ja 5 ovat syventäviä tehtäviä, jotka vaativat yhdenmuotoisuuden syvällisempää ymmärrystä.

3.2 Yksikköympyrä

Tutkimusten mukaan oppilaat mieltävät trigonometrian yhdeksi vaikeimmaksi osa-alueeksi matematiikassa. Trigonometriaan liittyvien käsitteiden oppiminen jää usein puutteelliseksi, kaavojen ulkoa opetteluksi vailla syvempää ymmärrystä. Moni luulee, että kolmioihin ja ympyröihin liittyvä trigonometria ovat kaksi erillistä osa-aluetta, mikä vaikeuttaa ymmärtämistä entisestään [4],[11].

Suorakulmaisen kolmion trigonometria on tutkimusten mukaan ongelmallinen aikaisemmin opittu käsite sinin ja kosinin yksikköympyrän määritelmän kannalta katsottuna. Oppilaiden on vaikea muuttaa aiempaa käsitystään sinistä ja kosinista. Lisäksi koska suhde on tutkitusti vaikea käsite oppilaille, on jo pelkästään suorakulmaisen kolmion trigonometria kateettien ja hypotenuusan suhteena vaikea ymmärtää. Kun sinin ja kosinin käsitettä laajennetaan yksikköympyrään, oppilaiden vaikeudet käsitteen sisäistämisessä korostuvat entisestään [4].

Moni väärinkäsitys trigonometriassa johtuu oppilaiden kyvyttömyydestä nähdä sini ja kosini sekä käsitteenä että prosessina (*procept*). Moni ei myöskään kykene arvioimaan kulman sinin tai kosinin arvoa ilman laskinta. Koska ymmärrys sinin ja kosinin määritelmästä on puutteellinen, myös käsitys siitä miten kulman sini tai kosini lasketaan on puutteellinen. Näin ollen lopputuloksen arvioiminen ennalta on mahdotonta [11],[15].

Tämän oppimateriaalin innoituksen lähteenä on Keith Weberin tutkimus oppilaiden trigonometristen funktioiden ymmärtämisestä. Vaikka tutkimus käsitteleekin funktioita, painotetaan tutkimuksessa sinin ja kosinin määritelmää yksikköympyrässä. Tutkimuksessa tehdään opetuskokeilu, jonka teoreettisina lähtökohtina ovat APOS-teoria ja *procept*-käsite. Tutkimuksen tulos antaa viitteitä siitä, että edellä mainittuihin teorioihin perustuva lähestymistapa opetuksessa saa aikaan parempia oppimistuloksia [15].

Myös tässä oppimateriaalissa lähestytään sinin ja kosinin määritelmää yksikköympyrässä APOS-teorian ja *procept*-käsitteen kautta; määritelmässä kerrotaan mitä kulman sini ja kosini ovat, ja pohdintatehtävissä B.3 ja B.4 harjoitellaan kulman sinin ja kosinin määrittämistä sekä tutkitaan niiden ominaisuuksia. Koska geometrian oppimisen kannalta visuaalisuus on isossa roolissa [9], oppilailla on ensimmäisessä pohdintatehtävässä apuna valmiita kuvia kulmista yksikköympyröissä. Toisessa pohdintatehtävässä viedään prosessin oppimista eteenpäin vaatimalla oppilailta kuvien tekemistä itse. Pohdintatehtävien tarkoituksena on oppia arvioimaan kulman sinin ja kosinin arvoja ilman varsinaista prosessin suoritusta, jolloin oppilas näkee esimerkiksi merkinnän $\sin 30°$ samanaikaisesti sekä symbolina lopputulokselle, että prosessina kulman sinin määrittämiselle.

Pohdinnan B.5 tarkoituksena on paitsi yhdistää uusi ja vanha tieto ja siten edistää oppimista [13], myös syventää sinin ja kosinin määritelmän ymmärtämistä tutkimalla niiden käyttäytymistä yksikköympyrän lisäksi myös muun kokoisissa origokeskisissä ympyröissä. Tavoitteena on, ettei oppilas enää mieltäisi sinin ja kosinin määritelmää suorakulmaisessa kolmiossa omaksi erilliseksi määritelmäkseen, vaan näkisi sen osana yksikköympyrän avulla lausuttua määritelmää.

Tehtävät

Varsinaisissa kappaleen tehtävissä syvennetään lisää sinin ja kosinin käsitettä. Tehtävät 6 ja 7 ovat perustehtäviä, jotka tarkastelevat nyt jo tuttua kulman sinin ja kosinin määritelmää hieman eri perspektiivistä. Tehtävässä 6 verrataan eri kulmien sinien ja kosinien arvoja, kun taas tehtävässä 7 edetään prosessissa päinvastaiseen suuntaan kuin tähän mennessä on totuttu. Tehtävät 8 ja 9 ovat syventäviä tehtäviä, joissa vaaditaan perustelemaan matemaattisia väitteitä. Tehtävien tarkoitus on kehittää oppilaiden syvällisempää käsitteiden ymmärtämistä [5], [8],[14].

3.3 Sini- ja kosinilause

Tutkimuksia sini- ja kosinilauseen ymmärtämisestä ei valitettavasti tätä tutkielmaa varten löytynyt. Muutamia artikkeleita opetuskokeiluista (ja ehdotelmia) aiheisiin liittyen löytyi, mutta yhdenkään artikkelin pedagogiikan takana ei ollut tieteellisiä perusteluja, eikä kokeilun vaikuttavuutta oppilaisiin tutkittu. Näin ollen tämän oppimateriaalin laadinnan apuna ei voitu käyttää suoraan sini- ja kosinilauseeseen opettamiseen ja oppimiseen liittyviä tieteellisiä artikkeleja. Sen sijaan oppimateriaali pyrkii noudattamaan yleisiä oppikirjalle asetettuja tavoitteita.

Oppimateriaalin laadinnassa on siis pyritty ottamaan huomioon *Habits of Mind*-tavoitteet, yleinen tavoite ja sovitut tehtävätyypit. Lisäksi oppimateriaali pyrkii ottamaan huomioon Bloomin taksonomian, van Hielen teorian, *procept*-käsitteen ja APOS-teorian.

Oppimateriaalissa lähestytään sinilausetta löytämällä piilossa oleva matemaattinen säännönmukaisuus (pohdintatehtävä C.1) . Oppilaat tutkivat mille kaikille kolmioille löydetty säännönmukaisuus pätee, ja kategorisoivat kolmioita sen mukaan. Näin löydetty tieto liitetään samalla vanhaan tietoon tutkimalla aluksi jo ennestään hyvin tunnettua suorakulmaista kolmiota.

Pohdintatehtävässä C.3 harjoitellaan uuden lauseen käyttöä ja siten edistetään prosessin mielensisäisen mallin syntymistä oppilailla [7]. Pohdinnassa C.4 oppilaiden olisi tarkoitus tutkia sinilauseen ominaisuuksia (yksikäsitteisyys) ja harjoitella sanallisten tehtävien tekoa sekä tehtävänannon visualisointia ymmärtämisen helpottamiseksi [9]. Pohdintatehtävä C.5 jälleen syventää oppimista todistuksen avulla [5],[8],[14].

Kosinilauseen monimutkaisemman ulkonäön vuoksi lausetta lähestytään tässä oppimateriaalissa hieman perinteisemmin keinoin. Lause esitellään ensin oppilaille käyttäen hyväksi visualisointia ja erilaisia värejä ymmärryksen rakentamisessa [9]. Pohdintatehtävässä D.2 harjoitellaan lauseen käyttöä ja edistetään siten prosessin mielensisäisen mallin syntymistä [7]. Kosinilauseen todistus teräväkulmaisille kolmioille annetaan oppimateriaalissa esimerkkinä todistuksen monivaiheisuuden vuoksi helpottamaan ymmärtämistä [2]. Tarkoituksena on, että oppilaat analysoivat todistuksen eri vaiheita *Collaborative Learning in Mathematics*- artikkelista otetun tavoitteen mukaisesti. Lopuksi oppilaat todistavat kosinilauseen tylppäkulmaisille kolmioille pohdintatehtävässä D.3. Tehtävän tarkoituksena on syventää oppimista [5],[8],[14].

Tehtävät

Kappaleiden tehtävät 10 ja 11 sekä 14 ja 15 ovat perustehtäviä, joiden avulla on tarkoitus harjoitella lauseiden käyttöä lisää. Tehtävissä on kuitenkin haastavuutta sanallisen muodon vuoksi [9]. Tehtävissä 12 ja 13 testataan sinilauseen soveltamiskykyä oppilaille uudessa tilanteessa eli pystysuorassa suunnassa. Tehtävissä 16 ja 17 tarvitaan muutakin geometrista tietämystä kuin pelkästään kosinilausetta. Lisäksi tehtävässä 17 sovelletaan myös sinilausetta.

Viitteet

[1] Bock, D. D B., Dooren, W. V., Janssens, D., Verschaffel, L. (2008). *The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity*. Journal for Reasearch in Mathematics Education, Vol. 39, No. 0.

[2] Bokosmaty, S., Kalyuga, S., Sweller, J. (2014). *Learning Geometry Problem Solving by Studying Worked Examples: Effects of Learner Guidance and Expertise*. American Educational Research Journal, Vol. 53, No. 2, s. 307-333.

[3] Chazan, D. (1988). *Similarity: Exploring the Understanding of a Geometric Concept*.

[4] Chin, K. E. (2013). *Making Sense of Mathematics: Supportive and Problematic Conceptions with Special Reference to Trigonometry*.

[5] Clark, D. L., Gilbertson, N. J., Males, L. M., Otten, S. (2014). *The Mathematical Nature of Reasoning-and-Proving Opportunities in Geometry Textbooks*. Mathematical Thinking and Learning, s. 51-79.

[6] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., Mark, J. (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. The Journal of Mathematical Behavior 15, s. 375-402.

[7] Dubinsky, E., McDonald, M. A. (2001). *APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research*

[8] Forehand, M. (2005). *Bloom's Taxonomy: Original and Revised*.

[9] Gal, H., Linchevski, L. (2010). *To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception*.

[10] Gray, E. M., Tall, D. O. (1994). *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic*. Journal for Research in Mathematics Education, s. 115-141.

[11] Gur, H. (2009). *Trigonometry Learning*. New Horizons in Education, Vol. 57, No. 1., s. 67-80.

[12] Opetushallitus (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

[13] Swan, M., (2006). *Collaborative Learning in Mathematics*. s. 162-176.

[14] Vojkuvkova, I. (2012). *The van Hiele Model of Geometric Thinking*.

[15] Weber, K. (2005). *Students' Understanding of Trigonometric Functions*. Mathematics Education Reasearch Journal, Vol.17, No.3, s. 91-112.

[16] Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*.

4 Opettajan opas

Tässä opettajan oppaassa esitellään suuntaa-antava tuntijako sekä oppimateriaalin keskeiset sisällöt ja tavoitteet. Oppimateriaali painottaa oppilaan omaa tiedon tutkimista ja havaintojen tekoa. Tarkoituksena on, että oppimateriaalissa olevat pohdintatehtävät tehdään pareittain, mutta niin halutessaan oppilas voi tehdä niitä myös yksin. Joidenkin pohdintatehtävien ratkaisussa kannattaa käyttää apuna esimerkiksi GeoGebraa. Koska geometrian oppimisen ja ymmärtämisen kannalta kuvat ovat tärkeitä, oppilaita kannattaa aina kehottaa piirtämään tehtävissä kuva tilanteesta.

Oppaassa esitellään jokainen oppimateriaalissa oleva pohdintatehtävä erikseen tavoitteineen. Lisäksi joidenkin tehtävien kohdalla on annettu toteuttamisehdotuksia tai vinkkejä ylöspäin eriyttämiseen. Jokaiseen pohdintatehtävään löytyy myös valmis ratkaisu. Pohdintatehtävien ratkaisut olisi tarkoitus käydä yhdessä oppilaiden kanssa lopuksi läpi väärinkäsitysten välttämiseksi.

Jokaisen kappaleen lopussa on aiheeseen liittyviä tehtäviä. Ensimmäiset tehtävät ovat perustehtäviä, jälkimmäiset soveltavia. Tämä pätee myös pohdintatehtäviin. Kaikkien tehtävien kohdalla kannattaa oppilaille korostaa kuvan piirtämisen tärkeyttä ja kannustaa oppilaita tutkimaan ja kokeilemaan, vaikka tehtävänanto ei siihen suoraan kehottaisikaan. Tehtävien vastaukset löytyvät oppimateriaalin lopusta. Vaikeimpien tehtävien ratkaisut löytyvät opettajan oppaan lopusta.

4.1 Tuntijako

Alla oleva tuntijako on tehty 75 minuutin oppitunneille ja on vain ohjeellinen.

- 1×75min Mittakaava
- 1×75min Yksikköympyrä
- 1×75min Sinilause
- 1×75min Kosinilause

4.2 Mittakaava

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- Mittakaava ja sen laskeminen.
- Mittakaavan yhteys yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alaan.
- Mittakaavan yhteys yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuteen.

Kappaleen keskeisinä tavoitteina on, että oppilas

- tutkii yhdenmuotoisten kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia.

- kykenee muodostamaan havainnoistaan lauseita.
- osaa tehdä kuviosta suurennoksen/pienennöksen, laskea mittakaavan sekä pinta-alojen/tilavuuksien suhteen.
- osaa käyttää teknologiaa tai apupiirroksia tehtävän ratkaisun apuna.
- osaa yhdistää oppimansa aiemmin oppittuun tietoon.

Pohdintatehtävä A.1

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen tunnistamista. Itse vastinsivujen suhteiden laskeminen on edellisen kappaleen kertausta.

Ratkaisu

a) Vastinsivujen suhde on 2 : 3.

b) Vastinsivujen suhde on 1 : 2.

Pohdintatehtävä A.2

Tehtävän ensimmäinen osio on uuden määritelmän käytön harjoittelemista. Tehtävän toinen osio voidaan tehdä joko käsin tai teknologia-avusteisesti (esim. GeoGebra). Toisesta osasta saa tuntuvasti haastavamman, jos harpin ja kolmioviivaimen käyttö sekä apuympyröiden piirtely kielletään. Tehtävän tarkoituksena on oppia piirtämään suurennoksia annetussa mittakaavassa. Tehtävä myös kertaa yhdenmuotoisuudesta aiemmin opittua. Halutessa tehtävää voi myös helposti laajentaa, esimerkiksi pienennöksen tekoon. Opettajan voi kohdentaa oppilaiden huomion tehtävän toiseen osaan, jos he kohtaavat ongelmia tehtävän teossa. Lisäksi opettaja voi esittää apukysymyksiä, esimerkiksi "Kuinka paljon kunkin sivun pituus kasvaa ja miten saat sen selville?" ja "Mitkä ovat suurennetun kolmion kulmien suuruudet?".

Ratkaisu

a) $k = \frac{15}{7}$ tai $k = \frac{7}{15}$.

b) Suurennetun kolmion sivujen pituudet ovat 6 cm, 4,5 cm ja 7,5 cm. Sekä alkuperäisellä että suurennetulla kolmiolla kulmien suuruudet ja sivujen pituuksien suhteet ovat samat.

Pohdintatehtävä A.3

Tehtävän tarkoituksena on arvioida valmista ratkaisua kriittisesti, sekä tuoda esiin yleisimmät väärinkäsitykset liittyen yhdenmuotoisuuteen ja pinta-aloihin. Oppilaita kannattaa ohjata tutkimaan ratkaisua kuvan avulla joko käsin piirtämällä, tai käyttämällä avuksi teknologiaa, jolloin mahdollinen ristiriita ennakkokäsitysten kanssa tulee paremmin esille. Tarkoituksena on, että oppilaat perustelevat huolellisesti mitä virheitä päättelyssä on tehty, sekä korjaavat ratkaisun oikeaksi perusteluineen. Jos tehtävän suoritus tuntuu haastavalta, opettaja voi ohjata oppilaan ajattelemaan asiaa hieman suuremmilla luvuilla: "Miltä kuvio näyttäisi, jos sivujen pituudet kasvaisivat 10 cm?

Tai 1 km?". Tarkoituksena olisi huomata, ettei kuvio enää näyttäisi alkuperäiseltä kuviolta vaan neliöltä. Näin ollen jokaista sivua kasvattamalla saman verran ei päädytä alkuperäisen kuvion kanssa yhdenmuotoiseen kuvioon. Pinta-alan kohdalla oppilas voidaan ohjata ajattelemaan jotain helpompaa suurennosta, esimerkiksi 2 : 1 ja laskemaan, kuinka monta kertaa alkuperäinen kuvio mahtuu uuteen.

Ratkaisu

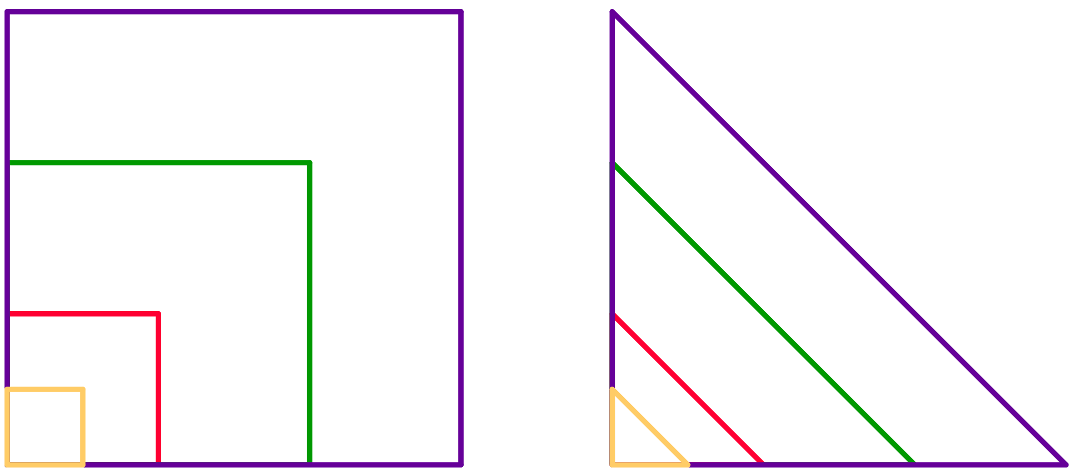
a) Kasvattamalla kuvion jokaisen sivun pituutta saman verran ei saada alkuperäisen kuvion kanssa yhdenmuotoista kuviota. Kuviossa sivujen väliset suhteet täytyy pysyä vakiona.

   Alkuperäisessä ratkaisussa mittakaava on saatu oikein. Koska mittakaava on $k = \frac{5}{4}$, niin lyhyemmän sivun pituus on $2\text{ cm} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{4}\text{ cm} = 2{,}5\text{ cm}$.

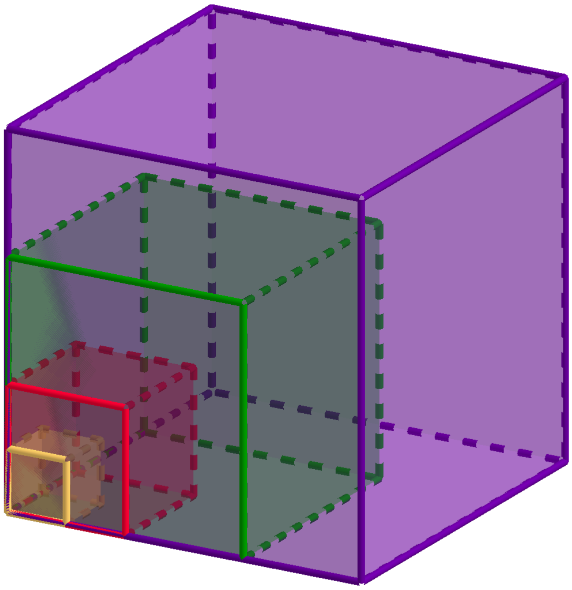
b) Pinta-alojen suhde ei kasva samassa suhteessa kuin vastinsivujen pituuksien suhteet. Alkuperäisen suorakulmion pinta-ala on $A_1 = 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^2$ ja suurennetun suorakulmion $A_2 = 2{,}5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 12{,}5\,\text{cm}^2$. Pinta-alojen suhde on tällöin $\frac{A_2}{A_1} = \frac{12{,}5\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}^2} = 1{,}5625 \approx 1{,}6$.

Pohdintatehtävät A.4 ja A.5

Tehtävien tarkoituksena on tutkia kuvioiden ja kappaleiden sivujen pituuksien vaikutusta pinta-alaan ja tilavuuteen. Oppilaiden olisi siis tarkoitus löytää mittakaavan yhteys pinta-alojen ja tilavuuksien suhteisiin. Tehtävät kannattaa tehdä esimerkiksi GeoGebraa avuksi käyttäen. Pohdintatehtävässä A.4 oppilaita on syytä ohjeistaa piirtämään kuviot päällekkäin siten, että niillä on kaksi yhteistä sivua alla olevan kuvan tavalla. Ensimmäisen kuvion eli vertailukuvion koolla ei ole väliä, kunhan sivujen pituudet muuttuvat tehtävänannon kuvailemissa suhteissa.



Näin sivujen pituuksien ja pinta-alojen suhteen muutosta on helpompi verrata esimerkiksi laskemalla kuinka monta kertaa alkuperäinen kuvio mahtuu uuteen kuvioon. Myös pohdintatehtävän A.5 kuvat on suositeltavaa tehdä siten, että kappaleet ovat sisäkkäin niin, että niiden kolme tahkoa sivuavat toisiaan alla olevan kuvan mukaisesti.



Oppilaita voi ohjeistaa tarkastelemaan kappaleita eri suunnista ja miettimään, kuinka monta kertaa kertaa alkuperäinen kappale mahtuu uuteen kappaleeseen. Lopuksi kummassakin pohdintatehtävässä muodostetaan verrannot; ensin kuvioiden perusteella ja lopuksi laskemalla jonkin sivun pituuden p avulla. Esimerkiksi pohdintatehtävän A.4 a)-kohdassa neliön sivujen pituuksista suhde on $\frac{2p}{p} = \frac{2}{1}$, ja pinta-alojen suhde $\frac{(2p)^2}{p^2} = \frac{4}{1}$.

Ratkaisut

Pinta-alan ja mittakaavan välinen yhteys: $k^2 = \frac{A_2}{A_1}$.

Tilavuuden ja mittakaavan välinen yhteys: $k^3 = \frac{V_2}{V_!}$.

4.3 Yksikköympyrä

Kappaleen keskeiset sisällöt ja tavoitteet:

- Kolmion pinta-alan yhtälö $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.
- Sinin ja kosinin määritelmä yksikköympyrän avulla.
- Suplementti- ja komplementtikulmien sini ja kosini.

Kappaleen keskeisinä tavoitteina on, että oppilas

- ymmärtää sinin ja kosinin määritelmän tarpeellisuuden yksikköympyrän avulla.
- osaa arvioida ilman laskinta sinin ja kosinin arvoja.
- ymmärtää suorakulmaisen kolmion trigonometrian osana yksikköympyrän trigonometriaa.
- osaa perustella miksi $\sin\alpha$ tai $\cos\alpha$ ei voi olla koskaan suurempi kuin yksi.

- osaa tehdä yksinkertaisia sinin ja kosinin määritelmään perustuvia geometrisia todistuksia.
- osaa yhdistää oppimansa aiemmin oppittuun tietoon.

Pohdintatehtävä B.1

Tehtävässä johdetaan kolmion pinta-alalle uusi yhtälö vanhan avulla. Tehtävän tarkoituksena on harjoitella matemaattisen lauseen muodostamista. Oppilaita voi ohjeistaa tehtävän teossa piirtämään kolmiolle korkeusjana h, ja lausumaan se kulman β avulla. Eli $\sin\beta = \frac{h}{c}$, josta saadaan että $h = c\sin\beta$. Nyt korkeus h voidaan sijoittaa tuttuun kolmion pinta-alan yhtälöön $A = \frac{ah}{2}$, jolloin saadaan haluttu lopputulos. Ratkaisussa on syytä kiinnittää erityisesti huomiota siihen, mitä tietoja kolmiosta tarvitaan jotta uutta pinta-alan yhtälöä voi käyttää.

Ratkaisu

Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, missä kulma β on sivujen a ja c välinen kulma.

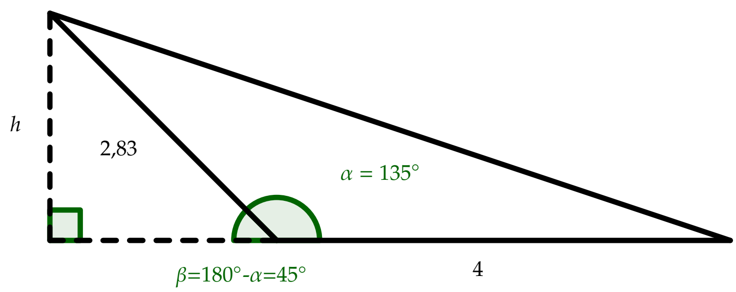
Pohdintatehtävä B.2

Tehtävässä ei saa käyttää laskinta. Ensimmäisen osion tarkoituksena on saada oppilaat huomaamaan sinin ja kosinin suorakulmaisen kolmion avulla lausutun määritelmän vajavaisuuden. Oppilaiden olisi siis tarkoitus huomata, etteivät he kykene laskemaan sinin ja kosinin arvoja yli 90 asteen kulmille.

Tehtävän toisessa osiossa ei ole tarkoitus laskea kolmion pinta-alaa, vaan verrata kahdella eri tavalla saatua pinta-alan lauseketta. Tässäkään vaiheessa ei saa käyttää laskinta.

Ensimmäiseksi oppilaiden pitää muodostaa kolmiolle pinta-alan lauseke käyttämällä yhtälöä $A = \frac{ah}{2}$. Oppilaita kannattaa tarvittaessa ohjeistaa piirtämään kolmiolle korkeusjana h ja ratkaisemaan korkeus kulman α suplementtikulman avulla. Opettaja voi esittää kysymyksiä kuten: "Miten saat kolmion korkeuden selville?" ja "Miten voit käyttää suorakulmaisen kolmion trigonometriaa hyväksi tässä tilanteessa?".

Alla oleva kuva havainnollistaa tilannetta.



Kuvasta saadaan, että $\sin 45° = \frac{h}{2{,}83}$, jolloin $h = 2{,}83 \cdot \sin 45°$. Lauseke sijoitetaan kolmion pinta-alan yhtälöön sellaisenaan, eli $A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}83 \cdot \sin 45°$.

Seuraavaksi muodostetaan kolmiolle pinta-alan lauseke pohdintatehtävän B.1 yhtälön avulla, jolloin saadaan $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}83 \cdot \sin 135°$.

Oppilaiden pitäisi nyt verrata saamiaan tuloksia. Heidän pitäisi hoksata, että he ovat nyt saaneet kaksi erilaista pinta-alan lauseketta, joiden lopputulos pitäisi kuitenkin olla sama. Nyt $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}83 \cdot \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}83 \cdot \sin 45°$ jolloin sieventämällä saadaan $\sin 135° = \sin 45°$. Oppilaat voivat lopuksi vahvistaa lopputuloksen laskimella.

Pohdintatehtävä B.3

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella kulman sinin ja kosinin määrittämistä yksikköympyrän avulla. Oppilaiden pitäisi myös pohtia, minkälaisia arvoja kulman sini ja kosini saa kussakin ympyrän neljänneksessä.

Ratkaisu

a) $\sin 30° = 0{,}5$, $\cos 30° \approx 0{,}8$, $\sin 150° = 0{,}5$, $\cos 150° \approx -0{,}8$,$\sin 270° = -1$, $\cos 150° = 0$, $\sin 330° = -0{,}5$ ja $\cos 330° \approx 0{,}8$.

b) Yksikköympyröiden A ja B kulmien sinit ovat suurimmat, eli $\sin 30° = \sin 150° = 0{,}5$. Suurimmat kosinin arvot $\cos 30° \approx 0{,}8$ ja $\cos 330° \approx 0{,}8$ löytyvät puolestaan yksikköympyröistä A ja D.

c) Sini saa positiivisia arvoja ensimmäisessä ja toisessa neljänneksessä, ja negatiivisia kolmannessa ja neljännessä neljänneksessä.

d) Kosini saa positiivisia arvoja ensimmäisessä ja neljännessä neljänneksessä, ja negatiivisia toisessa ja kolmannessa neljänneksessä.

Pohdintatehtävä B.4

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella kulman sinin ja kosinin määrittämistä.

Ratkaisu

a) $\sin 90° = 1$ ja $\cos 90° = 0$.

b) $\sin 45° = 0{,}7$ ja $\cos 45° = 0{,}7$.

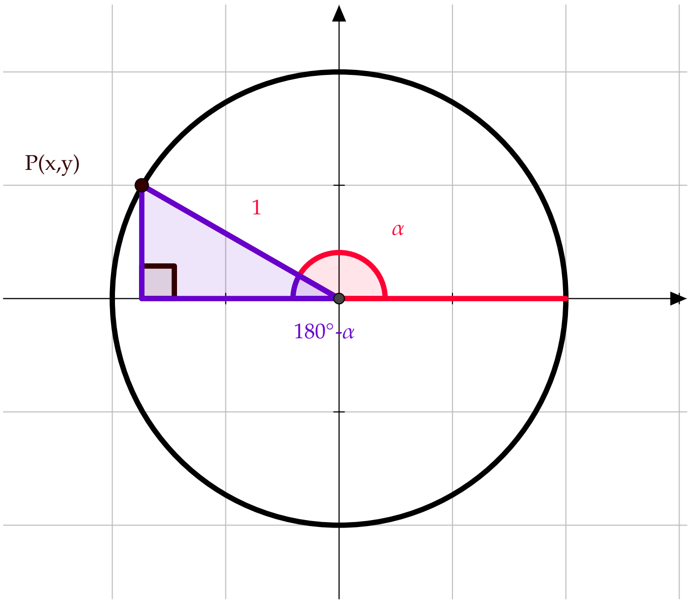
c) $\sin 260° \approx -0{,}98$ ja $\cos 260° \approx -0{,}17$.

d) $\sin 0° = 0$ ja $\cos 0° = 1$.

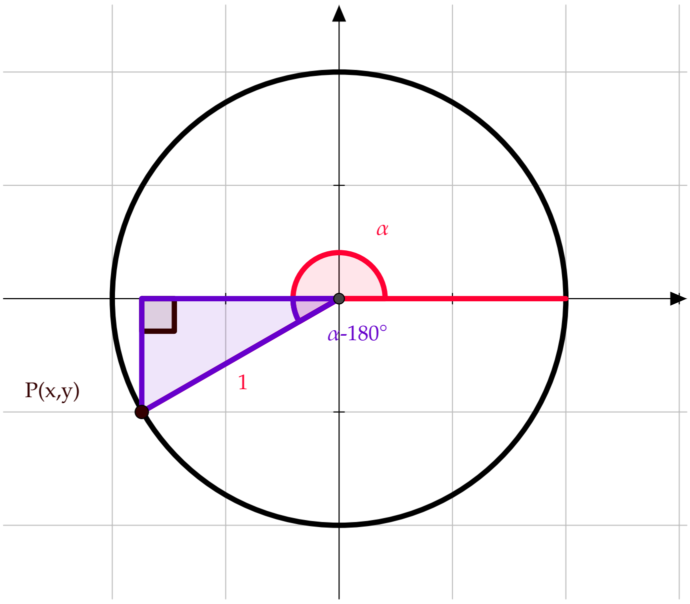
Pohdintatehtävä B.5

Tehtävä on syventävä. a)-kohdassa oppilaiden on tarkoitus yhdistää sinin ja kosinin suorakulmaisten kolmion ja yksikköympyrän avulla lausutut määritelmät. Oppilaita kannattaa ohjeistaa piirtämään kuvia joko käsin tai GeoGebralla pohdinnan tueksi. Kuvia piirrettäessä kannattaa pitää kiinni siitä, että suorakulmaisen kolmion kanta sijaitsee joka neljänneksessä x-akselilla, jolloin on helpompi huomata kulman palauttaminen ensimmäiseen neljännekseen. Opettaja voi esittää oppilaille tehtävän teon aikana lisäkysymyksiä, kuten "Missä suorakulmaisen kolmion kanta sijaitsi ensimmäisessä neljänneksessä? Entä missä se sijaitsee muissa neljänneksissä?", "Mitä arvoja kulman sini ja kosini saa kussakin neljänneksessä? Mitä arvoja kolmion korkeus ja kanta voi tällöin saada?" ja "Voiko hypotenuusan pituus olla negatiivinen? Miksi?".

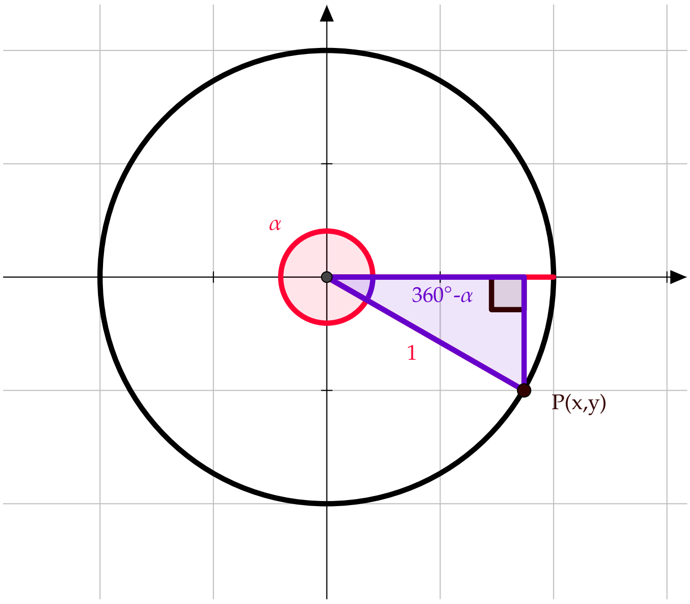
Alla oleva kuva esittää suorakulmaista kolmiota toisessa neljänneksessä.



Oppilaiden olisi tarkoitus huomata, että suorakulmaisen kolmion kärki on terävä, ja se on kulman α suplementtikulma. Toiseen neljännekseen syntyvät kolmiot ovat siis ensimmäisen neljänneksen kolmioiden peilikuvia. Kulman sini ja kosini voidaan siten laskea kuten ensimmäisessä neljänneksessä suplementtikulman avulla. Nyt pitää vain huomata, että kolmion kannan pituus saa negatiivisia arvoja.



Yksikköympyrän kolmannessa neljänneksessä kolmio on ensimmäisen neljänneksen kolmioihin nähden kääntynyt ja peilikuva. Kulman α sini ja kosini voidaan jälleen laskea kuten ensimmäisessä neljänneksessä kulman $\alpha - 180°$ avulla. Oppilaiden olisi tärkeää huomata, että kolmion kanta ja korkeus saavat tässä neljänneksessä vain negatiivisia arvoja.



Yksikköympyrän neljännessä neljänneksessä kolmiot ovat kääntyneet ensimmäisen neljänneksen kolmioihin nähden. Jälleen kulman α sini ja kosini voidaan laskea kuten ensimmäisessä neljänneksessä kulman $360° - \alpha$ avulla. Tässä neljänneksessä kolmion korkeus saa negatiivisia arvoja, mutta kanta saa positiivisia.

b)-kohdan päättelyssä tarvitaan a)-kohdan tulosta. Oppilaita voi ohjeistaa miettimään, minkälainen kolmio pitäisi yksikköympyrään muodostua jotta sinin ja kosinin arvo voisi olla suurempi kuin yksi. Opettaja voi kysyä apukysymyksiä, kuten "Kuinka pitkä täytyy kolmion korkeus olla hypotenuusaan nähden jotta niiden suhde olisi suurempi kuin yksi? Entä kolmion kanta?". Tarkoituksena olisi ymmärtää, että kolmion korkeuden ja kannan tulisi olla pidempiä kuin hypotenuusa jotta kulman sini tai kosini voisivat olla yli yksi. Tämä ei tietenkään ole mahdollista.

c)-kohdan tehtävän tarkoituksena on havahduttaa oppilaat miettimään yksikköympyrän avulla lausutun määritelmän rajoituksia ja edellytyksiä. Opettaja voi esittää oppilaille lisäkysymyksiä, kuten "Mitä tietoja kulman sinin ja kosinin määritelmässä yksikköympyrässä luetellaan? Mitä ehtoja määritelmässä on?", "Jos ympyrän säde olisi suurempi kuin yksi, olisiko se ristiriidassa määritelmän kanssa?" ja "Olisiko kuitenkin mahdollista määritellä kulman sini ja kosini ympyrässä, jonka säde olisi esimerkiksi 2?".

d)-kohta testaa puhtaasti sinin ja kosinin määritelmän ymmärtämistä. Tehtävää voi halutessaan laajentaa koskemaan myös muitakin kuin origokeskisiä ympyröitä. Oppilaiden pitäisi miettiä mahdollisimman tarkasti mitä tietoja määritelmässä pitäisi olla jotta se toimisi. Opettaja voi auttaa oppilaita esittämällä kysymyksiä kuten "Onko välttämätöntä, että kulman kärki aina origossa?", "Voiko kulman kylkien pituudet olla suurempia tai pienempiä kuin ympyrän säde?" ja "Onko väliä missä kohtaa ympyrää kulman oikea kylki sijaitsee?"

Esimerkki määritelmästä:

Olkoon ympyrän säde r ja keskipiste origossa. Sijoitetaan kulman α oikea kylki positiiviselle x-akselille ja kärki origoon. Olkoon kulman vasemman kyljen ja ympyrän kehän leikkauspiste kehäpiste P. Tällöin kulman α sini ja kosini ovat

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

missä x,y ovat pisteen P koordinaatit.

4.4 Sinilause

Kappaleen keskeiset sisällöt ja tavoitteet:

- Sinilause.

Kappaleen keskeisinä tavoitteina on, että oppilas

- tutkii eri kolmioiden ominaisuuksia ja osaa tehdä niihin perustuvia päätelmiä.
- oppii soveltamaan sinilausetta.
- tunnistaa sinilauseen käytön rajoitukset.
- osaa perustella miksi sinilauseen avulla saatu ratkaisu ei ole aina yksikäsitteinen.
- kykenee todistamaan sinilauseen.
- osaa yhdistää oppimansa aiemmin oppittuun tietoon.

Pohdintatehtävä C.1

Tehtävä johdattelee oppilaat löytämään sinilauseen tutkimalla suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia. Oppilaiden olisi tarkoitus myös tutkia muita kolmioita. Tutkimisessa voidaan käyttää apuna joko käsin piirrettyjä kolmioita tai esimerkiksi GeoGebraa. Tehtävää voi myös helposti laajentaa vaatimalla havaintojen koostamista matemaattiseksi lauseeksi. Lisäksi oppilaat voivat tehdä **Pohdintatehtävän C.5** todistuksen myös tässä kohtaa ennen varsinaisen sinilauseen esittelyä. Tehtävästä saa haastavamman, jos vihje todistuksen yhteydestä kolmion pinta-alan yhtälöön jätetään antamatta.

a)-kohdan tarkoituksena on siis muodostaa kulmien α ja β sinien lausekkeet, ja ratkaista niistä hypotenuusan pituus c. Eli $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\sin\beta = \frac{b}{c}$, joista saadaan että $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Opettaja voi tässä vaiheessa pyytää oppilaita sanallisesti selittämään mitä tämä tarkoittaa. Vastuksen pitäisi siis kuulua jotenkin näin: suorakulmaisessa kolmiossa kateettien pituuksien ja vastakkaisten kulmien sinien suhde on vakio.

b)-kohdassa opettaja voi avata kysymystä lisää apukysymyksellä "Onko suorakulmaisessa kolmiossa kaikkien sivujen ja niiden vastakkaisten kulmien sinien suhde vakio?".

c)-kohdassa pitää siis tutkia onko kaikissa kolmioissa sivun ja sen vastakkaisen kulman sinin suhde vakio.

Pohdintatehtävä C.3

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella sinilauseen käyttöä.

Ratkaisu

Vasemmanpuoleisessa kolmiossa $x \approx 3{,}87$ ja oikeanpuoleisessa $x \approx 44{,}71°$.

Pohdintatehtävä C.4

a)-kohdassa oppilaiden olisi tarkoitus huomata, että jos kolmiosta tiedetään kaksi sivua ja jomman kumman sivun vastainen kulma, voi ratkaisuna olla kaksi erilaista kolmiota. Tällainen tilanne syntyy, jos kulman vastainen sivu on kolmion pisin sivu. Tehtävän ratkaisussa visualisointi on isossa roolissa, jolloin ratkaisussa voi käyttää apuna GeoGebraa. Jos tehtävän ratkaisu tuntuu oppilaista vaikealta, heidät voi ohjata tekemään tehtävät b) ja c) ensin. Samalla heille voi esittää apukysymyksiä: "Voisiko tehtävän ratkaisussa jokin kulman suuruus tai sivun pituus olla eri? Miksi?", "Mitä tietoja sinulle on tehtävän alussa kolmiosta annettu? Mitä ei?", "Ovatko tehtävänannossa annetut kulmat ja sivun pituudet kolmion suurimpia tai pienimpiä?", ja "Muuttuisiko tilanne, jos tehtävänannossa kerrottaisiin kolmion pisimmän sivun pituuden sijaan kolmion lyhimmän sivun pituus? Entä vastaava kulmissa?".

b)- ja c)-kohdassa harjoitellaan sinilauseen käyttöä sanallisissa tehtävissä. Lisäksi c)-kohdassa vastaus ei ole yksikäsitteinen.

Ratkaisu

b) Sivujen pituudet ovat noin 2,8 ja 1,6.

c) Kahden muun kulman suuruudet ovat 70,5° ja 64,5° ja kolmannen sivun pituus on 7,7 cm, tai 109,5° ja 25,5° jolloin kolmannen sivun pituus on 3,7 cm.

Pohdintatehtävä C.5

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella matemaattista todistamista.

Ratkaisu

Kirjoitetaan kolmion pinta-alan yhtälö jokaiselle kulmalle, jolloin saadaan kulmasta γ katsoen $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Kulmasta β katsoen $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. Kulmasta α katsoen $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Koska kyseessä on yksi sama kolmio, täytyy edellä lasketut pinta-alat olla yhtä suuret. Näin ollen

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad | \cdot \frac{2}{abc}$$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a},$$

mikä on sama asia kuin

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

4.5 Kosinilause

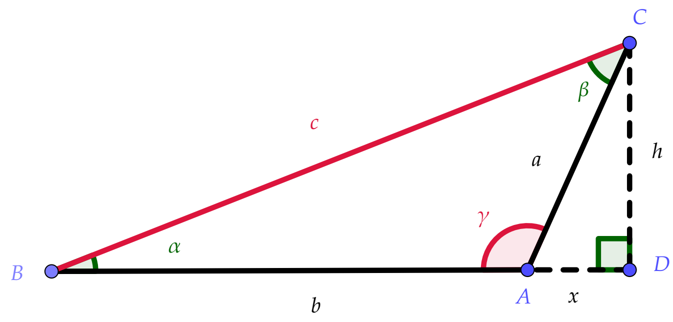
Kappaleen keskeiset sisällöt ja tavoitteet:

- Kosinilause.

Kappaleen keskeisinä tavoitteina on, että oppilas

- oppii soveltamaan kosinilausetta,
- näkee kosinilauseen kolmioiden ominaisuuksista johtuvana seurauksena,
- osaa todistaa kosinilauseen Pythagoraan lauseen avulla,
- osaa yhdistää oppimansa aiemmin oppittuun tietoon.

Pohdintatehtävä D.2
Tehtävän tarkoituksena on harjoitella kosinilauseen käyttöä.
Ratkaisu
Vasemmanpuoleisessa kolmiossa $x \approx 5{,}39$ ja oikeanpuoleisessa $x \approx 45{,}86°$.
Pohdintatehtävä D.3
Tehtävän tarkoituksena on harjoitella matemaattista todistamista.
Ratkaisu



Kirjoitetaan kolmiolla BCD Pythagoraan lause

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b+x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2. \end{aligned}$$

Kolmiosta ACD saadaan Pythagoraan lauseen perusteella $a^2 = h^2 + x^2$, jolloin $h^2 = a^2 - x^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2bx. \end{aligned}$$

Kulman γ vieruskulman suplementtikulman suuruus on $180^\circ - \gamma$. Kolmiossa ACD kulman $180^\circ - \gamma$ kosini on $\cos(180^\circ - \gamma) = \frac{x}{a}$ eli $x = a\cos(180^\circ - \gamma)$. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2bx \\ &= a^2 + b^2 + 2ba\cos(180^\circ - \gamma). \end{aligned}$$

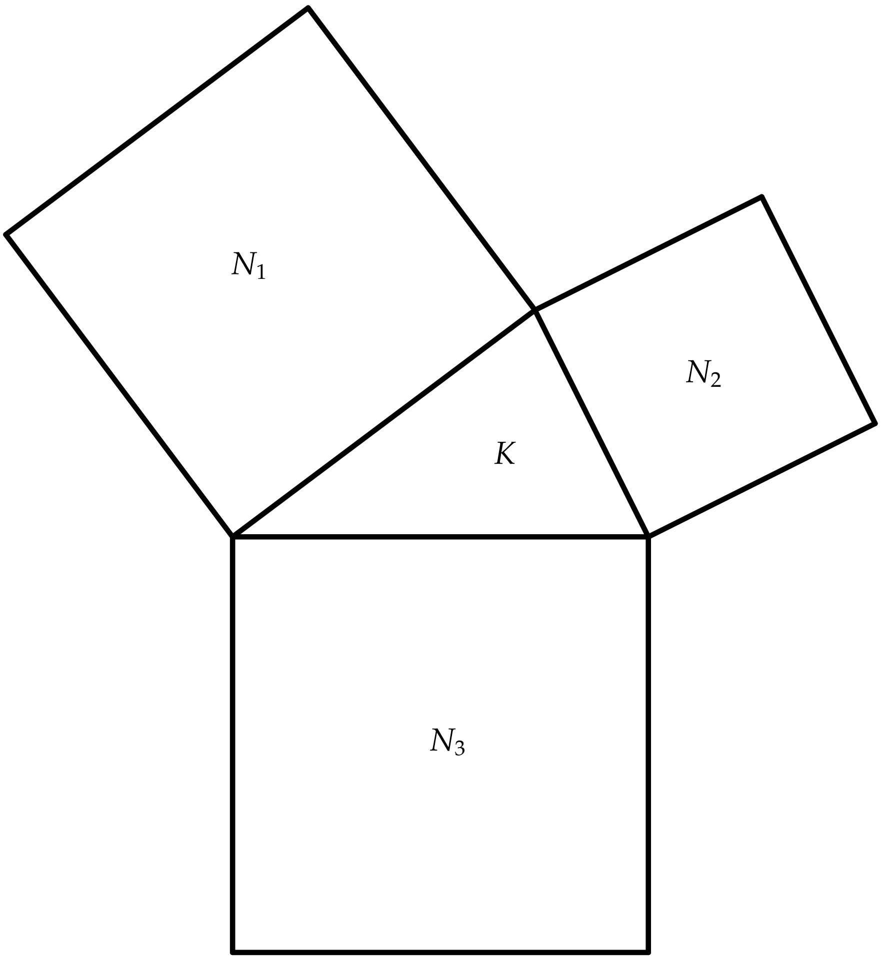
Nyt $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$, jolloin

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ba\cos(180^\circ - \gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma. \end{aligned}$$

4.6 Vaikeimpien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 4

Alla oleva kuva on suuntaa-antava tehtävän tilanteesta.



Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Olkoon neliöiden N_1 ja N_2 välinen mittakaava k_{12} ja neliöiden N_2 ja N_3 välinen mittakaava k_{23}. Tällöin

$$k_{12}^2 = \frac{N_1}{N_2} = \frac{9}{2}$$
$$k_{12} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$k_{23}^2 = \frac{N_2}{N_3} = \frac{2}{11}$$
$$k_{23} = \sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Eli neliön N_1 sivun pituus on $3a$, neliön N_2 sivun pituus on $\sqrt{2}a$ ja neliön N_3 sivun pituus on $\sqrt{11}a$. Nämä ovat myös kolmion K sivujen pituudet. Jos kolmio K on suorakulmainen, sille pätee Pythagoraan lause:

$$(\sqrt{11}a)^2 = (3a)^2 + (\sqrt{2}a)^2$$
$$11a^2 = 9a^2 + 2a^2 = 11a^2,$$

eli kolmio on suorakulmainen. Näin ollen kolmion pinta-ala on

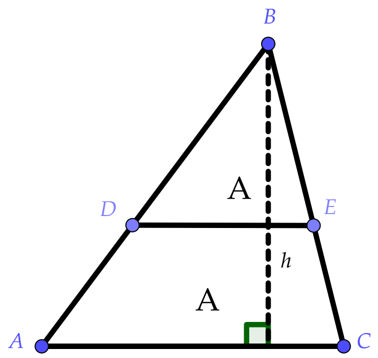
$$A = \frac{3a \cdot \sqrt{2}a}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}a^2}{2},$$

jolloin kolmion pinta-alan ja neliön N_2 pinta-alojen suhde on

$$\frac{3 \cdot \sqrt{2}a^2}{2} : 2a^2 = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}.$$

Tehtävä 5

Alla oleva kuva havainnollistaa tehtävän lähtötilannetta.



Koska AC on samansuuntainen janan DE kanssa, ovat kolmioiden vastinkulmat samansuuruisia. Täten kolmio ABC on yhdenmuotoinen kolmion DBE kanssa. Lasketaan kolmioiden välinen mittakaava:

$$k^2 = \frac{2A}{A} = \frac{1}{2}$$

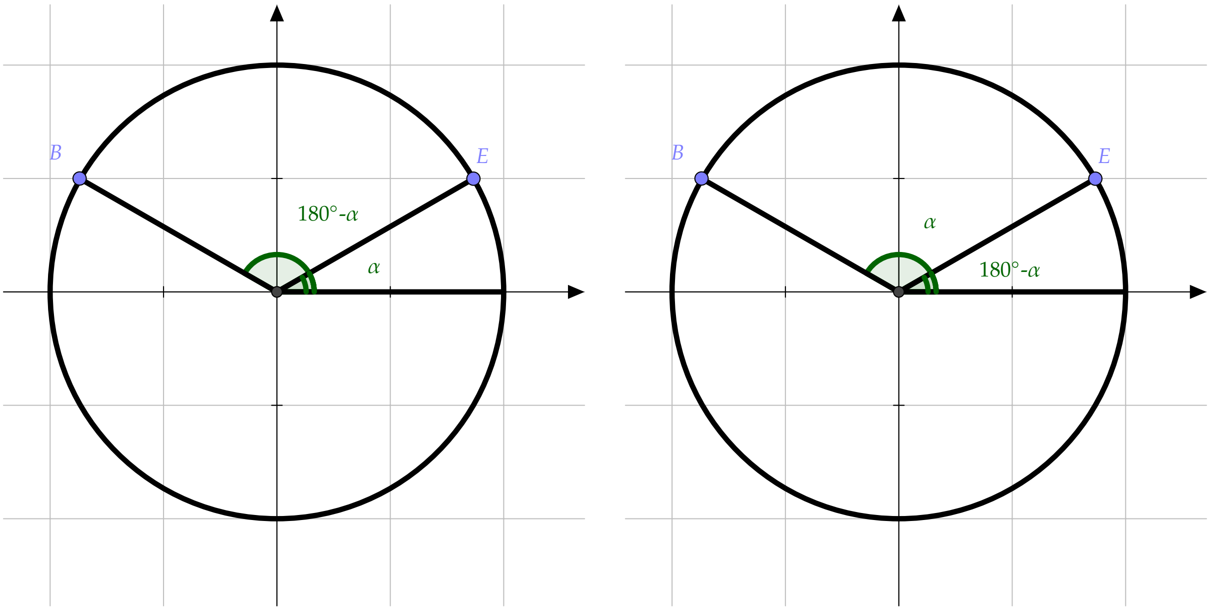
$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tämä siis tarkoittaa, että kolmion ABC korkeus on $a\sqrt{2}$ ja kolmion DBE korkeus a, missä $a \in \mathbb{R}$. Näin ollen korkeusjanan ylemmän osan pituus on a ja alemman osan pituus $a\sqrt{2} - a$, jolloin korkeus jana DE jakaa kolmion korkeusjanan suhteessa

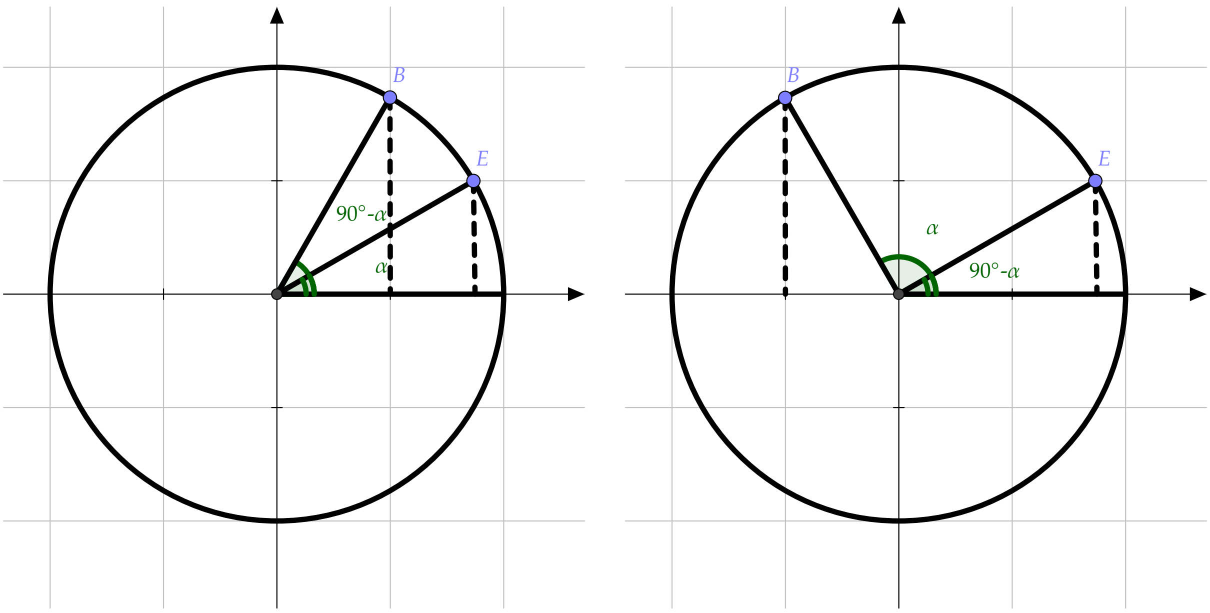
$$\frac{a}{a\sqrt{2} - a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Tehtävä 8

Alla olevat kuvat havainnollistavat a) ja b)-kohdan tilanteita. Oikeanpuoleisessa kuvassa esitetään kulmat α ja $180° - \alpha$ kun $\alpha \in [0{,}90°]$ ja vasemmanpuoleinen tilannetta, missä $\alpha \in [180°{,}90]$. Yksikköympyrän avulla on helppo todeta, että suplementtikulmat ovat toistensa peilikuvia y-akselin suhteen kun $\alpha \in [180°{,}90°]$. Siten symmetrian perusteella $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ ja $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Saman asian voisi myös todeta suorakulmaisten kolmioiden avulla.



Alla olevat kuvat havainnollistavat c)-kohdan tilannetta. Oikeanpuoleinen kuva esittää kulmia α ja $90° - \alpha$ tilanteessa, missä $\alpha \in [180°{,}90°]$ ja vasemmanpuolimmainen tilannetta $\alpha \in [90°{,}0°]$. Yksikköympyrän avulla nähdään, että syntyvät suorakulmaiset kolmiot ovat yhteneviä, mutta kääntyneitä. Asia voidaan todeta myös laskemalla kolmioiden kulmien summa kussakin kolmiossa, jotka ovat väistämättä samat.



Näin ollen olkoon lyhyemmän kateetin pituus a ja pidemmän b. Tällöin $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$. Eli $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Tehtävä 9

Tehtävässä oleellisinta on miettiä kulmia ja kolmioita yksikköympyrässä ja huomata väitteen ja Pythagoraan lauseen samankaltaisuus.

Olkoon a ja b yksikköympyrään muodostuvam suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ja c hypotenuusan pituus. Jos α on 0°, 90° tai 270°, niin

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 0 = 1.$$

Jos α on terävä kulma, niin suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla saadaan, että

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Pythagoraan lauseen perusteella $\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$.

Jos kulma α sijaitsi yksikköympyrän toisessa, kolmannessa tai neljännessä neljänneksessä, pystyi kulman sinin ja kosinin laskemisen palauttamaan ensimmäiseen neljännekseen. Tällöin joko kulman α vieruskulma on terävä, tai kulmat $\alpha - 180°$ ja $360° - \alpha$ ovat teräviä. Tällöin suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusteella saadaan

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

missä kulma β on terävä ja on joko kulman α vieruskulma tai jompi kumpi kulmista $\alpha - 180°$ tai $360° - \alpha$ riippuen siitä, missä neljänneksessä α sijaitsee. Täten Pythagoraan lauseen perusteella $\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$.

Tehtävä 17

Tehtävässä oleellisinta on muistaa nelikulmion kulmien summien olevan 360°. Alla oleva kuva on suuntaa-antava kuva tilanteesta.

Neljännen kulman suuruus on siis $360° - 70° - 110° - 125° = 55°$.

Kosinilauseella saadaan kuvassa olevan lävistäjän pituus d:

$$d^2 = 120^2 + 88^2 - 120 \cdot 88 \cdot \cos 125° = 34257{,}934$$
$$d = 185{,}0889903 \approx 185{,}1.$$

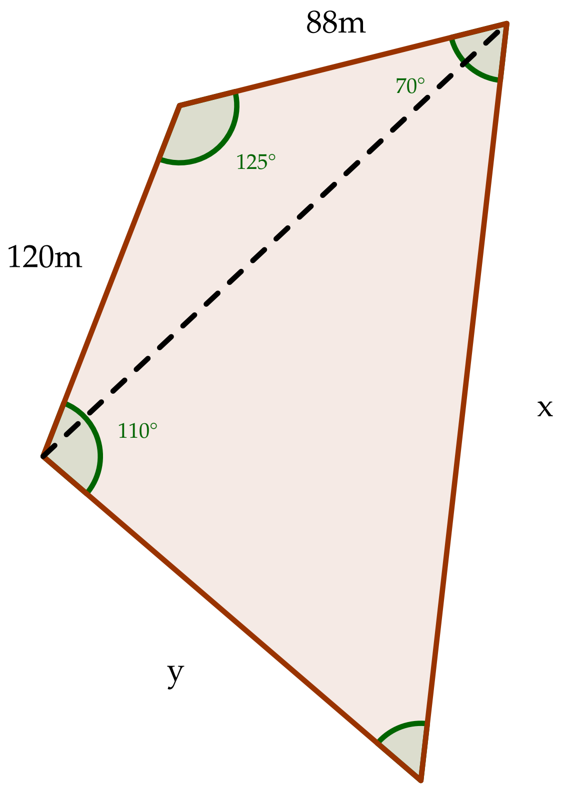
Lävistäjä jakaa kulman 70° kahtia. Sinilauseella saadaan toisen osan suuruudeksi

$$\frac{\sin \beta}{120} = \frac{\sin 125°}{185{,}1}$$
$$\beta = 32{,}07889° \approx 32{,}1°,$$

jolloin toisen osan suuruus on $70° - 32{,}1° = 37{,}92111° \approx 37{,}9°$. Lävistäjä jakaa myös kulman 125° kahteen osaa:

$$\frac{\sin\alpha}{88} = \frac{\sin 125^\circ}{185{,}1}$$
$$\beta = 22{,}92111^\circ \approx 22{,}9^\circ,$$

jolloin toisen osan suuruus on $110^\circ - 22{,}9^\circ = 87{,}07889^\circ \approx 87{,}1^\circ$.



Nyt voidaan tuntemattomat sivujen pituudet ratkaista sinilauseen avulla:

$$\frac{x}{\sin 87{,}1^\circ} = \frac{185{,}1}{\sin 55^\circ}$$

$$x \approx 225{,}7$$

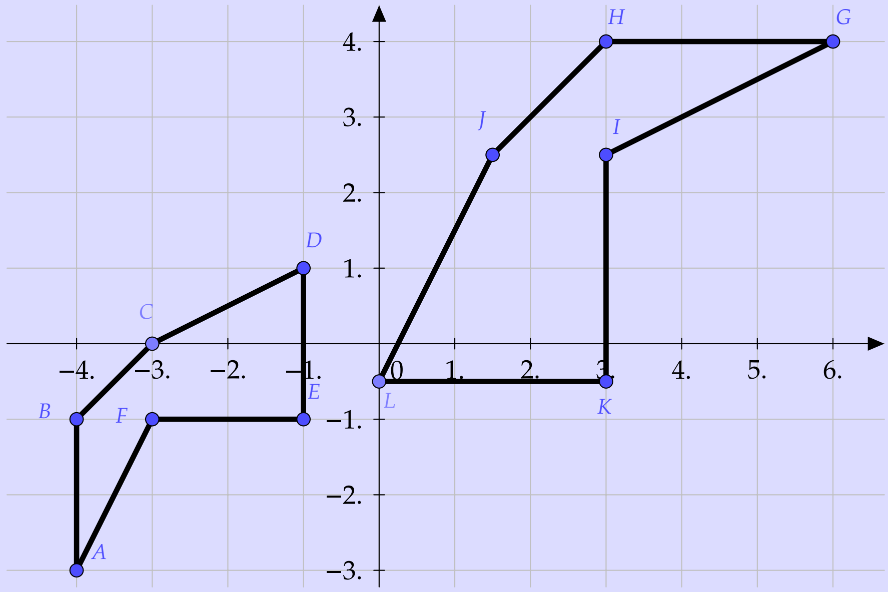
$$\frac{y}{\sin 37{,}9^\circ} = \frac{185{,}1}{\sin 55^\circ}$$

$$y \approx 138{,}9$$

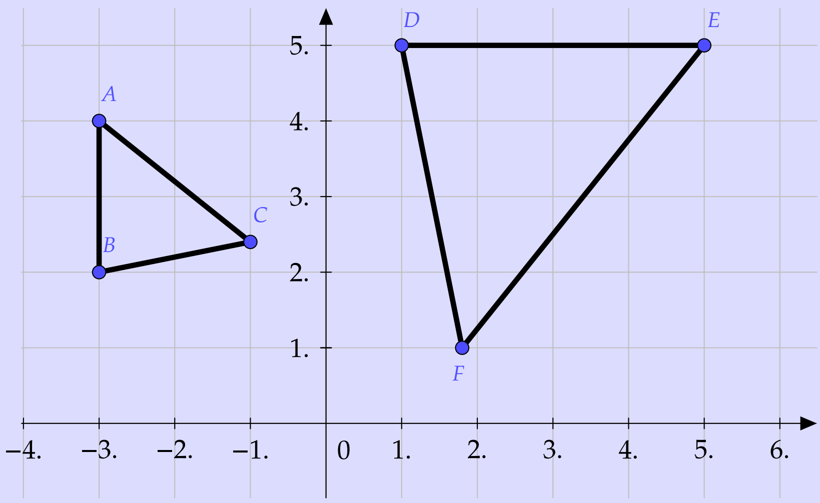
Eli neljännen kulman suuruus on 55° ja puuttuvien sivujen pituudet 225,7 m ja 138,9 m.

A Mittakaava

Pohdinta A.1 Alla olevat kuviot ovat yhdenmuotoiset. Määritä kuvioiden vastinosat ja laske niiden väliset suhteet.

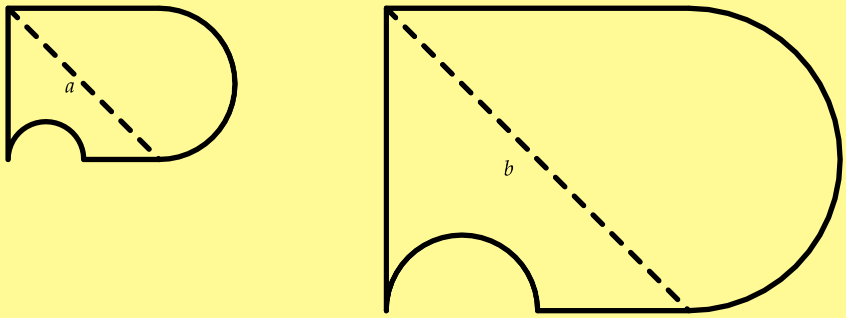


a)



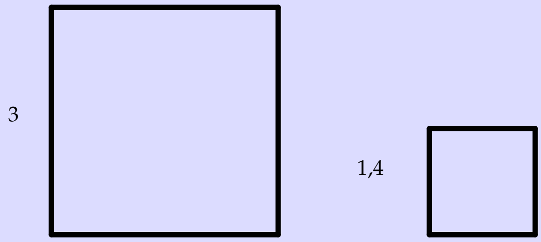
b)

Määritelmä: Yhdenmuotoisten kappaleiden vastinosien pituuksien a ja b suhdetta kutsutaan *yhdenmuotoisuussuhteeksi* eli *mittakaavaksi* k.

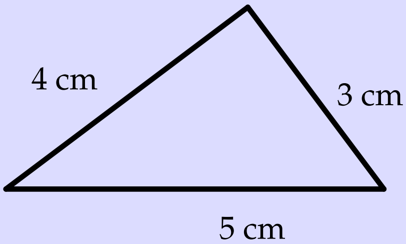


$$k = \frac{a}{b}$$

Pohdinta A.2 a) Neliöt ovat yhdenmuotoisia. Määritä mittakaava.



b) Tee alla olevasta kolmiosta suurennos mittakaavassa 3 : 2. Mitä yhteistä alkuperäisellä kolmiolla ja sen suurennoksella on?



Pohdinta A.3 Tutki alla olevaa tehtävää ja sen ratkaisua. Mitä virheitä ratkaisun päättelyssä on tehty? Korjaa tehtävän ratkaisu.

Tehtävä

Suorakulmion mitat ovat 2 cm ja 4 cm. Suorakulmiosta tehdään suurennos kasvattamalla pisimmän sivun pituutta 1 cm.

a) Mikä on lyhyemmän sivun pituus?

b) Mikä on suorakulmioiden pinta-alojen suhde?

Ratkaisu

a) Koska pidemmän sivun pituus kasvaa 1 cm, kasvaa myös lyhyemmän sivun pituus 1 cm, eli lyhyemmän sivun pituus on 3 cm.

b) Nyt mittakaava on $k = \frac{5}{4}$, jolloin myös pinta-alojen suhde on $\frac{5}{4}$.

Pohdinta A.4 Tutki kuinka monta prosenttia neliön ja suorakulmaisen kolmion pinta-alat muuttuvat, kun kaikkien sivujen pituudet

a) kaksinkertaistuvat

b) kolminkertaistuvat

c) puolittuvat?

Mikä yhteys on mittakaavalla ja pinta-alojen suhteella?

Pohdinta A.5 Tutki kuinka monta prosenttia kuution ja suorakulmaisen särmion tilavuudet muuttuvat, kun kaikkien sivujen pituudet

a) kaksinkertaistuvat

b) kolminkertaistuvat

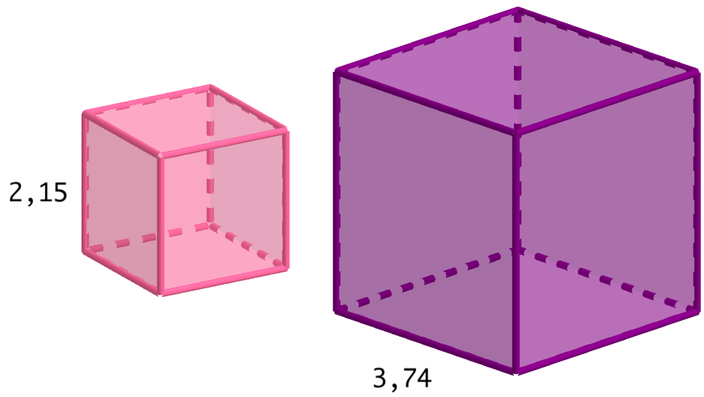
c) puolittuvat?

Mikä yhteys on mittakaavalla ja tilavuuksien suhteella?

Pohdintatehtävien tulokset pätevät kaikille yhdenmuotoisille kuvioille ja kappaleille. Todistus perustuu pinta-alan ja tilavuuden määritelmään. Kaikki kuviot voidaan täyttää äärimmäisen tarkasti neliöillä ja vastaavasti kaikki kappaleet voidaan täyttää äärimmäisen tarkasti kuutioilla. Näin pinta-aloja ja tilavuuksia voidaan verrata, jolloin saadaan sama tulos kuin pohdintatehtävissä.

Tehtäviä

1. Alla olevat kuutiot ovat yhdenmuotoisia



a) Laske mittakaava.

b) Laske pinta-alojen suhde.

c) Laske tahkojen piirien suhde.

d) Laske tilavuuksien suhde.

2. Kuutio pienennetään toiseksi kuutioksi siten, että sen pinta-ala pienenee 36%. Kuinka monta prosenttia tilavuus pienenee? [S04/3]

3. Maastokartan mittakaava on 1 : 200000, eli 1 cm kartalla vastaa luonnossa 200000 cm.

a) Kartalla luontopolun pituudeksi mitataan 5,3 cm. Kuinka pitkä luontopolku todellisuudessa on?

b) Kartasta otetaan kopio siten, että se suurenee A4 kokoisesta arkista kokoon A3. Yhdenmuotoisten arkkien A4 ja A3 pinta-alojen suhde on 50 : 100. Mikä on arkkien mittakaava?

c) Kuinka pitkä luontopolku on A3 kokoisella kartalla?

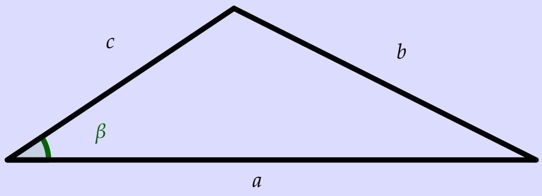
d) Suurennoksen jälkeen A3 kokoisen kartan nurkassa lukee edelleen mittakaavan olevan 1 : 200000. Kuinka pitkä luontopolku on luonnossa tämän kartan mukaan?

4. Neliöiden N_1, N_2 ja N_3 pinta-alojen suhde on $9 : 2 : 11$. Kolmion K yhtenä sivuna on neliön N_1 sivu, toisena sivuna neliön N_2 sivun ja kolmantena sivuna neliön N_3 sivu. Laske kolmion K ja neliön N_2 pinta-alojen suhteen tarkka arvo.[K17/12]

5. Kolmion kannan suuntainen suora jakaa kolmion pinta-alan kahteen yhtä suureen osaan. Missä suhteessa suora jakaa kolmion korkeusjanan?

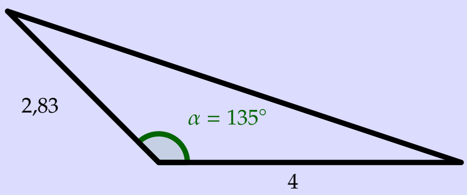
B Yksikköympyrä

Pohdinta B.1 Esitä kolmion pinta-alan yhtälö kulman β avulla.



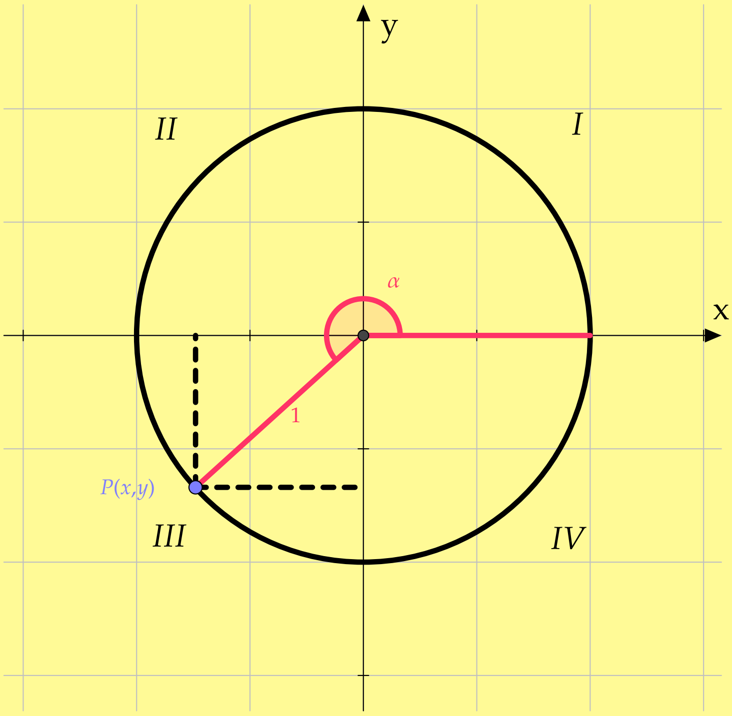
Pohdinta B.2 a) Määritä ilman laskinta $\sin 135°$.

b) Kirjoita alla olevalle kolmiolle pinta-alan yhtälö kahdella eri tavalla; ratkaisemalla ensin kolmion korkeus h ja sijoittamalla se kolmion pinta-alan lausekkeeseen $A = \frac{ah}{2}$, sekä käyttämällä edellisessä pohdinnassa johtamaasi kaavaa. Vertaile saamiasi tuloksia.



Tähän mennessä kulman sini ja kosini on määritelty suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteena. Tällöin sini ja kosini voidaan kuitenkin määritellä vain kulmille $0° < \alpha < 90°$. Seuraavaksi laajennetaan sinin ja kosinin määritelmää myös muille kulmille *yksikköympyrän* avulla.

Määritelmä: Yksikköympyrä on koordinaatistossa sijaitseva ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde 1. Suorakulmainen koordinaatisto jakaa ympyrän neljään neljännekkseen, jotka nimetään vastapäivään kiertäen roomalaisilla numeroilla $I - IV$.



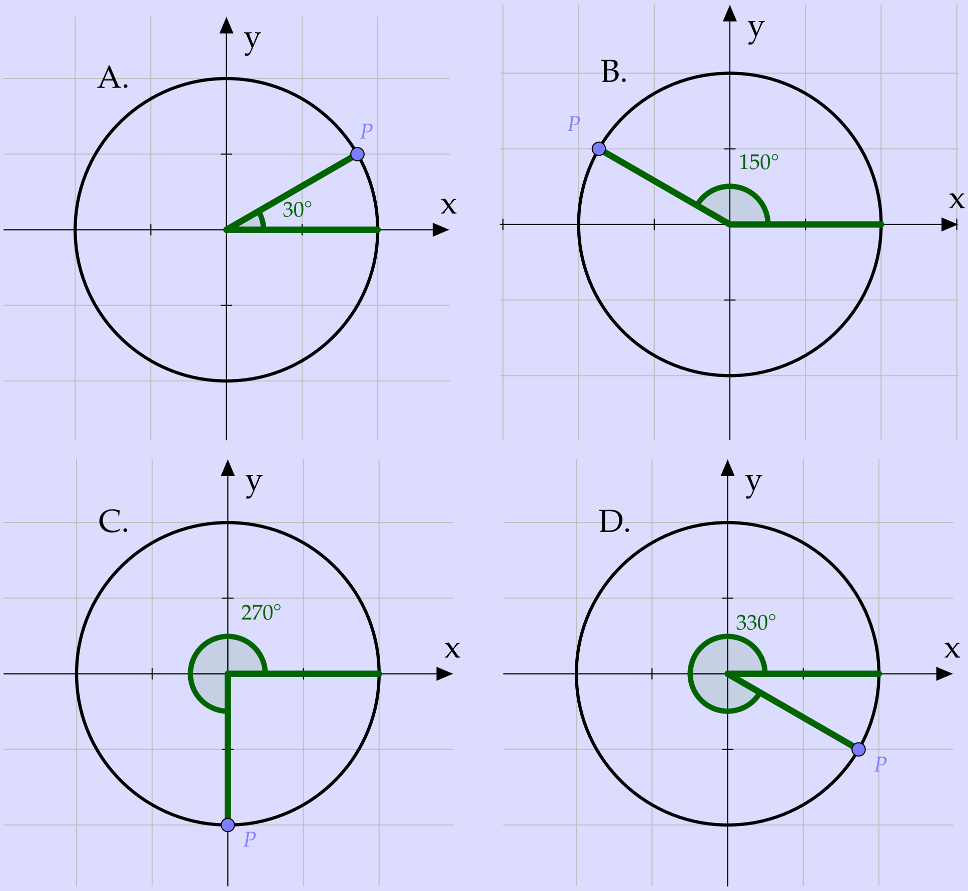
Kulma α sijoitetaan ympyrään siten, että kulman kärki sijaitsee origossa ja oikea kylki positiivisella x-akselilla. Vasemman kyljen ja yksikköympyrän kehän leikkauspistettä kutsutaan kehäpisteeksi P.

Kulman α *sini* ja *kosini* ovat

$$\sin\alpha = y$$
$$\cos\alpha = x,$$

missä x ja y ovat kehäpisteen P koordinaatit.

Pohdinta B.3 Alla on esitettynä neljä kulmaa yksikköympyröissä A, B, C ja D.



a) Arvioi graafisesti kulmien sini ja kosini arvot yhden desimaalin tarkkuudella.

b) Millä neljästä kulmasta on suurin sinin arvo? Entä millä on suurin kosinin arvo?

c) Missä neljänneksessä sini saa positiivisia arvoja? Entä negatiivisia?

d) Missä neljänneksessä kosini saa positiivia arvoja? Entä negatiivisia?

Pohdinta B.4 Määritä seuraavien sinien ja kosinien arvot mahdollisimman tarkasti yksikköympyrän ja kolmioviivaimen avulla.

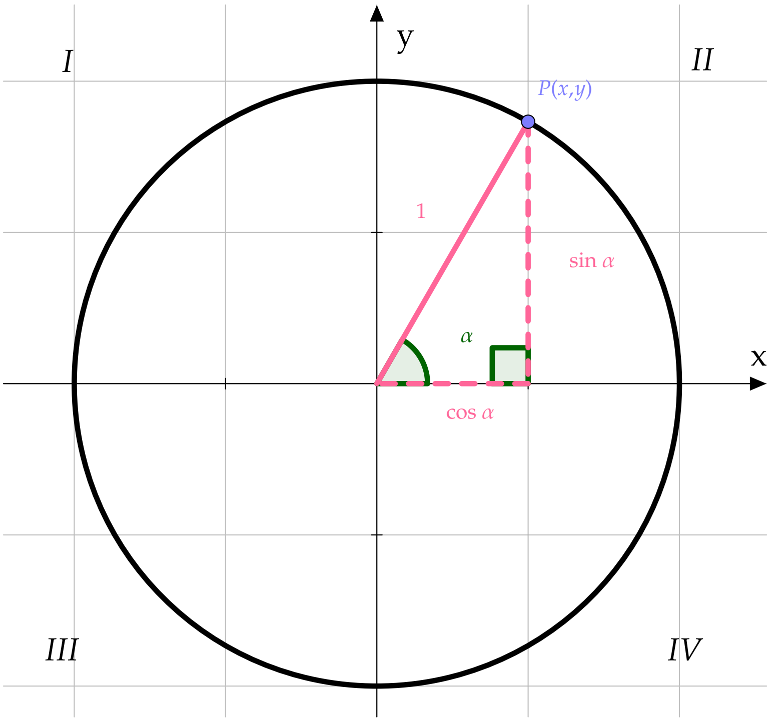
a) $\sin 90°$ ja $\cos 90°$

b) $\sin 45°$ ja $\cos 45°$

c) $\sin 260°$ ja $\cos 260°$

d) $\sin 0°$ ja $\cos 0°$

Suorakulmaisen kolmion trigonometria on yksikköympyrän ensimmäisen neljänneksen trigonometriaa.



Kun suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituudeksi valitaan yksi, voidaan kolmio piirtää yksikköympyrään siten, että kolmion yksi kärki sijaiseen origossa ja toinen ympyrän kehällä pisteessä $P(x,y)$. Suorakulma sijoitetaan positiiviselle x-akselille, jolloin hypotenuusan pituus on ympyrän säteen pituus. Kulman α sini ja kosini voidaan tällöin laskea tuttuna kateettien ja hypotenuusan suhteena:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x,$$

missä y on pisteen P y-koordinaatti eli suorakulmaisen kolmion korkeus ja x on pisteen P x-koordinaatti eli suorakulmaisen kolmion kanta. Sinin ja kosinin aiempi määritelmä suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan suhteina ei siis ole oma erikseen muistettava määritelmänsä, vaan *on osa* yksikköympyrän trigonometriaa. Suorakulmaisen kolmion trigonometria päätyy siis samaan kosinin ja sinin määritelmään kuin yksikköympyrässä.

Pohdinta B.5 a) Miten voit määritellä sinin ja kosinin arvot suorakulmaisen kolmion avulla yksikköympyrän toisessa, kolmannessa ja neljännessä neljänneksessä?

b) Voiko $\sin\alpha > 1$? Entä $\cos\alpha > 1$? Miksi?

c) Onko sinin ja kosinin määritelmän kannalta väliä ympyrän koolla? Voiko sinin ja kosinin arvo olla suurempi kuin yksi, jos yksikköympyrän säde olisi esimerkiksi 2?

d) Laadi sinille ja kosinille sellainen määritelmä, joka pätee kaiken kokoisille origokeskisille ympyröille.

Tehtäviä

6. Kumman arvo on suurempi,

a) $\sin 40^\circ$ vai $\sin 220^\circ$,

b) $\sin 170^\circ$ vai $\cos 170^\circ$,

c) $\sin 200^\circ$ vai $\cos 80^\circ$?

Perustele vastauksesi yksikköympyrän avulla.

7. a) Minkä kulman sini on $-0{,}8$?

b) Minkä kulman kosini on $0{,}8$?

8. Perustele seuraavat väitteet yksikköympyrän avulla:

Olkoon $\alpha, \beta \in [0^\circ, 180^\circ]$.

a) Kulman ja sitä vastaavan suplementtikulman kosinit ovat toistensa vastalukuja, eli

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha).$$

b) Kulman ja sitä vastaavan suplementtikulman sinit ovat yhtä suuret, eli

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

c) Kulman ja sitä vastaavan komplementtikulman sini ja kosini ovat yhtä suuret, eli

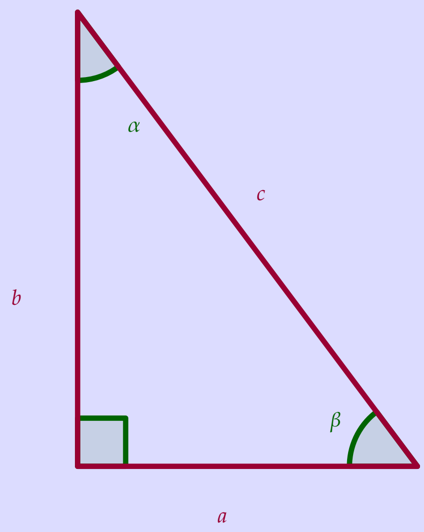
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha).$$

9. Osoita, että

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

C Sinilause

Pohdinta C.1 a) Ratkaise alla olevasta suorakulmaisesta kolmiosta hypotenuusan pituus c kahden eri kulman sinin avulla. Mitä huomaat? Voit tutkia havaintoasi myös sellaisilla suorakulmaisilla kolmioilla, joiden sivujen pituudet tiedät.

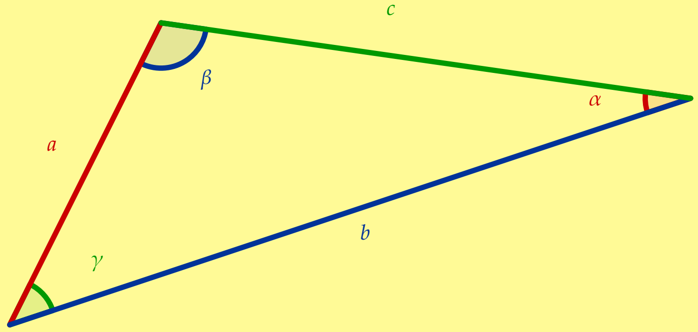


b) Päteekö havaintosi myös kolmannelle suorakulmaisen kolmion kulmalle?

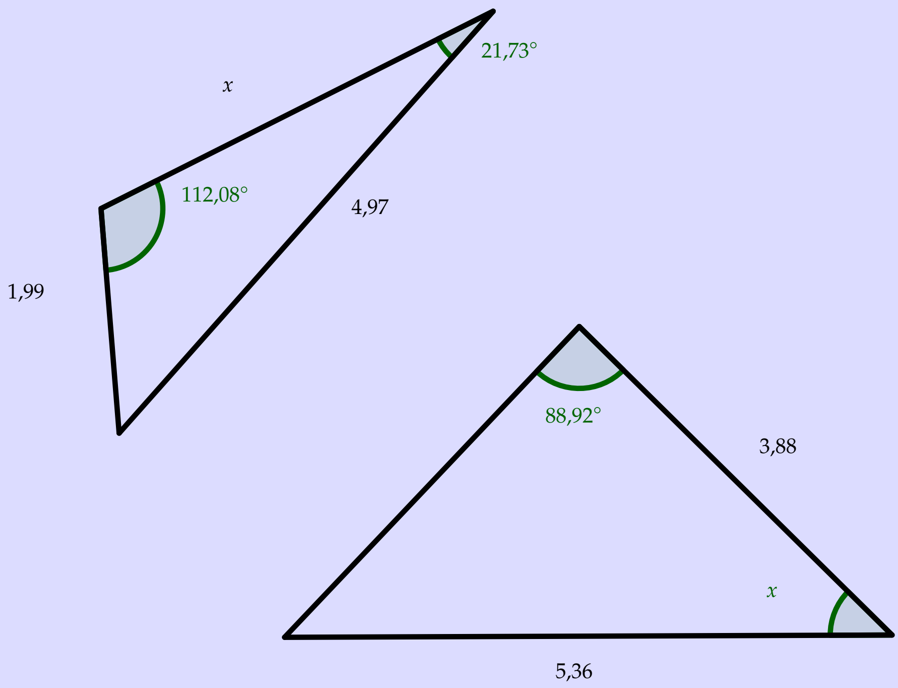
c) Tutki päteekö havaintosi myös joillekin muille kolmioille kuin suorakulmaisille kolmioille.

Lause C.2 (Sinilause) Kolmion sivun ja sen vastakkaisen kulman sinin suhde on vakio:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Pohdinta C.3 Ratkaise seuraavista kolmioista x.



Pohdinta C.4 a) Sinilauseella voidaan kätevästi ratkaista kolmion tuntemattomat kulmat ja sivujen pituudet, jos kolmiosta tunnetaan kulma ja sen vastaisen sivun pituus, sekä lisäksi jokin toisen kulman suuruus tai sivun pituus. Onko sinilauseen avulla saatava ratkaisu kuitenkaan aina yksikäsitteinen?

b) Kolmiossa yhden kulman suuruus on 45° ja toisen 100°. Pienemmän kulman vastaisen sivun pituus on 2. Piirrä kolmio. Mitkä ovat kahden muun sivun pituudet?

c) Kolmiossa yhden kulman suuruus on 45°. Tämän kyseisen kulman vastaisen sivun pituus on 6 cm ja viereisen sivun 8. Piirrä kolmio. Mitkä ovat kahden muun kulman suuruudet ja kolmannen sivun pituus?

Pohdinta C.5 Todista sinilause pohdinnassa B.1 johtamasi kolmion pinta-alan yhtälön avulla.

Tehtäviä

10. Kolmiossa ABC kulman B suuruus on 60°. Sivun BC pituus on 6,3 cm ja sivun AC 9,3 cm. Piirrä kolmio ja laske kulmien A ja C sekä sivun AB suuruus.

11. Järven rannalla on kaksi tähtäyspistettä A ja B, joiden välinen etäisyys on 1386 m. Vastarannalla on puu P. Suuntakehällä on mitattu kulmat $PAB = 37{,}4°$ ja $PBA = 53{,}9°$. Laske puun etäisyys pisteestä A. [K91/8]

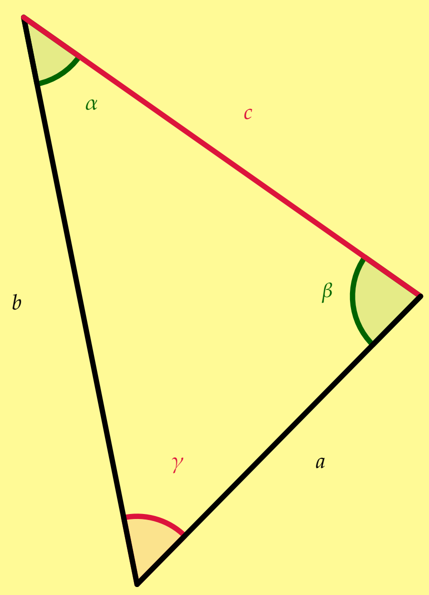
12. Vuoren huippu näkyy paikassa A olevasta laivasta suoraan etelässä 15° horisontin yläpuolella. Kun laiva siirtyy sellaiseen kohtaan B, että suunta AB muodostaa 70° kulman eteläsuunnan kanssa ja etäisyys $AB = 4{,}00$ km, näkyy huippu suoraan lounaassa. Laske huipun korkeus.[K87/7a]

13. Tasaisella maanpinnalla sijaitsevan tornin huippu näkyy eräästä paikasta katsottuna 3,5 asteen kulmassa vaakatasoon nähden. Tasan puoli kilometriä kauempaa katsottuna kulma on 2,5 astetta. Mikä on tornin korkeus, ja mitkä ovat katseluetäisyydet? [K00/4]

D Kosinilause

Seuraavaksi tutustutaan *laajennettuun Pythagoraan lauseeseen* eli *kosinilauseeseen*. *Sinilausetta* pystyttiin käyttämään kolmion ratkaisussa vain, jos tiedetään yksittäisen kulman/sivun lisäksi jokin kulma ja sen vastaisen sivun pituus. *Kosinilausetta* sen sijaan voidaan käyttää myös tilanteissa, joissa esimerkiksi kolmion kulmia ei tunneta, mutta sivujen pituudet tunnetaan.

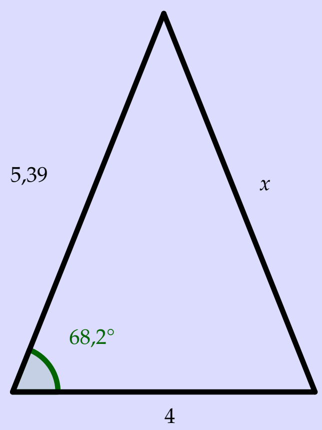
Lause D.1 (Kosinilause)

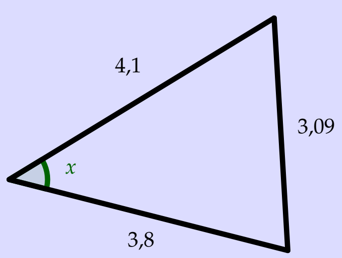


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

missä γ on sivun c *vastainen* kulma, ja a ja b kolmion muiden sivujen pituudet.

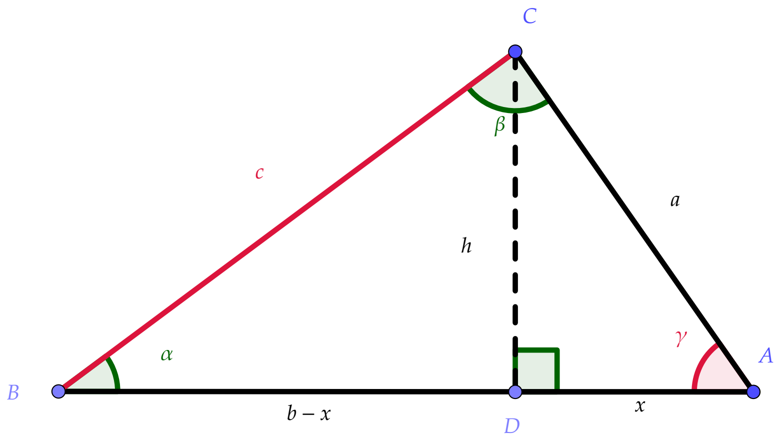
Pohdinta D.2 Ratkaise x.





Todistetaan seuraavaksi kosinilause teräväkulmaisille kolmioille.

Todistus. Tarkastellaan mielivaltaista kolmiota ABC, jossa kulma γ on terävä. Olkoon kolmion sivujen pituudet a, b ja c. Piirretään kolmioon korkeusjana CD, jolloin kanta jakautuu osiin x ja $b - x$.



Pythagoraan lauseen perusteella kolmiosta BDC saadaan

$$\begin{aligned} c^2 &= (b-x)^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2bx + x^2 + h^2. \end{aligned}$$

Sovelletaan Pythagoraan lausetta myös kolmioon ACD, jolloin $a^2 = x^2 + h^2$, eli

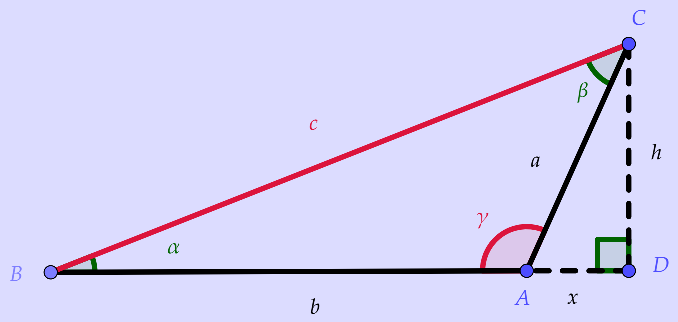
$$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 = b^2 - 2bx + a^2.$$

Kolmiosta ADC saadaan $\cos\gamma = \frac{x}{a}$, jolloin $x = a\cos\gamma$. Täten

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - 2bx + a^2 \\ &= b^2 - 2b(a\cos\gamma) + a^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

□

Pohdinta D.3 Tutki kosinilauseen todistusta teräväkulmaisille kolmioille, ja laadi sen perusteella kosinilauseen todistus tylppäkulmaisille kolmioille.



Mikä on kosinilause suorakulmaisille kolmioille?

Tehtäviä

14. Kolmion sivut ovat 4, 12, ja 15. Mikä on kolmion pienimmän kulman suuruus?

15. Suunnistaja lähti 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m?[S97/2b]

16. Kolmion ABC pinta-ala on 6 cm^2. Sivun AB pituus on 5 cm ja sivun AC pituus 4 cm. Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella. [K08/8]

17. Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan 70°, 125° ja 110°; näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tontin kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella. [S06/7]

Vastaukset

1.

a) $k = 0{,}57$

b) $\frac{A_1}{A_2} = 0{,}33$

c) Sama kuin mittakaava, eli 0,57.

d) $\frac{V_1}{V_2} = 0{,}19$

2. 48,8 %

3.

a) 10,6 km

b) $k = \frac{\sqrt{2}}{1}$

c) 7,5 cm

d) 15,0 km

4. $\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

6.

a) $\sin 40°$

b) $\sin 170°$

c) $\cos 80°$

7.

a) 53,1° tai 126,9°

b) 36,9° tai 323,1°

10. 35,9°, 84,1° ja 10,7 cm

11. 1120,2 m

12. 1370 m

13. Tornin korkeus 76 m, katseluetäisyydet 1,2 km ja 1,7 km.

14. 11,3°

15. 94 m

16. 90,0° tai 143,1°

17. 55° ja 225,7 m ja 138,9 m