Mellin-muunnos ja sen sovelluksia

LuK-tutkielma
Eetu Leinonen
2506405
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2018

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään Mellin-muunnosta ja sen tärkeimpiä sovelluksia. Mellin-muunnos on integraalimuunnos, kuten tunnetummat Fourier- ja Laplace-muunnoksetkin. Mellin-muunnoksen kehittäjänä tunnetaan yleisesti Hjalmar Mellin, Tyrnävältä lähtöisin oleva matemaatikko, joka opiskeli mm. Karl Weierstrassin alaisuudessa. Tutkielman alussa esitietoina käydään läpi muutama tarpeellinen määritelmä, jonka jälkeen määritellään Mellin-muunnos ja sen käänteismuunnos sekä määritetään muutaman funktion Mellin-muunnokset. Tämän jälkeen tutkielmassa todistetaan useita Mellin-muunnoksen perusominaisuuksia. Tutkielman viimeisessä luvussa tarkastellaan Mellin-muunnoksen soveltamista sarjojen summien laskemiseen sekä reuna-arvotehtävien ja integraaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Päälähteenä tutkielmassa käytetään teosta [1].

1 Esitiedot

Määritelmä 1.1. Gammafunktio määritellään integraalina

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0.$$

Määritelmä 1.2. Betafunktio määritellään integraalina

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,\mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0.$$

Huomautus 1.3. Gamma- ja Betafunktioiden välillä on yhteys [3, s. 232]

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Määritelmä 1.4. Olkoon $s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$. Funktiota

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

kutsutaan Riemannin zetafunktioksi.

Määritelmä 1.5. Mellin-muunnoksen kanssa yleensä määritellään myös kaksi erilaista konvoluutiota

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f(\xi)g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

ja

$$(f \circ g)(x) = \int_0^\infty f(x\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

2 Mellin-muunnos

Määritelmä 2.1. Olkoot $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ funktio ja $p \in \mathbb{C}$. Funktion f Mellin-muunnos pisteessä p on

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ja tämän käänteismuunnos on

$$\mathcal{M}^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p}\tilde{f}(p)\,\mathrm{d}p,$$

mikäli $\tilde{f}$ on analyyttinen yhdensuuntaisvyössä $a < \operatorname{Re} p < b$ ja $c \in]a,b[$. Näiden muunnosten keskinäinen käänteisyys voidaan todistaa Fourier-muunnoksen avulla [1, s.340].

Esimerkki 2.2. Olkoon $f(x) = e^{-nx}, n > 0$. Tällöin muuttujanvaihdolla $nx = t$ saadaan

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^p}\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)}{n^p}.$$

Esimerkki 2.3. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Tällöin muuttujanvaihdolla $x = \frac{t}{1-t}$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} &= \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1-t)^p}\,\mathrm{d}t \\ &= B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p).\end{aligned}$$

Esimerkki 2.4. Olkoon $f(x) = (e^x-1)^{-1}$. Nyt Esimerkin 2.2 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\} &= \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\frac{1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{p-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(p)}{n^p} = \Gamma(p)\zeta(p).\end{aligned}$$

Esimerkki 2.5. Olkoon $f(x) = \frac{2}{e^{2x}-1}$. Nyt Esimerkin 2.2 avulla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left\{\frac{2}{e^{2x}-1}\right\} &= \tilde{f}(p) = 2\int_0^\infty x^{p-1}\frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}-1} \\
&= 2\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{p-1}e^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(p)}{(2n)^p} \\
&= 2^{1-p}\Gamma(p)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = 2^{1-p}\Gamma(p)\zeta(p).
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.6. Jos $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$, niin

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x+1}\right\} = (1-2^{1-p})\Gamma(p)\zeta(p),$$

sillä

$$\frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1}.$$

Esimerkki 2.7. Jos $f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$, niin muuttujanvaihdolla $x = \frac{t}{1-t}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+x)^n}\right\} &= \int_0^\infty x^{p-1}(1+x)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{n-p-1}\,\mathrm{d}t \\
&= B(p, n-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}.
\end{aligned}$$

2.1 Muunnoksen perusominaisuuksia

Lause 2.8. *Olkoon* $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$. *Tällöin*

1. $\mathcal{M}\{f(ax)\} = a^{-p}\tilde{f}(p), a > 0$;
2. $\mathcal{M}\{x^a f(x)\} = \tilde{f}(p+a)$;
3. $\mathcal{M}\{f(x^a)\} = \frac{1}{a}\tilde{f}(\frac{p}{a})$;
4. $\mathcal{M}\{\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\} = \tilde{f}(1-p)$;
5. $\mathcal{M}\{(\ln x)^n f(x)\} = \frac{d^n}{dp^n}\tilde{f}(p)$.

Todistus. 1. (Skaalausominaisuus) Määritelmän nojalla ja muuttujanvaihdolla $ax = t$

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = \int_0^\infty x^{p-1} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^p}\int_0^\infty t^{p-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\tilde{f}(p)}{a^p}.$$

2. (Siirto-ominaisuus) Määritelmän nojalla

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\} = \int_0^\infty x^{p-1} x^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{p+a-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \tilde{f}(p+a). \tag{1}$$

3. Määritelmän nojalla ja muuttujanvaihdolla $t = x^a$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(x^a)\} &= \int_0^\infty x^{p-1} f(x^a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{a}})^{p-1} f(t) t^{\frac{1-a}{a}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty t^{\frac{p}{a}-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right).\end{aligned}$$

4. Määritelmän nojalla ja muuttujanvaihdolla $t = \frac{1}{x}$

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \int_0^\infty x^{p-1}\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty t^{1-p-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{f}(1-p).$$

5. Määritelmän ja tuloksen $\frac{d}{dp}x^{p-1} = (\ln x)x^{p-1}$ nojalla

$$\mathcal{M}\{(\ln x)^n f(x)\} = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{d}{dp}\int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x.$$

Toistamalla samaa vielä $n-1$ kertaa saadaan

$$= \frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty x^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{d^n}{dp^n}\tilde{f}(p).$$

□

Funktion f derivaattojen Mellin-muunnoksille voidaan osoittaa useita hyödyllisiä ominaisuuksia.

Lause 2.9. *Olkoon $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$. Tällöin*

1. $\mathcal{M}\{f'(x)\} = -(p-1)\tilde{f}(p-1)$, *jos* $x^{p-1}f(x) \to 0$, *kun* $x \to 0$ *ja* $x \to \infty$;
2. $\mathcal{M}\{f''(x)\} = (p-1)(p-2)\tilde{f}(p-2)$, *jos* $x^{p-1}f''(x) \to 0$ *kun* $x \to 0$ *ja* $x \to \infty$ *sekä* $x^{p-2}f'(x) \to 0$ *kun* $x \to 0$ *ja* $x \to \infty$;

3. *$\mathcal{M}\{f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\tilde{f}(p-n)$, jos $x^{p-r-1}f^{(n-r-1)}(x) \to 0$ kun $x \to 0$ ja $x \to \infty$ kaikilla $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;*

4. *$\mathcal{M}\{xf'(x)\} = -p\tilde{f}(p)$, jos $x^p f(x) \to 0$ kun $x \to \infty$ ja $x^p f(0) = 0$;*

5. *$\mathcal{M}\{x^2 f''(x)\} = (-1)^2 p(p+1)\tilde{f}(p)$, jos $x^{p+r}f(x) \to 0$ kun $x \to \infty$ ja $x^{p+r}f(x)$ häviaa origossa, kun $r = 0, 1$;*

6. *$\mathcal{M}\{x^n f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p)$, jos $x^{p+n-r}f^{(n-r)}(x) \to 0$ kun $x \to 0$ ja $x \to \infty$ kaikilla $r = 1, 2, \ldots, n$.*

Todistus. 1. Määritelmän nojalla ja osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f'(x)\} &= \int_0^\infty x^{p-1}f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathop{\Big/}_{0}^{\infty} x^{p-1}f(x) - (p-1)\int_0^\infty x^{p-2}f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(p-1)\tilde{f}(p-1).\end{aligned} \tag{2}$$

2. Nyt saadaan osittaisintegroimalla kaksi kertaa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f''(x)\} &= \int_0^\infty x^{p-1}f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathop{\Big/}_{0}^{\infty} x^{p-1}f'(x) - (p-1)\int_0^\infty x^{p-2}f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(p-1)\mathop{\Big/}_{0}^{\infty} x^{p-2}f(x) + (p-1)(p-2)\int_0^\infty x^{p-3}f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (p-1)(p-2)\tilde{f}(p-2).\end{aligned} \tag{3}$$

3. Osittaisintegroimalla n kertaa saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\{f^{(n)}(x)\} &= \int_0^\infty x^{p-1} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{\Big/}\limits_0^\infty x^{p-1} f^{(n-1)}(x) - (p-1)\int_0^\infty x^{p-2} f^{(n-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= -(p-1) \mathop{\Big/}\limits_0^\infty x^{p-2} f^{(n-2)}(x) \\
&+ (p-1)(p-2)\int_0^\infty x^{p-3} f^{(n-2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\int_0^\infty x^{p-n} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\frac{\Gamma(p-n)}{\Gamma(p-n)}\tilde{f}(p-n) \\
&= (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\tilde{f}(p-n),
\end{aligned}
$$

sillä $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)$ (kts [3, Theorem 6.12]).

4. Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\{xf'(x)\} &= \int_0^\infty x^p f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{\Big/}\limits_0^\infty x^p f(x) - p\int_0^\infty x^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -p\tilde{f}(p).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

5. Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\{x^2 f''(x)\} &= \int_0^\infty x^{p+1} f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{\Big/}\limits_0^\infty x^{p+1} f'(x) - (p+1)\int_0^\infty x^p f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -(p+1) \mathop{\Big/}\limits_0^\infty x^p f(x) + p(p+1)\int_0^\infty x^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^2 p(p+1)\tilde{f}(p).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

6. Osittaisintegroimalla n kertaa saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\{x^n f^{(n)}(x)\} = \int_0^\infty x^{p+n-1} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!0}^{\infty} x^{p+n} f^{(n-1)}(x) - (p+n-1)\int_0^\infty x^{p+n-2} f^{(n-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= -(p+n-1) \Big/_{\!0}^{\infty} x^{p+n-2} f^{(n-2)}(x) \\
&+ (p+n-1)(p+n-2)\int_0^\infty x^{p+n-3} f^{(n-2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n (p+n-1)(p+n-2)\cdots p \int_0^\infty x^p f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n (p+n-1)(p+n-2)\cdots p \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p) \\
&= (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p).
\end{aligned}$$

$\square$

Lause 2.10. *Olkoon* $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$. *Tällöin* $\mathcal{M}\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\} = (-1)^n p^n \tilde{f}(p)$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$.

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla. Todistetaan ensin perusaskel $n = 2$. Tuloksien (4) ja (5) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\right\} &= \mathcal{M}\{x^2 f''(x) + xf'(x)\} = \mathcal{M}\{x^2 f''(x)\} + \mathcal{M}\{xf'(x)\} \\
&= -p\tilde{f}(p) + p(p+1)\tilde{f}(p) = (-1)^2 p^2 \tilde{f}(p).
\end{aligned}$$

Asetetaan induktio-oletus. $\mathcal{M}\{(x\frac{d}{dx})^{k-1}\} = (-1)^{k-1}p^{k-1}\tilde{f}(p)$ jollakin $k > 2$. Todistetaan seuraavaksi induktioväite $\mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\right\} = (-1)^k p^k \tilde{f}(p)$. Induktio-oletuksen ja tuloksen (4) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\right\} &= \mathcal{M}\left\{(x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx})^{k-1} f(x)\right\} = \mathcal{M}\left\{x\frac{d}{dx} g(x)\right\} \\
&= -p\tilde{g}(p) = -p((-1)^{k-1}p^{k-1}\tilde{f}(p)) = (-1)^k p^k \tilde{f}(p).
\end{aligned}$$

Näin ollen induktioperiaatteen nojalla väite on tosi. $\square$

Edellä todettujen derivaattojen muunnosten lisäksi myös integraaleja voidaan muuntaa.

Määritelmä 2.11. $I_n f(x)$ on n:s toistettu integraali funktiosta f, eli

$$I_1 f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ja

$$I_n f(x) = \int_0^x I_{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lause 2.12. *Olkoon* $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$. *Tällöin*

1. $\mathcal{M}\{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\} = -\frac{1}{p}\tilde{f}(p+1)$,
2. $\mathcal{M}\{I_n f(x)\} = \mathcal{M}\{\int_0^x I_{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\tilde{f}(p+n)$.

Todistus. 1. Merkitään $F(x) = \int_0^x I_{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$, jolloin $F'(x) = f(x)$, ja $F(0) = 0$. Nyt

$$\mathcal{M}\{f(x), p\} = -(p-1)\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, p-1\right\}$$

tuloksen (2) nojalla. Kun merkitään $p = p+1$ saadaan

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, p\right\} = -\frac{1}{p}\mathcal{M}\{f(x), p+1\} = -\frac{1}{p}\tilde{f}(p+1).$$

2. Merkitään $F(x) = I_n f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Nyt $F^{(n)}(x) = f(x)$, jos $F^{(k)}(0) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Siten tuloksen (3) nojalla

$$\mathcal{M}\{F^{(n)}(x), p\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\mathcal{M}\{I_n f(x), p-n\}.$$

Kun merkitään $p = p+n$, saadaan

$$\mathcal{M}\{I_n f(x), p\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\mathcal{M}\{f(x), p+n\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\tilde{f}(p+n).$$

□

Tulon muunnoksen sijaan tarkastellaan konvoluutioiden muunnoksia.

Lause 2.13. *Olkoot* $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ *ja* $\mathcal{M}\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$. *Tällöin*

1. $\mathcal{M}\{f(x) * g(x)\} = \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)$,

2. $\mathcal{M}\{f(x) \circ g(x)\} = \tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p)$,

3. $\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\tilde{g}(p-s)\,\mathrm{d}s$.

Todistus. 1. Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{f(x) * g(x)\} &= \mathcal{M}\left\{\int_0^\infty f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\right\} \\
&= \int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\
&= \int_0^\infty f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\int_0^\infty x^{p-1} g\left(\frac{x}{\xi}\right)\mathrm{d}x \quad \left(\frac{x}{\xi} = \eta\right), \\
&= \int_0^\infty f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\int_0^\infty (\xi\eta)^{p-1} g(\eta)\xi\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^\infty \xi^{p-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \int_0^\infty \eta^{p-1} g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \tilde{f}(p)\tilde{g}(p).
\end{aligned}$$

2. Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{f(x) \circ g(x)\} &= \mathcal{M}\left\{\int_0^\infty f(x\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\} \\
&= \int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty f(x\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad (x\xi = \eta), \\
&= \int_0^\infty g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \int_0^\infty \eta^{p-1}\xi^{1-p} f(\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\xi} \\
&= \int_0^\infty \xi^{1-p-1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \int_0^\infty \eta^{p-1} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \tilde{g}(1-p)\tilde{f}(p).
\end{aligned}$$

3. Määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} &= \int_0^\infty x^{p-1} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{p-1} g(x)\,\mathrm{d}x \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\tilde{f}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\,\mathrm{d}s \int_0^\infty x^{p-s-1} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\tilde{g}(p-s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

3 Mellin-muunnoksen sovelluksia

3.1 Sarjojen summat

Lause 3.1. *Olkoon* $\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$. *Tällöin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)\xi(p,a)\,\mathrm{d}p, \tag{6}$$

missä $\xi(p,a)$ *on Hurwitzin zetafunktio*

$$\xi(p,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}, \quad 0 \leq a \leq 1, \mathrm{Re}(p) > 1.$$

Todistus. Käänteisestä Mellin-muunnoksesta seuraa

$$f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)(n+a)^{-p}\,\mathrm{d}p.$$

Kun tätä summataan jokaisen $n \in \mathbb{N}$ yli saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)\xi(p,a)\,\mathrm{d}p,$$

josta väite seuraa. □

Huomautus 3.2. Kun $a = 0$, niin Lauseen 3.1 tulos (6) yksinkertaistuu muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)\zeta(p)\,\mathrm{d}p,$$

missä $\zeta(p)$ on Riemannin zetafunktio.

Esimerkki 3.3. Esimerkin 2.2 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p}t^n &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n \cdot \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{te^{-x}}{1+te^{-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \frac{t}{e^x+t}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Kun $t \to 1$, niin Esimerkin 2.6 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p} &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} x^{p-1}\frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x+1}\right\} = (1-2^{1-p})\zeta(p).\end{aligned}$$

Esimerkki 3.4. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\beta n)}{n^2}$, $0 \le \beta < 2\pi$ summa voidaan laskea Mellin-muunnoksen avulla. Määritetään ensin funktion $f(x) = \cos(\beta x)$ Mellin-muunnos. Se on

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(x)\} &= \mathcal{M}\{\cos(\beta x)\} = \int_0^{\infty} x^{p-1}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} x^{p-1}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{i\beta x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-i\beta x}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Lasketaan integraalit erikseen. Muuttujanvaihdoilla $y = -i\beta x$ ja $y = i\beta x$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{i\beta x}\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{-1}{i\beta}\right)^p \int_0^{\infty} y^{p-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{-1}{i\beta}\right)^p \Gamma(p) = \frac{1}{\beta^p}\Gamma(p)e^{i\frac{p\pi}{2}}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-i\beta x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{(i\beta)^p}\int_0^{\infty} y^{p-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(i\beta)^p}\Gamma(p) = \frac{1}{\beta^p}\Gamma(p)e^{-i\frac{p\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Näin ollen funktion f Mellin-muunnos on

$$\mathcal{M}\{\cos(\beta x)\} = \frac{1}{\beta^p}\Gamma(p)\frac{e^{i\frac{p\pi}{2}}+e^{-i\frac{p\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{\beta^p}\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2}).$$

Mellin-muunnoksen siirto-ominaisuuden nojalla (tulos (1))

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\cos(\beta n)}{n^2}\right\} = \frac{1}{\beta^{p-2}}\Gamma(p-2)\cos\left(\frac{p\pi}{2}-\pi\right) = -\frac{\Gamma(p-2)}{\beta^{p-2}}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right).$$

Tästä saadaan Lauseen 3.1 nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\beta n)}{n^2} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(p-2)}{\beta^{p-2}}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\zeta(p)\,\mathrm{d}p \\ &= -\frac{\beta^2}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{2\pi}{\beta})^p\frac{\zeta(1-p)}{(p-1)(p-2)}\,\mathrm{d}p, \qquad (7)\end{aligned}$$

sillä $\pi^p\zeta(1-p) = 2^{1-p}\Gamma(p)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\zeta(p)$ ja $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Tämän Riemannin zetafunktion ominaisuuden todistus löytyy lähteestä [2, s.25]. Integraali (7) saadaan laskettua residylauseen nojalla. Navat, joissa residyt tulee laskea ovat $p = 2, 1, 0$. Residyt näissä pisteissä ovat (kts. [3])

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_2 &= \lim_{p\to 2}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^p \frac{\zeta(1-p)}{(p-1)(p-2)}(p-2) = \lim_{p\to 2}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^p \frac{\zeta(1-p)}{(p-1)} \\
&= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \frac{\zeta(-1)}{1} = \frac{4\pi^2}{\beta^2}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi^2}{3\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_1 &= \lim_{p\to 1}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^p \frac{\zeta(1-p)}{(p-1)(p-2)}(p-1) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^p \frac{\zeta(1-p)}{(p-2)} \\
&= -\frac{2\pi}{\beta}\cdot\zeta(0) = -\frac{2\pi}{\beta}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\beta}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0 &= \lim_{p\to 0}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^p \frac{\zeta(1-p)}{(p-1)(p-2)}(p-0) = \lim_{s\to 1}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{1-s} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)}(1-s) \\
&= \lim_{s\to 1}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{1-s} \frac{1}{-s(s+1)}\cdot\lim_{s\to 1}\zeta(s)(s-1) = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

josta saadaan sarjan summaksi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\beta n)}{n^2} &= -\frac{\beta^2}{4\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3\beta^2}+\frac{\pi}{\beta}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\beta^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3\beta^2}+\frac{\pi}{\beta}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}.
\end{aligned}$$

3.2 Reuna-arvotehtävät ja integraaliyhtälöt

Esimerkki 3.5. Ratkaistaan reuna-arvotehtävä

$$\begin{aligned}
&x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0, \quad 0 \le x < \infty \quad 0 < y < 1 \\
&u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \begin{cases} A, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases},
\end{aligned}$$

missä A on vakio. Ottamalla yhtälöstä Mellin-muunnos, muuttuu reuna-arvotehtävä muotoon

$$\mathcal{M}\{x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy}\} = \mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 u\right\} + \mathcal{M}\{u_{yy}\} = \tilde{u}_{yy} + p^2\tilde{u} = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$\tilde{u}(p,0) = 0, \quad \tilde{u}(p,1) = A\int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{p}.$$

Muunnetun ongelman ratkaisuksi saadaan

$$\tilde{u}(p,y) = \frac{A}{p}\frac{\sin(py)}{\sin p}, \quad 0 < \operatorname{Re} p < 1,$$

josta alkuperäisen ongelman ratkaisu voidaan selvittää käänteisellä Mellin-muunnoksella. Tällöin

$$u(x,y) = \frac{A}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-p}}{p}\frac{\sin(py)}{\sin p}\,\mathrm{d}p.$$

Integroitavalla funktiolla on yksinkertaisia napoja pisteissä $p = n\pi, n = 1,2,3,\ldots$, jotka ovat puoliympyrän muotoisen suljetun käyrän sisällä koordinaatiston oikealla puoliskolla. Residylauseen nojalla

$$u(x,y) = A\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{n\pi}\left(\frac{x^{-p}}{p}\frac{\sin(py)}{\sin p}\right).$$

Nyt

$$\operatorname{Res}_{n\pi}\frac{x^{-p}\sin(py)}{p\sin p} = \frac{x^{-n\pi}\sin(n\pi y)}{\sin(n\pi) + n\pi\cos(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{n\pi}x^{-n\pi}\sin(n\pi y),$$

joten

$$u(x,y) = \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{-n\pi}\sin(n\pi y).$$

Esimerkki 3.6. Ratkaistaan integraaliyhtälö

$$\int_0^{\infty} f(\xi)k(x\xi)\,\mathrm{d}\xi = g(x), \quad x > 0,$$

missä $f(x)$ on tuntematon. Soveltamalla integraaliyhtälöön Mellin-muunnosta, muuntuu yhtälö muotoon

$$\tilde{f}(1-p)\tilde{k}(p) = \tilde{g}(p),$$

jolloin $\tilde{f}(p) = \tilde{g}(1-p)\tilde{h}(p)$, missä $\tilde{h}(p) = \frac{1}{\tilde{k}(1-p)}$. Nyt käyttämällä käänteistä Mellin-muunnosta

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{\tilde{g}(1-p)\tilde{h}(p)\} = \int_0^\infty g(\xi)h(x\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

jos $h(x) = \mathcal{M}^{-1}\{\tilde{h}(p)\}$ on olemassa.

Esimerkki 3.7. Ratkaistaan integraaliyhtälö

$$\int_0^\infty f(\xi)g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = h(x),$$

missä $f(x)$ on tuntematon. Kun yhtälöstä otetaan Mellin-muunnos muuttujan x suhteen, muuttuu yhtälö muotoon

$$\tilde{f}(p) = \tilde{h}(p)\tilde{k}(p), \quad \tilde{k}(p) = \frac{1}{\tilde{g}(p)}.$$

Käänteisen Mellin-muunnoksen avulla saadaan yhtälön ratkaisu

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{\tilde{h}(p)\tilde{k}(p)\} = \int_0^\infty h(\xi)k\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

Esimerkki 3.8. Ratkaistaan integraaliyhtälö

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(1+x)^n},$$

joka on siis muotoa

$$e^{-x} \circ f = \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Otetaan Mellin-muunnos integraaliyhtälön molemmilta puolilta, jolloin Esimerkkien 2.2 ja 2.7 nojalla

$$\mathcal{M}\{e^{-x}, p\}\tilde{f}(1-p) = \Gamma(p)\tilde{f}(1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)},$$

eli

$$\tilde{f}(1-p) = \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}.$$

Tällöin

$$\tilde{f}(p) = \frac{\Gamma(n+p-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)}\Gamma(p).$$

Lauseen 2.9 nojalla

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot (-1)^{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x}.$$

Lähdeluettelo

[1] Debnath L and Bhatta D, *Integral transforms and their applications, second edition*, Chapman and Hall, 2007

[2] Davies B, *Integral Transforms and Their Applications*, third edition, Springer-Verlag New York, 2002

[3] Osborne A D, *Complex variables and their applications*, Addison-Wesley, 1999