Laatikkoulottuvuudesta

LuK-tutkielma
Valtteri Kössö
2497417
Matemaattisten tieteiden
tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
27.9.2018

Sisältö

Johdanto

Tutkielmassa on käytetty pääasiallisena lähteenä teosta [Falconer, 1990].

0.1 Merkintöjä

Käytetään seuraavia merkintöjä:

- × Luonnolliset luvut: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- × Kokonaisluvut: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- × Positiiviset kokonaisluvut: $\mathbb{Z}_+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- × Joukko A on vähintään yhtä mahtava kuin joukko B, jos on olemassa injektiivinen kuvaus $f : B \longrightarrow A$. Merkitään tällöin $A \succcurlyeq B$. Vastaavasti $A \preccurlyeq B$.
- × Joukko A on aidosti mahtavampi kuin joukko B, jos on olemassa injektiivinen kuvaus $f : B \longrightarrow A$ ja ei ole olemassa injektiota $g : A \longrightarrow B$. Merkitään tällöin $A \succ B$. Vastaavasti $A \prec B$.
- × Joukon A kaikkien osajoukkojen joukko eli joukon A potenssijoukko: $\mathcal{P}(A) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq A\}$.
- × Pistevieras- eli erillinen yhdiste: $\bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, missä $A_\lambda \cap A_\mu = \varnothing$ kaikilla $\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu$.
- × Joukon A komplementti: $A^\complement = X \setminus A$, missä X on perusjoukko ja $A \subseteq X$.
- × Joukon $A \subseteq X$ halkaisija: $\mathtt{diam}(A) = \mathtt{sup}\{d(x, y) | x, y \in A\}$, missä X on perusjoukko ja d on joukossa X määritelty metriikka.
- × Joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ δ-peite: $N_\delta(A) = \mathtt{min}(|\{A_i \mid A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i,\ \mathtt{diam}(A_i) \leq \delta\}|)$. Toisin sanoen $N_\delta(A)$ on pienin määrä joukkoja, joiden halkaisija on enintään δ ja jotka peittävät joukon A.

- Alaraja-arvo: $\varliminf_{x\to 0} f(x) = \liminf_{x\to 0} f(x) = \lim_{r\to 0}\left(\inf_{x\in[0,r]} f(x)\right)$
- Yläraja-arvo: $\varlimsup_{x\to 0} f(x) = \limsup_{x\to 0} f(x) = \lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in[0,r]} f(x)\right)$
- Joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ δ-ympäristö: $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq \delta \text{ jollakin } y \in A\}$, missä $\delta \geq 0$.

1 Laatikkoulottuvuuden määritelmistä

Laatikkoulottuvuus voidaan määritellä useilla yhtäpitävillä tavoilla. Tilanteesta riippuen eri määritelmän valitseminen voi olla suotavaa. Valitaan seuraavaksi eräs määrittely määritelmäksi, lähdettä [Falconer, 1990] mukaillen, ja osoitetaan sitten muiden määrittelyjen yhtäpitävyys.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $A \neq \varnothing$. Määritellään *joukon A alalaatikkoulottuvuus* (eng. *lower box counting dimension*) $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} A$ asettamalla

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \tag{1.1}$$

ja *joukon A ylälaatikkoulottuvuus* (eng. *upper box counting dimension*) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} A$ asettamalla

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta}. \tag{1.2}$$

Jos ylä- ja alalaatikkoulottuvuus ovat yhtäsuuret, niiden yhteistä arvoa kutsutaan *joukon A laatikkoulottuvuudeksi* (eng. *box counting dimension*) $\dim_{\mathrm{B}} A$

$$\dim_{\mathrm{B}} A = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta}. \tag{1.3}$$

Huomautus 1.2. Yhtälöissä (1.1) – (1.3) riittää tarkastella raja-arvoja, kun δ lähestyy nollaa pitkin vähenevää jonoa, jolle pätee $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$, missä $0 < c < 1$ on vakio. Tämä pätee sillä, jos $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$, niin

$$\frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\ln \delta_k} = \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\ln \delta_{k+1} + \ln(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k})} \leq \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\ln \delta_{k+1} + \ln c}$$

ja toisaalta

$$\frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \geq \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_{k+1}} = \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_k + \ln(\frac{\delta_k}{\delta_{k+1}})} \geq \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_k + \ln c},$$

koska $N_\delta(A)$ on kasvava, kun δ pienenee. Koska $k \to \infty$ täsmälleen, kun $k+1 \to \infty$, niin

$$\overline{\lim}_{k \to \infty} \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_k} \leq \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \leq \overline{\lim}_{k+1 \to \infty} \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\ln \delta_{k+1}}$$

ja

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_k} \leq \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \leq \varliminf_{k+1\to\infty} \frac{\ln N_{\delta_{k+1}}(A)}{-\ln \delta_{k+1}}.$$

Lause 1.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja epätyhjä. Määritelmän 1.1 luku $N_\delta(A)$ voidaan korvata yhtäpitävästi luvulla $N'_\delta(A)$, missä*

(a) $N'_\delta(A)$ on niiden δ-kuutioiden [†] *, jotka leikkaavat joukkoa A, lukumäärä,*

(b) $N'_\delta(A)$ on pienin määrä kuutioita, joiden sivun pituus on δ ja jotka peittävät joukon A,

(c) $N'_\delta(A)$ on pienin määrä δ-säteisiä suljettuja palloja, jotka peittävät joukon A,

(d) $N'_\delta(A)$ on suurin määrä erillisiä δ-säteisiä suljettuja palloja, joiden keskipiste on joukossa A.

Todistus. Olkoon $\bigcup_{i\in I} A_i$ sellainen joukon A peite, että jokaisen joukon A_i halkaisija on enintään δ.

(a) Koska joukkoa A leikkaavat δ-kuutiot ovat eräs joukon peite A ja kaikkien joukon δ-kuutioiden halkasija on $\delta\sqrt{n}$, niin $N_{\delta\sqrt{n}}(A) \leq N'_\delta(A)$. Valitaan $\delta < 1/\sqrt{n}$, jolloin $\delta\sqrt{n} < 1$ eli $-\ln(\delta\sqrt{n}) > 0$, joten

$$\frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(A)}{-\ln(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\sqrt{n} - \ln\delta}$$

Koska $\delta \to 0$ täsmälleen, kun $\delta\sqrt{n} \to 0$, niin

$$\overline{\dim}_B A = \varlimsup_{\delta\sqrt{n}\to 0} \frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(A)}{-\ln(\delta\sqrt{n})} \leq \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta}$$

ja

$$\underline{\dim}_B A = \varliminf_{\delta\sqrt{n}\to 0} \frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(A)}{-\ln(\delta\sqrt{n})} \leq \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta}.$$

[†] Joukon $\mathbb{R}^n$ δ-kuutiot ovat muotoa $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$, missä $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$.

Toisaalta, jos joukon A_i halkaisija on enintään δ, niin sen peittämiseen tarvitaan enintään 3^n kappaletta δ-kuutioita (valitaan mielivaltainen kuutio, joka leikkaa joukkoa A_i ja sen kaikki naapurit). Siten $N'_\delta(A) \leq 3^n N_\delta(A)$ eli

$$\frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta} \leq \frac{\ln(3^n N_\delta(A))}{-\ln\delta} = \frac{\ln 3^n}{-\ln\delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln\delta}, \quad \text{kun} \quad \delta < 1.$$

Koska $-\ln\delta \to \infty$, kun $\delta \to 0$, niin $\frac{\ln 3^n}{-\ln\delta} \to 0$, kun $\delta \to 0$. Siten myös $\overline{\lim}_{\delta\to 0}(\frac{\ln 3^n}{-\ln\delta}) = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln 3^n}{-\ln\delta} = 0$, joten

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta} &\leq \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\ln(3^n N_\delta(A))}{-\ln\delta} \\
&\leq \overline{\lim_{\delta\to 0}}(\frac{\ln 3^n}{-\ln\delta}) + \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln\delta} \\
&= \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln\delta} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} A
\end{aligned}$$

ja

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln(3^n N_\delta(A))}{-\ln\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln\delta} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} A.$$

Siten

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} A \quad \text{ja} \quad \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln N'_\delta(A)}{-\ln\delta} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} A.$$

(b) Kuten edellä, myös mielivaltaiset kuutiot, joiden sivun pituus on δ, ovat eräs joukon A peite, joten edelleen $N_{\delta\sqrt{n}}(A) \leq N'_\delta(A)$. Toisaalta, jokainen joukko A_i, jonka halkaisija on enintään δ, voidaan peittää 3^n kappaleella δ-kuutioita, joten $N'_\delta(A) \leq 3^n N_\delta(A)$. Siten väite seuraa suoraan edellisestä kohdasta.

(c) Koska δ-säteiset suljetut pallot ovat eräs joukon A peite, niin $N_\delta(A) \leq N'_\delta(A)$. Toisaalta, jokainen joukko A_i, jonka halkaisija on enintään δ, voidaan peittää yhdellä δ-säteisellä suljetulla pallolla, joten $N'_\delta(A) \leq N_\delta(A)$. Siten väite seuraa suoraan aiemmista kohdista.

(d) Olkoon $B_1, \ldots, B_{N'_\delta(A)}$ suurin kokoelma erillisiä δ-säteisiä suljettuja palloja, joiden keskipisteet ovat joukossa A. Olkoon $a \in A$. Tällöin $d(a, B_i) \leq \delta$ jollakin $i = 1, \ldots, N'_\delta(A)$, koska muutoin a-keskinen δ-säteinen suljettu pallo voitaisiin lisätä suurimpaan kokoelmaan kyseisiä palloja. Siten pallot, joiden säde on 2δ ja keskipisteet kuten palloilla B_i peittävät joukon A, joten $N_{4\delta}(A) \leq N'_\delta(A)$. Olkoon sitten $A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$, missä jokaisen joukon A_J halkaisija on enintään δ. Nyt jokaisen pallon B_i keskipiste kuuluu joukkoon A_{j_i} jollakin $j_i \in J$. Koska joukon A_{j_i} halkaisija on enintään pallon B_i säde, niin $A_{j_i} \subseteq B_i$. Näin kaikilla $i = 1, \ldots, N'_\delta(A)$. Koska pallot B_i ovat lisäksi erillisiä, on joukkoja A_j oltava vähintään yhtä monta. Siten $N'_\delta(A) \leq N_\delta(A)$ ja väite seuraa kuten edellä.

$\square$

Huomautus 1.4. Monien konkreettisten (pseudo)fraktaalisten joukkojen, kuten rantaviivojen, laatikkoulottuvuutta voidaan approksimoida Lauseen 1.3 kohdan (a) avulla yksinkertaisesti siten, että joukon päälle piirretään ruudukko ja lasketaan, kuinka monen ruudun kanssa joukko leikkaa. Kun tätä toistetaan tihenevillä ruudukoilla, voidaan yrittää arvioida (eli "arvata") joukon laatikkoulottuvuutta eli laskettujen logaritmisten suhteiden raja-arvoa. Lisäksi tämä antaa mielekkään merkityksen nimelle laatikkoulottuvuus (*"box counting dimension"* $\approx$ *"laatikoiden lasku -ulottuvuus"*).

Annetaan vielä yksi yhtäpitävä määritelmä, joka ei perustu suoraan minkäänlaisten joukkojen lukumäärän arviointiin vaan δ-ympäristöihin. Tätä yhtäpitävää määritelmää ei kuitenkaan käsitellä tarkemmin siinä esiintyvän *Lebesguen mitan* vuoksi, koska tässä tutkielmassa ei oleteta mittateorian tuntemusta.

Hyödynnetään seuraavia Lebesguen mitan perusominaisuuksia ilman todistuksia:

Lause 1.5. *Okooon $\mathscr{L}^n$ on Lebesguen mitta joukossa $\mathbb{R}^n$ ja $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelma. Tällöin*

(a) *kuvaus* $\mathscr{L}^n$ *on monotoninen eli jos* $A, B \in \mathscr{F}$ *sellaisia, että* $A \subseteq B$, *niin* $\mathscr{L}^n(A) \le \mathscr{L}^n(B)$,

(b) *kuvaus* $\mathscr{L}^n$ *on* σ*-subadditiivinen eli* $\mathscr{L}^n\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_i)$, *missä* $A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *kaikilla* $i \in \mathbb{N}$,

(c) *kuvaus* $\mathscr{L}^n$ *on* σ*-additiivinen eli* $\mathscr{L}^n\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_i)$, *missä* $A_i \in \mathscr{F}$ *pistevieraita kaikilla* $i \in \mathbb{N}$,

(d) *avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *pallolle* B*, jonka säde on* $r > 0$*, pätee* $\mathscr{L}^n(B) = c_n r^n$, *missä* $c_n > 0$ *on ulottuvuudesta riippuva vakio.*

Todistus. Sivuutetaan. Katso esimerkiksi teos [Edgar, 1990].

□

Lause 1.6. *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu ja* $A \neq \varnothing$*. Tällöin*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} A = n - \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{\ln \delta}$$

ja

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} A = n - \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{\ln \delta},$$

missä $\mathscr{L}^n$ *on Lebesguen mitta joukossa* $\mathbb{R}^n$*.*

Todistus. Koska $N_\delta(A)$ kappaletta δ-säteistä palloa peittää joukon A, niin joukko A_δ voidaan peittää samankeskisillä 2δ-säteisillä palloilla. Siten

$$\mathscr{L}^n(A_\delta) \overset{l.1.5(b)}{\le} \sum_{i=1}^{N_\delta(A)} c_n(2\delta)^n = N_\delta(A) c_n (2\delta)^n,$$

missä $c_n > 0$ on vakio. Siten, kun $\delta < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{-\ln \delta} &\le \frac{\ln(2^n c_n) + \ln \delta^n + \ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \\ &= -n + \frac{\ln(2^n c_n)}{-\ln \delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta}. \end{aligned}$$

Koska $\frac{\ln(2^n c_n)}{-\ln \delta} \to 0$, kun $\delta \to 0$, niin

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{-\ln \delta} \le -n + \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\ln(2^n c_n)}{-\ln \delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) - n$$

ja

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{-\ln \delta} \le -n + \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln(2^n c_n)}{-\ln \delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) - n.$$

Toisaalta, jos $N_\delta(A)$ on suurin määrä A keskisiä erillisiä δ-säteisiä suljettuja palloja B_i, missä $i = 1, \ldots, N_\delta(A)$, niin $A_\delta \supseteq \bigcup_{i=1}^{N_\delta(A)} U_i$, jolloin Lebesguen mitan ominaisuuksien nojalla

$$\mathscr{L}^n(A_\delta) \overset{l.1.5(a)}{\ge} \mathscr{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{N_\delta(A)} U_i\right) \overset{l.1.5(c)}{=} \sum_{i=1}^{N_\delta(A)} \mathscr{L}^n(U_i) \overset{l.1.5(d)}{=} N_\delta(A) c_n \delta^n,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{-\ln \delta} &\ge \underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln(N_\delta(A) c_n \delta^n)}{-\ln \delta} \\
&= -n + \underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln c_n}{-\ln \delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \\
&= \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) - n
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln \mathscr{L}^n(A_\delta)}{-\ln \delta} &\ge \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln(N_\delta(A) c_n \delta^n)}{-\ln \delta} \\
&= -n + \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln c_n}{-\ln \delta} + \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} \\
&= \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) - n.
\end{aligned}$$

Siten väite pätee.

□

Laatikkoulottuvuus pyrkii kuvaamaan tutkittavan joukon säännöllisyyttä ja käytäytymistä skaalauksessa. Sen voi ajatella kuvaavan, kuinka epäsäännöllinen joukko on tietyllä δ-tarkuudella tarkasteltuna; tarkemmin se kuvaa kuinka joukon epäsäännöllisyys kehittyy logaritmisessa suhteessa tarkastelutarkkuuteen, kun huomioitavien yksityiskohtien kokoa pienennetään.

Esimerkki 1.7. (a) Määrätään yksiön $\{a\} \subset \mathbb{R}$, missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio, laatikkoulottuvuus, jos se on olemassa.

Koska $a \in [a-\delta/2, a+\delta/2]$ kaikilla $\delta > 0$, niin $N_\delta(\{a\}) = 1$ kaikilla $\delta > 0$. Siten

$$\underline{\mathrm{dim}}_{\mathcal{B}}\{a\} = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(\{a\})}{-\ln \delta} = \underline{\lim}_{\delta\to 0} 0 = 0$$

ja

$$\overline{\mathrm{dim}}_{\mathcal{B}}\{a\} = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(\{a\})}{-\ln \delta} = \overline{\lim}_{\delta\to 0} 0 = 0.$$

Näin ollen yksiöllä on laatikkoulotuvuus ja $\mathrm{dim}_{\mathcal{B}}\{a\} = 0$.

(b) Määrätään m-ulotteisen yksikkökuution A laatikkoulottuvuus joukossa $\mathbb{R}^n$, jos se on olemassa. Tässä $0 \leq m \leq n$.

Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $A = [0,1]^m \times \{0\}^{n-m}$ † . Huomatuksen 1.2 nojalla riittää tarkastella Määritelmän 1.1 yhtälöitä (1.1) ja (1.2), kun $\delta_k = (1/2)^k$. Tällöin väli $[0,1]$ jakautuu 2^k kappaleeseen δ_k-pituisia välejä ja edelleen joukko $[0,1]^m$ jakautuu $(2^k)^m$ kappaleeseen m-ulotteisia δ_k-kuutioita. Nämä kuutiot voidaan edelleen laajentaa δ_k-kuutioiksi avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ilman, että niiden lukumäärä muuttuu. Lisäksi joukko A leikkaa vain näitä δ_k-kuutioita, koska joukko A ei ulotu laajennettujen koordinaattien suuntaan. Siten Lauseen 1.3 kohdan (a) nojalla

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{dim}}_{\mathcal{B}} A &= \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln N_{\delta_k}(A)}{-\ln \delta_k} \\ &= \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln((2^k)^m)}{-\ln(\frac{1}{2})^k} = \underline{\lim}_{k\to\infty} m \frac{\ln(2^k)}{\ln(2^k)} = m \underline{\lim}_{k\to\infty} 1 = m\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\overline{\mathrm{dim}}_{\mathcal{B}} A = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{-\ln \delta} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln((2^k)^m)}{-\ln(\frac{1}{2})^k} = m \overline{\lim}_{k\to\infty} 1 = m.$$

Siten joukolla A on olemassa laatikkoulottuvuus ja $\mathrm{dim}_{\mathcal{B}} A = m$.

† Tässä joukon eksponentin tulkitaan tarkoittavan, kuinka monta kertaa joukon karteesinen tulo itsensä kanssa otetaan. Toisin sanoen, jos A ja B ovat epätyhjiä joukkoja, niin $A^l \times B^0 = A^l$, missä $l \in \mathbb{N}$.

Esitetään seuraavaksi yksinkertainen konstruktio *Cantorin joukolle* joukossa $\mathbb{R}$. Olkoon $0 < \lambda < 1/2$. Asetetaan $\mathcal{C}_0^\lambda = [0,1]$. Jaetaan väli $\mathcal{C}_0^\lambda$ kahteen λ-pituiseen väliin $C_0^\lambda = [0,\lambda]$ ja $C_1^\lambda = [1-\lambda, 1]$. Merkitään $\mathcal{C}_1^\lambda = C_0^\lambda \cup C_1^\lambda$. Toistetaan edellinen menettely väleille C_0^λ ja C_1^λ siten, että uusien välien pituus on aina λ kertaa edellisen välin pituus. Tarkemmin, oletaan ensin, että jako on tehty k kertaa eli on saatu joukko

$$\mathcal{C}_k^\lambda = \bigcup_{\boldsymbol{\imath} \in \{0,1\}^k} C_{\boldsymbol{\imath}}^\lambda,$$

missä jokaisen välin $C_{\boldsymbol{\imath}}^\lambda$ pituus on λ^k. Muodostetaan joukot $C_{\boldsymbol{\imath}0}^\lambda$ ja $C_{\boldsymbol{\imath}1}^\lambda$ jakamalla joukko $C_{\boldsymbol{\imath}}^\lambda = [c_i, c^i]$ kahteen λ^{k+1}-pituiseen väliin, toisin sanoen $C_{\boldsymbol{\imath}0}^\lambda = [c_i, c_i + \lambda^{k+1}]$ ja $C_{\boldsymbol{\imath}1}^\lambda = [c^i - \lambda^{k+1}, c^i]$. Merkitään $\mathcal{C}_{k+1}^\lambda = \bigcup_{\boldsymbol{\imath} \in \{0,1\}^k} (C_{\boldsymbol{\imath}0}^\lambda \cup C_{\boldsymbol{\imath}1}^\lambda)$ ja kutsutaan joukkoa $\mathcal{C}_{k+1}^\lambda$ *Cantorin joukon konstruktiovaiheeksi* $k+1$. Määritellään *Cantorin joukko* $\mathscr{C}_\lambda$ asettamalla

$$\mathscr{C}_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n^\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\boldsymbol{\imath} \in \{0,1\}^n} C_{\boldsymbol{\imath}}^\lambda \right).$$

Yleistetympi määrittely sekä joitain Cantorin joukon yleisiä ominaisuuksia esitellään Liitteessä A. Kun varsinaisessa tutkielmassa viitataan Cantorin joukkoon, tarkoitetaan edellä esiteltyä joukkoa $\mathscr{C}_\lambda$.

Esimerkki 1.8. Lasketaan Cantorin joukon $\mathscr{C}_\lambda$ ylä- ja alalaatikkoulottuvuus.

Huomautuksen 1.2 nojalla riittää tarkastella Määritelmän 1.1 yhtälöitä (1.1) ja (1.2), kun $\delta_k = \lambda^k$. Tarkastellaan ensin konstruktiovaiheen k välejä. Koska välit ovat suljettuja ja erillisiä ja jokaisen pituus on λ^k, eräs peite on välien muodostama joukko itse sillä $\mathscr{C}_\lambda \subseteq \mathcal{C}_k^\lambda$ kaikilla k. Siten $N_\delta(\mathscr{C}_\lambda) \leq 2^k$, kun $\lambda^k < \delta \leq \lambda^{k+1}$, joten

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \mathscr{C}_\lambda &= \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln N_\delta(\mathscr{C}_\lambda)}{-\ln \delta} \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln(2^k)}{-\ln \lambda^{k-1}} \\
&= \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \ln 2}{-(k-1)\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{-\ln \lambda} \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k}{k-1} \\
&= \frac{\ln 2}{\ln \lambda^{-1}}.
\end{aligned}$$

Toisaalta kaikilla δ pätee $\delta \in [\lambda^{k+1}, \lambda^k[$ jollakin k. Siten jokainen δ-pituinen väli voi peittää enintään yhden konstruktiovälin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda}$, missä $\boldsymbol{\imath} \in \{0,1\}^k$. Näin ollen $N_\delta(\mathscr{C}_\lambda) \geq 2^k$, jolloin

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}\mathscr{C}_\lambda &= \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(\mathscr{C}_\lambda)}{-\ln \delta} \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(2^k)}{-\ln \lambda^{k+1}} \\ &= \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{k \ln 2}{-(k+1)\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{-\ln \lambda} \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{\ln 2}{\ln \lambda^{-1}}.\end{aligned}$$

Määritelmän 1.1 nojalla $\underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}} A \leq \overline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}} A$ aina[†] , joten

$$\frac{\ln 2}{\ln \lambda^{-1}} \leq \underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}\mathscr{C}_\lambda \leq \overline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}\mathscr{C}_\lambda \leq \frac{\ln 2}{\ln \lambda^{-1}}$$

eli

$$\mathrm{dim}_{\mathrm{B}}\, \mathscr{C}_\lambda = \frac{\ln 2}{\ln \lambda^{-1}}.$$

[†] Tämä on selvää, koska epätyhjän joukon jokainen yläraja on suurempi tai yhtäsuuri kuin mikä tahansa alaraja eli myös pienin yläraja on vähintään yhtä suuri kuin suurin alaraja, jolloin myös yläraja-arvo on vähintään yhtä suuri kuin alaraja-arvo, koska epäyhtälön suunta säilyy rajankäynnissä.

2 Laatikkoulottuvuuden ominaisuuksista

Lause 2.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $A \neq \varnothing$. Tällöin joukolla A ja sen sulkeumalla $\mathtt{cl}(A)$ on sama ylä- ja alalaatikkoulottuvuus.*

Todistus. Olkoot $B_1, \dots B_k$ δ-säteisiä suljettuja palloja, joille $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Koska joukon sulkeuma on pienin suljettu joukko, johon joukko sisältyy, on oltava $A \subseteq \mathtt{cl}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Tämä pätee kaikilla kokoelmilla B_i, joten erityisesti se pätee pienimmällä kokoelmalla B_i, joka peittää joukon A eli $N_\delta(A) = N_\delta(\mathtt{cl}(A))$ kaikilla δ, joten Lauseen 1.3 kohdan (c) nojalla $\underline{\mathtt{dim}}_{\mathbb{B}}(A) = \underline{\mathtt{dim}}_{\mathbb{B}}(\mathtt{cl}(A))$ ja $\overline{\mathtt{dim}}_{\mathbb{B}}(A) = \overline{\mathtt{dim}}_{\mathbb{B}}(\mathtt{cl}(A))$. Erityisesti, jos joukolla A on olemassa laatikkoulottuvuus, myös sen sulkeumalla $\mathtt{cl}(A)$ on ja $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}} A = \mathtt{dim}_{\mathbb{B}} \mathtt{cl}(A)$.

□

Huomautus 2.2.

(a) Olkoon $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Tällöin $\mathtt{cl}(A) = [0,1]$. Nyt Lauseen 2.1 nojalla $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}} A = \mathtt{dim}_{\mathbb{B}} \mathtt{cl}(A) = 1$ eli numeroituvalla joukolla voi olla nollasta poikkeava laatikkoulottuvuus.

(b) Olkoon $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Edellisen kohdan, Esimerkin 1.8 ja Lauseen A.4 nojalla $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}} \mathscr{C}_\lambda < \mathtt{dim}_{\mathbb{B}} A$ vaikka $\mathscr{C}_\lambda \succ A$.

(c) Koska yksiön laatikkoulottuvuus on nolla, erityisesti välin $[0,1]$ yksittäisten rationaalilukujen $q \in A$ muodostamien joukkojen $\{q\}$ laatikkoulottuvuus on nolla. Edellisen nojalla numeroituvalle yhdisteelle $\bigcup_{q \in A}\{q\}$ kuitenkin pätee $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}} \left(\bigcup_{q \in A} \{q\} = 1 \right)$, vaikka $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}}\{q\} = 0$ kaikilla $q \in A$. Siten yleisesti ei päde $\mathtt{dim}_{\mathbb{B}}(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \mathtt{sup}_{i \in \mathbb{N}} \left(\mathtt{dim}_{\mathbb{B}} A_i \right)$ eli laatikkoulottuvuus ei ole numeroituvasti vakaa (eng. *countable stable*).

Edellä esitetyt ovat epäintuitiivisia ominaisuuksia ulottuvuudelle. Laatikkoulottuvuuden tapauksessa ne johtuvat pitkälti siitä, että laatikkoulottuvuus ei perustu mittaan, kuten esimerkiksi *Hausdorffin dimensio.* Tästä huolimatta laatikkoulottuvuus on käyttökelpoinen sillä joissan tapauksissa se on helpompi laskea kuin esimerkiksi Hausdorffin dimensio. Näin on paljolti siksi, että laatikkoulottuvuutta laskettaessa riittää tarkastella peitettä, joka koostuu tasakokoisista joukoista, kun taas Hausdorffin dimensiossa peitteen joukot voivat olla hyvinkin vaihtelevan kokoisia. Lisäksi laatikkoulottuvuuden ja Hausdorffin dimension yhteyttä voidaan hyödyntää joissain tapauksissa.

Lause 2.3 (Päätulos). *Olkoon $s \in [0, n]$. Tällöin on olemassa sellainen $F \subseteq \mathbb{R}^n$, että $\mathtt{dim}_{\mathcal{B}} F = s$.*

Todistus. Olkoon $s \in [0, n]$. Jos $s \in \mathbb{Z}$, niin asetetaan $F = [0, 1]^s \times \{0\}^{n-s}$. Tällöin Esimerkin 1.7 nojalla $\mathtt{dim}_{\mathcal{B}} F = s$.

Oletetaan sitten, että $s \in]k - 1, k[$ jollakin $k \in \{1, \dots, n\}$. Olkoon $\lambda = 2^{-k/s}$. Koska $s < k$, niin $-k/s < -1$ ja edelleen $2^{-k/s} < 1/2$ eli $0 < \lambda < 1/2$. Siten Cantorin joukko $\mathscr{C}_\lambda$ on määritelty. Asetetaan $F = \mathscr{C}_\lambda^k$ ja lasketaan $\mathtt{dim}_{\mathcal{B}} F$.

Cantorin joukon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
F = \mathscr{C}_\lambda^k &= \overbrace{\mathscr{C}_\lambda \times \cdots \times \mathscr{C}_\lambda}^{k \textit{ kappaletta}} \\
&= \bigcap_{n=0}^{\infty} (\overbrace{\mathcal{C}_n^\lambda \times \cdots \times \mathcal{C}_n^\lambda}^{k \textit{ kappaletta}}) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\boldsymbol{\imath}_1, \dots, \boldsymbol{\imath}_k \in \{0, \dots, m-1\}^n} (C_{\boldsymbol{\imath}_1}^\lambda \times \cdots \times C_{\boldsymbol{\imath}_k}^\lambda) \right).
\end{aligned}$$

Koska $\mathscr{C}_\lambda^k \subseteq (\mathcal{C}_l^\lambda)^k$ kaikilla $l \in \mathbb{N}$, niin eräs peite joukolle F on konstruktiovaihe l. Koska jokainen joukko $\mathcal{C}_l^\lambda$ koostuu 2^l kappaleesta erillisiä suljettuja välejä, joiden pituus on λ^l, niin $(\mathcal{C}_l^\lambda)^k$ koostuu $(2^l)^k$ kappaleesta kuutioita, joiden sivun pituus on λ^l. Lauseen 1.3 kohdan (b) nojalla $N_{\lambda^k}(F) \leq 2^{kl}$.

Siten

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathcal{B}} F &= \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \le \overline{\lim_{l \to \infty}} \frac{\ln(2^{kl})}{-\ln \lambda^{l-1}} = \overline{\lim_{l \to \infty}} \frac{l \ln 2^k}{-(l-1)\ln \lambda} \\
&= \frac{\ln 2^k}{-\ln \lambda} \overline{\lim_{l \to \infty}} \frac{l}{l-1} = \frac{k \ln 2}{\ln \lambda^{-1}} = \frac{k \ln 2}{\ln (2^{-k/s})^{-1}} = \frac{k \ln 2}{\frac{k}{s} \ln 2} \\
&= s.
\end{aligned}$$

Toisaalta joukon F konstruktiossa ei missään vaiheessa poisteta k-ulotteisten kuutioiden kulmapisteitä eli jokaisen konstruktiovaiheen kuutioiden kulmat kuuluvat joukkoon F. Konstruktiovaiheessa l muodostuvien kuutioiden sivun pituus on λ^l ja kuutioiden väleistä poistettujen avointen joukkojen halkaisija on vähintään $\lambda^{l-1} - 2\lambda^l$. Koska kolmen samalla kantavektorinsuuntaisella suoralla olevan kulman etäisyys on vähintään $\lambda^l + \lambda^{l-1} - 2\lambda^l = \lambda^{l-1} - \lambda^l > \lambda^l$, niin mikään λ^l-kuutio ei voi peittää kuin toisen reunimmaisista kulmista, jos se peittää keskimmäisen. Siten jokainen λ^l-kuutio voi peittää enintään 2^k kulmapistettä. Peitetään λ^l-ruuduilla joukko F. Koska λ^l-kuutioiden täytyy erityisesti peittää kaikki kulmat, niin niitä tarvitaan vähintään 2^{kl} kappaletta eli $N_{\lambda^k}(F) \ge 2^{kl}$. Näin ollen Lauseen 1.3 kohdan (a) nojalla

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}} F \ge \lim_{l \to \infty} \frac{\ln(2^{kl})}{-\ln \lambda^l} = \frac{\ln 2^k}{-\ln \lambda} \lim_{l \to \infty} \frac{l}{l} = \frac{k \ln 2}{\ln(2^{-k/s})^{-1}} = s.$$

Siten $s \le \underline{\dim}_{\mathcal{B}} F \le \overline{\dim}_{\mathcal{B}} F \le s$ eli $\dim_{\mathcal{B}} F = s$.

$\square$

Liitteet

Liitteistössä esitettävä materiaali ei kuulu enää varsinaisen tutkielman tehtävänantoon mutta sitä vähintäänkin sivutaan tutkielman aikana, joten sen esittäminen lienee mielekästä.

A Cantorin Joukosta

Tunnetuin esimerkki Cantorin joukosta lienee niin kutsuttu *keskimmäisen kolmanneksen Cantorin joukko*. Se voidaan muodostaa iteratiivisesti poistamalla ensin yksikkövälin keskeltä avoin kolmannes. Tämän jälkeen poistetaan muodostuneiden suljettujen kolmannesten keskeltä avoimet kolmannekset, jolloin saadaa neljä uutta väliä, joiden keskeltä poistetaan taas avoimet kolmannekset. Tätä jatketaan "äärettömän kauan", jolloin lopputuloksena saadaa Cantorin joukko. Aiemmilla merkinnöillä tämä vastaa joukkoa $\mathscr{C}_{1/3}$. Yleistetään aiemmin esitettyä Cantorin joukkoa hieman seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä A.1. Olkoot $m \in \mathbb{N}$ sellainen, että $m \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sellainen, että $0 < \lambda < 1/m$ ja $a, b \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $a < b$. Asetetaan $\mathcal{C}_0^{\lambda,m} = [a, b]$. Poistetaaan joukosta $\mathcal{C}_0^{\lambda,m}$ tasavälisesti $m-1$ kappaletta avoimia $\frac{b-a-\lambda m}{m-1}$-mittaisia välejä ja merkitään jäljelle jäävää joukkoa

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1^{\lambda,m} &= C_0^{\lambda,m} \cup \cdots \cup C_{m-1}^{\lambda,m} \\ &= \bigcup_{n=0}^{m-1} \left[c_i + n\left(\lambda + \frac{b-a-\lambda m}{m-1}\right), c_i + n\left(\lambda + \frac{b-a-\lambda m}{m-1}\right) + \lambda \right].\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että poisto on tehty k kertaa eli on saatu joukko

$$\mathcal{C}_k^{\lambda,m} = \bigcup_{\boldsymbol{\imath} \in \{0,\ldots,m-1\}^k} C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}.$$

Muodostetaan joukot $C_{\boldsymbol{\imath}0}^{\lambda,m}, \ldots, C_{\boldsymbol{\imath}(m-1)}^{\lambda,m}$ poistamalla joukosta $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ tasavälisesti $m-1$ kappaletta avoimia $\frac{b-a-\lambda m}{m-1}$ -mittaisia välejä. Nimetään jäljelle jäävät joukot seuraavasti

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{k+1}^{\lambda,m} &= \bigcup_{\mathbf{\imath}\in\{0,\dots,m-1\}^k} \left(C_{\mathbf{\imath}0}^{\lambda,m} \cup \cdots \cup C_{\mathbf{\imath}(m-1)}^{\lambda,m} \right) \\ &= \bigcup_{\mathbf{\imath}\in\{0,\dots,m-1\}^k} \left(\bigcup_{n=0}^{m-1} \left[c_i + n\left(\lambda + \frac{c^i - c_i - \lambda m}{m-1}\right), \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. c_i + n\left(\lambda + \frac{c^i - c_i - \lambda m}{m-1}\right) + \lambda \right] \right)\end{aligned}$$

missä c_i on välin $C_{\mathbf{\imath}}^{\lambda,m}$ alkupiste ja c^i loppupiste. Kutsutaan joukkoa $\mathcal{C}_{k+1}^{\lambda,m}$ *Cantorin joukon konstruktiovaiheeksi* $k+1$. Määritellään (*yhtäläinen*) *Cantorin joukko* $\mathscr{C}_{\lambda,m}$ avaruudessa $\mathbb{R}$ asettamalla

$$\mathscr{C}_{\lambda,m} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n^{\lambda,m} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\mathbf{\imath}\in\{0,\dots,m-1\}^n} C_{\mathbf{\imath}}^{\lambda,m} \right). \tag{A.1}$$

Huomautus A.2.

(a) Luku m kertoo, kuinka monta kopiota Cantorin joukko sisältää itsestään eli kuinka monta itsesimilaarista osaa jokainen väli sisältää. Luku λ taasen on skaalauskerroin eli se kertoo, mikä on peräkkäisten Cantorin joukon sisältämien kopioiden kokojen suhde eli missä suhteessa itsesimilaariset osat pienenevät.

(b) Jokaisessa konstruktionvaiheessa jokainen aikaisempi väli korvataan m-kappaleella uusia välejä, joiden pituus on λ kertaa edellisen välin pituus. Siten konstruktiovaiheessa k välejä on yhteensä m^k-kappaletta ja jokaisen välin pituus on λ^k. Koska $\lambda^k \to 0$ monotonisesti, kun $k \to \infty$, niin jokainen konstruktiovaihe sisältyy edelliseen vaiheeseen täysin.

(c) Koska $0 \in C_{0\cdots 0}^{\lambda,m}$ aina, niin $0 \in \mathcal{C}_n^{\lambda,m}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten $0 \in \mathscr{C}_{\lambda,m}$. Vastaavasti kaikkien välien $C_{\mathbf{\imath}}^{\lambda,m}$ päätepisteet kuuluvat myös Cantorin joukkoon, koska niitä ei poisteta missään vaiheessa. Näin ollen $\mathscr{C}_{\lambda,m} \neq \varnothing$ eli Cantorin joukon määritelmä on mielekäs.

(d) Cantorin joukon konstruktiovälien päätepisteiden joukko on selvästi numeroituvasti ääretön sillä jokaisessa konstruktiovaiheessa muodostuu uusia välejä äärellinen määrä, joten niiden päätepisteitä on äärellinen määrä eli myös uusia päätepisteitä on äärellinen määrä. Koska konstruktiovaiheita on numeroituvasti ääretön määrä, voidaan jokaisen vaiheen uudet päätepisteet liittää (induktiivisesti) järjestyksessä luonnolliisiin lukuihin, jolloin saadaan määriteltyä selvästi bijektiivinen kuvaus. Siten $\mathscr{C}_{\lambda,m} \succcurlyeq \mathbb{N}$.

(e) Aiemmin esitelty Cantorin joukko $\mathscr{C}_\lambda$ vastaa yleistettyä Cantorin joukkoa $\mathscr{C}_{\lambda,2}$.

Tutustutaan seuraavaksi hieman Cantorin joukon ominaisuuksiin. Myös Esimerkissä 1.8 laskettu laatikkoulottuvuus yleistyy helposti.

Esimerkki A.3.

(a) Määrätään Cantorin joukon sisus.

Olkoon $x \in \mathtt{int}(\mathscr{C}_{\lambda,m})$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subseteq \mathscr{C}_{\lambda,m}$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ sellainen, että $\lambda^k < r/2$. Näin voidaan valita, koska $\lambda^k \to 0$, kun $k \to \infty$. Koska $\mathtt{diam}(C_k^{\lambda,m}) = \lambda^k < r/2$ ja kaikki välit $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ ovat suljettuja ja erillisiä, on olemassa sellainen $y \in B(x,r)$, että $y \notin C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \{0,\dots,m-1\}^k$. Siten Määritelmän A.1 yhtälön (A.1) nojalla $y \notin \mathscr{C}_{\lambda,m}$, mikä on ristiriita pallon $B(x,r)$ valinnan kanssa. Siten $x \notin \mathtt{int}(\mathscr{C}_{\lambda,m})$ eli $\mathtt{int}(\mathscr{C}_{\lambda,m}) = \varnothing$.

(b) Määrätään Cantorin joukon kasautumispisteet.

Koska $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ on suljettu kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \{0,\dots,m-1\}^n$, niin $\mathcal{C}_n^{\lambda,m}$ on näiden äärellisenä yhdisteenä suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten Cantorin joukko on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu eli $\mathscr{C}_{\lambda,m} = \mathtt{cl}(\mathscr{C}_{\lambda,m})$. Siten jokainen kasautumispiste kuuluu Cantorin joukkoon.

Olkoon $x \in \mathscr{C}_{\lambda,m}$. Nyt $x \in \mathcal{C}_n^{\lambda,m}$ kaikilla n eli $x \in C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ jollakin $\boldsymbol{\imath} \in \{0,\dots,m-1\}^n$ kaikilla n. Koska välin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ molemmat päätepisteet kuuluvat Cantorin joukkoon, on x erisuuri vähintään toisen päätepisteen (tässä c) kanssa. Lisäksi välin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ pituus on λ^n eli $|x-c| \leq \lambda^n$. Olkoon $r > 0$. Nyt $c \in B(x,r) \cap (\mathscr{C}_{\lambda,m} \setminus \{x\})$, kun valitaan n riittävän suureksi eli siten, että $\lambda^n < r$. Siten piste x on Cantorin joukon kasautumispiste eli kaikki Cantorin joukon ja vain Cantorin joukon pisteet ovat kasautumispisteitä.

Lause A.4. *Cantorin joukko on ylinumeroituvasti ääretön.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathscr{C}_{\lambda,m}$. Nyt $x \in C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ jollakin $\boldsymbol{\imath} \in \{0,\ldots,m-1\}^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten pistettä x vastaa jokin $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$, missä $\alpha_n \in \{0,\ldots,m-1\}$ on konstruktiovaiheen n välin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$, jolle $x \in C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$, indeksin $\boldsymbol{\imath}$ viimeinen merkki. Toisin sanoen $\alpha|_n = \boldsymbol{\imath}$. Toisaalta jokainen α määrää jonon Cantorin joukon konstruktiovälejä $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$, jotka ovat alkion α määrittelyn perusteella sisäkkäisiä. Sisäkkäisten suljettujen välien periatteen nojalla

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} C_{\alpha|_n}^{\lambda,m} \neq \varnothing.$$

Siten jokainen α määrää alkion Cantorin joukosta. Lisäksi jos $\alpha \neq \alpha'$, niin $\alpha_n \neq \alpha'_n$ jollakin n eli niiden määräämät Cantorin joukon alkiot x ja y kuuluvat eri konstruktiovaiheen $\mathcal{C}_n^{\lambda,m}$ väleihin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m} \ni x$ ja $C_{\boldsymbol{\jmath}}^{\lambda,m} \ni y$. Koska konstruktiovälit $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m}$ ja $C_{\boldsymbol{\jmath}}^{\lambda,m}$ ovat aina erillisiä, niin $x \neq y$. Siten jokainen α määrää täsmälleen yhden Cantorin joukon alkion eli joukon $A := \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ja Cantorin joukon välillä on yksi yhteen -vastaavuus.

Jos joukko A olisi numeroituvasti ääretön, niin sen kaikki alkiot voitaisiin numeroida eli $\Gamma = \mathbb{N}$, merkitään

$$\begin{array}{lll} 0 & \mapsto & \alpha^0 = \alpha_0^0\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots \\ 1 & \mapsto & \alpha^1 = \alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_2^1\ldots \\ 2 & \mapsto & \alpha^2 = \alpha_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \end{array} .$$

Määritellään nyt α^j asettamalla

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 0, & \text{jos} \quad \alpha_i^i \neq 0 \\ 1, & \text{jos} \quad \alpha_i^i = 0. \end{cases}$$

Nyt α^j ei esiinny edellisessä listauksessa, koska $\alpha_i^j \neq \alpha_i^i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siten diagonaaliargumentin nojalla joukko A on ylinumeroituva, joten myös $\mathscr{C}_{\lambda,m} \succ \mathbb{N}$.

$\square$

Lause A.5. *Cantorin joukko on täysin epäyhtenäinen*[†] *.*

Todistus. Olkoot $x, y \in \mathscr{C}_{\lambda,m}$ erisuuria. Nyt $|x-y| > \lambda^k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Siten pisteet $x, y \in \mathcal{C}_k^{\lambda,m}$ kuuluvat eri suljettuihin konstruktioväleihin $C_{\boldsymbol{\imath}}^{\lambda,m} \ni x$ ja $C_{\boldsymbol{\jmath}}^{\lambda,m} \ni y$ joillakin $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \{0, \ldots, m-1\}^k$, $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$, koska jokaisen kontruktiovälin halkaisija on λ^k. Siten pisteet x ja y eivät voi kuulua samaan yhtenäiseen osajoukkoon eli Cantorin joukolla on vain triviaalit yhtenäiset osajoukot. Siten kaikki sen komponentit voivat sisältää enintään yhden alkion.

$\square$

Lause A.6. *Cantorin joukko on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchyn jono Cantorin joukossa. Koska $(x_n) \subseteq [a, b]$, niin *Bolzano-Weierstrass* -lauseen nojalla on olemassa osajono x_{n_j}, joka suppenee kohti lukua $x \in [a, b]$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, että $|x_{n_j} - x| < \varepsilon/2$ kaikilla $n_j \geq n_1$ ja että $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ kaikilla $n, m \geq n_2$. Olkoon $n_\varepsilon = \mathtt{max}(n_1, n_2)$. Tällöin erityisesti $|x_n - x_{n_j}| < \varepsilon/2$ kaikilla $n_j, n \geq n_\varepsilon$, joten

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_j} + x_{n_j} - x| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n_j, n \geq n_\varepsilon$. Siten myös jono (x_n) suppenee kohti lukua x. Koska $(x_n) \subseteq \mathscr{C}_{\lambda,m}$, niin kasautumispisteiden jonokarakterisaation nojalla myös $x \in \mathtt{cl}(\mathscr{C}_{\lambda,m}) = \mathscr{C}_{\lambda,m}$. Siten mielivaltainen Cantorin joukon Cauchyn jono suppenee Cantorin joukossa.

$\square$

[†] Joukko on täysin epäyhtenäinen, jos sen jokainen maksimaalinen yhtenäinen osajoukko koostuu enintään yhdestä alkiosta.

Koska Cantorin joukko on ylinumeroituvasti ääretön, se on jollain tapaa suuri, koska se sisältää enemmän alkioita kuin luonnollisia lukuja on olemassa. Kuitenkin se on myös pienempi kuin reaalilukujen joukko, kuten laatikkoulottuvuus kertoo. Tämä on tyydyttävää, koska Cantorin joukko on reaalilukujen osajoukko, joka on muodostettu poistamalla suljetulta väliltä lähes kaikki pisteet. Itse asiassa, konstruktiovaiheessa n jäljelle jäävien välien yhteispituus on $(\lambda m)^n \to 0$, kun $n \to \infty$, eli jossain mielessä Cantorin joukosta poistetataan lähes koko alkuperäinen väli konstruktion aikana. Tämä on linjassa sen kanssa, että täysin epäyhtenäisenä joukkona Cantorin joukko koostuu vain yksittäisistä pisteistä, jotka ovat suhteellisen harvassa, koska mikään joukon ulkopuolinen piste ei ole kasautumispiste. Toisaalta, koska jokainen Cantorin joukon piste on kasautumispiste, mielivaltaisen läheltä jokaista sen pistettä löytyy aina toinen Cantorin joukon piste eli Cantorin joukossa ei ole yhtään niin sanottua erakkopistettä. Lisäksi Cantoin joukossa ei ole reikiä, jos sitä tarkastellaan sisältä päin, koska se on täydellinen.

Lähdeluettelo

[Edgar, 1990] Edgar, G. A. (1990). *Measure, topology and fractal geometry.* Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New York, 1^{st} edition.

[Falconer, 1990] Falconer, K. J. (1990). *Fractal Geometry.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, 1^{st}, reprinted edition.