

Kvadraattisen kuvauksen diskreetti dynaaminen systeemi

Pro gradu
Mikko Vainio
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2018

Sisältö

Johdanto	2
1 Tarvittavia ennakkotietoja	4
1.1 Periodisista pisteistä	4
1.2 Sharkovskiin lause	10
1.3 Jonoavaruus ja siirtokuvaus	14
1.4 Topologinen konjugaatio	18
1.5 Schwarzin derivaatta	25
1.6 Moniulotteista analyysiä dynaamisiin systeemeihin	31
1.7 Kaaos	43
2 Kvadraattinen kuvaus	45
2.1 Kvadraattisen kuvauksen määritelmä ja sen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $[0, 3]$	45
2.2 Kvadraattisen kuvauksen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $]3, 4[$	49
2.3 Kvadraattisen kuvauksen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $[4, \infty[$	54
2.4 Sovelluksia kvadraattiselle kuvaukselle	61
Lähdeluettelo	63

Johdanto

Kvadraattisen kuvauksen $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, joka tunnetaan myös nimellä logistinen kuvaus, muodostama diskreetti dynaaminen systeemi on lyhyellä vilkaisulla yksinkertaisen näköinen, mutta tarkemmalla tarkastelulla se paljastuu yllättävän monimutkaiseksi. Selkeästi tärkein lähde teos tälle työlle oli Devaney'n kirja *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [1]. Näin ollen erityisesti kappaleessa 1. *Tarvittavia ennakkotietoja* on paljon yhteeneväisyyksiä Devaney'n teoksen kanssa.

Kappaleessa 1. käydään aluksi läpi periodisia pisteitä. Tämän jälkeen laajennetaan työssä tarvittavaa teoriaa ja tuodaan esille sellaisia teorian kannalta välttämättömiä ennakkotietoja kuten Schwarzin derivaatta ja Sharkovskiiin lause sekä niihin liittyviä tärkeitä tuloksia. Ehkäpä jopa kappaleen tärkeimpänä asiana on topologinen konjugaatio. Sen perusteella keskenään topologisesti konjugaatit metriset avaruudet käyttäytyvät samalla tavalla. Tämä mahdollistaa sen, että alkuperäisestä metrisestä avaruudesta saadaan informaatiota tutkimalla sen kanssa topologisesti konjugaattia metristä avaruudesta. Tässä työssä tullaan näyttämään, että tutkimalla jonoavaruuden ja siirtokuvauksen muodostamaa metristä avaruutta, tulee samalla myös tutkittua kvadraattista kuvausta. Esimerkiksi kvadraattisen kuvauksen kaoottisuuden todistaminen parametrin arvoilla $\mu \geq 4$ onnistunee helpommin tutkimalla topologisesti konjugaattia jonoavaruutta.

Kappaleessa 2. *Kvadraattinen kuvaus* on tarkoitus antaa kvadraattisen kuvauksen dynaamisesta systeemistä yleiskuva. Tässä yleiskuvassa on hyvin keskeisessä roolissa periodiset pisteet. Periodinen rata voi olla attraktiivinen, kun parametri $\mu \in [0, 4[$, jolloin se vetää lähiympäristöstä pisteitä puoleensa. Koska kvadraattisella kuvauksella on enintään yksi attraktiivinen periodinen rata, niin systeemi pyrkii asettumaan tähän attraktiiviseen periodiseen rataan, jos pisteen x rata päättyy tähän attraktiivisen radan vaikutuspiiriin.

Kun parametri $\mu \geq 4$, muuttuu systeemin käyttäytyminen hyvin erilaiseksi. Tällöin ei ole enää attraktiivista periodista rataa vaan systeemi käyttäytyy tällöin kaoottisesti. Kaoottisuudesta myös seuraa, että systeemin käyttäyty-

mistä on lähes mahdoton ennustaa.

Kappaleessa 2.2 *Sovelluksia kvadraattiselle kuvaukselle* esitellään kaksi erityyppistä kvadraattisen kuvauksen sovellusta. Ensimmäinen on hyvin suora sovellus populaation mallinnuksesta kvadraattisella kuvauksella. Toinen sovellus on satunnaislukugeneraattori. Satunnaislukugeneraattorisovelluksessa on mielenkiintoinen piirre, että siinä hyödynnetään kvadraattisen kuvauksen kaoottisuutta.

Tässä työssä on pyritty käyttämään yksinkertaista teoriaa hyödyksi. Esimerkiksi kompleksianalyysin menetelmiä ei käytetä ollenkaan. Vaikka käytetty teoria on kohtuullisen yksinkertaista, niin pyritään tässä kuitenkin kattavasti käymään läpi kvadraattisen kuvauksen muodostamaa dynaamista systeemiä.

1 Tarvittavia ennakkotietoja

Vaikka kvadraattinen kuvaus $f(x) = \mu x(1-x)$ (Määritelmässä 2.1 sivulla 45 on tarkka määritelmä.) on hyvin yksinkertaisen ja selkeän näköinen, kätkeytyy sen dynamiikkaan yllättävän monimutkaista matematiikkaa. Tässä kappaleessa on tarkoitus käydä läpi tarvittavia ennakkotietoja, mitä vaaditaan kvadraattisen kuvauksen dynamiikan tarkasteluun. Kvadraattinen kuvaus on eräs esimerkki diskreetistä dynaamisesta systeemistä.

1.1 Periodisista pisteistä

Dynaamisiin systeemeihin kuuluu hyvin keskeisesti radan käsite. Systeemin dynamiikkaa tutkittaessa pyritään monesti päättämään joko systeemin historiaa tai systeemin tulevaisuutta. Systeemin rataa tutkimalla voidaan saada vastaus edelliseen ongelmaan.

Määritelmä 1.1. Diskreetiksi dynaamiseksi systeemiksi kutsutaan paria (X, f) , missä X on joukko ja $f: X \rightarrow X$ on kuvaus. Joukko X on tässä tutkielmassa pääsääntöisesti reaalilukujen joukko tai sen osajoukko. Merkin-

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f \circ f \circ f)}_{n \text{ kappaletta}}(x).$$

Diskreetin dynaamisen systeemin eteneväksi radaksi pisteessä x kutsutaan pisteiden

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x) \dots$$

joukkoa. Etenevästä radasta pisteessä x käytetään lyhennettä $\mathcal{O}^+(x)$. ([1], s. 17-18)

Dynaamisen systeemin rata olisi ollut myös mahdollista määritellä take-
nevasti. Koska kvadraattinen kuvaus ei ole injektiivinen kuvaus, niin systeemin historia ei ole yksikäsitteinen. Näin ollen määritelmässä 1.1 ei ole määritely takenevaa rataa. Diskreetin dynaamisen systeemin rata voi sisältää säännöllisiä toistuvia jaksoja.

Määritelmä 1.2. Olkoon f kuvaus ja $n > 0$ kokonaisluku. Tällöin pistettä x kutsutaan n -periodiseksi pisteeksi, jos

$$f^n(x) = x \text{ ja } f^k(x) \neq x \text{ kaikilla kokonaisluvuilla } k \in]0, n[.$$

Jos $n = 1$, niin pistettä x kutsutaan kiintopisteeksi.

Jos periodisen pisteen alkukuva sisältää useamman kuin yhden pisteen, niin on mahdollista, että jonkin ei-periodisen pisteen etenevä rata sisältää periodisen pisteen. Näin tämä piste alkaa jossain vaiheessa käyttäytymään kuin periodinen piste. Seuraavassa määritelmässä on määritelty tällaiset pisteet.

Määritelmä 1.3. Olkoon \mathcal{P} periodisten pisteiden joukko. Pistettä x kutsutaan tulevaksi periodiseksi pisteeksi, jos on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $k > 0$, että

$$x \notin \mathcal{P}, \text{ mutta } f^k(x) \in \mathcal{P}.$$

Periodisten pisteiden ympäristöjä tarkasteltaessa pitää myös laajentaa suppenemisen käsitettä. Edes periodinen piste ei suppene itseään kohti analyysistä tutulla suppenemisen määritelmällä, ellei se ole kiintopiste. Näin on hyvä laajentaa suppenemisen käsitettä, mitä tarkoitetaan, kun puhutaan suppenemisestä kohti periodista pistettä.

Määritelmä 1.4. Olkoon piste x_0 m -periodinen piste ja n kokonaisluku. Jos on olemassa sellainen kokonaisluku $k \geq 0$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nm+k}(x) = x_0,$$

piste x suppenee kohti m -periodista pistettä x_0 .

Samalla tavalla kuin kiintopisteetkin pystyvät iteroitaessa vetämään lähellä olevia pisteitä puoleensa, pystyvät myös periodiset pisteet vetämään lähellä olevia pisteitä puoleensa. Periodiset pisteet pystyvät olemaan myös repulsiivisia.

Määritelmä 1.5. Olkoon piste x_0 m -periodinen piste. Oletetaan, että kuvaus f^m on derivoituva pisteessä x_0 . Jos $|(f^m)'(x_0)| < 1$, niin pistettä x_0 kutsutaan attraktiiviseksi periodiseksi pisteeksi. Periodista pistettä kutsutaan repulsiiviseksi, jos $|(f^m)'(x_0)| > 1$.

Herää helposti kysymys, mitä tarkoittaa, kun periodista pistettä kutsutaan attraktiiviseksi tai repulsiiviseksi. Kahdesta seuraavasta lauseesta löytyy syy, miksi tällainen jaottelu on toimiva. Lisäksi niissä käy ilmi, miksi nämä käsitteet ovat kuvaavia periodisia pisteitä käsiteltäessä.

Lause 1.6. *Olkoon x_0 kiintopiste ja olkoon f sellainen derivoituva kuvaus, että $|f'(x_0)| \leq 1$. Jos on olemassa sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{V}_{x_0} , että $|f'(x)| < 1$, kun $x \in \mathcal{V}_{x_0} \setminus \{x_0\}$, niin tällöin on olemassa sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{U}_{x_0} , että*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0 \text{ aina, kun } x \in \mathcal{U}_{x_0}.$$

Todistus. Olkoon $\delta > 0$ sellainen reaaliluku, että välille $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= \mathcal{U}_{x_0}$ on voimassa $\mathcal{U}_{x_0} \subset \mathcal{V}_{x_0}$. Jos piste $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, niin väliarvolausetta soveltaen voidaan päätellä, että

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|,$$

joten $f(x) \in \mathcal{U}_{x_0}$. Jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k = |f^k(x) - x_0|$ ja $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, on positiivisterminen jono. Väliarvolausetta hyödyntäen voidaan arvioida alaspäin lauseketta

$$|f^{k+1}(x) - x_0| = |f(f^k(x)) - f(x_0)| < |f^k(x) - x_0|,$$

jos $f^k(x) \neq x_0$. Näin ollen jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on aidosti vähenevä.

Muodostetaan vasta oletus, että on olemassa sellainen reaaliluku $m > 0$, että $\inf(a_k) = m$. Vastaoletuksesta seuraa, että $f^k(x) \neq x_0$ kaikilla kokonaisluvuilla k . Lisäksi jonon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on supettava kohti reaalilukua m , koska $\inf(a_k) = m$ ja jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on vähenevä.

Olkoon z mielivaltainen piste, jolle on voimassa $m = |z - x_0|$. Koska jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on aidosti vähenevä, niin $m < \delta$. Näin ollen $z \in \mathcal{U}_{x_0}$. Tästä seuraa,

että $|f(z) - x_0| < |z - x_0| = m$. Näin ollen on mahdollista valita sellainen pisteen $f(z)$ avoin ympäristö $\mathcal{W}_{f(z)}$, että mielivaltaiselle tämän avoimen ympäristön pisteelle $w \in \mathcal{W}_{f(z)}$ on voimassa $|w - x_0| < m$. Jatkuvuuden määritelmästä seuraa, että on olemassa sellainen pisteen z avoin ympäristö $\mathcal{V}_z \ni z$, että $f(\mathcal{V}_z) \subset \mathcal{W}_{f(z)}$.

Pisteeksi z on kaksi erilaista vaihtoehtoa $x_0 + m$ ja $x_0 - m$. Näin ollen ainakin toisen näistä mahdollisista pisteen z arvoista on oltava pisteen $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ radan kasautumispiste, koska aidosti vähenevä jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti reaalityötä m . Valitaan, että $z = z_0$, missä z_0 on pisteen x radan kasautumispiste. Kun pisteen x radalla on kasautumispiste z_0 , niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku i , että $f^i(x) \in \mathcal{V}_{z_0}$. Kun edelleen jatketaan päätelyä, voidaan havaita, että $f^{i+1}(x) \in \mathcal{W}_{f(z_0)}$. Näin ollen $a_{i+1} < m$, mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa. Ainoa mahdollisuus on, että $\inf(a_k) = 0$. Tästä seuraa, että jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti nollaa. Se on yhtäpitävää väitteen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$$

kanssa. □

Lause 1.7. *Olkkoon x_0 kiintopiste ja olkkoon f sellainen kuvaus, että $|f'(x_0)| \geq 1$. Jos on olemassa sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{V}_{x_0} , että $|f'(x)| > 1$, kun $x \in \mathcal{V}_{x_0} \setminus \{x_0\}$, niin tällöin on olemassa sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{U}_{x_0} , että jokaista pistettä $x \in \mathcal{U}_{x_0} \setminus \{x_0\}$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $k > 0$, että*

$$f^k(x) \notin \mathcal{U}_{x_0}.$$

Todistus. Olkkoon joukko $\mathcal{U}_{x_0} =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ sellainen rajoitettu avoin väli, että sen sulkeuma on joukon \mathcal{V}_{x_0} osajoukko. Väliarvolauseesta seuraa, että mielivaltaisella positiivisella kokonaisluvulla k

$$|f^{k+1}(x) - x_0| > |f^k(x) - x_0|,$$

kun piste $x \in \mathcal{U}_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Näin ollen jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k = |f^k(x) - x_0|$, on aidosti kasvava.

Muodostetaan vasta oletus, että $f^k(x) \in \mathcal{U}_{x_0}$ aina, kun $x \in \mathcal{U}_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Tällöin jonolla $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on olemassa $\sup(a_k) = M$. Joukon \mathcal{U}_{x_0} sulkeumassa on piste z , jolle on voimassa $|z - x_0| = M$. Olkoon \mathcal{W} sellainen pisteen z avoin ympäristö, että $f(\mathcal{W}) \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Edellä kuvattu ympäristö on olemassa väliarvolauseen ja kuvauksen f jatkuvuuden perusteella ja se pystytään muodostamaan vastaavasti, kuten lauseen 1.6 todistuksessa. Toisaalta on olemassa sellainen i , että $f^i(x) \in \mathcal{W}$. Tästä seuraa, että $|f^{i+1}(x) - x_0| > M$. Tämä on ristiriita. Kun piste $x \in \mathcal{U}_{x_0} \setminus \{x_0\}$, on siis olemassa sellainen k , että $f^k(x) \notin \mathcal{U}_{x_0}$. \square

Lauseissa 1.7 ja 1.6 pyrittiin jo huomioimaan vähän, miten käy, kun kiintopisteen x_0 derivaatan itseisarvolle on voimassa $|f'(x_0)| = 1$. Kuten määritelmästä 1.5 voidaan havaita, siinä ei ole eritelty tällaista tilannetta. Kahdessa seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan vielä lauseita 1.7 ja 1.6.

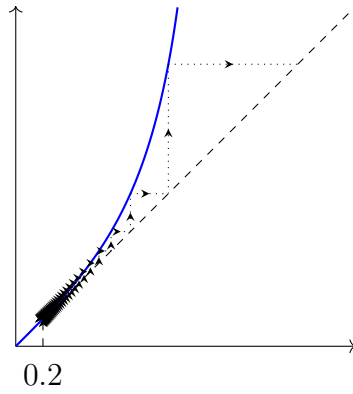
Esimerkki 1.8. Olkoon kuvaus $f(x) = \tan(x)$. Tällöin sen derivaatan lauseke on $f'(x) = 1 + [\tan(x)]^2$. Kuvauksella f on kiintopiste kohdassa $x = 0$. Derivaatan lausekkeesta nähdään, että kuvaukselle f on voimassa lauseen 1.7 oletukset välillä $I =]-1, 1[$. Näin ollen on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $k > 0$, että pisteen x kuuluessa joukkoon $I \setminus \{0\}$ on voimassa $f^k(x) \notin I$.

Esimerkki 1.9. Olkoon kuvaus $f(x) = -\arctan(x)$. Sillä on kiintopiste kohdassa $x = 0$. Kuvauksen f derivaatan lauseke on

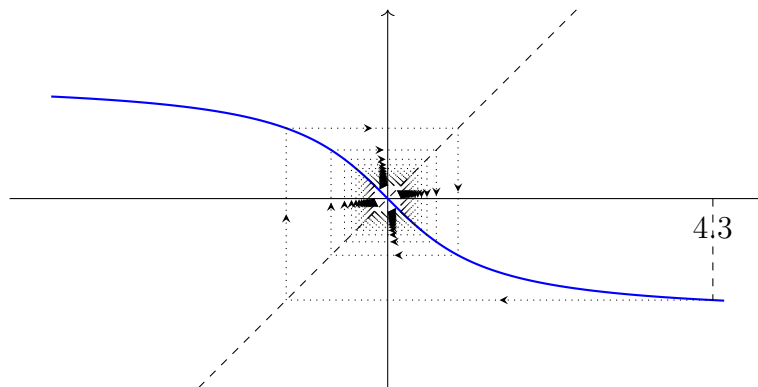
$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Nyt nähdään, että lauseen 1.6 oletukset ovat voimassa. Näin ollen on olemassa pisteen $x = 0$ avoin ympäristö, jossa kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä $x = 0$ iteroitaessa kuvauksella f .

Molemmista esimerkeistä on mahdollista tehdä selventävä kuva. Kuva 1.1 pyrkii havainnollistamaan esimerkkiä 1.8. Kuva 1.2 pyrkii havainnollistamaan esimerkkiä 1.9. Näissä kuvissa nähdään miten käy kun esimerkkien kuvauksilla iteroidaan kiintopisteen läheltä.



Kuva 1.1: Kuvassa on kuvaus $\tan(x)$. Lisäksi nähdään myös graafisesti, että kiintopiste $x = 0$ käyttäytyy repulsiivisesti alkuarvolla $x = 0,2$.



Kuva 1.2: Kuvassa on kuvaus $\arctan(-x)$. Lisäksi nähdään myös graafisesti, että kiintopiste $x = 0$ käyttäytyy attraktiivisesti alkuarvolla $x = 4,3$

1.2 Sharkovskiiin lause

Jatkuvilla kuvauksilla on hyvin erityislaatuinen piirre. Tällaisilla kuvauksilla periodisten pisteiden olemassaolo noudattaa tiettyä niin kutsuttua Sarkovskiiin järjestystä. Kuvassa 1.3 on esitetty tämä järjestys. Sarkovskiiin järjestys järjestelee luonnolliset luvut uuteen järjestykseen. Sarkovskiiin lause (Lause 1.14) antaa hyvän syyn, miksi tällainen järjestely kannattaa tehdä. Ennen kuin tutustutaan tarkemmin Sarkovskiiin lauseeseen, niin todistetaan kolme lemmaa, joiden avulla on mahdollista todistaa Sarkovskiiin lause.

Lemma 1.10. *Olkoot I ja J sellaisia suljettuja välejä, että joukko $I \subset J$ ja joukko $J \subset f(I)$, missä f on jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa kiintopiste $x_0 \in I$.*

Todistus. Olkoon kuvaus $g(x) = f(x) - x$. Olkoon suljettu väli $J = [a, b]$. Koska $J \subset f(I)$, niin on olemassa pisteet $x_1, x_2 \in I$, joille on voimassa $f(x_1) = a$ ja $f(x_2) = b$. Koska $I \subset J$, niin $f(x_1) \leq x_1$ ja $f(x_2) \geq x_2$. Jos jommassa kummassa epäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa, niin tällöin sellainen piste on kiintopiste. Jos kummassakaan pisteessä ei ole yhtäsuuruus voimassa, niin on tilanne, jossa $g(x_1) < 0$ ja $g(x_2) > 0$. Koska kuvaus g on jatkuva, niin Bolzanon lauseen mukaan on olemassa sellainen piste x_0 pisteiden x_1 ja x_2 välissä, että $g(x_0) = 0$, mikä on yhtäpitävää väitteen $f(x_0) = x_0$ kanssa. \square

Lemmassa 1.10 on syytä huomioida, että se ei päde avoimille väleille. Kuvaus $f(x) = x^2$ avoimella välillä $]0, 1[$ käy esimerkistä, joka toteuttaisi lemmän 1.10 oletukset. Tällöin lemmän 1.10 mukaiset välit I, J määritellään $I = J =]0, 1[$.

Lemma 1.11. *Olkoon I ja K äärellisen pituisia suljettuja välejä. Olkoon f sellainen jatkuva kuvaus, että $K \subset f(I)$. Tällöin on olemassa sellainen väli $J \subset I$, että $f(J) = K$.*

Todistus. Olkoon suljettu väli $I = [a, b]$, missä reaaliluvuille a ja b on voi-

$$\begin{aligned}
& 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \\
& \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \dots \prec 2^3 \cdot 7 \prec 2^3 \cdot 5 \prec 2^3 \cdot 3 \\
& \dots \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \\
& \dots \prec 2^1 \cdot 7 \prec 2^1 \cdot 5 \prec 2^1 \cdot 3 \\
& \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3
\end{aligned}$$

Kuva 1.3: Kuvassa on Sharkovskiiin järjestyksessä luonnolliset luvut.

massa $a < b$. Tällöin myös

$$\bigcap_{\substack{y \in I \\ K \subset f([y, b])}} [y, b] = [x_1, b]$$

on suljettu väli ja $x_1 \in I$. Vastaavasti tätä uutta suljettua väliä voidaan mahdollisesti lähteä kaventamaan toisesta laidasta. Näin muodostuu väliksi

$$\bigcap_{\substack{y \in I \\ K \subset f([x_1, y])}} [x_1, y] = [x_1, x_2],$$

joka on suljettu ja $x_2 \in I$. Kuvauksen f jatkuvuudesta seuraa, että jos väli K sisältää pisteen z , jota välin $[x_1, x_2] = J \subset I$ kuva $f(J)$ ei sisällä, niin tällöin sovellettaessa jatkuvuuden määritelmää pisteeseen x_1 tai x_2 havaittaisiin, että olisi olemassa suurempikin väli J'' , jonka osajoukkona olisi väli J , ja jonka kuvaan piste $z \notin f(J'')$. Näin havaittaisiin ristiriita, että välin J rajana ei voi olla joko piste x_1 tai x_2 . Näin ollen on voimassa $K \subset f(J)$.

Muodostetaan vasta oletus, että joukko J sisältäisi pisteen x , jolle on voimassa $f(x) \notin K$. Jos piste $x = x_1$ tai $x = x_2$, niin tällöin suoraan jatkuvuuden määritelmän perusteella olisi mahdollista löytää lyhyempikin väli J' jolle on voimassa $K \subset f(J')$. Jos piste $x \in \text{int } J$, niin Bolzanon lauseen perusteella joko välille $[x_1, x]$ tai $[x, x_2]$ on voimassa, että $K \subset f([x_1, x])$ tai

$K \subset f([x, x_2])$. Näin ollen joko piste x_1 tai x_2 ei voi olla välin J rajana, mikä on ristiriita.

Näin ollen on voimassa $K \subset f(J)$ ja $f(J) \subset K$. Tämä on yhtäpitävää väitteen $f(J) = K$ kanssa. \square

Edellisessä lemmassa 1.11 on välttämätöntä, että väli I on suljettu ja rajoitettu eli kompakti. Seuraavassa esimerkissä 1.12 käydään läpi vastaesimerkki, miksi ei riitä, että väli I on avoin lemmassa 1.11.

Esimerkki 1.12. Olkoon kuvaus

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sin(1/x),$$

missä muuttuja $x \in I =]0, 1[$. Nyt nähdään, että $f(I) =]-1, 1[$. Lisäksi kuvaus f on määrittelyjoukossaan jatkuva. Näytetään seuraavaksi, että määrittelyjoukossa ei ole olemassa väliä $J \subset I$, jolle olisi voimassa $f(J) =]0, 1[= K$. Kuten voidaan havaita, näin muodostettu tilanne toteuttaa lemmän 1.11 oletukset lukuun ottamatta välien I ja K olemista suljettuja välejä.

Lähdetään liikkeelle vastaoletuksesta, että olisi olemassa tällainen väli J , että $f(J) = K$. Ensinnäkin tällaiseen välin J alarajana on oltava pisteen $x_1 = 0$, koska muutoin ei olisi voimassa $K \subset f(J)$. Valitaan välille J mielivaltainen yläraja $x_2 \in \bar{I} \setminus \{0\}$. Tällöin on olemassa sellainen piste $x_0 \in J$, että $f(x_0) < 0$. Tällainen piste x_0 löydetään tutkimalla kuvauksen käyttäytymistä pisteen x_1 läheisyydessä valitsemalla sellainen arvo, että $\sin(1/x_0) < 0$. Tällöin kuvaus $f(x_0) < 0$, mikä on ristiriita. Näin ollen ei ole olemassa tällaista väliä J .

Lemmassa 1.12 olisi vielä mahdollista karsia oletuksia välistä K , mutta se ei tuo mitään erityistä hyötyä kvadraattisen kuvauksen tarkasteluun liittyen. Tämä lemma on tärkeässä roolissa todistettaessa seuraavaa ja viimeistä lemmaa 1.13 ennen Sarkovskiin lausetta (Lause 1.14).

Lemma 1.13. *Olkoon kuvaus f jatkuva ja olkoot $I_0, I_1, I_2, \dots, I_n$ sellaisia suljettuja sekä äärellisen pituisia välejä, että $I_i \subset f(I_{i+1})$ aina, kun kokonaisluvulle i on voimassa $0 \leq i < n$. Tällöin on olemassa sellainen väli $J_n \subset I_n$, että $f^n(J_n) = I_0$.*

Todistus. Todistetaan lause induktiotodistuksella. Lemmasta 1.11 seuraa, että jos $n = 1$, niin on olemassa sellainen väli $J_1 \subset I_1$, että $f(J_1) = I_0$. Induktio-oletuksen perusteella voidaan olettaa, että on olemassa sellainen väli $J_n \subset I_n$, että $f^n(J_n) = I_0$. Lemman 1.11 perusteella on olemassa sellainen väli $J_{n+1} \subset I_{n+1}$, että $f(J_{n+1}) = J_n$. Näin ollen on olemassa sellainen väli $J_{n+1} \subset I_{n+1}$, että $f^{n+1}(J_{n+1}) = I_0$. \square

Nyt on esitelty muutama lemma, joita voidaan käyttää apuna todistettaessa Sarkovskiin lausetta. Esitellään seuraavaksi itse Sarkovskiin lause.

Lause 1.14. *Sarkovskiin lause*

Olkoon kuvaus f jatkuva ja olkoon m positiivinen kokonaisluku. Jos kuvauksella f on m -periodinen piste, tällöin kuvauksella f on olemassa myös kaikki n -periodiset pisteet aina, kun positiiviselle kokonaisluvulle n on Sarkovskiin järjestyksen (Kuva 1.3) mukaisesti voimassa $n \prec m$.

Todistus. Todistus sivuutetaan pääosin. Kokonaisuudessaan todistus löytyy teoksesta [1] sivuilta 60 – 65. Käydään tässä vain läpi, miten periodin 3 olemassaolo implikoi muiden periodisten pisteiden olemassaolon.

Oletetaan, että kuvauksella f on kolmeperiodinen piste. Olkoon a , b ja c sellaisia reaalilukuja, joille on voimassa

$$f(a) = b, f(b) = c \text{ ja } f(c) = a.$$

Tällaiset reaaliluvut ovat olemassa kolmi-periodisen pisteen olemassaolon oletuksesta johtuen. Voidaan huoletta olettaa, että a on pienin näistä reaaliluvuista. Sen jälkeen on kaksi vaihtoehtoa lukujen a , b ja c suuruusjärjestykselle. Nämä kaksi mahdollista järjestystä ovat $a < b < c$ tai $a < c < b$. Esimerkin 1.26 perusteella voidaan olettaa, että järjestyksenä on $a < b < c$.

Olkoon väli $I_1 = [a, b]$ ja väli $I_0 = [b, c]$. Olkoon väli $I_k = I_0$ kaikilla kokonaisluvuilla k , missä $2 \leq k \leq n$ ja $n \geq 2$ on kokonaisluku. Nyt nähdään, että $I_0 \subset f(I_1)$, $I_1 \subset f(I_2)$, ja $I_k \subset f(I_{k+1})$. Nyt on näytetty, että kaikille kokonaisluvuille n on voimassa lemmän 1.13 oletukset. Näin ollen on olemassa $J_n \subset I_n$, jolle on voimassa $f^n(J_n) = I_0$. Lemman 1.10 perusteella

kuvauksella f^n on kiintopiste x_0 välillä J_n , koska $J_n \subset I_0 \subset f^n(J_n)$. Koska x_0 on kuvauksen f^n kiintopiste, on se enintään n -periodinen. Kun $n \neq 3$, on tämän kuvauksen f^n kiintopisteen oltava vähintään n -periodinen piste, sillä sen radan pisteistä on $n - 1$ pistettä on välillä I_0 ja yksi piste välillä I_1 , sillä $I_0 \cap I_1 = \{b\}$ ja pisteen x_0 radan pisteet ei sisällä pistettä b . Koska periodinen piste x_0 on vähintään sekä myös enintään n -periodinen, on ainoa mahdollisuus, että se on n -periodinen.

Näin on todistettu, että kuvauksella f on kaikki muut periodin pituudet paitsi kiintopiste Sharkovskiin järjestyksen mukaisesti. Koska $I_0 \subset I_0 \subset f(I_0)$, niin lemmän 1.10 perusteella kuvauksella f on myös kiintopiste, jos sillä on kolmeperiodinen piste. \square

Sharkovskiin teoriassa on erittäin olennaista, että kuvaus f on jatkuva. Seuraavassa esimerkissä käydään läpi, että se ei välttämättä päde kuvauksen f sisältäessä epäjatkuvuuskohdan.

Esimerkki 1.15. Olkoon kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 0 \\ -1/x, & \text{jos } x \neq 0 \end{cases}.$$

Kuvauksella f on epäjatkuvuuskohta kohdassa $x = 0$, joka ei ole kiintopiste. Suoralla laskulla nähdään, että

$$f^2(x) = \frac{-1}{-1/x} = x,$$

kun $x \neq 0$. Toisaalta yhtälöllä $f(x) = x$ ei ole ratkaisuja, niin kuvaksella f on vain kaksiperiodisia pisteitä ja yksi tuleva kaksiperiodinen piste kohdassa $x = 0$. Kuvauksella f ei ole kiintopistettä, vaikka sillä on kaksiperiodinen piste.

1.3 Jonoavaruus ja siirtokuvaus

Periodisten pisteiden tutkiminen saattaa olla erittäin haastavaa jo hyvinkin yksinkertaisilla kuvauksilla. Tässä kappaleessa voi herätä kysymys, että mitä

jonoavaruudesta ja siirtokuvauksesta on hyötyä tutkittaessa kvadraattista kuvausta. Siihen kysymykseen tulee seuraavassa kappaleessa vastaus, kun esitellään topologinen konjugointi.

Seuraavaksi määritellään jonoavaruus.

Määritelmä 1.16. Jonoavaruudeksi Σ_n kutsutaan pisteiden joukkoa, jossa mielivaltainen piste

$$\mathbf{s} = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots, \text{ missä } s_i \text{ on kokonaisluku väliltä } [0, n-1],$$

kun indeksi $i \geq 0$ on kokonaisluku.

Jonoavaruuden piste on siis äärettömän pitkä jono lukuja peräkkäin. Tässä työssä kuitenkin rajaudutaan pääasiassa jonoavaruuteen Σ_2 . Näin ollen luvulle s_i on kaksi vaihtoehtoa 0 ja 1.

Jonoavaruuteen voidaan määrittää myös metriikka. Näin voidaan vertailla jonoavaruudessa pisteiden välisiä etäisyyksiä.

Lemma 1.17. *Kuvaus $d: \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ on metriikka, kun kuvaus d määritellään seuraavalla tavalla*

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}, \text{ missä } \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2.$$

Todistus. Metriikan symmetrisyys seuraa kuvauksessa d esiintyvistä itseisarvosta, kuten myös kuvauksen d arvojen positiivisuus. Olkoon pisteet \mathbf{s} , \mathbf{t} ja \mathbf{u} jonoavaruuden Σ_2 pisteitä. Jos $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$, niin tästä seuraa, että $s_i = t_i$ kaikilla i :n arvoilla. Edellinen väite pätee myös toiseen suuntaan ja tämä on myös helppo nähdä kuvauksen d määritelmästä. Jos $s_i = t_i$ kaikilla i :n arvoilla, tarkoittaa tämä, että $\mathbf{s} = \mathbf{t}$.

Metriikan kolmioepäyhtälön pitävyys on enää todistamatta. Sekin voidaan todistaa hyvin suoraviivaisesti. Mielivaltaisten pisteiden \mathbf{s} ja \mathbf{u} välinen etäisyys

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{|t_i - u_i|}{2^i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - u_i|}{2^i} = d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + d(\mathbf{t}, \mathbf{u}).$$

□

On myös hyvä havaita, että lemmassa 1.16 kuvauksella d voidaan havaita yhtenevyyksiä positiivitermisen geometrisen sarjan kanssa, jossa suhdeluku on $1/2$. Jonoavaruuden metriikasta saattaa helposti herätä kysymys, että mitä tarkoitetaan, kun kahden pisteen välillä on tietyn suuruinen etäisyys. Seuraavassa esimerkissä käydään läpi, mitä tämä jonoavaruuden etäisyys tarkoittaa.

Esimerkki 1.18. Mitä voidaan päätellä, kun jonoavaruuden Σ_2 pisteiden \mathbf{s} ja \mathbf{t} välinen etäisyys $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < (1/2)^n$? Tällöin $s_i = t_i$ aina, kun i on kokonaisluku väliltä $[0, n]$. Tämä on erittäin helppo osoittaa vastaoletuksen kautta. Jos on olemassa sellainen kokonaisluku $j \leq n$, että $s_j \neq t_j$, niin tällöin pisteiden \mathbf{s} ja \mathbf{t} välinen etäisyys

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq (1/2)^j \geq (1/2)^n.$$

Tämä olisi ristiriita oletuksen $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < (1/2)^n$ kanssa.

Esimerkin 1.18 tilanteessa on hyvä huomata, ettei se päde käänteisesti. Käänteisessä tilanteessa on myös mahdollista yhtäsuuruus $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = (1/2)^n$. Tällainen tilanne on, jos kaikilla indekseillä $i > n$, on voimassa $s_i \neq t_i$.

Jonoavaruuksia käsitellessä ehkäpä jopa tärkein kuvaus on nimeltään siirtokuvaus. Seuraavassa määritelmässä on matemaattinen määritelmä tälle.

Määritelmä 1.19. Kuvausta $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, joka määritellään

$$\sigma(\mathbf{s}) = \sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = s_1 s_2 s_3 \dots,$$

kutsutaan siirtokuvaukseksi.

Siirtokuvaus lemmassa 1.16 esiintyvällä metriikalla on jatkuva. Seuraavassa Lemmassa tämä on todistettu.

Lemma 1.20. *Määritelmän 1.19 mukainen kuvaus σ on jatkuva.*

Todistus. Olkoon reaaliluku $\epsilon > 0$. Kun valitaan reaaliluvuksi $\delta = \epsilon/2$, niin voidaan arvioida etäisyyttä

$$\begin{aligned} d(\sigma(\mathbf{s}), \sigma(\mathbf{t})) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = 2 \cdot d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < 2 \cdot (\epsilon/2) = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Tässä oli jonoavaruudesta perusteet. Seuraavassa lauseessa on esitetty vähän erikoisempia ominaisuuksia jonoavaruudesta.

Lause 1.21. *Jonoavaruudessa Σ_2 on seuraavat väitteet voimassa, kun kuvauksena on siirtokuvaus σ .*

- (1.) *Yhtälöllä $\sigma^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ on ratkaisuja 2^n kappaletta.*
- (2.) *Periodisten pisteiden joukko on tiheä jonoavaruudessa Σ_2 .*
- (3.) *On olemassa tiheä rata jonoavaruudessa Σ_2 . ([1], s. 42)*

Todistus. Todistetaan ensimmäinen väite. Yhtälöstä $\sigma^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ seuraa, että $s_i = s_{i+n}$. Toisaalta, jos jokin jonoavaruuden piste toteuttaa ehdon $s_i = s_{i+n}$ kaikilla i , niin piste \mathbf{s} toteuttaa yhtälön $\sigma^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$. Näin ollen yhtälöllä on ratkaisuja yhtä monta kuin pystytään muodostamaan n alkion pituisia jonoja jonoavaruuden Σ_2 sallituilla luvuilla. Jonoavaruudessa Σ_2 sallittuja lukuja ovat 0 ja 1. Tästä voidaan päätellä, että ratkaisuja yhtälöllä $\sigma^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ on 2^n kappaletta.

Toinen väite todistetaan käyttäen vasta oletusta, että on olemassa piste \mathbf{s}_0 ja sen sisältävä avoin ympäristö $\{\mathbf{s} \in \Sigma_2 \mid d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}) < \epsilon\}$, jossa ei ole periodisia pisteitä. Valitaan sellainen positiivinen kokonaisluku n , että $(1/2)^n < \epsilon$. Muodostetaan sellainen periodinen piste \mathbf{t}_0 , että $t_i = (s_0)_i$ aina, kun kokonaisluku $i \in [0, n]$, ja $t_i = t_{i+n}$. Nyt voidaan arvioida etäisyyttä ylöspäin

$$d(\mathbf{s}_0, \mathbf{t}) \leq (1/2)^n < \epsilon.$$

Näin havaitaan ristiriita vastaoletuksen kanssa. Tästä seuraa, ettei ole olemassa avointa joukkoa, jossa ei ole periodisia pisteitä jonoavaruudessa Σ_2 . Näin ollen jonoavaruuden Σ_2 periodisten pisteiden sulkeuma on itse avaruus Σ_2 .

Kolmannen väitteen todistuksessa pitää muodostaa vain sellainen piste, jonka rata käy jokaisessa jonoavaruuden Σ_2 avoimessa joukossa. Lähdetään rakentamaan sellaista pistettä \mathbf{u} jonoavaruuden pisteen "vasemmasta reunasta". Ensinnäkin laitetaan yhden luvun mittaiset jonoavaruuden Σ_2 sallittujen lukujen kombinaatiot 0 ja 1. Sen jälkeen laitetaan kahden luvun kombinaatiot perään. Näitä kahden luvun kombinaatioita ovat 00, 01, 10 ja 11. Näin saadaan pisteeksi

$$\mathbf{u} = 0|1|00|01|10|11|000|001| \dots$$

Yllä on laitettu pystysuoria viivoja selkeyttämään jonoavaruuden Σ_2 pisteen \mathbf{u} muodostusta. Näin ollen, kun kuvataan pistettä \mathbf{u} tarpeeksi monta kertaa käyttäen siirtokuvausta päästään mielivaltaisen lähelle mielivaltaista jonoavaruuden Σ_2 pistettä \mathbf{u} . □

1.4 Topologinen konjugaatio

Topologista konjugointia hyödyntämällä voidaan yksinkertaistaa tarkasteltavaa dynaamista systeemiä. Jos tällaista yksinkertaistusta ei tehtäisi, saattaa alkuperäinen ongelma olla niin monimutkainen, että käytännössä sen tutkiminen on lähes mahdotonta. Seuraavassa määritelmässä on homeomorfismin määritelmä, joka on hyvin keskeinen osa topologisen konjugaation määritelmää.

Määritelmä 1.22. Olkoot A ja B metrisiä avaruuksia. Jatkuvaa bijektiivistä kuvausta $h: A \rightarrow B$ kutsutaan homeomorfismiksi, jos myös käänteiskuvaus $h^{-1}: B \rightarrow A$ on jatkuva.

Määritelmässä 1.22 on hyvin olennaista, että myös käänteiskuvaus h^{-1} on jatkuva, koska metrisissä avaruuksissa itse kuvauksen h jatkuvuus ei implikoi sitä. Seuraavaksi käydään läpi topologisen konjugaation määritelmä.

Määritelmä 1.23. Olkoon kuvaukset $f: A \rightarrow A$ ja $g: B \rightarrow B$. Kuvauksien f ja g sanotaan olevan topologisesti konjugaatteja, jos on olemassa sellainen homeomorfismi $h: A \rightarrow B$, että $h \circ f = g \circ h$.

Edellisestä määritelmästä on vielä hankala nähdä hyötyä. Seuraavassa lauseessa pyritään tuomaan esille hyöty, mikä topologisesta konjugoinnista voidaan saada.

Lause 1.24. *Olkoon $f: A \rightarrow A$ ja $g: B \rightarrow B$ keskenään topologisesti konjugaatteja. Olkoon kuvaus $h: A \rightarrow B$ määritelmän 1.23 mukainen homeomorfismi. Tällöin $h \circ f^n = g^n \circ h$.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Jos kokonaisluku $n = 1$, niin väite pitää paikkansa suoraan määritelmän 1.23 oletuksien perusteella. Oletetaan, että väite on voimassa, kun $n = k$, missä $k > 0$ on kokonaisluku. Seuraavaksi näytetään, että väite pitää paikkansa, kun $n = k + 1$. Tällöin lauseke

$$h \circ f^{k+1} = h \circ f \circ f^k = g \circ h \circ f^k = g \circ g^k \circ h = g^{k+1} \circ h.$$

□

On myös hyvä huomata, vaikkei määritelmästä 1.23 sitä suoraan näekään, että topologinen konjugointi on symmetrinen ominaisuus. Olisi myös mahdollista todistaa, että topologisesti konjugaattien kuvauksien välillä on ekvivalenssirelaatio. Seuraavassa esimerkissä nähdään, mitä kuvauksien välisestä topologisesta konjugoinnista seuraa.

Esimerkki 1.25. Oletetaan, että kuvaukset $f: A \rightarrow A$ ja $g: B \rightarrow B$ ovat keskenään topologisesti konjugaatteja ja kuvaus h on näiden määritelmän 1.23 mukainen homeomorfismi. Jos piste $x \in A$ toteuttaa yhtälön $f^n(x) = x$, niin tällöin $g^n(h(x)) = h(x)$. Lisäksi, jos piste x on k -periodinen piste, niin tällöin myös $h(x)$ on k -periodinen piste.

Jos $f^n(x) = x$, niin tällöin $h \circ f^n(x) = h(x)$. Käyttämällä lausetta 1.24 voidaan muokata yhtälö muotoon $g^n(h(x)) = h(x)$. Jos piste x on k -periodinen piste, niin tällöin on voimassa yhtälö $f^k(x) = x$. Tällöin on myös voimassa

$g^k(h(x)) = h(x)$. Näin ollen piste $h(x)$ on korkeintaan k periodinen. Toisaalta $f^i(x) \neq x$ kaikilla kokonaisluvuilla $i \in]0, k[$. Kuvauksen h injektiivisyydestä ja lauseesta 1.24 seuraa, että $g^i(h(x)) \neq h(x)$ kaikilla kokonaisluvuilla $i \in]0, k[$.

Lauseen 1.14 todistuksessa oletettiin, että 3-periodisella pisteellä oli kahdesta mahdollisesta järjestyksestä vain toinen. Seuraavassa esimerkissä osoitetaan aavistuksen yleisemmin, että nämä kaksi mahdollisen järjestystä pysyy muuttamaan toiseksi topologisen konjugaation avulla.

Esimerkki 1.26. Olkoon kuvaus $f: I \rightarrow I$, missä joukko $I \subset \mathbb{R}$. Olkoon pisteet $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ ja x_n sellaisia n -periodisia joukon I pisteitä, että $f(x_i) = x_{i+1}$ ja $f(x_n) = x_1$ aina, kun kokonaisluku $i \in [1, n-1]$. Oletetaan lisäksi, että järjestys kasvava eli on voimassa $f(x_n) < x_n$ ja muulloin $f(x_i) > x_i$. Näytetään, että kuvaukselle f on olemassa topologisesti konjuagoiva kuvaus g , jossa on vähenevä järjestys.

Määritellään joukoksi J , että piste $x \in I$, jos ja vain jos piste $-x \in J$. Määritellään kuvaus $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, missä $g(y) = -f(-y)$, kun piste $y \in J$. Tällöin joukkojen I ja J väliseksi homeomorfismiksi $h: I \rightarrow J$ voidaan valita $h(x) = -x$. Kuvauksen g määrittelystä on helppo nähdä, että sen maalijoukkoa voidaan kaventaa joukoksi J . Yhdistetty kuvaus

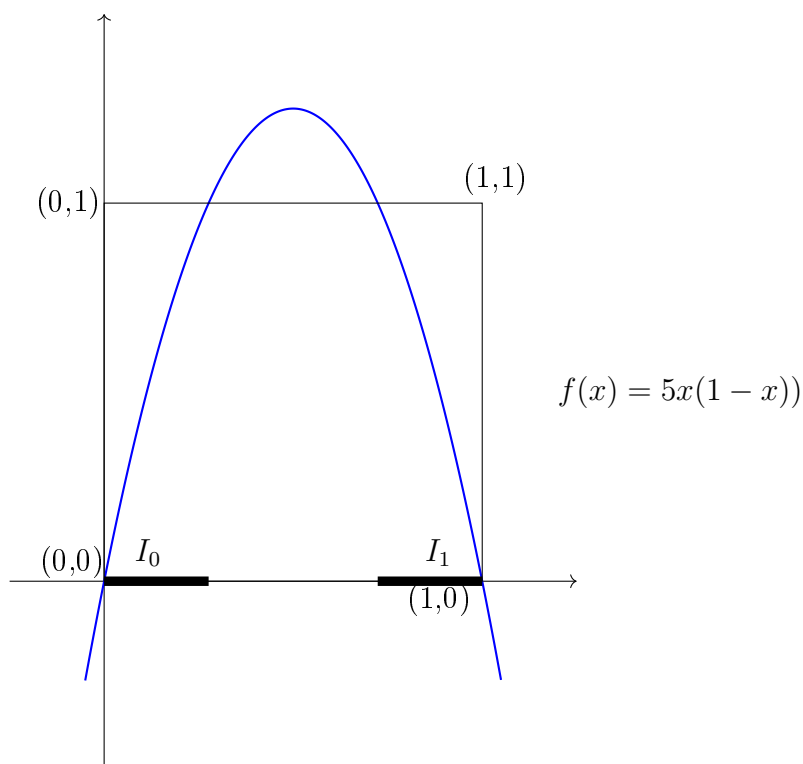
$$(h \circ f)(x) = -f(x) = -f(-(-x)) = g(-x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x).$$

Näin ollen kuvaukset f ja g ovat keskenään topologisesti konjugaatteja. Miellyttävälle joukon I pisteelle x_0 on voimassa

$$f(x_0) > x_0 \Leftrightarrow -f(x_0) < -x_0 \Leftrightarrow g(h(x_0)) < h(x_0).$$

Näin ollen pisteet $h(x_1), h(x_2), h(x_3), \dots, h(x_{n-2}), h(x_{n-1})$ ja $h(x_n)$ toteuttavat kuvauksen g kanssa laskevan järjestyksen.

Seuraava esimerkki topologisesta konjugaatiosta on käytännönläheisempi. Siinä tullaan näyttämään konkreettisesti tilanne, miten voidaan hyödyntää topologista konjugaatiota. Ennen sitä käydään läpi pari määritelmää, jotka on hyvä tuoda esille ennen tätä esimerkkiä.



Kuva 1.4: Kuvassa on kuvaus $f(x) = 5x(1-x)$. Kuvasta nähdään graafisesti, että joukon alkukuva $f^{-1}([0, 1])$ muodostuu kahdesta suljetusta välistä.

Määritelmä 1.27. Olkoon kuvaus $f: A \rightarrow B$, missä $A \subset B$. Joukon A osajoukkoa C kutsutaan invariantiksi kuvauksen f suhteen, jos $f(C) \subset C$.

Määritelmä 1.28. Olkoon kuvaus $f: A \rightarrow A$. Olkoon joukko

$$A = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i, \text{ missä on voimassa } I_i \cap I_j = \emptyset \text{ aina, kun } i \neq j.$$

Kuvausta $\{S: A \rightarrow \Sigma_n | S(x) = \mathbf{s} = s_0s_1s_2s_3\dots\}$, missä kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 0$ on $s_k = j$, jos $f^k(x) \in I_j$ ($f^0(x) = x$), kutsutaan reittikuvaukseksi.

Reittikuvauksella on eräs mahdollinen tapa muodostaa kuvauksen lähtöjoukon ja jonoavaruuden kanssa homeomorfismi. Seuraavassa esimerkissä on kvadraattiselle kuvaukselle todistettu homeomorfismi.

Esimerkki 1.29. Olkoon kuvaus $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, missä $f(x) = \mu x(1-x)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja reaalilukuparametrilla $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Olkoon $\Lambda =$

$\{x \in [0, 1] \mid f^n(x) \in [0, 1] \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}$. Tällöin Λ on invariantti, sillä jos $x \in \Lambda$, niin $f^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$, joten $f^n(f(x)) \in [0, 1]$ ja siten $f(x) \in \Lambda$.

Konstruoidaan homeomorfismi seuraavaksi. Alkukuva $f^{-1}([0, 1])$ muodostuu kahdesta suljetusta välistä I_0 ja I_1 , joista I_0 on kuvauksen f ainoan derivaatan nollakohdan vasemmalla puolella ja I_1 on tämän derivaatan nollakohdan oikealla puolella. Kuvassa 1.4 on havainnollistettu tätä. Lisäksi siitä myös voidaan graafisesti nähdä, ettei kuvauksen f derivaatan nollakohta $1/2$ kuulu kumpaankaan väliin, koska $\mu > 4$.

Olkoon kuvaus $S: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, missä $S(x) = \mathbf{s} = s_0s_1s_2s_3\dots$, missä $s_k = 0$, jos $f^k(x) \in I_0$ ja $s_k = 1$, jos $f^k(x) \in I_1$ aina, kun $x \in \Lambda$. Määritelmän 1.27 perusteella $f^k(x) \in I_0 \cup I_1$, koska muutoin $f^{k+1} \notin [0, 1]$. Näin ollen jokainen joukon Λ piste voidaan kuvata jonoavaruuteen Σ_2 kuvauksella S .

Näytetään seuraavaksi, että kuvaus S on surjektio. Käytetään tässä apuna induktiopäätelyä. Olkoon väli $J_{s_0s_1s_2\dots s_{n-2}s_{n-1}s_n} \subset [0, 1]$ sellainen väli, että

$$f^m(J_{s_0s_1s_2\dots s_{n-2}s_{n-1}s_n}) \subset I_{s_m} \text{ ja } f^n(J_{s_0s_1s_2\dots s_{n-2}s_{n-1}s_n}) = I_{s_n}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n > m \geq 0$. Ensinnäkin havaitaan, että olettaessa luvuksi $n = 0$, toteuttaa väli I_{s_0} edelliset ehdot. Induktio-oletuksella voidaan olettaa, että nämä ehdot ovat voimassa kun $n = p$. Koska $f([I_0]) = f([I_1]) = [0, 1]$, niin lemmän 1.11 perusteella on olemassa suljettu väli

$$J_{s_0s_1s_2\dots s_{p-2}s_{p-1}s_p s_{p+1}} \subset J_{s_0s_1s_2\dots s_{p-2}s_{p-1}s_p},$$

jolle on voimassa

$$f^{p+1}(J_{s_0s_1s_2\dots s_{p-2}s_{p-1}s_p s_{p+1}}) = I_{s_{p+1}}.$$

On myös hyvä huomata, että on voimassa

$$f^l(J_{s_0s_1s_2\dots s_{p-2}s_{p-1}s_p s_{p+1}}) \subset f^l(J_{s_0s_1s_2\dots s_{p-2}s_{p-1}s_p}) \subset I_{s_l}$$

kaikilla kokonaisluvuilla l . Ja koska kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$ on voimassa, että $J_{s_0s_1s_2s_3\dots s_{n-2}s_{n-1}s_n} \neq \emptyset$ on suljettu, niin

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{s_0\dots s_n} = S^{-1}(\mathbf{s}) \neq \emptyset$$

ja kuvaus S on surjektio.

Todistetaan seuraavaksi, että kuvaus S on injektio. Todistuksessa hyödynnetään tietoa, että on olemassa sellainen vakio $\gamma > 1$, että $|f'|((I_0 \cup I_1) \cap [0, \gamma]) = \emptyset$. Näin ollen voidaan arvioida kahden pisteen kuvan välistä etäisyyttä ylöspäin käyttäen väliarvolausetta. Muodostetaan vasta oletus, että olisi olemassa sellaiset pisteet x_0 ja y_0 , että $S(x_0) = S(y_0)$. Tämä tarkoittaisi sitä, että jatkuvasti kuvattaessa kuvauksella f ne olisivat aina samassa välissä I_0 tai I_1 . Näin ollen niiden kuvien välistä etäisyyttä voidaan arvioida ylöspäin ja saadaan

$$|f^a(x_0) - f^a(y_0)| > |x_0 - y_0| \cdot \gamma^a.$$

Yllä olevasta nähdään, että kuvapisteen välinen etäisyys kasvaa riittävän isolla positiivisella kokonaisluvulla a isommaksi kuin I , mikä on ristiriita ja kuvaus S on injektio.

Nyt on näytetty, että kuvaus S on bijektio. Seuraavaksi todistetaan, että se ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia. Osoitetaan aluksi, että kuvaus S on jatkuva. Olkoon $S(x_0) = \mathbf{s}_0$ ja $\epsilon > 0$. Olkoon $\mathcal{W}_{\mathbf{s}_0} = \{\mathbf{s} \in \Sigma_2 \mid d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}) < \epsilon\}$ pisteen \mathbf{s}_0 avoin ympäristö. Olkoon n jokin sellainen positiivinen kokonaisluku, että $(1/2)^n < \epsilon$. Valitaan pisteen x_0 avoimeksi ympäristöksi väli $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n} = \mathcal{U}_{x_0}$, joka on avoin joukossa Λ , koska suljettuja ja erillisiä välejä $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n}$ on äärellinen määrä. Tällöin mielivaltaiselle pisteelle $x \in \mathcal{U}_{x_0} \cap \Lambda$ on voimassa

$$d(S(x_0), S(x)) \leq (1/2)^n < \epsilon.$$

Näin ollen kuvaus S on jatkuva.

Todistetaan seuraavaksi, että käänteiskuvaus S^{-1} on jatkuva. Olkoon pisteen x_0 avoin ympäristö

$$\{x \in \mathcal{V}_{x_0} \mid |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Välin $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n}$ pituus lähestyy kohti nollaa, kun n lähestyy kohti ääretöntä. Jos näin ei olisi, syntyisi ristiriita kuvauksen S injektiivisyyden kanssa. Näin ollen on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_0 , että

$$J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n_0-2} s_{n_0-1} s_{n_0}} \subset \mathcal{V}_{x_0}$$

Toisaalta $S^{-1}(W_{S(x_0)}) \subset J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n_0-2} s_{n_0-1} s_{n_0}}$, missä joukko $W_{S(x_0)}$ määritellään

$$\mathcal{W}_{S(x_0)} = \{x \in \Sigma_2 \mid d(\mathbf{s}, S(x_0)) < (1/2)^{n_0}\},$$

koska muuten syntyisi ristiriita kuvauksen injektiivisyydelle. Näin ollen mielivaltaista joukon Λ avointa ympäristöä \mathcal{V}_{x_0} kohti on olemassa jonoavaruuden Σ_2 avoin ympäristö $\mathcal{W}_{S(x_0)}$, että

$$S^{-1}(\mathcal{W}_{S(x_0)}) \subset \Lambda \cap \mathcal{V}_{x_0}.$$

Kuvaus S^{-1} on siis jatkuva.

Nyt on todistettu, että määritelmän 1.22 mukaiset ehdot toteutuvat. Kuvaus S on siis homeomorfismi.

Kuten esimerkissä 1.29 nähdään on homeomorfismin todistaminen joskus työlästä hommaa. Seuraavassa lauseessa todistetaan, että avaruudet (Λ, f) ja (Σ_2, σ) ovat topologisesti konjugaatteja.

Lause 1.30. *Olkoon kuvaukset S ja f samoja kuin esimerkissä 1.29. Olkoon Λ kuten esimerkissä 1.29 ja olkoon kuvaus σ siirtokuvaus. Tällöin kuvaukset $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ja $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ topologisesti konjugaatteja keskenään.*

Todistus. Esimerkissä 1.29 todistettiin, että kuvaus S on homeomorfismi. Kun huomataan, että jos

$$f^k(x) \in I_{s_k}, \text{ niin } f^{k-1}(f(x)) \in I_{s_k} \text{ kaikilla kokonaisluvuilla } k \geq 1.$$

Tätä hyödyntäen voidaan kuvata piste $f(x)$ jonoavaruuteen Σ_2 , kun piste $x \in \Lambda$. Olkoon $S(x_0) = \mathbf{s} = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots$. Tällöin

$$S \circ f(x) = s_1 s_2 s_3 \dots = \sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = \sigma \circ S(x).$$

□

Lauseen 1.30 perusteella tutkittaessa jonoavaruutta ja siirtokuvausta, tulee siinä tutkittua myös kuvausta f sen suhteen invariantissa joukossa. Hyöty tulee siitä, että jonoavaruudessa tutkiminen on monesti helpompaa.

1.5 Schwarzin derivaatta

Schwarzin derivaatta on eräänlainen ominaisuus, joka antaa tutkittavasta systeemistä lisätietoa. Vaikkei määritelmästä 1.31 suoraan näe konkreettista hyötyä, saadaan siitä kuitenkin yllättävän paljon tärkeää informaatiota.

Määritelmä 1.31. Olkoon kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kolme kertaa derivoituva. Kuvauksen f Schwarzin derivaatta pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Esimerkiksi derivaatan nollakohdissa ei ole Schwarzin derivaattaa määriteltä. Tällöin voidaan sallia Schwarzin derivaatan arvoksi $-\infty$, jos sen raja-arvona on $-\infty$. Seuraavassa lemmassa 1.32 todistetaan, että yhdistetyille kuvauksille ominaisuus negatiivinen Schwarzin derivaatta periytyy sopivissa oletuksilla.

Lemma 1.32. *Olkoon f ja g kuvauksia, joille on voimassa $Sf < 0$ ja $Sg < 0$. Tällöin $S(f \circ g) < 0$.*

Todistus. Derivoimalla yhdistettyä kuvausta $f \circ g$ nähdään, että on voimassa

$$D(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x),$$

$$D^2(f \circ g)(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \text{ ja}$$

$$D^3(f \circ g)(x) = f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x).$$

Kun nämä tiedot sijoitetaan Schwarzin derivaattaan ja sievennetään, saadaan, että

$$S(f \circ g) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x) < 0,$$

koska $Sf < 0$, $Sg < 0$ ja $(g')^2 \geq 0$, niin $S(f \circ g) < 0$. ([1], s.70) □

Edellisen lemmän 1.32 perusteella negatiivinen Schwarzin derivaatta on säilyvä ominaisuus yhdistetyille kuvaukselle. Seuraavassa esimerkissä on esitelty tästä lemmän tuloksesta seuraava asia.

Esimerkki 1.33. Olkoon kuvaukselle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voimassa $Sf < 0$. Tällöin myös kuvaukselle f^n on voimassa, että $S(f^n) < 0$.

Todistetaan väite induktioidistuksella. Oletuksen mukaan $Sf^k < 0$, kun $k = 1$. Oletetaan, että $Sf^k < 0$. Lemman 1.32 perusteella seuraa, että $Sf^{k+1} < 0$.

Edellisen esimerkin perusteella tutkimalla kuvauksen f Schwarzin derivaatta saadaan selville kuvauksen f^n Schwarzin derivaatta. Ennen kappaleen päätulosta on käytävä muutama lemma läpi.

Lemma 1.34. *Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva kuvaus ja $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Jos joukko $f(C)$ sisältää äärellisen monta pistettä, niin tällöin myös kuvauksen f^n derivaatan nollakohtien arvojoukon pisteiden lukumäärä on äärellinen.*

Todistus. Yhdistetyn kuvauksen derivoimissäännön mukaan kuvauksen f^n derivaatalle on voimassa

$$Df^n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x)).$$

Oletetaan, että joukossa $f(C)$ on m kappaletta eri pisteitä. Kuvauksien arvojen yksikäsitteisyydestä seuraa, että joukossa $f^k(C)$ on korkeintaan m kappaletta eri pisteitä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k . Mielivaltainen piste x on kuvauksen f^n derivaatan nollakohta, jos ja vain jos jollakin ei-negatiivisella kokonaisluvulla $l \leq n - 1$ on voimassa $f^l(x) \in C$. Näin ollen voidaan arvioida tulon nollasäännön perusteella, että kuvauksella f^n on korkeintaan nm eri arvoa derivaatan nollakohdilla. \square

Lemma 1.35. *Olkoon kuvaukselle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voimassa $Sf < 0$ ja olkoon kuvauksen f kolmas derivaatta kaikkialla jatkuva. Jos piste x_0 on kuvauksen kiintopiste ja $|f'(x_0)| \leq 1$, tällöin on olemassa sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö, että ainakin toiselta puolelta kiintopistettä kaikki tämän avoimen ympäristön pisteet suppenevat kohti kiintopistettä x_0 .*

Todistus. Tapauksessa $|f'(x_0)| < 1$ on olemassa derivaatan jatkuvuuden perusteella avoin ympäristö, jossa derivaatan itseisarvo on pienempi kuin yksi. Näin ollen lauseen 1.6 perusteella on olemassa avoin ympäristö, jonka kaikki pisteet suppenevat kohti pistettä x_0 .

Tapauksesta $f'(x_0) = -1$ seuraa, että $(f^2)'(x_0) = 1$ ja esimerkin 1.33 perusteella $Sf^2 < 0$. Myös kuvauksen f^2 kolmas derivaatta on kaikkialla jatkuva, koska sama ehto on voimassa kuvaukselle f . Näin ollen riittää tutkia enää tapaus $f'(x_0) = 1$.

Oletetaan, että $f'(x_0) = 1$. Jos $f''(x_0) = 0$, niin ehdosta $Sf < 0$ seuraa, että $f'''(x_0) < 0$. Näin ollen on olemassa avoin ympäristö, jossa kuvauksen f derivaattakuvauksella on paikallinen aito maksimi kohdassa $x = x_0$. Näin ollen lauseen 1.6 ehdot toteutuvat tällöin. Jos $f''(x_0) \neq 0$, niin tällöin väliarvolauseen perusteella on olemassa pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa derivaattakuvaus $f'(x)$ on aidosti monotoninen. Kun huomioidaan lisäksi kuvauksen f' jatkuvuus, voidaan valita sellainen pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{U}_{x_0} , jossa derivaattakuvaus $f'(x)$ on aidosti monotoninen ja $f'(x) > 0$ aina, kun $x \in \mathcal{U}_{x_0}$. Näin jommalla kummalla puolella kiintopistettä x_0 derivaattakuvaus saa aidosti yhtä pienempiä arvoja. Toisaalta väliarvolauseen perusteella kuvattaessa joukon \mathcal{U}_{x_0} pistettä x kuvauksella f ei kuvapiste voi olla eri-puolella kiintopistettä. Näin ollen voidaan soveltaa lausetta 1.6, että ainakin toiselta puolelta kiintopistettä kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä. \square

Edellisen lemmän 1.35 tilanteessa, jossa kiintopisteessä x_0 on derivaatan arvona $f'(x_0) = -1$, olisi mahdollista todistaa, että olisi olemassa pisteen x_0 avoin ympäristö, jonka kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä x_0 . Tämä saataisiin ottamalla yhdiste toispuoleisesti suppenevasta joukosta ja sen kuvasta kuvattuna kuvauksella f ja ottamalla tästä joukosta pisteen x_0 avoin ympäristö.

Lemma 1.36. *Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen C^3 -kuvaus (kolme kertaa jatkuvasti derivoituva), että $Sf < 0$. Tällöin kuvauksen f derivaattakuvauksella*

ei voi olla aidosti positiivista paikallista minimiarvoa tai aidosti negatiivista paikallista maksimiarvoa.

Todistus. Derivaattakuvauksen f' ääriarvokohdassa x_0 on voimassa $f''(x_0) = 0$. Näin ollen kuvauksen f Schwarzin derivaatalle on voimassa pisteessä x_0

$$Sf(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0.$$

Tarkastellaan tilannetta $f'(x_0) \neq 0$, joten $f'''(x_0) \neq 0$ ehdon $Sf < 0$ perusteella. Derivaattakuvauksen ääriarvokohdassa on olemassa pisteen x_0 avoin ympäristö \mathcal{U}_{x_0} , jossa joko $f'''(x) < 0$ tai $f'''(x) > 0$ aina, kun $x \in \mathcal{U}_{x_0}$. Paikallisessa derivaattakuvauksen maksimikohdassa $f'''(x) < 0$, kun $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, ja derivaattakuvauksen paikallisessa minimikohdassa $f'''(x) > 0$ aina, kun $x \in \mathcal{U}_{x_0}$. Oletuksen $Sf < 0$ perusteella pitää $f'(x_0)$:n ja $f'''(x_0)$:n olla erimerkkisiä. Näin ollen ei voi olla derivaattakuvauksella f' negatiivista paikallista maksimiarvoa tai positiivista paikallista minimiarvoa. \square

Edellinen lemma nousee hyvin tärkeäksi, kun arvioidaan attraktiivisten periodisten ratojen määrää. Se myös mahdollistaa, että jo pelkästään kuvauksen graafia katsomalla on mahdollista nähdä, että sillä ei ole kaikissa pisteissä negatiivinen Schwarzin derivaatta.

Lemma 1.37. *Olkoon kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen C^3 -kuvaus, että $Sf < 0$ kaikissa määrittelyjoukon pisteissä. Olkoon kiintopisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaattakuvauksen arvo $f'(x_0) \in [-1, 1]$. Tällöin lemmän 1.35 perusteella on olemassa väli W , jossa kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä x_0 . Jos väli W on rajoitettu ja maksimaalisen pituinen, niin tällöin väli W sisältää kuvauksen f derivaatan nollakohdan.*

Todistus. Ensinnäkin on hyvä huomata, että väli W voi olla suljettu, avoin tai ei kumpaakaan. Piste x_0 selvästi on välin W piste. Jos väli W sisältää pisteen x , jonka kuva $f(x) \notin W$, niin tällöin Bolzanon lauseen perusteella pisteiden x_0 ja $f(x)$ välinen suljettu väli on pisteiden x ja x_0 välisen suljetun välin kuvan osajoukko. Siten lemmän 1.11 perusteella on olemassa sellainen

väli $I \subset W$, että väli $f(I) \cup W$ sisältää ainakin yhden pisteen, jota väli W ei sisällä. Toisaalta $f(I)$ suppenee kohti kiintopistettä x_0 , joten $f(I) \cup W$ on vielä suurempi väli, joka suppeneisi kohti kiintopistettä, mikä olisi ristiriita välin W maksimaalisuuden kanssa. Näin ollen on voimassa $f(W) \subset W$.

Välin sulkeumalle \overline{W} on voimassa jatkuvuuden perusteella $f(\overline{W}) \subset \overline{W}$. Oletetaan $y \in \overline{W} \setminus \text{int } W$ on sellainen piste, että $f(y) \in \text{int } W$. Tällöin kuvauksen f jatkuvuuden perusteella on olemassa avoin pisteen y sisältävä väli Y , että $f(Y) \subset \text{int } W$. Tällöin väli $Y \cup W$ olisi väliä W suurempi väli, jonka kaikki pisteet suppeneisivat kohti kiintopistettä x_0 , mikä olisi ristiriita. Näin ollen $f(\overline{W} \setminus \text{int } W) \subset \overline{W} \setminus \text{int } W$.

Olkoon $\overline{W} = [a, b]$. Koska joukko $\overline{W} \setminus \text{int } W$ sisältää kaksi pistettä on mahdollisia erilaisia kuvauksia neljä kappaletta. Nämä neljä eri vaihtoehtoa voidaan tiivistää kolmeen eri tilanteeseen seuraavalla tavalla.

$$1^\circ f(a) = f(b)$$

$$2^\circ f(a) = b \text{ ja } f(b) = a$$

$$3^\circ f(a) = a \text{ ja } f(b) = b$$

Tilanteessa 1° seuraa suoraan väliarvolauseesta, että joukossa $\text{int } W$ on derivaatan nollakohta. Tilanne 2° voidaan muuntaa tilanteeksi 3° tarkastelemalla kuvausta f^2 . Näin ollen riittää todistaa, että tilanteessa 3° löytyy derivaatan nollakohta joukosta W .

Tarkastellaan kuvausta f^2 välillä $[a, b]$. Tällöin kiintopisteissä a ja b kuvauksen f^2 derivaatan arvo on positiivinen. On hyvä huomata, että välin päätepisteissä kuvauksen f^2 derivaatan arvo on suurempi tai yhtäsuuri kuin yksi, koska muuten syntyisi ristiriita välin W maksimaalisuudesta. Koska välin W kaikki pisteet suppenevat kohti pistettä x_0 , täytyy välin $\text{int } W$ sisältää piste ξ , jossa $|f'(\xi)| < 1$. Jos $f'(\xi) < 0$, Bolzanon lauseesta seuraa, että $\text{int } W$ sisältää derivaatan nollakohdan. Jos $f'(\xi) > 0$, niin täytyy välillä $\text{int } W$ olla derivaatan nollakohta lemmän 1.36 perusteella. Tapauksessa $f'(\xi) = 0$ nähdään suoraan väitteen paikkansapitävyys. \square

Seuraavaksi esitellään kappaleen tärkein tulos. Sen avulla voidaan arvioida alaspäin attraktiivisten periodisten ratojen määrää.

Lause 1.38. *Olkoon kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen C^3 -kuvaus, että $Sf < 0$ koko määrittelyjoukossa. Olkoon $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Jos joukossa $f(C)$ on m kappaletta pisteitä, niin tällöin kuvauksella f on enintään $m + 2$ attraktiivista periodista rataa.*

Todistus. Olkoon piste x_0 kuvauksen f^n kiintopiste, missä $n \in \mathbb{N}$ ja jonka derivaatalle on voimassa $(f^n)'(x_0) \in [-1, 1]$. Tällöin on lemmän 1.35 perusteella olemassa väli W , jonka kaikki pisteet suppenevat kohti pistettä x_0 . Jos väli on äärellisen pituinen, niin tällöin lemmän 1.37 perusteella väli W sisältää kuvauksen f^n derivaatan nollakohdan. Tästä seuraa kuvauksen f^n derivointisäännön perusteella, että on olemassa piste $c \in C$ jollakin kokonaisluvulla $k \geq 0$ $f^k(c) \in W$. Näin ollen pisteen $f(c)$ rata suppenee kohti pistettä x_0 rataa kohti. Piste c ei voi supeta kohti muita periodisia ratoja, koska raja-arvot ovat metrisissä avaruuksissa yksikäsitteisiä. Koska joukossa $f(C)$ on m kappaletta pisteitä, seuraa siitä, että on korkeintaan m kappaletta attraktiivisia periodisia ratoja, joissa äärellisen pituinen suppeneva väli. Koska reaali-lukuvälillä voi olla enintään kaksi periodista pistettä, joissa suppeneva väli on äärettömän pitkä. Toisin sanoen kuvauksen f laitimmaiseta periodiset pisteet viimeistään toimivat rajoina muille attraktiivisille periodisille pisteille, jos sellaiset ovat olemassa. \square

Edellinen lause nousee hyvin tärkeään rooliin dynaamisia systeemejä tutkittaessa. Sen avulla pystytään arvioimaan joidenkin kuvauksien attraktiivisten periodisten ratojen lukumäärää alaspäin.

Esimerkki 1.39. Kuvaukselle $f(x) = A \sin(x)$, missä parametri $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on voimassa $Sf < 0$. Lisäksi sen derivaatan nollakohtien arvojoukossa on kaksi pistettä. Näin ollen kuvaus f toteuttaa lauseen 1.38 ehdot.

Koska derivaatan nollakohtien arvojoukossa on kaksi pistettä, seuraa tästä lauseen 1.38 perusteella, että kuvauksella f on enintään neljä attraktiivista periodista rataa. Päättyä on kuitenkin mahdollista vielä jatkaa eteenpäin.

Jos kuvauksella f on kolme tai enemmän periodisia ratoja, niin kuvauksen f 2π -jaksollisuudesta seuraa, että attraktiivisilla periodisilla pisteillä on vain äärellisen pituisia suppenemisvälejä, koska mielivaltaisesta 2π -pituisesta jaksosta löytyy joko mielivaltainen periodinen piste tai sen alkukuvapiste. Mielivaltaiselta 2π -pituiselta jaksolta löydetään piste, joka ei suppene attraktiivista periodista rataa kohti. Nyt voidaan arvioida vieläkin alaspäin attraktiivisten periodisten pisteiden määrää ja voidaan todeta että kuvauksella f on enintään kaksi attraktiivista periodista rataa.

1.6 Moniulotteista analyysiä dynaamisiin systeemeihin

Tässä kappaleessa pääasiassa esitellään implisiittikuvauslause. Lisäksi kappaleen alussa olevat tulokset pääasissa noudattelevat Devaney'n teoksen [1] kappaleessa 1.12 *Bifurcation Theory* esiintyviä tuloksia. Pääasiassa käsitellään periodisia pisteitä kahden muuttujan kuvauksina.

Esitellään aluksi implisiittikuvauslause. Syy, miksi se tuodaan esille, on, että se on hyvin keskeinen muiden kappaleen tulosten todistuksessa. Implisiittikuvauslause on erikoistapaus kirjan [2] lauseesta 9.2.3 sivulta 264.

Lause 1.40. *Implisiittikuvauslause*

Olkoon $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja kuvaus $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^r -kuvaus, missä r on positiivinen kokonaisluku. Jos on olemassa sellainen piste $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, että

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ ja } \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \neq 0, \text{ niin}$$

tällöin on olemassa sellainen pisteen (x_0, y_0) avoin ympäristö $\mathcal{U}_{(x_0, y_0)} \subset \mathcal{O}$ ja sellainen pisteen y_0 sisältävä avoin väli $J \subset \mathbb{R}$, että jokaista pistettä $y \in J$ kohti on olemassa yksikäsitteinen piste $x \in \mathbb{R}$, että $f(x, y) = 0$ ja piste $(x, y) \in \mathcal{U}_{(x_0, y_0)}$. Lisäksi on olemassa sellainen C^r -kuvaus $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, että tämä yksikäsitteinen piste $x = g(y)$.

Todistus. Todistus löytyy yleisemmälle tilanteelle kirjan [2] sivulta 264 lauseen 9.2.3 todistuksesta. □

Implisiittikuvauslause soveltuu monesti todistettaessa, että tietynlainen kuvaus on olemassa. Myös yksikäsitteisyttäkin pystytään joissakin tilanteissa hyödyntämään. Seuraavan lauseen todistuksessa on hyödynnetty implisiittikuvauslauseetta.

Lause 1.41. *Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoon piste x_0 kuvauksen f_λ kiintopiste parametrin arvolla λ_0 . Jos $f'_\lambda(x_0) \neq 1$, niin tällöin on olemassa sellaiset avoimet pisteen x_0 sisältävä väli I ja pisteen λ_0 sisältävä väli L sekä kuvaus $p: L \rightarrow I$, että $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ ja $p(\lambda_0) = x_0$. Lisäksi kuvauksella f_λ ei ole muita kiintopisteitä välillä I .*

Todistus. Olkoon kuvaus $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Tällöin

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Toisaalta oletuksien mukaan on selvästi voimassa $G(x_0, \lambda_0) = 0$. Nyt on näytetty, että Implisiittikuvauslauseen (Lause 1.40) oletukset ovat voimassa. Nyt on olemassa kuvaus $p: L \rightarrow I$, jolle on voimassa $p(\lambda_0) = x_0$, $p(\lambda) = x$ ja $G(p(\lambda), \lambda) = 0$. Lisäksi yksikäsitteisyydestä seuraa, että $p(\lambda)$ on ainoa kuvauksen f_λ kiintopiste parametrin arvolla λ jossakin tason avoimessa pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. \square

Edellisen lauseen avulla on mahdollista saada tiettyjä seikkoja selville periodisen pisteen syntyyn liittyen. Euklidisen topologian ominaisuutena on, että mielivaltaisella avoimella välillä on osajoukkona sellainen suljettu väli, jonka sisäpisteenä on mielivaltainen avoimen välin piste. Tästä seuraa, että jos n -periodisessa pisteessä kuvauksen f^n derivaatta on erisuuri kuin yksi parametrin arvolla λ_0 . Tällöin λ_0 ei voi olla suurin alaraja tai pienin yläraja tämän periodisen radan syntymiselle tai tuhoutumiselle.

Seuraavaksi esitellään kaksi hyvin tyypillistä periodisen pisteiden syntymekanismia tai tuhoutumismekanismia ja ennen niitä käydään läpi bifurkaation määritelmä. Bifurkaation määritelmä ei ole mikään yleispätevä, mutta se on riittävä kvadraattiseen kuvaukseen. Bifurkaatiotyypeistä esitellään ensin satulasolmubifurkaatio.

Määritelmä 1.42. Olkoon (x_0, λ_0) tason \mathbb{R}^2 piste. Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen parametrisoitu perhe kuvauksia, että $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ ja kuvaus f on jatkuva tasossa \mathbb{R}^2 . Jos jollakin kokonaisluvulla $n \in \mathbb{N}$ mielivaltaista pisteen (x_0, λ_0) avointa ympäristöä $\mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}$ kohti on olemassa sellainen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sekä avoimet välit $I_{\lambda_0} \ni x_0$ ja I_{λ_1} , missä λ_1 mielivaltainen pisteiden λ_0 ja λ_1 välissä oleva piste, että $I_{\lambda_1} \times \{\lambda_1\} \subset \mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}$, yhtälöllä $f_{\lambda_0}^n(x) = x$ on yksi ratkaisu välillä I_{λ_0} , ja yhtälöllä $f_{\lambda_1}^n(x) = x$ on vähintään kaksi ratkaisua välillä I_{λ_1} , niin tällöin on kyseessä bifurkaatio.

Lause 1.43. Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoon $f_\lambda(x)$ C^∞ -kuvaus tasossa (x, λ) , missä x on kuvauksen f_λ määrittelyjoukon piste. Olkoon piste x_0 kuvauksen f_λ kiintopiste parametrin arvolla λ_0 . Oletetaan, että

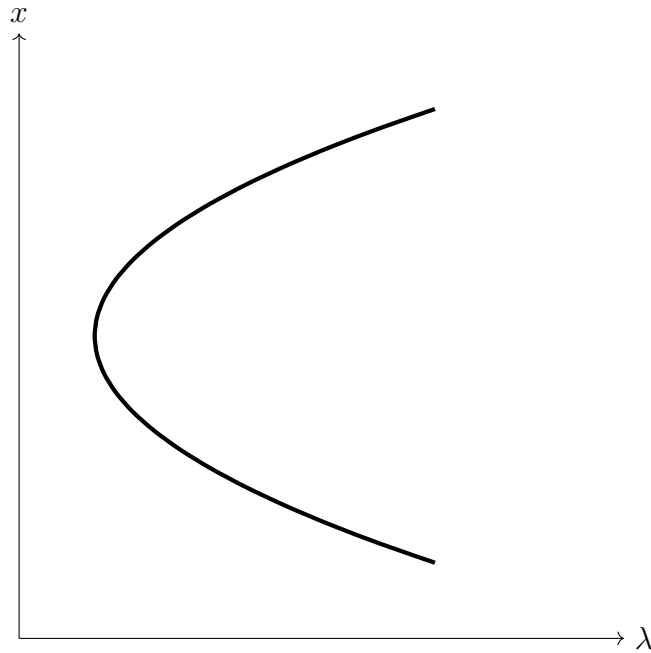
- 1) $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
- 2) $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$
- 3) $f''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$ ja
- 4) $\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}(x_0) \neq 0$.

Tällöin on olemassa pisteen x_0 sisältävä avoin väli I ja C^∞ -kuvaus $p: I \rightarrow \mathbb{R}$, jolle on voimassa $p(x_0) = \lambda_0$ ja $f_{p(x)}(x) = x$. Lisäksi on voimassa $p'(x_0) = 0$ ja $p''(x_0) \neq 0$.

Todistus. Todistus löytyy kirjan [1] sivuilta 88–89 lauseen 12.6 todistuksesta. □

Toista hyvin yleistä periodisten pisteiden syntymekanismia kutsutaan periodin tuplaantumisbifurkaatioksi. Seuraavassa lauseessa on esitelty se.

Lause 1.44. Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoon $f_\lambda(x)$ C^∞ -kuvaus tasossa (x, λ) , missä x on kuvauksen f_λ



Kuva 1.5: Kuvassa on Lauseen 1.43 tilanteesta kuva. Kuvaajasta nähdään, että kiintopiste jakuu kahdeksi kiintopisteeksi parametrin λ kasvaessa.

määrittelyjoukon piste. Olkoon piste x_0 kuvauksen f_λ kiintopiste parametrin arvolla λ_0 . Oletetaan, että

- 1) $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
- 2) $f'_{\lambda_0}(x_0) = -1$
- 3) $\frac{\partial(f^2)'}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(x_0) \neq 0$.

Tällöin on olemassa pisteen x_0 sisältävä avoin väli I , sekä sellainen kuvaus $p: I \rightarrow \mathbb{R}$, että

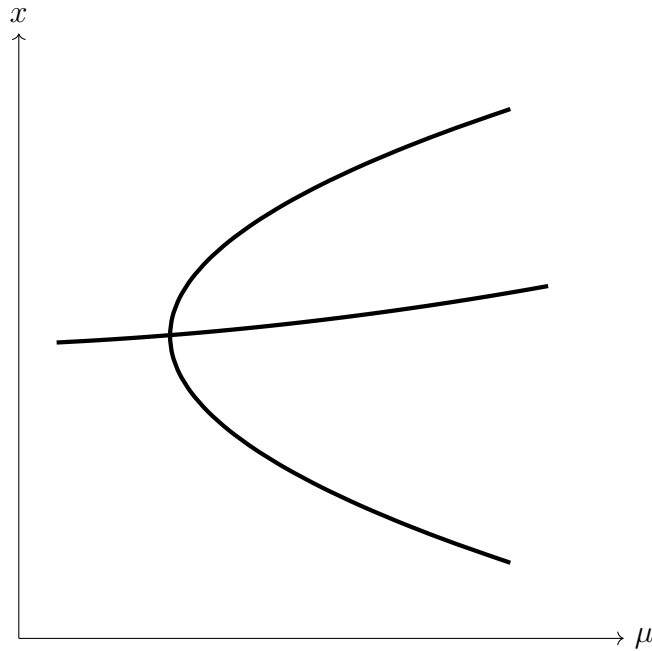
$$f_{p(x)}(x) \neq x \text{ ja } f_{p(x)}^2(x) = x$$

aina, kun $x \in I$. Lisäksi on voimassa $p'(x_0) = 0$ sekä, jos $S_{f_{\lambda_0}} \neq 0$, niin $p''(x_0) \neq 0$.

Todistus. Todistus löytyy kirjan [1] sivuilta 90–91 lauseen 12.7 todistuksesta.

□

Tässä on kaksi hyvin tyypillistä bifurkaatiota. Lisäksi on mahdollista rajata tilanteita milloin bifurkaatiota pystyy tapahtumaan. Seuraavassa lauseessa annetaan ehto, että bifurkaatiota pystyy tapahtumaan. Lisäksi siitä ha-



Kuva 1.6: Kuvassa on Lauseen 1.44 tilanteesta kuva. Kuvaajasta nähdään, että kiintopisteestä syntyy kaksi kaksiperiodista pistettä parametrin λ kasvaessa.

vaitaan, että lauseen mukaisissa tilanteissa bifurkaatiossa pystyy syntymään yhdestä periodisesta pisteestä enimmillään kaksi periodista pistettä.

Lause 1.45. *Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoon $f_\lambda(x)$ C^3 -kuvaus tasossa (x, λ) , missä x on kuvauksen f_λ määrittelyjoukon piste. Olkoon piste x_0 kuvauksen f_λ kiintopiste parametrin arvolla λ_0 . Jos $Sf_\lambda < 0$, niin tällöin jossakin tason pisteen (x_0, λ_0) sisältävässä avoimessa ympäristössä bifurkaatiossa ei voi syntyä kiintopisteestä x_0 kahta enempää periodisia pisteitä.*

Todistus. Jos pisteessä (x_0, λ_0) bifurkaatiossa syntyisi kolme uutta periodista pistettä, nämä kaikki neljä periodista pistettä olisivat kiintopisteitä jollekin kuvaukselle f_λ^m . Väliarvolauseesta seuraa, että kuvauksella f_λ^m on näiden kiintopisteiden välissä olevissa kolmessa erillisessä avoimessa välissä $(f_\lambda^m)'(x) = 1$. Tästä nähdään, että bifurkaation tapahtuessa $|f'_{\lambda_0}(x_0)| = 1$, koska muuten jossakin pisteen (x_0, λ_0) avoimessa ympäristössä $(f'_{\lambda_0})'(x_0) \neq 1$. Kun tästä edelleen jatketaan väliarvolauseen soveltamista, voidaan sanoa, että näiden kolmen pisteen, missä $(f'_{\lambda_0})'(x) = 1$, kahdessa erillisessä avoimes-

sa välissä on kuvauksella $(f_{\lambda_0}^m)''(x)$ kaksi nollakohtaa. Tästä voidaan päätellä vastaavanlaisella päättelyllä, että $(f_{\lambda_0}^m)''(x_0) = 0$. Edelleen samalla periaatteella jatkamalla voidaan todeta, että $(f_{\lambda_0}^m)'''(x_0) = 0$. Toisaalta ehdosta $Sf_\lambda < 0$ seuraa lemmän 1.33 ja Schwarzian derivaatan negatiivisuuden perusteella, että $(f_{\lambda_0}^m)'''(x_0) \neq 0$, jos $(f_{\lambda_0}^m)''(x_0) = 0$. Näin havaitaan ristiriita, jos uusia periodisia pisteitä syntyy kolme tai enemmän bifurkaation tapahtuessa. \square

Lauseen 1.45 todistuksesta nähdään ehto periodisen pisteen syntymiselle bifurkaatiolla. Lauseen 1.45 oletuksilla, jotta kiintopisteessä voi tapahtua bifurkaatio, kiintopisteessä kuvauksen derivaatan on oltava arvoltaan yksi. Näin ollen se on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen lauseen 1.35 perusteella, jos ei ole äärettömän pitkää väliä, jossa kaikki pisteet suppenevat tätä kiintopistettä kohti.

Toisaalta, jos attraktiivisten periodisten ratojen maksimaalinen määrä tunnetaan, niin tällöin olisi myös hyödyllistä tuntea tulos attraktiivisen periodisen radan olemassaololle. Seuraavassa lauseessa on attraktiivisen periodisen radan olemassaoloon liittyvä tulos.

Lause 1.46. *Olkoon I suljettu väli ja olkoon C^1 -jatkuva kuvaus $f: I \rightarrow I$. Oletetaan, että välillä I on vähintään kaksi periodista pistettä. Jos välillä I on äärellinen määrä periodisia pisteitä, niin tällöin välillä I on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen periodinen rata. Lisäksi molemmat kahdesta vierekkäisestä periodisesta pisteestä eivät voi olla hylkiviä tai attraktiivisia toisiinsa päin.*

Todistus. Muodostetaan vastaoletus, että olisi kaksi toisiaan kohti hylkivää periodista pistettä vierekkäin välillä I , ilman että niiden välissä olisi periodista pistettä. Valitaan tarkasteltavaksi kuvaukseksi sellainen $f^m(x)$, että näissä kahdessa periodisessa pisteessä kuvauksen f^m derivaatta näissä hylkivissä periodisissa pisteissä on positiivinen ja molemmat periodiset pisteet ovat yhtälön $f^m(x) - x$ ratkaisuja. Nyt koska nämä periodiset pisteet ovat hylkiviä toisiaan kohti, niin tällöin kuvaus $f^m(x) - x$ saa näiden periodisten pisteiden

välissä nolaa pienemmän ja suuremman arvon. Näin ollen Bolzanon lauseen perusteella näiden kahden periodisen pisteen välissä on periodinen piste. Tämä olisi ristiriita, koska vierekkäisten periodisten pisteiden välissä ei voi olla periodista pistettä. Koska väli I sisältää vähintään kaksi periodista pistettä, niin välin I on sisällettävä ainakin toiselta puolelta attraktiivinen periodinen rata. Todistus, ettei toisiaan kohti attraktiiviset periodiset pisteet voi olla vierekkäin menee vastaavasti vastaoletuksen kautta. \square

Attraktiivisen periodisen radan olemassaolosta on paljon hyötyä, jos näiden ratojen määrä on rajattu. Erityisen paljon siitä on iloa, jos attraktiivisia periodisia ratoja on korkeintaan yksi. Myöhemmin näytetään, että kvadraattisella kuvauksella on korkeintaan yksi attraktiivinen periodinen rata.

Lause 1.47. *Olkkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkkoon $f_\lambda(x)$ C^3 -kuvaus tasossa (x, λ) , missä x on kuvauksen f_λ määrittelyjoukon piste. Oletetaan, että kuvauksella f_λ on yksi derivaatan nolakohta ja kuvaukselle on kaikilla parametrien λ arvoilla voimassa $Sf_\lambda < 0$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla parametrin λ arvoilla ainakin toiselta puolelta attraktiivista periodista pistettä suppenevat maksimaaliset välit, joissa kaikki pisteet suppenevat kohti periodista rataa, ovat äärellisen pitkiä. Oletetaan, että kiintopisteessä (x_0, λ_0) tapahtuu sellainen bifurkaatio, että parametrin λ kasvaessa arvosta λ_0 bifurkaatiossa syntyy periodisia pisteitä. Tällöin on olemassa puoliavoin väli $[\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon[$, jossa kuvauksella f_λ on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen periodinen rata. Lisäksi tässä puoliavoimella välillä ei voi syntyä muita periodisia ratoja.*

Todistus. Ensinnäkin bifurkaation tapahtuessa täytyy $|f'_{\lambda_0}(x_0)| = 1$ lauseen 1.41 yksikäsitteisyyden perusteella. Tilanteessa, jossa $f'_{\lambda_0}(x_0) = -1$, voidaan tarkastella kuvausta $f_{x_0}^2(x)$, jolle on voimassa $(f_{\lambda_0}^2)'(x_0) = 1$. Näin ollen voidaan olettaa, että $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$.

Ehdosta $Sf_\lambda < 0$ seuraa esimerkin 1.33 perusteella, että mielivaltaisella kokonaisluvulla $m \in \mathbb{N}$ on voimassa $Sf_\lambda^m < 0$. Edelleen jatkamalla päätelyä voidaan todeta, että $(f_{\lambda_0}^m)''(x_0) = (f_{\lambda_0}^m)'''(x_0) = 0$ ei ole mahdollista.

Valitaan pisteen (x_0, λ_0) avoimeksi ympäristöksi $\mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}$ sellainen ympäristö, että $(f_\lambda^m)''(\mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}) \cap \{0\} = \emptyset$ tai $(f_\lambda^m)'''(\mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}) \cap \{0\} = \emptyset$. Tällainen on olemassa, koska kuvaus on C^3 -jatkuva tasossa (x, λ) .

Toisaalta, jos bifurkaatiossa syntyisi kolme uutta periodista pistettä, niin tällöin väliarvolauseen perusteella näiden neljän periodisen pisteen välisessä jokaisessa välissä olisi kolme pistettä, joissa kuvauksen $(f^m)'(x) = 1$. Kun edelleen sovelletaan väliarvolauseetta, niin näiden kolmen pisteen, missä derivaatta saa arvoksi 1, jokaisessa välissä olisi piste jossa kuvauksen $(f^m)''(x) = 0$. Vielä kerran soveltamalla väliarvolauseetta löytyy välistä kuvauksen f^m kolmannen derivaatan nollakohta. Johtuen ympäristön $\mathcal{U}_{(x_0, \lambda_0)}$ määrittelystä tämä olisi mahdottomuus. Näin ollen bifurkaatiossa ei voi syntyä kolmea tai enempää periodista pistettä.

Jos parametri $\lambda = \lambda_i$, missä λ_i on määritelmän 1.42 mukainen λ_i , niin lauseen 1.46 perusteella on avoimessa ympäristössä ainakin toiselta puolelta attraktiivinen rata. Piste x_0 on attraktiivinen rata parametrin arvolla $\lambda = \lambda_0$. Määritelmää 1.42 hyödyntäen voidaan valita sellainen puoliavoin väli $[\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon[$, jossa on attraktiivinen rata tässä avoimessa ympäristössä ja $\epsilon > 0$ on reaaliluku. Lauseen 1.38 perusteella kuvauksella on korkeintaan kolme attraktiivista periodista rataa, joiden määrä voidaan karsia yhteen, koska ei ole äärettömän pitkiä välejä, joissa kaikki pisteet suppenevat kohti attraktiivista periodista pistettä.

□

Nyt on riittävästi käyty moniulotteisesti läpi, että voidaan käydä esimerkki läpi, jossa sovelletaan näitä moniulotteisesti käsiteltyjä asioita. Ennen sitä on kuitenkin hyödyllistä käydä eräs lemma läpi.

Lemma 1.48. *Olkoon $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisoitu perhe kuvauksia, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että f_λ on tasossa (x, λ) C^3 -kuvaus ja sen koko määrittelyjoukossa $Sf_\lambda < 0$ ja kuvauksen f_λ derivaatalla on yksi nollakohta c kaikilla parametrin λ arvoilla. Oletetaan lisäksi, että jos kuvauksella on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen rata, niin tällöin maksimaalinen väli, jonka kaikki pisteet suppenevat kohti tätä toiselta puolelta attraktiivista rataa, on*

äärellisen pitkä kaikilla parametrin λ arvoilla. Jos kuvauksen f_{λ_0} derivaatan nollakohta c on määritelmän 1.3 mukaisesti tuleva periodinen piste, niin tällöin kuvauksella f_{λ_0} ei ole attraktiivista periodista rataa.

Todistus. Oletetaan, että kuvauksella f_{λ_0} olisi ainakin toiselta puolelta attraktiivinen n -periodinen rata. Ensinnäkin on voimassa $Sf_{\lambda_0}^n < 0$ esimerkin 1.33 perusteella. Lemman 1.35 perusteella kuvaus $f_{\lambda_0}^n$ suppenee ainakin toiselta puolelta kohti tätä attraktiivista rataa. Lemman 1.37 perusteella jokaisesta tämän attraktiivisen periodisen radan pistettä kohti suppenevassa maksimaalisessa välissä on derivaatan nollakohta. Toisaalta kuvauksella $f_{\lambda_0}^n$ derivaatan nollakohdissa kuvauksella on n kappaletta mahdollisia arvoja. Näin ollen kutakin kuvauksen $f_{\lambda_0}^n$ kiintopistettä, jotka ovat tämän ainakin toiselta puolelta attraktiivisen radan pisteitä, kohti on yksi kuvauksen $f_{\lambda_0}^n$ derivaatan nollakohta maksimaalisella välillä, jossa kaikki pisteet suppenevat kohti tätä attraktiivista kiintopistettä kuvattaessa jatkuvasti kuvauksella $f_{\lambda_0}^n$.

Piste c siis kuuluu jollekin tällaiselle maksimaaliselle välille, koska se on ainoa kuvauksen f_{λ_0} derivaatan nollakohta. Olkoon tämä maksimaalinen väli W . Kuten lemmän 1.37 todistuksesta nähdään, välillä W on voimassa $f_{\lambda_0}^n(W) \subset W$. Lisäksi väliltä W löytyy ainakin toiselta puolelta attraktiivisen radan piste $x_0 \in W$. Koska c on tuleva periodinen piste ja suppenee kohti rataa x_0 , niin on olemassa sellainen pienin positiivinen kokonaisluku k , että $f_{\lambda_0}^{kn}(c) = x_0$. Jos $k = 1$, niin tällöin väliarvolauseen perusteella pisteiden c ja x_0 välissä olisi derivaatan nollakohta, sillä $f_{\lambda_0}^n(c) = f_{\lambda_0}^n(x_0)$. Näin ollen väli W sisältää kaksi kuvauksen $f_{\lambda_0}^n$ derivaatan nollakohtaa, mikä olisi ristiriita.

Voidaan olettaa, että $k \geq 2$. Koska välillä W on ainoastaan yksi derivaatan nollakohta kuvaukselle $f_{\lambda_0}^n$, niin siellä on enintään yksi piste $y_0 \in W$, että $f_{\lambda_0}^n(y_0) = x_0$, sillä muuten väliarvolauseen perusteella löytyisi useita derivaatan nollakohtia väliltä W . Piste y_0 on olemassa koska $f_{\lambda_0}^{kn}(c) = x_0$. Näin ollen $f_{\lambda_0}^{kn-n}(c) = y_0$.

Välin W ainoan kuvauksen $f_{\lambda_0}^n$ nollakohdan on oltava pisteiden x_0 ja y_0 välissä väliarvolauseen perusteella. On kaksi mahdollista järjestystä pisteille x_0, y_0 ja c . Ne ovat $x_0 < c < y_0$ ja $y_0 < c < x_0$. Näistä kahdesta mahdollisesta

seuraa kaksi mahdollista tilannetta. Ensimmäisessä tilanteessa, missä $x_0 < y_0$, $f_{\lambda_0}^{kn-n}(c) - c > 0$ ja $f_{\lambda_0}^{kn-n}(y_0) - y_0 < 0$. Toisessa tilanteessa, missä $x_0 > y_0$, $f_{\lambda_0}^{kn-n}(c) - c < 0$ ja $f_{\lambda_0}^{kn-n}(y_0) - y_0 > 0$. Bolzanon lauseen perusteella löydetään pisteiden c ja y_0 välistä sellainen piste $z \in W$, että $f_{\lambda_0}^{kn-n}(z) - z = 0$. Näin ollen väliltä W löytyy toisenkin periodisen radan piste pisteestä z . Tästä seuraa, että väli W sisältää pisteen z , joka ei suppene kohti pisteen x_0 rataa, mikä aiheuttaa ristiriidan, jos olisi olemassa ainakin toiselta puolelta attraktiivinen periodinen rata. \square

Seuraavassa esimerkissä käydään läpi periodisten pisteiden syntymekanismia tietyillä ennakkoehdoilla. Tullaan myös myöhemmin havaitsemaan, että tämä esimerkin rakenne on erittäin yleinen kvadraattisessa kuvauksessa.

Esimerkki 1.49. Oletetaan, että lemmän 1.48 oletukset ovat voimassa lukuun ottamatta, että derivaatan nollakohta on tuleva periodinen piste. Oletetaan lisäksi, että periodisia pisteitä pystyy vain syntymään parametrin λ kasvaessa. Aloitetaan Lauseen 1.43 tilanteesta ja oletetaan, että n -periodinen pisteen bifurkaatiossa syntyy toinen n -periodinen rata parametrin arvolla $\lambda = \lambda_0$. Näin ollen jokaiselle maksimaaliselle välille riittää vain yksi derivaatan nollakohta kuvausta f_{λ}^n tarkasteltaessa, koska raja-arvot ovat yksikäsitteisiä. Oletetaan, että kaikilla parametrin λ arvoilla derivaatan nollakohta on ääriarvokohta. Oletetaan lisäksi, että on olemassa myös sellainen parametrin $\lambda > \lambda_0$ arvo, että kuvauksella f_{λ} ei ole attraktiivista periodista rataa.

Ajatellaan mielivaltaisella parametrin λ arvolla tarkasteltavaksi väliksi I edellä puhuttu tuleva n -periodinen piste ja hylkivä n -periodinen piste, joka on mukana bifurkaatiossa. Lauseen 1.47 perusteella toinen näistä bifurkaation radoista on attraktiivinen. Koska kuvauksen f_{λ} derivaatan nollakohta on ääriarvokohta, niin tällöin näillä maksimaalisilla väleillä on ääriarvokohtana tämä kuvauksen f_{λ}^n derivaatan nollakohta. Ensinnäkin on hyvä huomioida, että lauseen 1.46 perusteella tällä välillä on attraktiivinen rata, niin kauan, kun siellä on äärellinen määrä periodisia pisteitä. Toisaalta, koska kahden erillisen suljetun välin välissä on avoin väli, niin tämä maksimaalisen välin

hylkivä n -periodinen piste ei voi muuttua ainakin toiselta puolelta attraktiiviseksi, jos maksimaalinen väli sisältää äärellisen määrän periodisia pisteitä. Samalla perusteella voidaan myös todeta, että periodiset pisteet voivat syntyä välillä I vain bifurkaatiolla. Lausetta 1.47 soveltamalla voidaan todeta, että bifurkaation tapahtuessa on olemassa puoliavoin väli parametrilla λ , jossa ei voi syntyä muita periodisia pisteitä. Saman lauseen perusteella myös hylkiviä periodisia pisteitä ei voi olla vierekkäin vaan niiden välissä täytyy olla attraktiivinen periodinen piste. Lisäksi Bolzanon lausetta soveltamalla voidaan todeta, että se periodinen piste, joka on lähimpänä välin I ei periodista päätepistettä, täytyy olla attraktiivinen. Induktiopäätelyllä voidaan näyttää, että aina kun välille I syntyy periodisia pisteitä, täytyy aina seuraavalla syntyvällä periodisella radalla olla kaksinkertainen määrä periodisia pisteitä kuin välin eniten periodisia pisteitä sisältävä rata. Lisäksi, jos väli $\text{int}(I)$ sisältää enemmän kuin yhden periodisen radan, jossa pisteitä on $2^m \cdot n$, missä $m \geq 0$ on kokonaisluku, niin tällöin on mahdollista löytää äärettömän monta periodista rataa väliltä I . Tämä olisi ristiriita.

Muodostetaan seuraavaksi sellainen avoin väli parametrille λ missä väli I sisältää äärellisen määrän periodisia pisteitä. Tässä voidaan hyödyntää lausetta 1.47. Olkoon λ_i pienin alaraja sellaiselle parametrin λ arvolle, että välille $\text{int}(I)$ syntyy $(2^i n)$ -periodinen piste. Nyt voidaan muodostaa avoin polkuyhtenäinen väli

$$\text{int}(\Lambda) = \bigcup_{j=1}^{\infty}]\lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}[.$$

Oletuksien mukaan on olemassa sellainen λ arvo, ettei kuvauksella f ole attraktiivista rataa. Näin ollen väli Λ on rajoitettu. Olkoon $\Lambda = \bar{\Lambda} = [\lambda_0, \lambda_\infty]$.

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta parametrin arvolla λ_∞ . Muodostetaan vasta oletus, että parametrin arvolla $\lambda = \lambda_\infty$ kuvauksella f_λ^n olisi attraktiivinen periodinen rata. Tarkastellaan jonoa

$$(a_k)_{k=1}^{\infty} = (\text{sup}(PER(2^k n)))_{k=1}^{\infty}, \text{ missä } PER(2^k n)$$

on $(2^k n)$ -periodiset pisteet välillä I . Ensinnäkin tämä jono on aidosti kasvava. Toisaalta tämä jono on rajoitettu ja näin ollen se suppenee jotakin



Kuva 1.7: Periodisten pisteiden syntymisen rakenne

arvoa kohti. Suppeneva jono on selkeästi Cauchy-jono. Kuten Lauseen 1.47 todistuksesta nähdään, ainoa vaihtoehto periodin tuplautumiseen on, että kuvauksen $f_\lambda^{2^k n}$ derivaatta menee $(2^k n)$ -periodisessa pisteessä alle luvun -1 . Derivaatan jatkuvuudesta seuraa, että pisteiden a_k ja a_{k-1} välissä on kuvauksen $f_\lambda^{2^k n}$ derivaatan nollakohta, joka on ääriarvokohta. Koska kuvauksella f_λ on vain yksi derivaatan nollakohta, täytyy välillä I kuvauksen $f_{\lambda_\infty}^{2^{k+1} \cdot n}$ derivaatan nollakohdassa saada arvo välistä $]a_{k-1}, a_k[$ lemmän 1.48 perusteella, koska vasta oletuksesta seuraa, että $[\lambda_k, \lambda_\infty]$ välillä on attraktiivinen rata kuvauksella f_λ . Valitaan väliltä I se attraktiivista periodista rataa kohti suppeneva maksimaalinen väli J , jolle on voimassa $]a_{k-1}, a_k[\cap J \neq \emptyset$. Koska maksimaalinen väli J ei ole mielivaltaisen pieni, niin aina löydetään tältä väliltä periodinen piste a_{k-1} tai a_k . Prosessia toistamalla olisi mahdollista löytää eri attraktiivinen periodinen rata, mikä olisi ristiriita lauseen 1.38 perusteella.

Kuvasta 1.7 nähdään, että periodisten pisteiden syntyminen noudattaa samanlaista rakennetta. Ainoan attraktiivisen radan pisteistä syntyy aina kaksi periodista pistettä. Lisäksi kuvassa on väritetty punaisella attraktiivisen radan pisteet. Tietyillä ehdoilla periodisten pisteiden synty noudattaa tällaista rakennetta. Lisäksi tärkeää on huomata kuvassa, että periodin tuplaan-

tumisia tapahtuu äärettömän paljon ja kuvassa on piirrettynä vain muutama ensimmäinen periodin tuplaantuminen. Periaate kuitenkin on näissä periodin tuplaantumisissa samanlainen. Jos lähtötilanteena on n -periodinen rata, niin tällöin on n kappaletta tällaisia rakenteita, joissa tapahtuu periodin tuplaantumiset aina samoilla parametrien arvoilla.

1.7 Kaaos

Monissa tilanteissa dynaamisen systeemin ennustaminen on periaatteessa tarkkaa, mutta kuitenkin systeemin ominaisuuksista seuraa, että ennustaminen tarkkaan on lähes mahdotonta. Kvadraattinenkin kuvaus käyttäytyy joissakin tilanteissa kaoottisesti. Ennen kuin enemmän käsitellään kaoottisuutta, on hyvä käydä läpi sen määritelmä, joka löytyy Devaney'n teoksesta [1] sivulta 50. Tätä ennen kuitenkin käydään läpi kaksi määritelmää, jotka ovat välttämättömiä kaoottisuuden ymmärtämiselle. Nämä kaksi määritelmää löytyvät myös teoksesta [1].

Määritelmä 1.50. Olkoon kuvaus $f: I \rightarrow I$. Kuvauksella f on herkkä riippuvuus lähtöarvosta, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että mielivaltaisen pisteen $x \in I$ mielivaltaisessa avoimessa ympäristössä \mathcal{U} on olemassa sellainen piste $y \in \mathcal{U} \subset I$ ja kokonaisluku $n \geq 0$, että $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Määritelmä 1.51. Olkoon kuvaus $f: I \rightarrow I$ ja olkoon joukot \mathcal{U} ja \mathcal{V} mielivaltaisia joukon I avoimia joukkoja. Tällöin kuvaus f on topologisesti transitiivinen, jos $f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, kun kokonaisluku $k > 0$.

Määritelmä 1.52. Olkoon V joukko ja kuvaus $f: V \rightarrow V$ sellainen kuvaus, jolle on voimassa seuraavat kolme ehtoa.

- 1.) Kuvauksella f on herkkä riippuvuus lähtöarvosta.
- 2.) Kuvaus f on topologisesti transitiivinen.
- 3.) Kuvauksella f on periodiset pisteet tiheässä joukossa V .

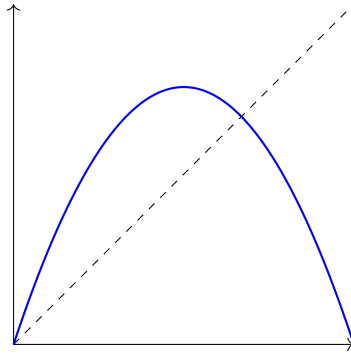
Tällöin kuvausta f kutsutaan kaoottiseksi.

Näin on kaoottisuudelle määritelmä siihen läheisesti liittyvine käsitteineen. Tietokoneellakin systeemin ennustaminen riittävän kauas lähtöhetkestä muuttuu lähes mahdottomaksi, koska sillä laskettaessa tulee pyöristysvirheitä, jotka jossain vaiheessa kasvavat suhteellisesti isoksi.

Lause 1.53. *Jonoavaruus Σ_2 varustettuna siirtokuvauksella σ on kaoottinen.*

Todistus. Ensinnäkin lauseen 1.21 perusteella periodiset pisteet ovat tiheässä jonoavaruudessa. Esimerkistä 1.18 voidaan helposti nähdä, että mielivaltaisessa jonoavaruuden avoimessa joukossa on aina olemassa kaksi erillistä avointa osajoukkoa. Näin ollen induktiopäätelyllä mielivaltaisesta jonoavaruuden avoimesta joukosta löydetään mielivaltaisen monta avointa erillistä joukkoa. Toisaalta lauseen 1.21 perusteella jonoavaruudella on tiheä rata. Olkoon \mathcal{U} ja \mathcal{V} mielivaltaisia jonoavaruuden avoimia joukkoja. Koska jonoavaruudessa on tiheä rata, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut, että tiheä radan lähtöpiste p kuvautuu avoimeen joukkoon \mathcal{U} ja \mathcal{V} . Koska molemmat joukot sisältävät mielivaltaisen monta avointa erillistä joukkoa, täytyy pisteen p kuvautua äärettömän monta kertaa kumpaankin joukkoon. Näin pystytään päättämään, että jonoavaruus siirtokuvauksella on topologisesti transitiivinen.

Enää on näyttämättä, että jonoavaruuden siirtokuvauksella on herkkä riippuvuus lähtöarvosta. Valitaan, että $\delta = 1/4$. Valitaan mielivaltaisen jonoavaruuden pisteen \mathbf{s} sisältävästä mielivaltaisesta avoimesta ympäristöstä piste $\mathbf{t} \neq \mathbf{s}$. Olkoon $n \geq 0$ pienin kokonaisluku, jolle on voimassa $s_n \neq t_n$. Tästä seuraa esimerkin 1.18 perusteella, että $d(\sigma^n(\mathbf{s}), \sigma^n(\mathbf{t})) > 1/4$. Tämä tarkoittaa, että jonoavaruus siirtokuvauksella on herkkä riippuvuus lähtöarvosta. Näistä kaikista kolmesta kohdasta seuraa, että jonoavaruus siirtokuvauksella on kaoottinen. □



Kuva 2.1: Kuvassa on kvadraattinen kuvaus $f_3(x) = 3x(1 - x)$.

2 Kvadraattinen kuvaus

Kvadraattinen kuvaus on hyvin yksinkertainen kuvaus, josta seuraava dynamiikka on hyvinkin monimutkaista. Systemin dynamiikkaa esitellään periodisten pisteiden kautta aina päätyen symboliseen dynamiikkaan, jota voidaan soveltaa topologista konjugaatiota apuna käyttäen. Tässä kappaleessa hyödynnetään paljon kappaleen 1 esimerkkejä. Pääosin kaikki todistukset löytyvät tästä työstä. Lopuksi vielä käydään pari mahdollista sovelluskohdetta läpi kvadraattisen kuvauksen muodostamalle dynaamiselle systeemille.

2.1 Kvadraattisen kuvauksen määritelmä ja sen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $[0, 3]$

Kvadraattisen kuvauksen määritelmä on hyvin yksinkertainen, kuten seuraavasta määritelmästä nähdään.

Määritelmä 2.1. Kuvausta $f_\mu: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään

$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x) = \mu(-x^2 + x) = -\mu x^2 + \mu x,$$

kutsutaan kvadraattiseksi kuvaukseksi, missä parametri $\mu \geq 0$ on reaaliluku.

Ratkaisemalla toisen asteen yhtälö $f_\mu(x) - x = 0$ on selkeästi nähtävissä, että yhtälöllä on nollakohtana $x = 0$. Tämän jälkeen on helppo ratkaista

toinen nollakohta, jonka arvo $x = 1 - 1/\mu$, kun $\mu \neq 0$. Näin ollen kuvauksella on kaksi kiintopistettä. On kuitenkin hyvä huomata, että poikkeuksena tässä on parametrin arvo $\mu = 1$, jolloin kuvauksella f_μ on nolla kaksinkertainen kiintopiste.

Sharkovskiiin teoria, lause 1.14, voi nopeuttaa huomattavasti joskus tarkastelua, koska jos jatkuvalla kuvauksella ei ole kaksiperiodista pistettä, niin sillä on ainostaan periodisia pisteitä, jotka ovat kiintopisteitä. On kuitenkin hyvä huomata, että periodisten ei kiintopisteiden laskeminen voi tulla hyvin pienillä periodien pituuksilla hyvinkin haastavaksi. Tämän vuoksi tullaan myöhemmin sivuuttamaan kolmiperiodisten pisteiden analyttinen laskeminen. Kaksiperiodisen pisteen laskeminen onnistuu kohtuullisen hyvin ja lasketaan seuraavaksi kvadraattisen kuvauksen kaksiperiodiset pisteet yhtälön $f_\mu^2(x) - x = 0$ ratkaisuksista.

Kvadraattisen kuvauksen tapauksessa kaksiperiodisten pisteiden laskeminen onnistuu kohtuullisen kivuttomasti pienellä temppuilulla. Prosessi kuitenkin on kohtuullisen työläs, niin näytetään tärkeimmät välivaiheet. Aluksi muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} f_\mu(a) = b \\ f_\mu(b) = a, \end{cases}$$

missä pisteet a ja b ovat määrittelyjoukon pisteitä. Kun yhtälöparia lähdetään ratkaisemaan sijoitusmenetelmällä, saadaan se muotoon

$$\mu(a^2 - b^2) - \mu(a - b) - (a - b) = 0.$$

Tässä vaiheessa jaetaan yhtälö molemmin puolin lausekkeella $(a - b)$. Tämä eliminoi yhtälöparin löydettävistä ratkaisuksista kiintopisteratkaisut. Näin ollen kaksiperiodisten pisteiden ratkaisut saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisuna, kun tehdään sijoitus $b = \mu a(1 - a)$. Jos ei jaettaisi molemmin puolin lausekkeella $(a - b)$, niin tällöin kaksiperiodisten pisteiden ratkaisut olisivat neljännen asteen polynomien nollakohtina. Ja kun kaksiperiodisten pisteiden ratkaisua sievennetään, saadaan se muotoon

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \pm \frac{1}{2\mu} \cdot \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}.$$

Kaksiperiodisten pisteiden ratkaisusta on helppo nähdä, että ainoa kaksiperiodinen rata on olemassa vain, jos parametri $\mu > 3$. Parametrin arvolla $\mu = 3$ kiintopiste on kaksinkertainen nollakohta.

Ennen kuin jatketaan päättelyä on hyvä käydä seuraava lause läpi. Siinä todistetaan paljon tärkeitä ominaisuuksia, joiden avulla pystytään hyödyntämään kappaleen 1 tuloksia.

Lause 2.2. *Kvadraattiselle kuvaukselle f_μ on seuraavat ominaisuudet voimassa.*

- i) Kuvaus $f_\mu^n(x)$ on C^∞ -kuvaus tasossa (x, μ) .*
- ii) Kuvaukselle f_μ on voimassa $Sf_\mu < 0$ kaikilla parametreilla $\mu > 0$.*
- iii) Kuvauksella f_μ on korkeintaan yksi ainakin toiselta puolelta attraktiivinen periodinen rata.*
- iv) Maksimaaliset välit, jotka suppenevat kohti mahdollista ainakin toiselta puolelta attraktiivista rataa, ovat äärellisen pitkiä kaikilla parametrin arvoilla $\mu > 1$.*
- v) Parametrin arvolla $\mu > 0$, jos kuvauksella f_μ on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen rata, niin tällöin kuvauksella on olemassa arvoltaan suurin periodinen piste x_0 , joka on yksi piste attraktiiviselta radalta. Lisäksi kvadraattinen kuvaus on attraktiivinen pisteen puolelta $x > x_0$ pisteen x_0 avoimessa ympäristössä.*

Todistus. Kuvaus f_μ on polynomi, joten f_μ^n on polynomi. Koska polynomit ovat C^∞ -kuvauksia, niin kohta *i)* on todistettu. Kohdan *ii)* todistus menee suoralla sijoituksella Schwarzin derivaatan määritelmään 1.31 ja sijoituksen ja sieventämisen jälkeen Schwarzin derivaatan lausekkeeksi tulee

$$Sf_\mu(x) = \frac{-6}{(-2x + 1)^2} < 0.$$

Kohta *iii)* seuraa alaspäin aukeavan paraabelin ominaisuuksista ja lauseesta 1.38. Olkoon $g(y)$ mielivaltainen alaspäin aukeava paraabeli. Koska mielivaltaiselle alaspäin aukeavalle paraabelille on voimassa, että kun y pienenee tai kasvaa rajatta, niin $g(y) - y$ ja $g(y)$ pienenevät rajatta. Tästä seuraa, että kvadraattisella kuvauksella on korkeintaan yksi attraktiivinen periodinen

rata, koska ei ole äärettömän pitkiä välejä, jossa kaikki pisteet suppenevat kohti attraktiivista periodista rataa lauseen 1.38 perusteella. Samalla tämä sisältää todistuksen myös kohtaan *iv*), koska reaalilukuväli sisältää korkeintaan kaksi äärettömän pitkää väliä. Parametrin arvoilla $\mu \geq 1$ on mahdollista myös näyttää, että kaikki periodiset pisteet ovat välillä $[0, 1]$ ja lisäksi attraktiivisen periodisen pisteen rajoina ovat viimeistään tämän reunat.

Kohdan *v*) todistus onnistuu näppärästi tutkimalla kuvauksen globaalia maksimia. Kvadraattisen kuvauksen määritelmästä nähdään, että pisteen x kasvaessa rajatta $f_\mu^n(x)$ pienenee rajatta. Toisaalta kuvauksen f_μ globaali maksimiarvo $\mu/4$ on myös kuvauksen f_μ^n ääriarvo tulon derivaattasäännön ja lemmän 1.37 perusteella, jos kuvauksella f_μ on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen n -periodinen rata. Näin ollen ei voi olla hylkivää periodista pistettä, joka saisi kaikkia attraktiivisia periodisia pisteitä suuremman arvon. Näin ollen myös Bolzanon lauseen perusteella täytyy suurimman attraktiivisen periodisen pisteen x_0 olla attraktiivinen pisteen x_0 avoimessa ympäristössä puolelta $x > x_0$. \square

Koska kvadraattinen kuvaus $f_\mu(x)$ on jatkuva, niin siihen voi soveltaa Sharkovskiiin teoriaa. Sen avulla on helppo todeta, että parametrin arvolla $\mu \leq 3$ ei ole kuin kiintopisteitä. Lauseen 1.46 perusteella voidaan sanoa, että kvadraattisella kuvauksella on ainakin toiselta puolelta attraktiivinen rata, kun parametri $\mu \in]0, 3[\setminus \{1\}$. Kun tähän vielä huomioidaan, että parametrin arvolla $\mu = 0$ kaikki pisteet ovat kiintopisteen $x = 0$ alkukuvia ja näin ollen kvadraattisella kuvauksella tällöin on attraktiivinen rata. Parametrin arvolla $\mu = 1$ kuvauksella on vain yksi kiintopiste kohdassa $x = 0$. Kun vielä lisäksi havaitaan, että derivaatta $f'_1(0) = 1$, niin lauseen 1.35 perusteella se on myös tällöin ainakin toiselta puolelta attraktiivinen rata.

Koska $1 - 1/\mu < 0$, kun $\mu \in]0, 1[$, niin lauseen 2.2 kohdan *v*) perusteella piste $x = 0$ on attraktiivinen puolelta $x > 0$, kun $\mu \in]0, 1[$. Olkoon W_μ maksimaalinen väli, jonka kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä $x = 0$. Jos välillä W_μ ei ole ylärajaa, niin kaikki välin $[0, 1]$ pisteet suppenevat kohti pistettä $x = 0$. Tutkitaan seuraavaksi tilanne, jossa väli W_μ on rajoitettu

ylhäältä. Parametrin arvoilla $\mu \in]0, 1[$ on olemassa kiintopiste $1 - 1/\mu$, joka viimeistään on alaraja välille W_μ . Kun $\mu = 1$, niin $f_1(x) - x < 0$ aina, kun $x < 0$, joten esimerkiksi $x = -1$ on viimeistään alaraja välille W_1 . Koska välillä W_μ on alaraja sekä yläraja, niin lemmän 1.37 perusteella piste $x = 1/2$ kuuluu myös välille W_μ . Koska $f_\mu([0, 1/2]) = f_\mu([1/2, 1])$, niin välin $[0, 1]$ kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä $x = 0$, kun $\mu \in]0, 1[$.

Parametrin arvoilla $\mu \in]1, 3[$ on voimassa $1 - 1/\mu > 0$, joten lauseen 2.2 kohdan v) perusteella sekä lauseen 1.46 perusteella piste $x = 1 - 1/\mu$ on molemmilta puolilta attraktiivinen. Huomioidaan, että pisteet $x = 0$ ja $x = 1$ toimivat ainakin maksimaalisen attraktiivisen välin rajoina. Lisäksi, jos olisi olemassa pienempi väli, jossa kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä $x = 1 - 1/\mu$, tarkoittaisi se, että kiintopisteitä olisi enemmän, koska ei ole olemassa kaksiperiodisia pisteitä, kun $\mu \leq 3$. Kolmas kiintopiste olisi myös ristiriita ja näin ollen väli $]0, 1[$ on maksimaalinen väli, jossa kaikki pisteet suppenevat kohti kiintopistettä $x = 1 - 1/\mu$.

2.2 Kvadraattisen kuvauksen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $]3, 4[$

Kvadraattisen kuvauksen tapauksessa kaikki periodiset pisteet kiintopisteitä lukuun ottamatta esiintyvät ensimmäisen kerran avoimella välillä $]3, 4[$. Itse asiassa paljastuu, että tällä välillä periodisten pisteiden syntymekanismi noudattaa samanlaista rakennetta. Ennen kuin pureudutaan tarkemmin tähän rakenteeseen, niin käydään läpi kaksi tärkeää sekä erittäin syvällistä tulosta.

Lause 2.3. *Kvadraattisella kuvauksella f_μ parametrin $\mu > 1$ kasvaessa on vain mahdollista syntyä periodisia pisteitä.*

Todistus. Tässä todistuksessa hyödynnetään topologista konjugaatiota sekä kuvausta, jonka ominaisuus tunnetaan. Kuvauksella $g_\lambda(x) = \lambda - x^2$ parametrin λ kasvaessa voi vain syntyä periodisia pisteitä ([3] s. 219). Olkoon kuvaus $h(x) = \alpha x + \beta$, jossa reaali-lukuja α ja β ei ole vielä kiinnitetty.

Ratkaistaan seuraavaksi yhtälö $h \circ f(x) = g \circ h(x)$, joka on kaikilla pisteen x arvoilla voimassa. Kun sijoitetaan lausekkeiden paikalle kuvaukset ja sievennetään, saadaan yhtälöksi

$$-\alpha\mu x^2 + \alpha\mu x + \beta = -\alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x - \beta^2 + \lambda.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi

$$\alpha = \mu, \beta = -\mu/2 \text{ ja } \beta^2 + \beta - \lambda = 0.$$

Kun edellisestä vielä jatketaan, saadaan parametrin μ ja λ väliseksi riippuvuudeksi yksikäsitteisesti $\mu = 1 + \sqrt{1 + 4\lambda}$, kun parametri $\mu > 1$. Toisaalta $\alpha \neq 0$, niin $h(x)$ on bijektiivinen kuvaus ja näin ollen kuvaukset f_μ ja g_λ konjugoivat keskenään.

Nyt havaitaan parametrien μ ja λ välisestä riippuvuudesta, joka ei ole kummankaan parametrin osalta ylhäältä rajoitettu, että parametrin μ kasvaessa parametrin λ arvo kasvaa. Tästä seuraa topologisen konjugaation perusteella, että periodisia pisteitä voi vain syntyä parametrin μ kasvaessa. \square

Edellisessä lauseessa tuotiin esille, että kvadraattisella kuvauksella parametrin μ kasvaessa voi vain syntyä periodisia pisteitä. Seuraava lause liittyy attraktiivisen periodisen radan olemassaoloon.

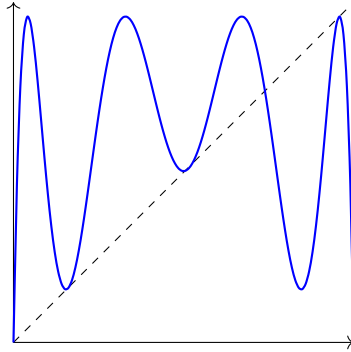
Lause 2.4. *Kvadraattisella kuvauksella molemmilta puolilta attraktiiviset radat ovat tiheässä parametrivälillä $\mu \in [0, 4]$.*

Todistus. Todistus löytyy teoksesta [4]. \square

Nyt on riittävästi ennakkotietoja, että pystytään käymään läpi rakenne, jota esiintyy kvadraattisen kuvauksen tapauksessa koko välin ajan parametrin arvoilla $\mu \in]3, 4[$. Itse asiassa periodisten pisteiden syntymisessä toistuu esimerkin 1.49 mukainen tilanne. Ensinnäkin parametrin arvolla $\mu \geq 4$ ei voi syntyä enää periodisia pisteitä, koska derivaatan nollakohta on tuleva kiintopiste tai pienenee rajatta. Jos kvadraattisella kuvauksella syntyisi periodinen rata, olisi se attraktiivinen ainakin toiselta puolelta. Näin ollen lemmän 1.48

perusteella tai lauseen 1.46 perusteella ei voi syntyä uusia periodisia pisteitä. Näin ollen parametrin arvo $\mu = 4$ toimii sellaisena parametrin arvona, että sen jälkeen ei periodisia pisteitä synny.

Ensinnäkin lauseesta 2.2 löytyy paljon todistuksia ehtojen toteutumiseksi. Näin on enää jäljellä yksi ehto, joka ei ole likimainkaan selvä. Ja se on lauseen 1.43 lähtötilanne. Oletetaan, että parametri $\mu > 1$, ja valitaan mielivaltainen n -periodinen rata tarkasteluun. Kuvauksella on parametrin μ suurimmassa alarajassa, joka tällä n -periodisella radalla on, kasautumispisteitä tasossa (x, μ) , koska muuten se ei voisi olla suurin alaraja parametrille μ . Jos kutakin näitä kasautumispisteitä kohti suppenee kaksi kuvauksen f_μ^n derivaatan nollakohtaa maksimaalisella välillä, niin tällöin nämä kasautumispisteet muodostavat $n/2$ -periodisen radan. Toinen vaihtoehto on, että kasautumispisteet muodostavat toiselta puolelta attraktiivisen n -periodisen radan. Jos periodisen radan periodin pituudessa ei ole tekijänä lukua kaksi, niin tällöin viimeistään ei ole olemassa $n/2$ -periodista rataa. Näin ollen löydetään sellainen μ_0 , että on toiselta puolelta attraktiivinen rata. Jos periodisen radan pituus puolittuu periodin pituudeksi yksi, niin tällöin vastaava tilanne löytyy kiintopisteestä $x = 0$ parametrin arvolla $\mu_0 = 1$. Lauseen 2.3 perusteella parametrin arvolla μ_0 ei voi tämä vain toiselta puolelta attraktiivinen rata tuhoutua. Oletetaan, että toiselta puolelta attraktiivinen rata on m -periodinen. Koska kuvaus f^m voi leikata suoran $y = x$ äärellisen monta kertaa, niin Bolzanon lauseen sekä lauseen 2.2 kohdan *i*) perusteella voidaan todeta bifurkaation tapahtuminen, missä syntyy toinen m -periodinen rata, kun kuvauksen $f_{\mu_0}^m$ derivaatta muuttuu tässä toiselta puolelta attraktiivisella radalla. Lisäksi, kun huomioidaan ehto $Sf_\mu < 0$, niin voidaan todeta, että syntyy täsmälleen yksi rata bifurkaatiossa. Näin ollen tilanne vastaa esimerkiksi 1.49 tilannetta. Jos lähtötilanne on m -periodinen, niin tällöin löytyy m kappaletta välejä, joissa periodintuplautumisbifurkaatiolla syntyy periodisia pisteitä, kunnes niitä on parametrin μ_∞ arvolla äärettömän monta näillä väleillä. Lisäksi jossakin tällaisen välin bifurkaatiossa täytyy syntyä tämä mielivaltainen n -periodinen rata lauseen 2.2 kohdan *v*) ja lauseen 2.3 perusteella.

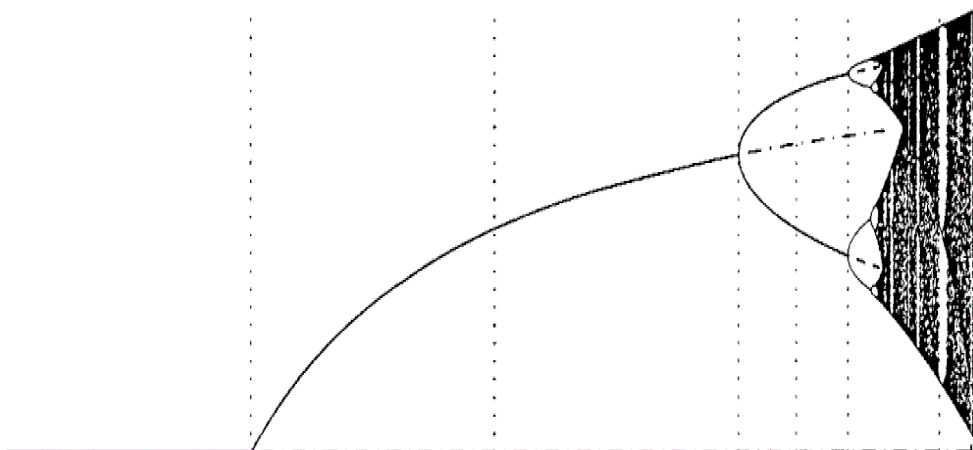


Kuva 2.2: Kuvassa on kvadraattinen kuvaus $f_{1+\sqrt{8}}^3(x)$.

Kun vielä jatketaan eteenpäin päättelyä hyödyntäen lausetta 2.4, niin tällaisten välien $[\mu_0, \mu_\infty]$ sisäpisteet ovat tiheässä parametrien arvoilla $[0, 4]$. Tästä on seurauksena, että aina tällaisilla suljetuilla väleillä täytettäessä väliä $[0, 4]$, mielivaltaisen tällaisen välin päätepisteiden ympäristössä on ääretön määrä tällaisia välejä, ellei välin alarajana ole $\mu = 1$. Silloin alarajan ympäristössä ei ole äärettömän montaa väliä. Lisäksi myös lemmän 1.48 tilanteiden läheisyydessä on äärettömän paljon tällaisia välejä. Itse asiassa olisi mahdollista myös näyttää, että lemmän 1.48 tapaisia tilanteita on äärettömän monta jokaisen μ_∞ läheisyydessä. Lisäksi periodisten pisteiden syntyminen noudattaa Sarkovskiin teoriaa, lause 1.14. On kuitenkin hyvä huomata, että koska periodisten ratojen synty noudattaa tätä esimerkkiä 1.49, niin sen jälkeen, kun ensimmäisen kerran syntyy 5-periodinen rata, syntyy esimerkiksi 10-periodinen rata ennen kuin 3-periodinen rata syntyy. Sharkovskiin järjestyksen mukaan $10 \prec 5$.

Klassinen tapa lähestyä periodintuplaantumisia on renormalisaatioteorialla kiintopisteestä alkavia periodintuplautumisbifurkaatioita. Se on kuitenkin osittain numeerinen tapa lähestyä. Sitä kautta ei kuitenkaan voi mitään yleistä osoittaa, mutta on siltäkin oma vahvuutensa. Sitä hyödyntäen on voitu todistaa, että kiintopisteestä lähtevässä periodintuplautumisbifurkaatioissa

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i},$$



Kuva 2.3: Kvadraattisen kuvauksen bifurkaatiogrammi. (Kirjan [2] kuva 11.2.3 uudelleenskaalattuna , s. 307)

missä kokonaisluku $i \geq 2$ ja parametrin arvolla μ_i syntyy bifurkaatiossa 2^i -periodinen rata. Raja-arvo $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i$ lähestyy kohti Feigenbaumin vakiota, jonka likiarvo on 4,699. Feigenbaumin vakio on siinä mielessä mielenkiintoinen, että se ei rajoitu pelkästään kvadraattiseen kuvaukseen, vaan sitä löydetään myös muiltakin kuvauksilta. ([2], s. 307-308)

Kvadraattisen kuvauksen tapauksessa on mahdollista laskea tarkka arvo parametrille μ , milloin 3-periodinen rata syntyy. Sharkovskiiin teorian, lause 1.14, mukaan tämä on siinä mielessä merkityksellinen paikka, että siinä vaiheessa on syntynyt kaikkia periodisia ratoja ainakin yksi kappale. Kolmeperiodinen rata syntyy parametrin arvolla $\mu = 1 + \sqrt{8}$. Kuvassa 2.2 on kuvauksen $f_{1+\sqrt{8}}^3(x)$ kuvaaja tässä tilanteessa. Lisäksi olisi myös mahdollista määrittää tarkka arvo suurimmalle alarajalle, minkä jälkeen alkaa syntymään periodin pituudeltaan parittomia ratoja. Numeerisesti olisi myös mahdollista määrittää muitakin tällaisia rajoja. ([2], s. 307)

2.3 Kvadraattisen kuvauksen muodostama dynaaminen systeemi parametrivälillä $[4, \infty[$

Seuraavaksi tarkastellaan, kun parametrin arvo $\mu \geq 4$. Tällöin ei ole attraktiivista periodista rataa. Tämä on mahdollista havaita tutkimalla derivaatan nollakohdan rataa. Tilanteessa $\mu = 4$ lemmän 1.48 perusteella ei ole attraktiivista rataa, sillä $f_4^2(1/2) = 0$, joka on kiintopiste. Tilanteessa $\mu > 4$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu(1/2) = -\infty$, niin lemmän 1.37 ja lauseen 2.2 kohdan *iv*) perusteella ei ole attraktiivista rataa. Kun tarkastellaan kvadraattisen kuvauksen muodostamaa dynaamista systeemiä tällä parametrivälillä, niin pääasiassa hyödynnetään topologista konjugaatiota sekä tunnettuja ominaisuuksia yksinkertaisemmasta dynaamisesta systeemistä. Lauseessa 1.30 todistettiin, että kvadraattinen kuvaus konjugoit jonoavaruuden Σ_2 kanssa parametreillä $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Seuraavaksi lähdetään laajentamaan tietämystä tästä eteenpäin.

Itse asiassa topologinen konjugaatio on voimassa parametrin arvoilla $\mu > 4$. Todistus menee vastaavasti kuin tapauksessa $\mu > 2 + \sqrt{5}$, mutta homeomorfismin $S: \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ injektiivisyys on ainoa lisähaaste. Seuraavassa lemmassa näytetään, että injektiivisyys on myös voimassa, kun parametri $\mu > 4$.

Lemma 2.5. *Esimerkin 1.29 mukaisen kuvauksen S injektiivisyys on voimassa myös parametrin arvolla $\mu > 4$.*

Todistus. Todistetaan väite vastaoletuksen kautta, että on olemassa sellaiset pisteet x_0 ja y_0 , että $S(x_0) = S(y_0)$ ja $x_0 \neq y_0$. Tarkastellaan kvadraattista kuvausta aluksi jakamalla se kolmeen alueeseen. Olkoot $J_1 = [0, 1/\mu[$, $J_2 =]1/\mu, 1 - 1/\mu[$ ja $J_3 =]1 - 1/\mu, 1]$. Kuvataan pisteet x_0 ja y_0 reittikuvauksella jonoavaruuteen Σ_3 . Tässä täytyy olettaa, että pisteet x_0 ja y_0 eivät ole tulevia kiintopisteitä $x = 1 - 1/\mu$. Olkoon matriisi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisisissa M alkio $m_{ij} = 0$, jos $f(J_i) \cap J_j = \emptyset$ ja jos $m_{ij} = 1$, niin $f(J_i) \cap J_j \neq \emptyset$.

Käydään aluksi läpi tilanne, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k , että $f_\mu^k(x_0)$ kuuluu eri välille J_i kuin $f_\mu^k(y_0)$. Hyödyntämällä tietoa, että pisteet x_0 ja y_0 ovat aina kuvattaessa kuvauksella f_μ^n samalla puolella derivaatan nollakohtaa kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n , voidaan tällöin matriisia M hyödyntäen päätellä, että tilanne päättyy siihen, että sekä pisteellä x_0 , että pisteellä y_0 on jonoavaruudessa Σ_2 äärettömän monta ykköstä peräkkäin. Seuraavaksi näytetään, ettei ole muita tällaisia pisteitä kiintopisteen $x = 1 - 1/\mu$ lisäksi. Lisäksi siinä tulee käytyä myös läpi tilanne, että toinen pisteistä on tuleva kiintopiste $x = 1 - 1/\mu$. Molemmat pisteet eivät voi olla yhtä aikaa tulevia kiintopisteitä $x = 1 - 1/\mu$, sillä väliarvolauseen perusteella olisi olemassa sellainen pienin kokonaisluku $p \geq 1$, että $f_\mu^p(x_0) = f_\mu^p(y_0)$ ja $f_\mu^{p-1}(x_0) \neq f_\mu^{p-1}(y_0)$. Tällöin $f_\mu^{p-1}(x_0)$ olisi eri puolella derivaatan nollakohtaa kuin $f_\mu^{p-1}(y_0)$.

$$\frac{|f_\mu(x) - f_\mu(1 - 1/\mu)|}{|x - (1 - 1/\mu)|} = \mu|x - 1/\mu|, \text{ kun } x \neq 1 - 1/\mu \quad \text{lauseke (1)}$$

Edellisestä oletuksilla $x > 1/2$, $f_\mu(x) > 1/2$ ja $x \neq 1 - 1/\mu$ sekä matriisia M soveltamalla nähdään, että kun $\mu \geq 4$, niin $|f_\mu^2(x) - (1 - 1/\mu)| > 2|x - (1 - 1/\mu)|$. Tästä voidaan jatkaa päättelyä sellaisissa tilanteissa, joissa on olemassa sellainen kokonaisluku $k \geq 0$, että pisteet $f_\mu^k(x_0)$ ja $f_\mu^k(y_0)$ kuuluvat eri väleille J_i tai toinen pisteistä on tuleva kiintopiste $1 - 1/\mu$. Hyödyntämällä matriisia M sekä väliarvolauseetta ja yhdistetyn kuvauksen derivointisääntöä, voidaan todeta, että on olemassa sellainen vakio $C > 0$ ja kokonaisluku $l > 0$, että

$$|f_\mu^l(x_0) - f_\mu^l(y_0)| = C|x_0 - y_0|$$

molemmissa tilanteissa. Lisäksi näissä tilanteissa ei kumpikaan pisteistä voi kuvautua toiselle puolelle derivaatan nollakohtaa, jos kokonaisluvun l paikalla on mikä tahansa kokonaislukua l suurempi kokonaisluku. Nyt voidaan näitä tietoja hyödyntämällä arvioida pisteiden x_0 ja y_0 välinen etäisyys suuremmaksi kuin yksi, mikä olisi ristiriita, jos johonkin jonoavaruuden pisteeseen

kuvautuisi ainakin kaksi pistettä.

Tässä ei ole kuitenkaan vielä koko todistus. Vielä on käymättä läpi tilanne, jossa pisteet x_0 ja y_0 ovat aina samassa välissä J_i matriisin M mukaan. Ensinnäkin on hyvä havaita, että piste $x = 0$ on selkeästi ainoa piste derivaatan nollakohdan vasemmalla puolella, joka jatkuvasti kuvattaessa kuvauksella f_μ pysyy derivaatan nollakohdan vasemmalla puolella. Näin ollen mielivaltaisesti valituissa pisteissä x_0 ja y_0 ainakin toinen näistä pisteistä saa jossakin vaiheessa jatkuvasti kuvattaessa kuvauksella f_μ arvon väliltä J_2 .

Seuraavaksi näytetään, että jos pisteet x_0 ja y_0 kuuluvat välille J_2 ja ovat samalla puolella derivaatan nollakohtaa, niin tällöin niiden välinen etäisyys kasvaa, kun ne palaavat takaisin välille J_2 . Oletetaan, että k on pienin sellainen kokonaisluku, että pisteet $f^k(x_0)$ ja $f^k(y_0)$ kuuluvat välille J_2 . Tarkastellaan lisäksi kuvausta f_μ^k . Ensinnäkin selvästi $f_\mu^k(1/2) \leq 1/2$. Koska $f_\mu(1/2) > f_\mu(x_0)$ ja on monotoninen näiden välillä, niin mielivaltaista pisteen x_0 ja pisteen $1/2$ välissä olevaa pistettä pitää vähintään k kertaa kuvata kuvauksella f_μ , jotta se olisi takaisin välillä J_2 . Näin ollen pisteiden x_0 ja $1/2$ sekä y_0 ja $1/2$ välissä ei voi olla derivaatan nollakohtia kuvauksella f_μ^k . Koska kuvauksella f_μ^k on äärellinen määrä derivaatan nollakohtia, niin valitaan vierekkäiset derivaatan nollakohdat, joiden välissä pisteet x_0 ja y_0 ovat. Olkoon piste p sellainen piste, että $f_\mu(p) = 1$ ja piste p on samalla puolella derivaatan nollakohtaa kuin pisteet x_0 ja y_0 . Lauseketta (1) soveltamalla nähdään, että jos $p \geq 1/2$, niin väli $[p, 1 - 1/\mu]$ on lyhyempi tai yhtä pitkä kuin väli $[1 - 1/\mu, 1]$. Vastaavasti myös väli $[1/\mu, p]$ on lyhyempi tai yhtä pitkä kuin väli $[0, 1/\mu]$, kun $p \leq 1/2$. Välien yhtäpitkyys on voimassa ainostaan silloin, kun parametri $\mu = 4$.

Oletetaan, että väli $[1/2, c]$ on kuvauksen f_μ^k vierekkäisten derivaatan nollakohtien väli, jonka sisäpisteisiin kuuluvat pisteet x_0 ja y_0 . Myös tilanteessa, kun pisteet x_0 ja y_0 ovat pienempiä kuin $1/2$, on mahdollista muodostaa tällainen väli vastaavalla periaatteella. Jos $c > 1 - 1/\mu$, niin kuin tapauksessa $k = 2$, niin tällöin voidaan kiintopisteestä $1 - 1/\mu$ todeta pisteen c sekä molempien pisteiden x_0 ja y_0 välissä kuvauksen f_μ^k derivaatan itseisar-

vo saa arvoksi lukua 1 suuremman arvon. Jos $c < 1 - 1/\mu$, niin tällöin $[0, 1] \subset f_\mu([1/2, c])$. Koska väli $[1 - 1/\mu, 1]$ on lyhyempi kuin $f_\mu^k([x_0, c])$ ja väli $[1 - 1/\mu, 1]$ on lyhyempi kuin väli $f_\mu^k([y_0, c])$, niin väliarvolauseen, kuvauksen f_μ^k monotonisuudesta välillä $[1/2, c]$ ja tiedosta $[0, 1] \subset f_\mu^k([1/2, c])$ seuraa, että välillä $]x_0, c[$ ja välillä $]y_0, c[$ kuvauksen f_μ^k derivaatta saa itseisarvoltaan lukua yksi suuremman arvon. Koska väli $]1/2, c[$ ei sisällä derivaatan nollakohtia, niin lemmän 1.36 perusteella pisteiden x_0 ja y_0 välisellä suljetulla välillä kuvauksen f_μ^k derivaatta ainoastaan saa itseisarvoltaan lukua yksi suurempia arvoja. Tästä voidaan päätellä myös, että pisteiden x_0 ja y_0 välissä kuvauksen f_μ^k derivaatta ei voi vaihtaa merkkiä. Lisäksi hyödyntämällä näitä eri välien pituuksia on mahdollisuus arvioida suhdetta

$$\frac{|f_\mu^k(x_0) - f_\mu^k(y_0)|}{|x_0 - y_0|} \geq \frac{|p - (1 - 1/\mu)|}{|p - (1 - 1/\mu) - |x_0 - y_0||} > 1.$$

Edellisistä asioista voidaan päätellä, että jos mielivaltaisesti valitut kaksi pistettä x_0 ja y_0 ovat aina samalla puolella pistettä $1/2$, niin niiden välistä etäisyyttä voidaan arvioida seuraavalla tavalla. Mielivaltaisia pisteitä x_0 ja y_0 kohti on olemassa sellaiset vakiot $C > 0$ ja $q > 1$ sekä mielivaltaista positiivista kokonaislukua n kohti on olemassa sellainen kokonaisluku k , että

$$|f_\mu^k(x_0) - f_\mu^k(y_0)| \geq Cq^n|x_0 - y_0|.$$

Näin ollen olettaen, että tilanteessa $S(x_0) = S(y_0)$ ja $x_0 \neq y_0$, havaitaan ristiriita. Näin ollen injektiivisyys on voimassa myös, kun $\mu > 4$. \square

Lemma 2.5 on pitkä. Kun se huomioidaan esimerkin 1.29 kuvauksen injektiivisyyden todistamisessa, tulee suorana seurauksena parametrin arvoilla $\mu > 4$, että kvadraattisen kuvauksen muodostama dynaaminen systeemi ja jonoavaruuden Σ_2 siirtokuvauksella σ varustettuna ovat topologisesti konjugaatteja keskenään. Esitetään tämä vielä lauseen muodossa.

Lause 2.6. *Olkoon kuvaukset S ja f_μ samoja kuin esimerkissä 1.29, mutta parametri $\mu > 4$. Olkoon Λ kuvauksen f_μ suhteen maksimaalinen invariantti joukko ja olkoon kuvaus σ siirtokuvaus. Tällöin kuvaukset $f_\mu: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ja $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ovat topologisesti konjugaatteja keskenään.*

Todistus. Yhdistämällä lemma 2.5 esimerkkiin 1.29 seuraa, että on olemassa homeomorfismi näiden kuvausten välillä. Lauseen 1.30 perusteella seuraa, että topologinen konjugaatio on voimassa. \square

Kun nyt tiedetään, että kvadraattinen kuvaus on topologisesti konjugaattijonoavaruuden Σ_2 kanssa siirtokuvauksella σ , niin tiedetään, että ne ovat käytännössä sama systeemi. Näin ollen kaikki, mikä on voimassa jonoavaruudelle Σ_2 varustettuna siirtokuvauksella σ , on myös voimassa kuvaukselle f_μ joukossa Λ .

Lause 2.7. *Kvadraattinen kuvaus f_μ on kaottinen parametrilla $\mu > 4$ joukossa Λ .*

Todistus. Lauseen 2.6 perusteella kvadraattiselle kuvaukselle on voimassa lauseen 1.53 tulos. \square

Tässä ei ole kuitenkaan vielä kaikki. Parametrin arvo $\mu = 4$ on käymättä vielä läpi. Monessa paikassa näkee, että tässä tilanteessa näytetään topologinen konjugaatio trigonometrisen kuvauksen tai ympyränkiertokuvauksen kanssa. Ne ovat ihan toimivia lähestymistapoja, mutta käytetään tässä hyödyksi aiemmin käytyjä tuloksia. Tällä parametrin arvolla tulee ongelmaksi, että kummalle puolelle laittaa derivaatan nolakohta. Se, miten tätä ongelmaa lähdetään ratkaisemaan on, että otetaan kummastakin joukosta, jonoavaruudesta Σ_2 ja väliltä $[0, 1]$, osajoukko ja näytetään niiden välille topologinen konjugaatio.

Lause 2.8. *Olkoon $\Gamma_2 \subset \Sigma_2$ sellainen joukko, että jos $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, niin $\mathbf{s} \in \Gamma_2$, jos ei ole olemassa sellaista kokonaislukua $i \geq 0$, että kaikilla kokonaisluvuilla $j \geq i$ on voimassa $s_j = 0$. Olkoon joukko Ω sellainen maksimaalinen joukon $]0, 1[$ osajoukko, joka on invariantti kvadraattisen kuvauksen $f_4(x) = 4x(1 - x)$ suhteen. Tällöin joukko Γ_2 siirtokuvauksella σ ja joukko Ω varustettuna kvadraattisella kuvauksella $f_4(x)$ ovat topologisesti konjugaatteja keskenään.*

Todistus. Ensinnäkin lemmän 2.5 todistusta voidaan hyödyntää myös tässäkin todistuksessa. Todistuksen rakenne on tehty sellaiseksi, että se on voimassa myös tässäkin tilanteessa, näin ollen kutakin joukon Ω pistettä kohti

on olemassa maksimissaan yksi joukon Γ_2 piste eli kuvaus $S: \Omega \rightarrow \Gamma_2$ on injektio. Selkeästi jokainen joukon Ω piste kuvautuu joukkoon Γ_2 , koska piste $x = 0$ ainoa piste, jossa on äärettömän monta nollaa peräkkäin jonoavaruudessa ja ainoa reitti päätyä tähän pisteeseen on pisteen $x = 1/2$ kautta.

Surjektion todistus menee vastaavalla periaatteella kuin esimerkissä 1.29, mutta tarkastellaan toisin. Tässä esimerkissä käsitellään avointa väliä $]0, 1[$, jonka derivaatan nollakohta jakaa kahteen avoimeen väliin $I_0 =]0, 1/2[$ ja $I_1 =]1/2, 1[$. Lisäksi koska kuvauksen f_4^n derivaatan nollakohtien arvot eivät voi saada arvoja väliltä $]0, 1[$, niin kuvaus f_4^n on monotoninen välillä $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n}$ tulon derivointisäännön perusteella. Näin ollen lemmän 1.11 tulos on tässäkin tilanteessa voimassa lukuunottamatta välin olemista suljettu. Koska näillä väleillä voi olla vain äärellinen määrä nollia peräkkäin joukossa Γ_2 , niin kuvauksen f_4 jatkuvuuden perusteella on olemassa näiden avoimien välien sisällä suljettu väli, johon joukon Γ_2 pisteen on kuuluttava.

Loppu homeomorfismin todistuksesta menee, kuten esimerkissä 1.29. Lisäksi, kun huomioidaan lause 1.30, niin on todistus valmis. \square

Edellinen lause ei ole suoraan hyödynnettävissä. Käsittely kuitenkin helpottuu huomattavasti, jos on voimassa, että joukko Ω on tiheässä välillä $]0, 1[$. Itse asiassa on hyvin suoraviivaisesti mahdollista näyttää, että joukko Ω tiheässä. Seuraavassa lauseessa on todistettu se.

Lause 2.9. *Joukon Ω sulkeuma on väli $[0, 1]$.*

Todistus. Olkoon piste p mielivaltainen välin $[0, 1]$ piste, jolle on voimassa $p \notin \Omega$. Olkoon \mathcal{U}_p mielivaltainen pisteen p avoin ympäristö. Näin ollen on olemassa sellainen kokonaisluku m , että $f_4^m(p) = 1/2$. Toisaalta on myös helppo havaita pisteet, jotka eivät pysy välillä $]0, 1[$. Ne ovat derivaatan nollakohtia jollakin positiivisella kokonaisluvulla k kuvaukselle f_4^k , joita on lemmän 1.34 perusteella äärellinen määrä. Toisaalta injektiiivisyyden perusteella pisteen p vierekkäisen välin pituus $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n}$ lähenee kohti nollaa, niin on olemassa sellainen kokonaisluvun n arvo, että pisteen p että välin yhdiste on mielivaltaisen avoimen ympäristön \mathcal{U}_p osajoukko. Toisaalta, koska mielival-

taisen välin $J_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n}$ peite kuvattaessa kuvauksella f_4^n on väli $]0, 1[$. Näin ollen tällaiselta väliltä on helppo löytää esimerkiksi tuleva kiintopiste $x = 3/4$. Näin ollen joukon Ω sulkeuma on väli $[0, 1]$. \square

Lause 2.9 nousee tärkeään rooliin, kun hyödynnetään aiempia tietoja todistettaessa, että kvadraattinen kuvaus f_4 käyttäytyy kaoottisesti.

Lause 2.10. *Kvadrattinen kuvaus f_4 käyttäytyy kaoottisesti.*

Todistus. Ensinnäkin lauseen 2.9 perusteella joukon Ω sulkeuma on väli $[0, 1]$. Näin ollen mielivaltaisen tämän välin pisteen avoimessa ympäristössä on olemassa joukon Ω pisteitä. Toisaalta joukko Γ_2 sisältää kaikki periodiset pisteet, lukuunottamatta kiintopiste nollaa. Lauseen 1.21 kohdan (2.) perusteella periodiset pisteet ovat tiheässä jonoavaruudessa Σ_2 . Näin ollen ne ovat myös tiheässä jonoavaruuden osajoukossa Γ_2 , joka sisältää yhtä periodista pistettä vaille kaikki periodiset pisteet. Hyödyntäen joukkojen Γ_2 ja Ω välisen homeomorfismin jatkuvuutta voidaan todeta, että mielivaltaista joukon Ω pistettä on mielivaltaisen lähellä periodinen piste. Näin ollen jokainen välin $[0, 1]$ avoin ympäristö sisältää periodisen pisteen, mistä seuraa, että periodiset pisteet ovat tiheässä.

Topologisen transitiivisuuden todistus menee vastaavasti kuin lauseessa 1.53, kun huomioidaan, että lauseen 1.21 kohdan (3.) todistus on voimassa myös joukossa Γ_2 .

Enää on jäljellä näyttää herkkä riippuvuus lähtöarvosta. Olkoon piste x mielivaltainen piste väliltä $[0, 1]$. Ensinnäkin Lauseen 1.53 todistuksen perusteella kvadraattisella kuvauksella on herkkä riippuvuus lähtöarvosta joukossa Ω , koska $\overline{\Gamma_2} = \Sigma_2$ ja Γ_2 ja Ω ovat topologisesti konjugaatteja keskenään. Olkoon reaalityö $\delta_0 > 0$ määritelmän 1.50 mukaisesti joukossa Ω . Koska välin $[0, 1]$ pisteen x mielivaltaisessa avoimessa ympäristössä \mathcal{U}_x on olemassa joukon Ω piste ω , niin tällöin on myös olemassa joukossa Ω avoin pisteen ω avoin ympäristö $\mathcal{V}_\omega \subset \mathcal{U}_x$. Näin ollen on myös olemassa sellainen piste $y \in \mathcal{U}_x$, että $|f_4^n(\omega) - f_4^n(y)| > \delta_0$ jollakin kokonaisluvulla $n \geq 0$. Tästä seuraa, että $|f_4^n(\omega) - f_4^n(x)| > \delta_0/3$ tai $|f_4^n(y) - f_4^n(x)| > \delta_0/3$. Näin ollen kvadraattisella

kuvauksella havaitaan herkkä riippuvuus lähtöarvosta, kun valitaan vakioksi $\delta = \delta_0/3$. Näistä kaikista kolmesta seikasta seuraa myös, että f_4 on kaottinen. \square

Kvadraattinen kuvaus f_μ käyttäytyy kaottisesti parametrien arvoilla $\mu \geq 4$. Nämä tilanteet todistettiin hyödyntäen jonoavaruutta Σ_2 sekä topologista konjugaatiota. Eräs mielenkiintoinen seikka on myös, että sen jälkeen, kun periodinen rata muuttuu hylkiväksi, niin lauseen 2.3 perusteella ei mikään periodinen piste voi vaihtaa puolta, koska niillä jatkuva riippuvuus ja lauseiden 2.2 ja 1.41 kohdan v) perusteella ei voi vaihtua hylkivä rata attraktiiviseksi.

2.4 Sovelluksia kvadraattiselle kuvaukselle

Kvadraattiselle kuvaukselle löytyy sovelluksia monesta eri tieteenalasta. Käydään tässä läpi kaksi erilaista sovellusta kvadraattiselle kuvaukselle. Ensimmäinen sovellusalue on satunnaislukugeneraattori. Toinen sovellusalue on populaation koon ennustaminen differenssiyhtälön avulla.

Pureudutaan aluksi satunnaislukugeneraattoriin. Tilastotiede tuo hyviä keinoja analysoida satunnaislukugeneraattorin satunnaisuutta, mutta johduen analyysin pituudesta, pureudutaan vain perusideaan. Lisää informaatiota löytyy lähteestä [5]. Lähteen satunnaislukugeneraattori on jonkin verran kehitelty versio kvadraattisesta kuvauksesta, jossa on kuitenkin tunnistettavissa helposti kvadraattisen kuvauksen rakenne. Periaatteessahan kvadraattinen kuvaus f_4 tuottaa mielivaltaista pistettä jatkuvasti kuvattaessa kvadraattisella kuvauksella f_4 tarkan arvon, joka on ennustettavissa. Kuvauksen kaottisuus tekee siitä kuitenkin ennalta-arvaamattoman tietokoneelle. Tietokone laskee likiarvoilla ja herkkä riippuvuus lähtöarvosta takaa sen, että pienikin virhe oikeasta tuloksesta kasvaa huomattavan suureksi. Näin ollen, jotakin välin pistettä jatkuvasti kuvattaessa kvadraattisella kuvauksella, lähestyy se tietokoneella satunnaisesti valittua lukua. On kuitenkin hyvä huomata, että tällaisella menetelmällä jakauma ei ole tasainen. Sopivasti painottaen menetelmällä on lähes tasainen jakauma.

Toinen tilanne mihin kvadraattista kuvausta voidaan soveltaa, on populaation koon mallintaminen differenssiyhtälön avulla. Tämä idea esimerkiksi on poimittu Devaney'n teoksesta [1] sivulta 6. Kvadraattinen kuvaus on mahdollista nähdä kehittyneempänä mallina eksponentiaalisesta muutoksesta. Esimerkkinä tällaisista ovat kaikki bakteeripopulaation määrän kasvut sekä puoliintumisajat. Tässä eksponentiaalisen muutoksen kehittyneemmässä mallissa pystytään ennustamaan seuraavan tarkasteltavan hetken populaatio tämän hetkisen populaation perusteella kvadraattisen kuvauksen f_μ avulla. Tällöin seuraava populaation määrä on $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$. Vaikka tällainen muoto näyttää ihan erilaiselta kuin eksponentiaalinen kasvu, niin arviolta $0 < x \ll 1$ kvadraattisen kuvauksen muodostama malli on likipitään eksponentiaalinen. Tällöin

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \approx \mu x_n.$$

On myös hyvä pohtia, että miksi tämä on parempi malli kuin perus eksponentiaalinen malli. Eksponentiaalinen malli joko pienenee tai kasvaa rajatta, jos jätetään erikoistapaus vakiona pysyminen pois. Monissa luonnonilmiöissä loputon kasvaminen ei ole mahdollista, vaan ympäristön rajat tulevat vastaan. Kvadraattisen kuvauksen muodostama systeemi pystyy huomioimaan paremmin maailman asettamia rajoja. On kuitenkin syytä muistaa, että kvadraattisen kuvauksenkin muodostama malli on moniin tilanteisiin liian rajallinen.

Lähdeluettelo

- [1] Robert L. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*. Addison-Wesley, United States of America, 1993.
- [2] Boris Hasselblatt and Anatole Katok: *A First Course in Dynamics With A Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, United States of America, 2003.
- [3] Ittai Kan, Huseyin Kocak and James A. Yorke: *Annals of Mathematics Second Series, Vol. 136, No. 2* (Sep., 1992), pp. 219-252
- [4] Jacek Graczyk and Grzegorz Swiatek: *Annals of Mathematics Second Series, Vol. 146, No. 1* (Jul., 1997), pp. 1-52
- [5] Patidar, V., Sud, K., Pareek, N.: A pseudo random bit generator based on chaotic logistic map and its statistical testing. *Informatica (Slovenia)* 33(4), 441–452 (2009)