Ortogonaaliryhmät

LuK-tutkielma
Anita Väärä
2469814
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2017

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsittellään isometrioita ja niiden muodostamia joukkoja, joihin ortogonaaliryhmä kuuluu. Alussa käydään läpi muutamia määritelmiä ja tuloksia vektoreista, matriiseista, ryhmistä ja kuvauksista, jotka ovat oleellisia isometrioiden ja ortogonaaliryhmien kannalta. Tutkielmassa käydään myös läpi käsitteet ortogonaalisuus ja lineaarisuus. Päälähteenä käytetään Joseph J. Rotmanin *An Introduction to the Theory of Groups* -kirjaa [1]

1 Tarpeellisia määritelmiä ja tuloksia

1.1 Vektoreista

Määritelmä 1.1. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_i, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Näiden vektorien *sisätulo* $(x \mid y)$ määritellään $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Määritelmä 1.2. Joukko $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ on *ortogonaalinen*, jos sen vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli $(u_i \mid u_j) = 0$, kun $i \neq j$. Jos lisäksi $(u_i \mid u_i) = 1$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, niin kyseinen joukko on *ortonormaali*. Tässä tapauksessa $\{u_1, \ldots, u_n\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *ortonormaali kanta*.

Esimerkki 1.3. Jos $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$ on vektori, jonka i:s koordinaatti on 1 ja muut koordinaatit ovat nollia, niin $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ on ortonormaali kanta.

Lemma 1.4. *Jos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ on ortonormaali kanta ja $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, niin $(x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.*

Todistus. Olkoon $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$. Nyt

$$(x \mid x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i (u_i \mid u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

□

Määritelmä 1.5. Jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, niin määritellään *normi*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x \mid x)}.$$

Vektorien x ja y välinen *etäisyys* on

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x - y \mid x - y)}.$$

Esimerkki 1.6. Kahden vektorin $x = (1, -2, 2, 3, 1)$ ja $y = (-1, 1, 2, -3, 1)$ välinen etäisyys on

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - (-3))^2 + (1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

1.2 Kuvauksista

Määritelmä 1.7. Kahden funktion $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ *yhdistetty funktio* on $f \circ g : A \to C$, jolle $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ kaikille $x \in A$.

Määritelmä 1.8. Funktio $f : A \to B$ on *bijektio*, jos kuvaus f on injektio ja surjektio.

i) Funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos se kuvaa kaikki alkiot eri alkioiksi, eli jos $f(x_1) = f(x_2)$, niin $x_1 = x_2$.

ii) Funktio $f : A \to B$ on *surjektio*, jos funktion kuvajoukko on koko sen maalijoukko, eli kaikille $y \in B$ löytyy sellainen lähtöjoukon alkio $x \in A$, että $f(x) = y$.

Määritelmä 1.9. Olkoot A ja B lineaariavaruuksia kunnan $\mathbb{R}$ yli. Kuvaus $f : A \to B$ on *lineaarinen*, jos

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

aina kun $x, y \in A$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lause 1.10. *Jos kuvaus $f : A \to B$ on bijektio, niin sille on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : B \to A$, jolle $f^{-1}(b) = a$, kun $f(a) = b$.*

Esimerkki 1.11. Kuvauksen $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$ käänteiskuvaus on $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Määritelmä 1.12. Jos V on m-dimensioinen vektoriavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli, niin *hypertaso* H on sen $(m-1)$-dimensioinen aliavaruus.

Määritelmä 1.13. Kuvauksen $f : V \to W$, missä V ja W ovat vektoriavaruuksia, *kernel* on

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

ja *kuva* on

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid w = f(v), \text{ jollakin } v \in V\}.$$

1.3 Ryhmistä

Määritelmä 1.14. Joukko G on epätyhjä ja $(*)$ on operaatio, joka kuvaa alkiot $a, b \in G$ alkioksi $a * b \in G$. Pari $(G, *)$ on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot toteutuvat

i) Operaatio $(*)$ on *assosiatiivinen*, eli $(a*b)*c = a*(b*c)$, kun $a, b, c \in G$.

ii) Joukossa G on sellainen yksikäsitteinen alkio e, että $e * a = a * e = a$, kun $a \in G$. Alkiota e kutsutaan *neutraalialkioksi*.

iii) Kaikille $a \in G$ löytyy sellainen yksikäsitteinen alkio $a^{-1} \in G$, että $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Tätä alkiota a^{-1} sanotaan alkion a *käänteisalkioksi*.

Määritelmä 1.15. Ryhmän $(G, *)$ epätyhjä osajoukko $H \subset G$ on G:n *aliryhmä*, jos H on ryhmä operaation $(*)$ suhteen. Merkitään $(H, *) \leq (G, *)$.

Huomautus 1.16. Joukko $H \subset G$ on G:n aliryhmä, jos $a * b^{-1} \in H$ aina, kun $a, b \in H$.

Määritelmä 1.17. *Yleinen lineaariryhmä* $GL(n, \mathbb{R})$ on ryhmä, jonka operaatio on matriisien kertolasku. Ryhmään kuuluvat kaikki $n \times n$ matriisit, joiden determinantti ei ole nolla; eli matriisit, jotka ovat kääntyviä.

Määritelmä 1.18. Ryhmät $(V, \circ)$ ja $(W, *)$ ovat *isomorfiset* eli rakenneyhtäläiset, jos on olemassa sellainen bijektiivinen kuvaus $f : V \to W$, jolle pätee $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$, kaikilla $x, y \in V$.

1.4 Matriiseista

Määritelmä 1.19. Olkoon $A \in M(n, k)$. Matriisin A *transpoosi* on $A^T \in M(k, n)$, missä $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja $j = 1, \ldots, k$.

Esimerkki 1.20. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 3 & 19 & -1 \\ 0 & 6 & -8 & 0 & 16 \\ 12 & 0 & 0 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 12 \\ 8 & 6 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 19 & 0 & 7 \\ -1 & 16 & -9 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 1.21. *Diagonaalimatriisi* on matriisi $\begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix}_{i,j=0}^{n}$, missä $a_{ij} = 0$, kun $i \neq j$. Matriisi, jossa $a_{ij} = 1$, kun $i = j$, eli

$$I = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on *yksikkömatriisi*, eli *identiteettimatriisi.*

Määritelmä 1.22. Määritellään neliömatriisin determinantti induktiivisesti.

1) Kun $A \in M(1,1)$, niin sen determinantti $\det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a$.

2) Kun $A \in M(n,n)$, niin $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(1+j)} a_{1j} \det A^{1j}$, missä $A^{1j} \in M(n-1, n-1)$ on matriisin $A \in M(n,n)$ alimatriisi.

Esimerkki 1.23. Neliömatriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)) - 1 \cdot 2 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) \\ &= -3. \end{aligned}$$

2 Isometria

Määritelmä 2.1. Kuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on *isometria*, jos $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Toisin sanoen isometria on kuvaus, joka säilyttää pisteiden välisen etäisyyden.

Esimerkki 2.2. Jos nyt $w \in \mathbb{R}^n$ ja $T_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_w(x) = x + w$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, niin $\|T_w(x) - T_w(y)\| = \|(x + w) - (y + w)\| = \|x - y\|$ ja T_w on isometria. Tätä isometriaa kutsutaan siirroksi w:llä. Huomataan kuitenkin, että $T_w(0) = 0 + w = w \neq 0$, joten T_w ei ole lineaarikuvaus, kun $w \neq 0$.

Määritelmä 2.3. Lineaarikuvaus $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *ortogonaalinen*, jos $\|S(x)\| = \|x\|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Kutsutaan ortogonaalista lineaarikuvausta *ortogonaalikuvaukseksi.*

Lemma 2.4. *i) Lineaarikuvaus $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on ortogonaalinen jos ja vain jos $\{S(\varepsilon_1), \ldots, S(\varepsilon_n)\}$ on ortonormaali kanta, aina kun $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ on kanta.*
ii)Jokainen ortogonaalikuvaus S on isometria.

Todistus. " $\Rightarrow$ " Oletetaan, että S on ortogonaalinen. Jos $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $x = \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i\varepsilon_i$, niin

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2}^{\,2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}^{\,2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}^{\,2} \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + \sum_{i=1}^n 2x_iy_i + \sum_{i=1}^n (y_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n 2x_iy_i = 2\sum_{i=1}^n x_iy_i = 2(x \mid y).
\end{aligned}$$

Jos nyt sijoitetaan $x = S(x)$ ja $y = S(y)$, niin

$$\|S(x) + S(y)\|^2 - \|S(x)\|^2 - \|S(y)\|^2 = 2(S(x) \mid S(y)).$$

Koska S on ortogonaalinen, niin

$$\|x+y\|^2 = \|S(x+y)\|^2 = \|S(x) + S(y)\|^2,$$

$\|S(x)\|^2 = \|x\|^2$ ja $\|S(y)\|^2 = \|y\|^2$. Saadaan siis $(S(x) \mid S(y)) = (x \mid y)$. Erityisesti $\delta_{ij} = (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = (S(\varepsilon_i) \mid S(\varepsilon_j))$, joten $\{S(\varepsilon_1), \ldots, S(\varepsilon_n)\}$ on ortonormaali kanta.
" $\Leftarrow$ " Oletetaan, että $\{S(\varepsilon_1) \ldots, S(\varepsilon_n)\}$ on ortonormaali kanta. Nyt $x = \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$, joten $S(x) = \sum_{i=1}^n x_iS(\varepsilon_i)$, joten

$$\begin{aligned}
\|S(x)\|^2 = (S(x) \mid S(x)) = (\sum_{i=1}^n x_iS(\varepsilon_i) \mid \sum_{i=1}^n x_iS(\varepsilon_i)) = \sum_{i=1}^n x_ix_i(S(\varepsilon_i) \mid S(\varepsilon_i)) \\
= \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2,
\end{aligned}$$

joten S on ortogonaalinen.
ii)Oletetaan, että S on ortogonaalikuvaus. Jos $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\|S(x) - S(y)\|^2 = \|S(x - y)\|^2 = \|x - y\|^2.$$

Näin ollen S on isometria. $\square$

Lemma 2.5. *i) Kaikki ortogonaalikuvauset ovat bijektioita.*
ii) Jos S on ortogonaalikuvaus, niin myös käänteiskuvaus S^{-1} on ortogonaalikuvaus.

Todistus. *i)* Oletetaan, että kuvaus S on ortogonaalinen. Kun $x \neq y$, niin

$$0 \neq \|x - y\| = \|S(x - y)\| = \|S(x) - S(y)\|,$$

joten $S(x) \neq S(y)$. Eli S on injektio. Nyt koska S on injektio, niin $\ker S = \{0\}$, joten $\operatorname{im} S \cong \mathbb{R}^n / \ker S = \mathbb{R}^n/\{0\} = \mathbb{R}^n$. Näin ollen S on surjektio. Koska S on injektio ja surjektio, niin se on myös bijektio.
ii) S on ortogonaalikuvaus, eli $\|S(x)\| = \|x\|$, joten se on bijektio ja sillä on käänteiskuvaus S^{-1}. Oletetaan, että $S(x) = y$ ja $S^{-1}(y) = x$. Nyt kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|y\| = \|S(x)\| = \|x\| = \|S^{-1}(y)\|$$

eli $\|S^{-1}(y)\| = \|y\|$. Näin ollen S^{-1} on ortogonaalikuvaus. $\square$

Lemma 2.6. *Jokainen isometria $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiinnittää origon, eli $S(0) = 0$, on lineaarikvaus, joten se on ortogonaalikuvaus.*

Todistus. Oletetaan, että $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria, jolle $S(0) = 0$. Kun $y = 0$, niin

$$\|S(x) - S(y)\| = \|S(x) - S(0)\| = \|x - 0\|$$

eli $\|S(x)\| = \|x\|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\|x-y\|^2 = (x-y \mid x-y) = (x \mid x) - 2(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$$

ja

$$\begin{aligned}\|S(x) - S(y)\|^2 &= (S(x) - S(y) \mid S(x) - S(y)) \\ &= \|S(x)\|^2 - 2(S(x) \mid S(y)) + \|S(y)\|^2.\end{aligned}$$

Joten saadaan

$$\|S(x)\|^2 - 2(S(x) \mid S(y)) + \|S(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Eli $(S(x) \mid S(y)) = (x \mid y)$. Nyt $S(\varepsilon_i) = u_i$ on ortonormaali kanta, joten

$$(S(x) \mid u_i) = (x \mid \varepsilon_i) = x_i$$

ja

$$(S(y) \mid u_i) = (y \mid \varepsilon_i) = y_i.$$

Nyt myös $(S(x+y) \mid u_i) = (x+y \mid \varepsilon_i) = x_i+y_i$, joten $S(x+y) = S(x)+S(y)$. Kerrotaan nyt vektoria x skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Aikaisemman perusteella

$$(S(\alpha x) \mid u_i) = (\alpha x \mid \varepsilon_i) = \alpha x_i$$

ja

$$(\alpha S(x) \mid u_i) = (\alpha x \mid \varepsilon_i) = \alpha x_i.$$

Nyt siis $S(\alpha x) = \alpha S(x)$. Kuvaus S toteuttaa siis lineaarikuvauksen ehdot, joten se on lineaarikuvaus.

Nyt koska S on lineaarinen ja $\|S(x)\| = \|x\|$, niin Määritelmän 2.3 perusteella S on ortogonaalinen. □

3 Ortogonaaliryhmä

Lause 3.1. *Kaikkien isometrioiden muodostama joukko $E(n, \mathbb{R})$ on ryhmä.*

Todistus. Todistetaan, että isometrioiden joukko täyttää ryhmäkriteerit yhdistetyn kuvauksen suhteen

1) Oletetaan, että $T_1, T_2 \in E(n, \mathbb{R})$ ovat isometrioita. Nyt $(T_1 \circ T_2)(x) = T_1(T_2(x))$. Koska

$$\|T_1(T_2(x)) - T_1(T_2(y))\| = \|T_2(x) - T_2(y)\| = \|x - y\|.$$

Näin ollen $T_1 \circ T_2(x) \in E(n, \mathbb{R})$, eli operaatio $\circ$ on binäärinen.

2) Oletetaan, että $T_1, T_2, T_3 \in E(n, \mathbb{R})$. Nyt

$$\begin{aligned}((T_1 \circ T_2) \circ T_3)(x) &= (T_1 \circ T_2)(T_3(x)) = T_1(T_2(T_3(x))) = (T_1 \circ T_2)(T_3(x)) \\ &= (T_1 \circ (T_2 \circ T_3))(x),\end{aligned}$$

joten operaatio $\circ$ on assosiatiivinen.

3) Olkoon $I(x) = x$ identiteettikuvaus. Koska $I(0) = 0$ ja $\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$, niin $I(x) \in E(n, \mathbb{R})$. Nyt siis

$$(T_1 \circ I)(x) = T_1(I(x)) = T_1(x) = I(T_1(x)) = (I \circ T_1)(x),$$

joten identiteettikuvaus on joukon $E(n, \mathbb{R})$ neutraalialkio.

4) Isometrian T käänteiskuvaus T^{-1} on isometria. Oletetaan, että $T(x) = a$, $T(y) = b$, $T^{-1}(a) = x$ ja $T^{-1}(b) = y$. Nyt

$$\|T(x) - T(y)\| = \|a - b\| = \|x - y\| = \|T^{-1}(a) - T^{-1}(b)\|,$$

joten $\|T^{-1}(a) - T^{-1}(b)\| = \|a - b\|$ ja näin ollen isometrian käänteisfunktio on isometria, eli $T^{-1} \in E(n, \mathbb{R})$.

Kohtien $1) - 4)$ perusteella isometrioiden joukko varustettuna kuvausten yhdistämisoperaatiolla, $(E(n, \mathbb{R}), \circ)$, on ryhmä. □

Lause 3.2. *Kaikkien isometrioiden $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jotka kiinnittävät origon, joukko $O(n, \mathbb{R})$ on yleisen lineaarisen ryhmän, $GL(n, \mathbb{R})$, aliryhmä. Ryhmää kutsutaan ortogonaaliryhmäksi.*

Todistus. Joukko $O(n, \mathbb{R})$ on epätyhjä, koska identiteettikuvaus $I(x) = x$ on isometria, joka kiinnittää origon, joten $I(x) \in O(n, \mathbb{R})$.

Isometriat, jotka kiinnittävät origon, ovat Lemman 2.5 perusteella bijektioita ja näin ollen kuvaukset ovat kääntyviä. Tästä seuraa, että $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Riittää siis todistaa, että operaatio $\circ$ on binäärinen joukossa $O(n, \mathbb{R})$ ja että isometrian T käänteiskuvaus $T^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

1) Oletetaan, että $S_1, S_2 \in O(n, \mathbb{R})$. Nyt $(S_1 \circ S_2)(0) = S_1(S_2(0)) = S_1(0) = 0$, eli kahden isometrian, joka kiinnittää origon, yhdiste kiinnittää origon. Koska S_1 ja S_2 ovat isometrioita, niin

$$\|S_1(S_2(x)) - S_1(S_2(y))\| = \|S_2(x) - S_2(y)\| = \|x - y\|.$$

Eli myös kahden isometrian yhdiste on isometria, $S_1 \circ S_2 \in O(n, \mathbb{R})$, joten operaatio $\circ$ on binäärinen joukossa $O(n, \mathbb{R})$.

2) Oletetaan, että $S(x) = a$, $S(y) = b$, $S^{-1}(a) = x$ ja $S^{-1}(b) = y$, missä S^{-1} on kuvauksen S käänteiskuvaus. Koska $S(0) = 0$, niin $S^{-1}(0) = 0$. Nyt

$$\|S(x) - S(y)\| = \|a - b\| = \|x - y\| = \|S^{-1}(a) - S^{-1}(b)\|,$$

eli $\|a - b\| = \|S^{-1}(a) - S^{-1}(b)\|$, joten $S^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

Kohtien 1)−2) perusteella joukko $O(n, \mathbb{R})$ on ryhmän $GL(n, \mathbb{R})$ aliryhmä. □

Lause 3.3. *Jokainen isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on siirron ja ortogonaalikuvauksen yhdiste.*

Todistus. Olkoon T isometria, jolle $T(0) = w$ ja olkoon S on siirto $-w$:llä, eli $S(x) = x - w$ kaikilla x. Nyt $S \circ T$ on isometria, joka kiinnittää origon, koska $S(T(0)) = S(w) = w - w = 0$, joten Lemman 2.5 mukaan se on ortogonaalinen. Näin ollen $T = (S^{-1} \circ S) \circ T = S^{-1} \circ (S \circ T)$. Isometria T on siis siirron ja ortogonaalikuvauksen yhdiste. □

Lause 3.4. *Funktio $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka kiinnittää origon on isometria jos ja vain jos se säilyttää sisätulon, eli $(T(x) \mid T(y)) = (x \mid y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus. " $\Rightarrow$ " Oletetaan, että T on isometria, joka kiinnittää origon. Jos $x, y \in \mathbb{R}^n$, niin kuten Lemmassa 2.6

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Nyt myös

$$\|T(x) + T(y)\|^2 = \|T(x)\|^2 + 2(T(x) \mid T(y)) + \|T(y)\|^2.$$

Oletuksen mukaan $\|x + y\|^2 = \|T(x) + T(y)\|^2$. Ja koska $T(0) = 0$, niin

$$\|x\|^2 = \|x - 0\|^2 = \|T(x) - T(0)\|^2 = \|T(x)\|^2$$

ja

$$\|y\|^2 = \|y - 0\|^2 = \|T(y) - T(0)\|^2 = \|T(y)\|^2,$$

joten myös $2(x \mid y) = 2(T(x) \mid T(y))$, josta $(x \mid y) = (T(x) \mid T(y))$, eli T säilyttää sisätulon.
" $\Leftarrow$ " Oletetaan, että T säilyttää sisätulon, eli $(T(x) \mid T(y)) = (x \mid y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\|x - y\|^2 = (x - y \mid x - y)$$

ja oletuksen mukaan

$$(x - y \mid x - y) = (T(x) - T(y) \mid T(x) - T(y)) = \|T(x) - T(y)\|^2.$$

Joten

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja näin ollen T on isometria. □

Lauseen geometrinen tulkinta on, että isometriat, jotka kiinnittävät origon, säilyttävät myös kulmat, sillä $(x \mid y) = \|x\|\|y\| \cos\theta$, missä θ on x:n ja y:n välinen kulma.

Määritelmä 3.5. Matriisi $A \in GL(n, \mathbb{R})$ on ortogonaalinen, jos $AA^T = I$, missä A^T on matriisin A transpoosi ja I on identiteettimatriisi.

Olkoon a_i matriisin A rivi i. Koska $\delta_{ij} = (AA^T)_{ij} = (a_i \mid a_j)$, niin $\{a_1, \dots, a_n\}$ on ortonormaali kanta avaruudessa $\mathbb{R}^n$.
Jos T on ortogonaalikuvaus, jossa $T(\varepsilon_i) = a_i$ kaikilla i, niin T:n matriisiesitys on $A = \left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^n$ ja A on ortogonaalimatriisi. Tästä seuraa, että $O(n, \mathbb{R})$ on isomorfinen $n \times n$ ortogonaalimatriisien ryhmän, matriisin kertolaskun suhteen, kanssa.

Koska $\det A^T = \det A$, niin jos A on ortogonaalinen, $(\det A)^2 = 1$ ja näin ollen $\det A = \pm 1$.

Määritelmä 3.6. Origon kiinnittävää isometriaa T kutsutaan *kierroksi*, jos $\det T = 1$. Ortogonaaliryhmän $O(n, \mathbb{R})$ aliryhmä $SO(n, \mathbb{R})$ on kaikkien kiertojen ryhmä, jota kutsutaan kiertoryhmäksi. Isometriaa, joka kiinnittää origon kutsutaan *suunnankääntäjäksi*, jos $\det T = -1$.

Esimerkki 3.7. Jos W on jokin $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus ja

$$W^\perp = \{v \in V : (v \mid w) = 0\}$$

kaikille $w \in W$, niin $\dim W^\perp = n - \dim W$. Hypertaso $H \subset \mathbb{R}^n$ on $n-1$-ulotteisen aliavaruuden W siirto. Eli $H = W - v_0$, jollain vektorilla v_0. Jos H on hypertaso origon läpi, eli $H = W$, joka on $n-1$-ulotteinen aliavaruus, niin $\dim H^\perp = 1$ ja on olemassa sellainen nollasta poikkeava vektori a, että $H = \{a\}^\perp = (\mathbb{R}a)^\perp$. Siis $h \in H$ jos ja vain jos $(a \mid h) = 0$.

Esimerkki 3.8. Jos ℓ on suora tasossa, niin *peilaus* suoran ℓ suhteen on isometria $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiinnittää jokaisen ℓ:n pisteen ja joka vaihtaa kaikki pisteet x ja x', jotka ovat yhtä kaukana suorasta ℓ, mutta vastakkaisiin suuntiiin. Suora ℓ siis käyttäytyy kuin peili. Määritellään peilaus hypertason H suhteen isometriaksi, joka kiinnittää jokaisen hypertason H pisteen ja vaihtaa pisteet, jotka ovat yhtä kaukana H:sta vastakkaisiin sunttin. Jos ρ on lineaarikuvaus, niin H:n täytyy olla hypertaso, joka kulkee origon kautta.

Lause 3.9. *Jokainen peilaus ρ, hypertason H suhteen, joka kulkee origon kautta, on suunnankääntäjä.*

Todistus. Valitaan yksikkövektori $a \in \mathbb{R}^n$, jolle $(h \mid a) = 0$ kaikilla $h \in H$. Määritellään $\rho' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\rho'(x) = x - 2 \cdot (x \mid a) \cdot a$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Jos $x \in H$, niin $(x \mid a) = 0$ ja

$$\rho'(x) = x - 2 \cdot 0 \cdot a = x,$$

eli ρ' kiinnittää vektorin x. Jos nyt $x \notin H$, niin $x = h + ra$, missä $h \in H$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}(x \mid a) &= (h + ra \mid a) = (h_1 + ra_1)a_1 + \cdots + (h_n + ra_n)a_n \\ &= (h_1a_1 + ra_1a_1) + \cdots + (h_na_n + ra_na_n) \\ &= (h \mid a) + r(a \mid a) = r,\end{aligned}$$

koska $(a \mid a) = 1$ ja $(h \mid a) = 0$. Tästä saadaan

$$\rho'(h + ra) = x - 2(x \mid a)a = h + ra - 2ra = h - ra,$$

joten ρ' vaihtaa vektorit yhtä kauaksi hypertasosta H ja kiinnittää sen pisteittäin. Nyt siis $\rho' = \rho$ eli ρ' on peilaus. Jos H:n kanta on $\{h_1, \ldots, h_{n-1}\}$, niin $\{h_1, \ldots, h_{n-1}, a\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Peilauksen ρ matriisi kannan $\{h_1, \ldots, h_{n-1}\}$ suhteen on diagonaalinen, jolla on diagonaaliset alkiot $1, 1, \ldots, 1, -1$ ja näin ollen $\det \rho = -1$ ja siten ρ on suunnankääntäjä. □

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan tapausta, jossa $n = 2$. Identifioidaan $\mathbb{R}^2$ kompleksiluvuilla $\mathbb{C}$. Nyt ortonormaalin kannan yksikkövektoreilla u_1 ja u_2 on kompleksiesitys $u_1 = e^{i\theta}$ ja $u_2 = e^{i\varphi}$, missä $\varphi = \theta \pm \pi/2$. Tästä seuraa, että jos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ on ortogonaalimatriisi, niin sen sarakkeet ovat $A(\varepsilon_1)$:n ja $A(\varepsilon_2)$:n reaali- ja imaginääriosat. Nyt joko

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin\theta & \sin(\theta + \pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ja $\det A = \cos\theta \cdot \cos\theta - (-\sin\theta) \cdot \sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, eli A on kierto origon ympäri kulmalla θ, tai

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \pi/2) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

ja nyt $\det A = \cos\theta \cdot (-\cos\theta) - \sin\theta \cdot \sin\theta = -(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -1$ eli A on peilaus suoran ℓ suhteen, jonka kulmakerroin on $\tan\theta$.

Esimerkki 3.11. Valitaan $\theta = 45°$. Nyt matriisi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ja kuvaus $f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ on kierto origon suhteen kulmalla 45°. Otetaan esimerkiksi piste $(1, 1)$, joka kuvautuu

$$f(1, 1) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

eli pisteeksi $(0, \sqrt{2})$.

Esimerkki 3.12. Kuvaus

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

on isometria $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joka on peilaus x-akselin suhteen. Eli B kuvaa pisteen (x, y) yhtä kauaksi x-akselista, mutta sen toiselle puolelle.

Esimerkki 3.13. Kuvaus

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

on isometria, joka kuvaa x:n y:ksi ja y:n x:ksi. Eli S on peilaus suoran $f(x) = x$ suhteen.

Viitteet

[1] Joseph J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Tapani Matala-aho, *Lineaarialgebra*, luentomoniste, Oulun yliopisto, 2017.